



Übungen zur Vorlesung  
Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik  
(Sommersemester 2003)

Blatt 9

Abgabetermin: Mittwoch, 25.06.2003, vor Beginn der Vorlesung

---

**Aufgabe 1** (3 Punkte)

Eine faire Münze wird so oft geworfen, bis zum ersten Mal „Wappen“ erscheint. Ist dies beim  $n$ -ten Wurf der Fall, dann werden  $2^n$  Rubel ausbezahlt.

- (a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Spieldauer. Was folgern Sie daraus für den zu erwartenden Gewinn?
  - (b) Deckt sich der in Teil a) ermittelte „durchschnittliche Gewinn“ mit dem Erwartungswert des Gewinnes?
- 

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

In einer bestimmten Überraschungseier-Saison gebe es  $n \geq 1$  verschiedene Spielzeug-Inhalte, von denen ein Sammler bereits  $0 \leq k < n$  sein Eigen nennt.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Sammler nach dem Kauf von  $m$  weiteren Ü-Eiern erstmalig auf einen noch nicht in seiner Sammlung vorhandenen Inhalt stößt?
  - (b) Wie viele Ü-Eier muss er also in oben beschriebener Situation im Durchschnitt kaufen, bis er auf ein neues Spielzeug stößt?
  - (c) Zeigen Sie: Fängt der Sammler bei Null an, muss er im Durchschnitt  $n(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$  Ü-Eier kaufen, bis seine Sammlung vollständig ist. (Was ergibt sich im realistischen Fall  $n = 120$ ?)
- 

**Aufgabe 3** (3 Punkte)

Man würfelt wiederholt mit zwei fairen Würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 5 vor der Augensumme 7 auftritt? (Geben Sie explizit den von Ihnen benutzten W-Raum an.)

---

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Die unabhängigen Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  seien beide geometrisch verteilt (mit den zugehörigen Trefferwahrscheinlichkeiten  $p_1$  bzw.  $p_2$  aus  $(0, 1)$ ).

- (a) Zeigen Sie: Falls  $p_1 \neq p_2$  ist, gilt die Formel

$$P(\{X_1 + X_2 = k\}) = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} ((1 - p_2)^{k-1} - (1 - p_1)^{k-1}) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

- (b) Berechnen Sie  $P(\{X_1 + X_2 = k\})$  für  $k \in \mathbb{N}$  im Fall  $p_1 = p_2$ .
- 

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

Zwei Spieler  $A, B$  würfeln mit einem fairen Würfel in der Reihenfolge  $A B B A B A B A B \dots$ . Wer die erste sechs würfelt, gewinnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler  $A$ ?