UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

(Sommersemester 2003)

Blatt 9 Abgabetermin: Mittwoch, 25.06.2003, vor Beginn der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Eine faire Münze wird so oft geworfen, bis zum ersten Mal „Wappen“ erscheint. Ist dies beim n-ten Wurf der Fall, dann werden 2^n Rubel ausbezahlt.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Spieldauer. Was folgern Sie daraus für den zu erwartenden Gewinn?

(b) Deckt sich der in Teil a) ermittelte „durchschnittliche Gewinn“ mit dem Erwartungswert des Gewinnes?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

In einer bestimmten Überraschungseier-Saison gebe es $n \geq 1$ verschiedene Spielzeug-Inhalte, von denen ein Sammler bereits $0 \leq k < n$ sein Eigen nennt.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Sammler nach dem Kauf von m weiteren Ü-Eiern erstmalig auf einen noch nicht in seiner Sammlung vorhandenen Inhalt stößt?

(b) Wie viele Ü-Eier muss er also in oben beschriebener Situation im Durchschnitt kaufen, bis er auf ein neues Spielzeug stößt?

(c) Zeigen Sie: Fängt der Sammler bei Null an, muss er im Durchschnitt $n(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n})$ Ü-Eier kaufen, bis seine Sammlung vollständig ist. (Was ergibt sich im realistischen Fall $n = 120$?)

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Man würfelt wiederholt mit zwei fairen Würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 5 vor der Augensumme 7 auftritt? (Geben Sie explizit den von Ihnen benutzten W-Raum an.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die unabhängigen Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien beide geometrisch verteilt (mit den zugehörigen Trefferwahrscheinlichkeiten p_1 bzw. p_2 aus $(0, 1)$).

(a) Zeigen Sie: Falls $p_1 \neq p_2$ ist, gilt die Formel

$$P(\{X_1 + X_2 = k\}) = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}((1 - p_2)^{k-1} - (1 - p_1)^{k-1}) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

(b) Berechnen Sie $P(\{X_1 + X_2 = k\})$ für $k \in \mathbb{N}$ im Fall $p_1 = p_2$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zwei Spieler A, B würfeln mit einem fairen Würfel in der Reihenfolge $A\ B\ B\ A\ B\ A\ B\ A\ B\ \ldots$ Wer die erste sechs würfelt, gewinnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler A?