3 Integral und Ableitung

3.1 Integral von Regelfunktionen

3.1.1 Definition eines Integrals

Bemerkung.

Mit dem Integral einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I wird die **Fläche** angegeben, die durch das Intervall I auf der Koordinatenachse und den Graphen von f begrenzt wird.

Dabei zählen Flächen oberhalb der Koordinatenachse positiv und Flächen unterhalb der Korodinatenachse negativ.

Für kompakte Intervalle$I$ kann man den Quotienten aus der obigen Fläche und der Länge $|I|$ des Intervalls als **Mittelwert** der Funktion f auf dem Intervall I ansehen.

Beispiel aus der Physik:

- Ein Fahrzeug bewegt sich auf einer Geraden während des Zeitintervalls $[t_0, t_1]$ mit der Geschwindigkeit
$$v : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}.$$
Wenn das Fahrzeug vorwärts fährt, ist $v(t) > 0$.
Wenn das Fahrzeug rückwärts fährt ist $v(t) < 0$.
- Zur Anfangszeit t_0 befinde sich das Fahrzeug auf der Geraden im Ursprung $t_0 = 0$. Zur Zeit $t \in [t_0, t_1]$ sei das Fahrzeug im Punkte $x(t)$.
- Das Integral der Funktion v über das Intervall $[t_0, t_1]$ ergibt den Standpunkt $x(t_1)$ des Fahrzeugs zur Zeit t_1.
- der Quotient aus dem Integral und der Zeitdifferenz $t_1 - t_0$ ergibt die mittelere Geschwindigkeit auf $[t_0, t_1]$.

Bemerkung.

In den Lehrbüchern findet man unterschiedliche Zugänge zum Integral, die sich, abgesehen von den verschiedenen Konstruktionen, darin unterscheiden, wie umfangreich die Funktionenklassen sind, für die ein Integral erklärt wird.

Mit wachsender Allgemeinheit aufgezählt sind dies

stetige Funktionen und ihre Stammfunktionen,

stückweise stetige Funktionen und ihr Integral,

Regelfunktionen und das Regelintegral,

Riemann-integrierbare Funktionen und das Riemann-Integral (für mehrere Variable in Anlysis II),

Lebesgue-integrierbare Funktionen und das Lebesgue-Integral (Anlysis III).

Diese Integralbegriffe ergeben auf den jeweils kleineren Funktionenklassen dasselbe Ergebnis.

Bemerkung. Das Ziel der Integraltheorien ist weniger, für möglichst *wilde* Funktionen ein Integral zu erklären, sondern zu zeigen, wie sich das Integral mit unterschiedlichen Konvergenzbegriffen für Funktionenfolgen verträgt.

Eine Folge von Funktionen kann z. B. beschränkt oder monoton sein und sie kann punktweise oder gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren.

Die folgenden Regeln sollten so allgemein wie *möglich* gelten:

1. Der Grenzwert f einer Folge $(f_n)_n$ integrierbarer Funktionen ist wieder eine integrierbare Funktion.

2. Der Grenzwert der Integrale der f_n ist das Integral des Grenzwertes f.

Ganz allgemein geht das nicht, aber je weniger restriktiv der Integralbegriff ist, um so leichter kann man Grenzübergänge vollziehen und Integrale berechnen.

Bemerkung (Zur Wahl der Integrationstheorie).

In der Analysis I beschränken wir uns vorerst auf:

kompakte Intervalle als Integrationsbereich.

gleichmäßige Konvergenz als Grenzwertbegriff.

beschränkte Funktionen als Integranden, genauer eine handliche Teilmenge der beschränkten Funktionen, die auch die **Grenzwerte** gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen enthält:
- Stetige Funktionen reichen für viele Anwendungen aus, aber nur stetige Funktionen ist zu eng.
- Wir wählen die **Regelfunktionen**.
- Die Vorteile des Riemann–Integral zeigen sich erst in der Integrationstheorie mehrerer Variabler.

