Aufgabe 3: Wie oft müssen wir eine faire Münze werfen, damit mit Wahrscheinlichkeit $0,95$ die relative Häufigkeit der Würfe mit Kopf zwischen $0,49$ und $0,51$ liegt.

Lösung: Die Zufallsvariable X_N gebe die Zahl der Würfe mit Kopf bei insgesamt N Würfen an. X_N ist $\mathcal{B}_{N,p}$-verteilt mit $p = 1/2$. Es ist

$$E(X_N) = Np = 0,5N, \qquad \mathrm{Var}(X_N) = Np(1-p) = 0,25N.$$

Die zentrierte, normalisierte Variable ist

$$X_N^* := \frac{X_N - E(X_N)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_N)}} = \frac{X_N - 0,5N}{\sqrt{0,25N}}.$$

Die relative Häufigkeit ist

$$S_N := \frac{1}{N} X_N, \quad \text{also} \quad X_N = NS_N.$$

Gesucht ist also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned}
0,95 \approx P\{0,49 \leq S_N \leq 0,51\} &= P\{0,49N \leq X_N \leq 0,51N\} \\
&= P\left\{\frac{0,49N - E(X_N)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_N)}} \leq X_N^* \leq \frac{0,49N - E(X_N)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_N)}}\right\} \\
&= P\{0,02\sqrt{N} \leq X_N^* \leq 0,02\sqrt{N}\} \\
&\approx \mathcal{N}_{0,1}([-0,02\sqrt{N}, 0,02\sqrt{N}]) \\
&= 2\Phi(0,02\sqrt{N}) - 1.
\end{aligned}$$

Aus $\Phi(0,02\sqrt{N}) \approx 0,975$ folgt

$$0,02\sqrt{N} = 0,196$$

und somit

$$N \approx 9604.$$

Aufgabe 4: Aus einer Urne, in der sich 19 weiße und eine schwarze Kugel befinden, wird hundertmal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens viermal die schwarze Kugel gezogen wird? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten jeweils

1. exakt,
2. näherungsweise mit Hilfe des Poissonschen Grenzwertsatzes und
3. näherungsweise unter Zuhilfenahme des Zentralen Grenzwertsatzes mit Stetigkeitskorrektur.

Bestimmen Sie auch die relativen Approximationsfehler und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, ist $p = 1/20$. Die Anzahl, der bei 100 Ziehungen erhaltenen schwarzen Kugeln ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$, $p = 1/20$. Zu berechnen ist

$$\mathcal{B}_{100,\,p}\{0,1,2,3,4\} = \sum_{k=0}^{4} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}$$

1. Mit Maple erhält man

   ```
   N:=100; p:= 0.05; add(binomial(N,k)*p^k*(1-p)^(N-k),k=0..4);
   ```

   $$N := 100$$
   $$p := .05$$
   $$0.4360$$

2. Der Erwartungswert ist
   $$\lambda = 100p = 5.$$
   Man approximiere
   $$\mathcal{B}_{100,\,p}\{0,1,2,3,4\} \approx \mathcal{P}_\lambda\{0,1,2,3,4\} = \sum_{k=0}^{4} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
   Mit Maple erhält man

   ```
   lambda:= 5.0; exp(-\lambda)*add(\lambda^k/(k!), k=0..4);
   ```

   $$\lambda := 5.0$$
   $$0.4405$$

   Der relative Fehler ist $\frac{0{,}4405-0{,}4360}{0{,}4360} \approx 0,010 = 1\%$.

3. Es sei X_n die Anzahl der Schwarzen Kugeln bei $n = 100$ Ziehungen. Es ist
   $$\begin{aligned}\mu_n &:= E(X_n) = np = 100 \cdot 0,05 = 5,\\ \sigma_n &:= \sqrt{\operatorname{Var}(X_n)} = \sqrt{100 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = 2,18.\end{aligned}$$
   und $X_n^* := \frac{X_n - \mu_n}{\sqrt{\sigma_n}}$.

   Der Zentrale Grenzwertsatz mit Stetigkeitskorrektur und die Tabelle der Fehlerfunktion (Krengel, S. 248) ergibt
   $$\begin{aligned}\mathcal{B}_{100,\,p}\{0 \le X_n \le 4\} &= \mathcal{B}_{0,1}\Big\{\frac{0-\mu_n}{\sigma_n} \le X_n^* \le \frac{4-\mu_n}{\sigma_n}\Big\}\\ &\approx \mathcal{N}_{0,1}\Big(\Big[\frac{-0,5-\mu_n}{\sigma_n}, \frac{4,5-\mu_n}{\sigma_n}\Big]\Big)\\ &= \Phi(-0,23) - \Phi(-2,52) = -\Phi(0,23) + \Phi(2,52))\\ &= -0,5910 + 0,9941 = 0,4031.\end{aligned}$$

   Der relative Fehler ist $\frac{0{,}4031-0{,}4360}{0{,}4360} \approx -0,075 = -7.5\%$. Die in der Literatur empfohlenen Faustformel, daß die Varianz $np(1-p) \ge 6$ sein sollte, ist in diesem Fall nicht gegeben.

