UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

(Sommersemester 2003)

Blatt 8 Abgabetermin: Mittwoch, 18.06.2003, vor Beginn der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unkorrelierte Zufallsvariablen auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P). Zeigen oder widerlegen Sie: Für alle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind $f(X)$ und $f(Y)$ unkorreliert.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben seien ein endlicher W-Raum (Ω, P) und eine Folge $(p_n)_n$ in $(0, 1)$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n = 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Zufallsvariable Y_n auf Ω binomialverteilt zu den Parametern n und p_n.

Zeigen Sie: Für $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} P(|Y_n| \geq \varepsilon) = 0$.

(*Hinweis:* Es gilt $|Y_n| \leq |Y_n - np_n| + np_n$ und somit zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ bei genügend großem n die Inklusion $\{|Y_n| \geq \varepsilon\} \subset \{|Y_n - np_n| \geq \varepsilon/2\}$.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $X_1, \cdots, X_n$ reelle Zufallsvariablen mit $E(X_j) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2$ für $j = 1, \cdots, n$. Weiter existiere eine natürliche Zahl k, so dass für $|i - j| \geq k$ die Zufallsvariablen X_i und X_j unkorreliert sind. Zeigen Sie: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j\Big) - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Ein echter Würfel werde in unabhängiger Folge geworfen. Es bezeichne Y_j die beim j-ten Wurf erzielte Augenzahl und $A_j = \{Y_j < Y_{j+1}\}$ für $j \geq 1$. Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}\Big) - \frac{5}{12}\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

In der gynäkologischen Abteilung eines Krankenhauses entbinden in einer bestimmten Woche n Frauen. Es werde angenommen, dass keine Mehrlingsgeburten auftreten und dass bei jeder Geburt die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen bzw. ein Mädchen gleich sei. Außerdem werde angenommen, dass das Geschlecht der Neugeborenen für alle Geburten stochastisch unabhängig sei. Sei a_n die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 60% der Neugeborenen Mädchen sind.

(a) Bestimmen Sie a_{10}.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: $a_{100} < a_{10}$.

(c) Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.