Bemerkung Wir charakterisieren das Integral der Regelfunktionen durch Axiome, die durch die anschauliche Deutung des Integrals als Fläche nahegelegt werden:

Definition 3.1.1 (Axiome des Regel-Integrals)

Das ***Regel-Integral*** *ist eine Familie von Abbildungen von den Regelfunktionen in die reellen Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *Zu jedem nichtleeren, kompakten Intervall* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*, gibt es eine Abbildung, die man* ***Integral über*** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *nennt:*

$$\int_{[a,b]} : \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{R}.$$

Jeder Funktion $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *wird also eine reelle Zahl zugeordnet, die man das* ***Integral von f*** *über* $[a,b]$ *nennt:*

$$f \mapsto \int_{[a,b]} f.$$

2. *Dabei sollen die folgenden Regeln gelten:*

Intervall-Additivität: *Für* $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b < c$ *und* $f \in \mathcal{R}([a,c])$ *gilt:*

$$\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f = \int_{[a,c]} f.$$

> *Auf der linken Seite wird die jeweile Einschränkung* $f|[a,b]$ *bzw.* $f|[b,c]$ *integriert.*

Monotonie: *Für* $f,\ g \in \mathcal{R}([a,b])$ *gilt:*

$$f \leqslant g \quad \Rightarrow \quad \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g.$$

Eichung: *Es sei* $c \in \mathbb{R}$*. Für die konstante Funktion* $c \in \mathcal{R}[a,b])$ *gilt:*

$$\int_{[a,b]} c = c \cdot (b-a).$$

Sehr suggestiv ist die von von Leibniz eingeführte Bezeichnung des Integrals mit einer formalen Variablen x und einem **Differential** dx. Vorerst ist das Differential nur ein Symbol.

Bezeichnung 3.1.2 (Differentalschreibweise)

Es seien $[a,b]$ ein nichtleeres Intervall und $f \in \mathcal{R}([a,b])$. In Differentialschreibweise bezeichnet man das Integral mit:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_{[a,b]} f\ .$$

a heißt **untere Grenze** und b **obere Grenze** des Integrals.

Bemerkung. In dieser Bezeichnung wirken das Integralzeichen $\int_a^b$ und das Differental dx wie eine öffnende und eine schließende Klammer.

Wie bei einem Summationsindex ist die Bezeichnung der Variablen unwesentlich: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$.

Bemerkung und Bezeichnung 3.1.3

1. Es seien $c < d$ in $I = [a, b]$. Wir vereinbaren die Bezeichnung:
$$\int_d^c f(x)\,dx := -\int_c^d f(x)\,dx.$$
2. Da $\int_a^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx + \int_a^a f(x)dx$ ist, folgt
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Bemerkung. Mit Bezeichnung (1.) gilt für $a < c < b$:

$$\textstyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Diese Formel hat eine anschauliche Deutung:

Integriert man entlang des Weges von a nach b und dann zurück von b nach c, so erhält man das Integral entlang der Wegstrecke von a nach c.

Definition 3.1.4 (Stammfunktion)

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall $f \in \mathcal{R}(I)$ und $x_0 \in I$. Die Funktion

$$F : I \to \mathbb{R} \quad mit \quad x \ni x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

*heißt eine **Stammfunktion** der Regelfunktion f.*

Bemerkung.

1. Das Integral ist durch eine Stammfunktion eindeutig festgelegt. Für $x, y \in [a, b]$ gilt
$$\textstyle F(y) - F(x) = \int_{x_0}^y f(t)\,dt - \int_{x_0}^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt.$$
2. Wir werden später sehen, daß eine Stammfunktion F von f in allen Stetigkeitspunkten x von f differenzierbar ist und dort $F'(x) = f(x)$ gilt (vgl. Feststellung 3.2.12)). Zu den Stetigkeitspunkten vergleiche Feststellung 2.8.22.

Feststellung 3.1.5 (Lipschitz-Stetigkeit d. Stammfkt.) *Eine Stammfunktion F einer Regelfunktion $f \in \mathcal{R}(I)$ ist auf jedem kompakten Teilintervall $[a, b] \subset I$ Lipschitsstetig.*

Eine Lipschitzkonstante von F ist $M := \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\ |b - a|.$$

Beweis.Für $x, y \in [a, b]$ gilt

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\, dt.$$

Es sei etwa $x < y$. Aus $-M \leqslant f \leqslant M$, der Monotonie des Integrals und der Eichungsvorschrift folgen:

$$F(y) - F(x) = \int\limits_{[x,y]} f \ \leqslant \quad M(y - x) = \quad M|y - x|.$$

$$F(y) - F(x) = \int\limits_{[x,y]} f \ \geqslant -M(y - x) = -\ M|y - x|$$

und somit

$$|F(y) - F(x)| \leqslant M|y - x|.$$

Da die letzte Ungleichung symmetrisch in x und y ist, gilt sie auch im Fall $y < x$.

