UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

(Sommersemester 2003)

Blatt 7 Abgabetermin: Mittwoch, 11.06.2003, vor Beginn der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Seien (Ω, P) ein endlicher W-Raum und $X_1, \cdots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen. Dann gilt:

$$\operatorname{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \operatorname{Cov}(X_i, X_j).$$

(b) Aus einer Urne mit N Kugeln (davon K schwarze und $N - K$ rote, alle gut durchmischt) werden ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen. Berechnen Sie die Varianz $V(X)$ der (hypergeometrisch verteilten) Anzahl X der schwarzen Kugeln in der Stichprobe.

Anleitung: Benutzen Sie als zugrundeliegenden W-Raum die Menge Ω_{ord} aller geordneten Stichproben vom Umfang n aus N ohne Wiederholung mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit.

Sei $X_i = 1$, wenn die i-te Kugel schwarz ist, und 0 sonst. Berechnen Sie $\operatorname{Var}(X_1)$ sowie $\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$, und überlegen Sie sich, dass die X_i $(i = 1, \cdots, n)$ dieselbe Verteilung besitzen. Mit Hilfe der Formel aus Teil (a) lässt sich dann die gesuchte Varianz $V(X)$ berechnen.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Bei dem Würfelspiel „Die verflixte Drei“ darf man beliebig lange würfeln, wobei die Augenzahlen auf einem Punktekonto aufsummiert werden. Wenn aber die Augenzahl 3 auftritt, wird das Punktekonto auf 0 gesetzt und bleibt dann auf 0. Wie viele Spiele sollte man riskieren, wenn man möglichst viele Punkte erreichen möchte?

Sie können nach folgender *Anleitung* vorgehen:

Ziel ist es, eine natürliche Zahl k so zu bestimmen, dass der Erwartungswert $E(S_k)$ der Punktsumme S_k nach dem k-ten Wurf möglichst groß ist. Es sei dazu X_k die Augenzahl beim k-ten Wurf. Die Zufallsvariable Y_k habe den Wert 1, falls $S_k \neq 0$, und 0 sonst; ferner sei $Z_k = 1$, wenn $X_k \neq 3$, und 0 in allen anderen Fällen. Vergewissern Sie sich, dass S_k der Rekursionsformel

$$S_{k+1} = Z_{k+1} \cdot (S_k + X_{k+1} Y_k) \qquad (k \geq 1)$$

genügt und die Zufallsvariablen Z_{k+1} und S_k sowie $Z_{k+1} X_{k+1}$ und Y_k unabhängig sind.

(a) Folgern Sie durch Berechnung geeigneter Erwartunsgwerte die Rekursionsformel $E(S_{k+1}) = \frac{5}{6}(E(S_k) + 3\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1})$.

(b) Schließen sie induktiv auf $E(S_k) = 3k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ für $k \geq 1$.

(c) Gewinnen Sie durch Betrachtung des Quotienten $\frac{E(S_{k+1})}{E(S_k)}$ Aussagen über das Monotonieverhalten der Funktion $k \mapsto E(S_k)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die gemeinsame Verteilung (X_1, X_2, X_3) dreier Zufallsvariablen sei eine Multinomialverteilung mit den Parametern $N \in \mathbb{N}$ und $p_1, p_2, p_3 \in (0, 1)$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Rechnen Sie nach, dass die bedingte Verteilung von X_1 gegeben $X_2 = n$ die Binomialverteilung zu den Parametern $N - n$ und $\frac{p_1}{1-p_2}$ ist, und berechnen Sie die bedingte Erwartung $E(X_1 | X_2 = n)$. (Geben Sie auch eine anschauliche Erklärung für dieses Ergebnis an!)

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Die auf einem endlichen W-Raum (Ω, P) definierte Zufallsvariable X_n besitze als Verteilung die Gleichverteilung auf $\{-n, -n+1, \cdots, n-1, n\}$.

(a) Geben Sie für die Wahrscheinlichkeit $P(\{|X_n| \geq n/2\})$ mit $n \in \mathbb{N}$ zum einen den exakten Wert und zum anderen die aus der Chebychev-Ungleichung resultierende Abschätzung an.

(b) Vergleichen Sie für $n = 10^k$ (mit großem k) die exakte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{|X_n| \geq 9n/10\}$ mit den Abschätzungen, die man aus der Chebychev-Ungleichung erhält.

Beurteilen Sie jeweils die Güte der Abschätzung.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem endlichen W-Raum (Ω, P).

(a) Leiten Sie die folgende verallgemeinerte Markov-Ungleichung her: Ist $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion, so gilt für $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(\varepsilon) > 0$ die Abschätzung

$$P(\{|X| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{E(\varphi(|X|))}{\varphi(\varepsilon)}.$$

(b) Beweisen Sie die Ungleichung von Cantelli: Für $\varepsilon > 0$ ist

$$P(\{X - E(X) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\operatorname{Var}(X)}{\varepsilon^2 + \operatorname{Var}(X)}.$$

Hinweis: Wenden Sie zuerst die Markov-Ungleichung zu einer geeigneten unteren Schranke auf die Funktion $\varphi(x) = x^2$ und die Zufallsvariable $\tilde{X} = X - E(X) + t$ mit $t > 0$ an, und wählen Sie dann t passend.