Aufgabe 5: Für einen Flug mit einer Kapazität von 400 Sitzen sollen möglichst viele Tickets verkauft werden, wobei jedoch die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung maximal $0,05$ betragen soll. Wieviele Tickets dürfen dazu maximal ausgegeben werden, wenn bekannt ist, daß ein Kunde mit Wahrscheinlichkeit $0,04$ nicht zum Flug erscheint und vereinfachend angenommen wird, daß das Nichterscheinen für verschiedene Kunden unabhängig voneinander ist? Geben Sie eine Methode an, die gesuchte Anzahl exakt zu bestimmen und verwenden Sie eine geeignete Approximation, um sie näherungsweise zu berechnen!

Lösung: Es sei N die Zahl der verkauften Tickets. Ein Ereignis $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \{0,1\}^N$ beschreibt, welche Passagiere zu Abflug erscheinen, und welche nicht. Dabei steht ν f2ur die Kundennummer, 1 für Erscheinen, und 0 für Nichterscheinen. Da das Erscheinen oder Nichterscheinen der Kunden als unabhängig vorausgesetzt wird, trägt $\{0,1\}^N$ die Produktverteilung $P^{\otimes N}$, wobei P die Bernoulli-Verteilung auf $\{0,1\}$ mit $P\{1\} = p = 0,96$ ist.

Die Projektionen

$$\mathrm{pr}_\nu : \{0,1\}^N \to \{0,1\} \quad \nu = 1, \ldots, N$$

beschreiben, ob der Passagier mit der Nummer ν zum Abflug erscheint. Die $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_N$ sind N-fach Bernoulli-verteilt mit Parameter p. Die Zufallsvariable

$$X_N : \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{pr}_\nu$$

gibt die Zahl der Kunden an, die zum Abflug erscheinen. X_N ist $\mathcal{B}_{N,p}$ verteilt.

Damit die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens $0,05$ beträgt, muß

$$\mathcal{B}_{N,p}\{401, \ldots, N\} \leq 0,05 \tag{*}$$

bzw.

$$\mathcal{B}_{N,p}\{0, \ldots, 400\} > 0,95 \tag{**}$$

sein. Da die Fluggesellschaft möglichst viele Tickets verkaufen will, ist also das größte N zu bestimmen, für das $(*)$ noch gilt. Dieses N ist eindeutig bestimmt, da die Funktion

$$\mathbb{N} \ni N \mapsto \mathcal{B}_{N,p}\{0, \ldots, 400\}$$

streng monoton fallend (siehe Anmerkung) ist und für $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Man kann das z.B. mit Maple berechnen:

$$\mathcal{B}_{N,p}\{401, \ldots, N\} = \begin{cases} 0.016 & \text{für } N = 409 \\ 0.033 & \text{für } N = 410 \\ 0.060 & \text{für } N = 411 \end{cases}$$

Also darf die Fluggesellschaft höchsten 410 Tickets verkaufen.

Verwendet man den Grenzwertsatz von Moivre Laplace als Approximation, so folgt

$$0,95 \approx \mathcal{B}_{N,p}\{X_N \leq 400\} = \mathcal{B}_{N,p}\Big\{X_N^* \leq \frac{400 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\Big\} \approx \Phi\Big(\frac{400 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\Big)$$

Dabei ist X_N^* die zentrierte, normalisierte Variable

$$X_N^* := \frac{X_N - E(X_N)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_N)}} = \frac{X_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$$

Nun ist $\Phi(1,645) \approx 0,95$. Löst man die Gleichung

$$\frac{400 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \approx 1,645$$

nach N auf, so folgt $N \approx 409,87$.

Anmerkung. Daß $N \mapsto \mathcal{B}_{N,p}\{0,\ldots,400\}$ streng monoton fallend ist, ist anschaulich klar. Man kann es aber auch folgendermaßen nachrechnen:

Auf $(\Omega, Q) := (\{0,1\}^{N+1}, P^{\otimes(N+1)})$ betrachte man die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_\nu &: \{0,1\}^{N+1} \to \{0,1\}, \\
Y_N &:= \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{pr}_\nu, \\
X_{N+1} &= Y_n + \mathrm{pr}_{N+1}.
\end{aligned}$$

Da die Projektionen $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_N$ N-fach Bernoulli-verteilt mit Parameter p sind, ist Y_N $\mathcal{B}_{N,p}$-verteilt. X_{N+1} ist $\mathcal{B}_{N+1,p}$-verteilt. Es ist

$$\mathrm{B}_{N+1,p}\{0,\ldots,400\} = Q\{X_{N+1} \leq 400\}$$

Bedingt man nach dem Wert von pr_{N+1}, so erhält man

$$\begin{aligned}
&= Q(X_{N+1} \leq 400 \mid \mathrm{pr}_{N+1} = 1) Q\{\mathrm{pr}_{N+1} = 1\} \\
&\quad + Q(X_{N+1} \leq 400 \mid \mathrm{pr}_{N+1} = 0) Q\{\mathrm{pr}_{N+1} = 0\} \\
&= Q(Y_N \leq 399 \mid \mathrm{pr}_{N+1} = 1)p + Q(Y_N \leq 400 \mid \mathrm{pr}_{N+1} = 0)(1-p)
\end{aligned}$$

Da Y_n und pr_{N+1} unabhängig sind:

$$= Q(Y_N \leq 399)p + Q(Y_N \leq 400)(1-p)$$

Da $Q\{Y_N = 400\} > 0$ ist:

$$\begin{aligned}
&< Q(Y_N \leq 400)p + Q(Y_N \leq 400)(1-p) \\
&= Q(Y_N \leq 400) = \mathcal{B}_{N,p}\{0,\ldots,400\}.
\end{aligned}$$