3.1.2 Integral von Treppenfunktionen

Bemerkung. Wir haben in Definiton 3.1.1 axiomatisch festgelegt, welche Eigenschaften ein Integral hat und einige Folgerungen aus den Axiomen gezogen. Es ist aber noch unklar, ob es überhaupt ein Integral für Regelfunktionen gibt und, falls ja, ob es eindeutig bestimmt ist.

Wir zeigen zuächst, daß das Integral auf den Treppenfunktionen exisitiert und eindeutig erklärt ist.

Bemerkung. Bei der Berechnung des Integral von Treppenfunktionen hilft die folgende Verschärfung der Eichungsvorschrift:

Lemma 3.1.6 (Eichung des Integrals)

Es sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$ und $f|(a, b) = c$ konstant. Dann gilt

$$\int\limits_{[a,b]} f = c\,(b - a)$$

Beweis. Man fixiere ein $x_0 \in (a,b)$. Die Stammfunktion

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{für } x \in [a,b].$$

ist Lipschitz-stetig. Also gilt

$$\begin{aligned} F(a^+) &= \lim_{x \downarrow a} F(x) = \lim_{x \downarrow a} \int_{x}^{x_0} f(t)\,dt = \lim_{x \downarrow a} c\,(x_0 - x) \\ &= c\,(x_0 - a) \end{aligned}$$

Analog folgt $F(b^-) = c\,(b - x_0)$.

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) &= F(b^-) - F(a^+) \\ &= c\,(b - x_0) - c\,(x_0 - a) = c\,(b-a). \end{aligned}$$

Bemerkung. Wir folgern aus den Axiomen 3.1.1 für das Integral eine Formel ($\star$) für das Integral einer Treppenfunktion und zeigen anschließend, daß das Integral durch diese Formel **wohldefiniert** und damit eindeutig bestimmt ist.

Es sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall, mit Teilpunkten $a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b$, und $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, die auf den Teilintervallen (x_{k-1}, x_k) konstant ist:

$$t|(x_{k-1}, x_k) = c_k \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Nach Korollar 3.1.6 muß dann gelten:

$$\int_{[x_{k-1},x_k]} t = c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Aus der Intervall-Additivität des Integrals folgt dann

$$\int_{[a,b]} t \;=\; \sum_{k=1}^{n} \int_{[x_{k-1},x_k]} t \;=\; \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) \qquad (\star).$$

Bemerkung. Die Darstellung einer Treppenfunktion $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch Angabe von Teilpunkten $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und der Werte

$$\begin{aligned} &f|(x_{k-1}, x_k) = c_k \text{ für } k = 1, \dots, n, \\ &t(x_k) \qquad\qquad\quad \text{für } k = 0, \dots, n \end{aligned}$$

ist nicht eindeutig. Man kann z. B. das Intervall durch weitere Teilpunkte unterteilen und erhält eine andere Darstellung der Treppenfunkton t.

Wir wollen zeigen, daß sich das Ergebnis der Formel ($\star$) von der Darstellung der Treppenfunktion unabhängig ist. D.h. das Integral ist durch die Formel ($\star$) **wohldefiniert**.

Bezeichnung 3.1.7 (Zerlegungssumme)

Es sei $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Wir nennen eine Menge Z von Punkten $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine für t **zulässige Zerlegung** des Intervalls $[a,b]$, wenn

$$t|(x_{k-1}, x_k) = c_k \quad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

konstant ist und bezeichnen das Ergebnis der Formel $(\star)$ mit

$$I(Z) = I(Z,t) := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) \qquad (\star\star).$$

$I(Z) = I(Z,t)$ heißt die **Zerlegungssumme** von t zur Zerlegung Z.

Bemerkung. Wir zeigen schreiben später $\int\limits_{[a,b]} t$ statt $I(Z)$.

Lemma 3.1.8 *Es sei $t : [a,b] \to$ eine Treppenfunktion. Für alle für t zulässigen Zerlegungen Z und $\tilde{Z}$ geben die Zerlegungssummen das gleiche Ergebnis:*

$$I(Z) = I(\tilde{Z}).$$

Bemerkung. Wenn Z und $\tilde{Z}$ zulässige Zerlegungungen sind, so bilde man die Zerlegung $Z \cup \tilde{Z}$, die gerade aus allen Teilpunkten von Z und den Teilpunkten von $\tilde{Z}$ besteht, und zeige

$$I(Z) = I(Z \cup \tilde{Z}) = I(\tilde{Z}).$$

Die Zerlegung $Z \cup \tilde{Z}$ entsteht aus Z, indem man nacheinander die Teilpunkte aus $\tilde{Z} \setminus Z$ zu Z hinzufügt.

Es reicht also zu zeigen, daß beim Hinzufügen eines weiteren Teilpunktes sich das Ergebnis der Formel $(\star\star)$ nicht ändert.

Dann folgt induktiv $I(Z) = I(Z \cup \tilde{Z})$ und analog $I(\tilde{Z}) = I(Z \cup \tilde{Z})$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß sich die Zerlegungsumme beim Hinzufügen eines weiteren Teilpunktes nicht ändert.

Es sei $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ eine für t zulässige Zerlegungen von $[a,b]$ mit

$$t|(x_{k-1}, x_k) = c_k.$$

Zu einem $x^* \in [a,b]$ mit $x^* \notin Z$ bilde man $Z^* := Z \cup \{x^*\}$.

Es gibt ein $l \in \{1, \ldots, n\}$, so daß $x_{l-1} < x^* < x_l$ ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} I(Z) &= \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{l-1} c_k(x_k - x_{k-1}) + c_l(x^* - x_{l-1}) + c_l(x_l - x^*) \\ &\quad + \sum_{k=l+1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) = I(Z^*) \end{aligned}$$

Definition 3.1.9 (Integral von Treppenfunktionen)
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Das ***Integral*** *einer Treppenfunktion $t : I \to \mathbb{R}$ definiert man als Zerlegungssumme zu einer zulässigen Zerlegung Z von I (vgl. Bezeichnung 3.1.7):*

$$\int_I t := I(Z, t).$$

Satz 3.1.10 (Eigenschaften des Integrals)
Das Integral von Treppenfunktionen erfült die Regeln

> **Intervall-Additivität,**
>
> **Monotonie,**
>
> **Eichung,**

die in den Axiomen 3.1.1 für ein Integral gefordert werden. Es ist durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Beweis.

Intervalladditivität: Es seien $a,\ b,\ c \in I$ mit $a < b < c$ und $t : [a, c] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Man wähle eine für t zulässige Zerlegung Z von $[a, c]$, die den Punkt b enthält. Dann ist $Z_1 = Z \cap [a, b]$ eine zulässige Zerlegung von $[a, b]$ und $Z_2 = Z \cap [b, c]$ eine zulässige Zerlegung von $[b, c]$. Aus der Formel 3.1.7($\star\star$) folgt

$$\int_{[a,b]} t + \int_{[b,c]} t = I(Z_1, t) + I(Z_2, t) = I(Z, t) = \int_{[a,c]} t.$$

Monotonie: Zwei Treppenfunktionen haben eine gemeinsame zulässige Zerlegung des Intervalls. Die entsprechenden Zerlegungssummen haben die Monotonie-Eigenschaft.

Eichung: Klar nach Definition.

Eindeutigkeit: Folgt aus der Formel 3.1.7($\star\star$) für $I(Z,t)$.

Feststellung 3.1.11 (Linearität des Integrals)
*Das Integral von Treppenfunktionen ist **linear**:*
Für Treppenfunktionen $t_1,\ t_2 : I \to \mathbb{R}$ und $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_I (\lambda t_1 + \mu t_2) = \lambda \int_I t_1 \ + \ \mu \int_I t_2.$$

Beweis. Zu zwei Treppenfunktionen t_1, t_2 auf I gibt es eine gemeinsame zulässige Zerlegung des komapkten Intervalls I. Aus der Formel 3.1.7($\star\star$) folgt

$$I(Z, \lambda t_1 + \mu t_2) = \lambda\, I(Z, t_1) + \mu\, I(Z, t_2).$$

Folglich gilt:

$$\int_I (\lambda t_1 + \mu t_2) = \lambda \int_I t_1 \ + \ \mu \int_I t_2.$$

Bemerkung. Aus der Abschätzung

$$-\|t\| \leqslant t \leqslant \|t\|$$

der Monotonie und der Eichung des Integrals erhält man die Abschätzung des Integrals durch die Norm des Integranden:

Feststellung 3.1.12 (Beschränktheit des Integrals)
Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Für das Integral einer Treppenfunktion $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\left|\int_I t\right| \leqslant (b-a)\, \|t\|.$$

Bemerkung. Aus der Normabschätzung des Integrals und der Linearität des Integrals erhält man für die Differenz der Integrale zwei Treppenfunktionen die folgende Abschätzung

Korollar 3.1.13 (Beschränktheit des Integrals)
Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Für das Integral zweier Treppenfunktionen $t_1,\ t_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\left| \int_{[a,b]} t_1 - \int_{[a,b]} t_2 \right| \leqslant (b-a)\, \|t_1 - t_2\|.$$

Bemerkung. Diese Ungleichung hat die Form einer Lipschitz-Bedingung und wird genau so benutzt, um die Konvergenz von Integralen zu zeigen.

3.1.3 Integral von Regelfunktionen

Feststellung 3.1.14 *Es seien I ein kompaktes Intervall und $f \in \mathcal{R}(I)$. Für jede Folge $(t_n)_n$ von Treppenfunktionen auf I, die gleichmäßig auf I gegen f konvergiert, existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I t_n .$$

Dieser Grenzwert hängt nicht von der Wahl der approximierenden Folge ab.

Beweis. Da die Folge $(t_n)_n$ gleichmäßig auf I gegen f konvergiert, gilt das Cauchy-Kriterium 2.8.11

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant n_0\ :\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Nach Korollar 3.1.13 gilt

$$\left| \int_{[a,b]} t_n - \int_{[a,b]} t_m \right| \leqslant (b-a)\, \|t_n - t_m\|.$$

Also ist auch die Folge $\big(\int_{[a,b]} t_n\big)_n$ der Integrale eine Cauchyfolge und somit konvergent.

Nach dem Reißverschlußprinzip konvergiert für jede andere Folge $(\tilde{t}_n)_n$ von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert, die Folge $\big(\int_{[a,b]} \tilde{t}_n\big)_n$ der Integrale gegen den gleichen Grenzwert.

Bemerkung. Nach Satz 2.8.17 gibt es zu jeder Regelfunktion f auf einem kompakten Intervall eine Folge $(t_n)_n$ von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Nach Feststellung 3.1.14 konvergiert die Folge $(\int_{[a,b]} t_n)_n$ der Integrale gegen einen Grenzwert, der unabhängig von der gewählten Folge von Treppenfunktionen ist.

Wir definieren diesen Grenzwert als Integral von f:

Definition 3.1.15 (Integral für Regelfunktionen)

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Man erklärt das ***Integral*** *von f als Grenzwert der Integrale einer Folge $(t_n)_n$ von Treppenfunktionen, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert:*

$$\int_{[a,b]} f := \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} t_n .$$

Satz 3.1.16 (Eigenschaften des Regel-Integrals)

1. *Das Integral 3.1.15 erfüllt die Axiome 3.1.1*

   Intervall-Additivität,
   Monotonie,
   Eichung.

   Es ist durch diese Axiome eindeutig bestimmt.

2. *Das Integral ist* ***linear****: Für Regelfunktionen f, g auf einem kompakten Intervall I und λ, $\mu \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f \; + \; \mu \int_I g.$$

3. *Das Integral ist* ***beschränkt****: Für eine Regelfunktion f auf einem kompakten Intervall gilt:*

$$\left| \int_I f \right| \leqslant (b-a)\, \|f\|.$$

Beweis.

1. **Inervall-Additivitat:** überträgt sich von den Treppenfunktionen (vgl. Satz 3.1.10) unmittelbar auf die Grenzwerte.

   Monotonie: Es seien f, g Regelfunktionen auf $[a,b]$ und es gelte $f \leqslant g$. Nach Korollar 2.8.20 gibt es eine monoton wachsende Folge $(s_n)_n$, die gleichmäßig gegen f konvergiert und eine monoton fallende Folge $(t_n)_n$ von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen g konvergiert.
   Dann ist $s_n \leqslant f \leqslant g \leqslant t_n$ und folglich

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} s_n \leqslant := \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} t_n = \int_{[a,b]} g.$$

   Eichung: Die Eichung gilt für Treppenfunktionen.

   Eindeutigkeit: Es gibt eine monoton wachsende Folge $(s_n)_n$ und eine monoton fallende Folge $(t_n)_n$ von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergieren. Aus der Monotonie des Integrals folgt nun die Eindeutigkeit.

---

2. Die Linearität des Integrals von Treppenfunktionen überträgt sich unmittelbar auf die Grenzwerte (vgl. 3.1.11)

3. Die Beschränktheit des Integrals von Treppenfunktionen überträgt sich unmittelbar auf die Grenzwerte. (vgl. 3.1.12)

Korollar 3.1.17 (Beschränktheit des Integrals)

1. *Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Für das Integral zweier Regelfunktionen f, $g \in \mathcal{R}([a,b])$ gilt:*

$$\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} g \right| \leqslant (b-a)\,\|f-g\|.$$

2. *Konvergiert eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ in $\mathcal{R}([a,b])$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f, dann ist $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und es gilt*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n$$

Bemerkung 3.1.18 (Endlich viele Punkte)

1. Eine Funktion $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, die nur in endlich vielen Punkten einen Wert ungleich Null hat, ist eine Treppenfunktion mit $\int_{[a,b]} \phi = 0$.

2. Es sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Ändert man f in endlich vielen Punkten beliebig ab, so ändert sich der Wert des Integrals nicht:

$$\int_{[a,b]} (f+\phi) \int_{[a,b]} f.$$

Bemerkung. Unter einer Tranlation versteht man die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

An der Eichungsformel 3.1.6 sieht man, daß das Integral einer Treppenfunktion invariant unter Tranlationen ist. Dies überträgt sich dann auf Regelfunktionen:

Bemerkung 3.1.19 (Translationsinvarianz)

Das Integral ist **translationsinvariant**. Für $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$$

Bemerkung. Eine **affine** Funktion hat die Form

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto cx + d\text{mit Konstanten } c, d \in \mathbb{R}.$$

Die folgende Transformationsformel ist ein Spezialfall der **Substitutionsformel** 3.1.47 für Integrale.

Lemma 3.1.20 (Affine Transformationen)

Gegeben sei eine affine Funktion $g : x \mapsto cx + d$, $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten c, $d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, ein kompaktes Intervall I und $J = g(I)$. Für $f \in \mathcal{R}(J)$ gilt:

$$\int_{g(I)} f = |c| \int_I f \circ g.$$

Man beachte, daß auf der rechten Seite der Betrag von c steht. Ist $I = [a, b]$ so lautet die Formel in Differential-Schreibweise:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy = \int_a^b f(g(x)) \cdot c\, dx.$$

Beweis. Es reicht die Transformationsformel für Treppenfunktionen zu zeigen. Durch Grenzwertbildung folgt sie dann für Regelfunktionen.

Wegen der Intervall-Additivität des Integrals reicht es, die Formel für konstante Funktionen $f = K$ zu zeigen.

Es sei $I = [a, b]$.

Wir betrachten zunächst den Fall $c > 0$. Dann ist $g(a) < g(b)$ und es gilt

$$\int_{g(I)} f = K(g(b) - g(a)) = K\, c\,(b - a) = c \int_{[a,b]} f \circ g.$$

Im Falle $c < 0$ ist $g(a) > g(b)$ und es gilt

$$\int_{g(I)} f = K(g(a) - g(b)) = K\, c\,(a - b) = -c \int_{[a,b]} f \circ g.$$

3.1.4 Integration stetiger Funktionen

Bemerkung. Wir bringen hier nur ganz wenige Beispiele von Integralen elementarer Funktionen. Leichter berechnet man diese Integrale später mit den folgenden Hilfmitteln:

- **Hauptsatz** der Differential- und Integralrechnung.
- **Partielle Integration** 3.1.34
- **Substitution** 3.1.47
- Integration der **Umkehrfunktion** 3.1.37

Beispiele 3.1.21

$$\int_0^x \xi\, d\xi = \frac{x^2}{2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung. Die zu berechnende Fläche ist ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge $|x|$. Aus der Geometrie weiß man, daß die Dreiecksfläche $\frac{x^2}{2}$ ist.

Beweis.Wähle die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0, x]$ in n Teile, $(n \in \mathbb{N})$:

$$Z = \{0 = x_0 < x_1 = \frac{x}{n} < \dots x_k = \frac{kx}{n} < \dots < x_n = x\}$$

und approximiere die Funktion $f(\xi) = \xi$ durch die Treppenfunktion

$$t_n : \xi \mapsto \begin{cases} \frac{kx}{n} & \text{für } \xi \in (\frac{(k-1)x}{n}, \frac{kx}{n}], \\ 0 & \text{für } \xi = 0. \end{cases}$$

Die Folge $(t_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen f und somit gilt:

$$\int_0^x t_n(\xi)\, d\xi = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{n} \frac{x}{n} = \frac{x^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \to \frac{x^2}{2} = \int_0^x f(\xi)\, d\xi.$$

Bemerkung. Für eine stetige Funktion kann man leicht approximierende Treppenfunktionen angeben:

Bezeichnung 3.1.22

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zu einer Zerlegung des Intervalls $[a, b]$

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$$

und einer Menge Ξ von **Stützstellen**

$$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\} \quad \text{mit} \quad \xi_\varkappa \in [x_{\varkappa-1}, x_\varkappa] \text{ für } \varkappa = 1, \dots, k,$$

bildet man die Treppenfunktion

$$t_{(f,Z,\Xi)} : x \mapsto \begin{cases} f(\xi_\varkappa) & \text{für } x \in (x_{\varkappa-1}, x_\varkappa),\ (\varkappa = 1, \dots, k), \\ f(x_\varkappa) & \text{für } x = x_\varkappa,\ (\varkappa = 0, \dots, k). \end{cases}$$

Bezeichnung 3.1.23 (Feinheit einer Zerlegung)

Wenn $Z = \{a = x_0 < \dots < x_k = b\}$ eine Zerlegung ist, so heißt heißt das Maximum der Längen der Teilintervalle $[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]$ die **Feinheit** der Zerlegung. Die Feinheit wird mit

$$d(Z) := \max_{\varkappa=1,\dots,k} (x_\varkappa - x_{\varkappa-1})$$

bezeichnet.

Bemerkung. Wenn $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ eine Zerlegung ist, so nennen wir eine Menge von Stützstellen $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ **zulässig**, wenn $\xi_\varkappa \in [x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]$ für $\varkappa = 1, \ldots, k$ ist.

Satz 3.1.24 (Approximierende Treppenunktion)
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ der Feinheit

$$d(Z) < \delta$$

und jede zulässige Wahl von Stützstellen Ξ der Abstand von f zu der Treppenfunktion $t_{(f,Z,\Xi)}$ kleiner als ε ist:

$$\|f - t_{(f,Z,\Xi)}\| < \varepsilon$$

Beweis. Nach Satz 2.6.9 ist f gleichmäßig stetig:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall x, y \in [a, b] \ : \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Für eine Zerlegung Z mit $d(Z) < \delta$ und jede zulässige Menge von Stützpunkten gilt dann

$$|f(x) - t_{(f,Z,\Xi)}(x)| = \begin{cases} |f(x) - f(\xi_\varkappa)| & \text{für } x \in (x_{\varkappa-1}, x_\varkappa),\ (\varkappa = 1, \ldots, k), \\ 0 & \text{für } x = x_\varkappa,\ (\varkappa = 0, \ldots, k). \end{cases}$$

und somit

$$\|f - t_{(f,Z,\Xi)}\| < \varepsilon$$

Bezeichnung 3.1.25 Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zu einer Zerlegung des Intervalls $[a, b]$

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$$

und einer Menge Ξ von zulässigen **Stützstellen**

$$\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\} \quad \text{mit} \quad \xi_\varkappa \in [x_{\varkappa-1}, x_\varkappa] \text{ für } \varkappa = 1, \ldots, k,$$

bildet man die **Riemansche Summe**:

$$S(f, Z, \Xi,) = S(Z, \Xi) := \sum_{\varkappa=1}^{k} f(\xi_\varkappa)\,(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})$$

Bernhardt Riemann, 1826-1866

Bemerkung. Eine Riemannsche Summe ist eine endliche Summe, zu deren Berechnung man nur endlich viele Funktionswerte des Integranden brauch.

Satz 3.1.26 (Konvergenz der Riemann-Summen)
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.. Für jede Folge $(Z_n)_N$ von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$, deren Feinheit gegen Null strebt:

$$d(Z_n) \to 0,$$

*und jede zulässige Wahl von Stützpunkten Ξ_n, $(n \in \mathbb{N})$, konvergieren die **Riemanschen Summen**: gegen das Integral von f:*

$$\lim_{n\to\infty} S(f, Z_n, \Xi_n) = \int_{[a,b]} f$$

Beispiele 3.1.27 1. Man wähle die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0,x]$ in n Teile:

$$Z = \{0 = x_0 < x_1 = \frac{x}{n} < \dots x_k = \frac{kx}{n} < \dots < x_n = x\}$$

und zeige

$$\int_0^x \xi^2 \, d\xi = \frac{x^3}{3}.$$

2. Man wähle die Einteilung von $[1,x]$ mit geometrischer Progression $q := \sqrt[n]{x}$:

$$1 = q^0 < q < q^2 < \dots < q^n = x$$

und zeige

$$\int_1^x \xi^2 \, d\xi = \frac{1}{3}(x^3 - 1).$$

3. Mit Hilfe der obigen Einteilung mit geometrischer Progression zeige man

$$\int_1^x \frac{1}{\xi^2} \, d\xi = 1 - \frac{1}{x}.$$

Beweis.1. Wählt man die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0,x]$ in n Teile, $n \in \mathbb{N}$, und $\xi_k = x_k$ so lauten die Riemann-Summen:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{kx}{n}\right)^2 \frac{x}{n} = \frac{x^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{x^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \to \frac{x^3}{3} \ .$$

2. Wählt man eine Einteilung von $[1, x]$ mit geometrischer Progression $q := x^{\frac{1}{n}}$ so erhält man die Teil- und Stützpunkte

$$1 = q^0 < q < q^2 < \cdots < q^n = x$$

und die Riemann-Summen

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} q^{2k}(q^{k+1} - q^k) &= (q-1)\sum_{k=0}^{n-1} q^{3k} = \frac{q^{3n}-1}{q^3-1}(q-1)\\ &= \frac{q-1}{q^3-1}(x^3-1) = \frac{1}{1+q+q^2}(x^3-1) \to \frac{1}{3}(x^3-1).\end{aligned}$$

3. Für die Teil- und Stützpunkte

$$1 = q^0 < q < q^2 < \cdots < q^n = x$$

erhält man die Riemann-Summen

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^{2k}}(q^{k+1} - q^k) &= q\big(1 - \frac{1}{q}\big)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^k}\\ &= q\big(1 - \frac{1}{q}\big)\frac{1 - \frac{1}{q^n}}{1 - \frac{1}{q}}\\ &= x^{\frac{1}{n}}\big(1 - \frac{1}{x}\big) \to 1 - \frac{1}{x}\ .\end{aligned}$$

3.1.5 Logarithmus als Stammfunktion

Bemerkung. Wir untersuchen die Stammfunktion

$$(0, \infty) \ni x \overset{L}{\mapsto} \int_1^x \xi^{-1}\, d\xi.$$

und zeigen, daß $L(x) = \log x$ der natürliche Logarithmus ist.

Die Bezeichnung L verwenden wir nur im Beweis des folgenden Satzes.

Zur Identifizierung $L = \log$ benötigen wir eine Charakterisierung der Exponentialfunktion.

Bemerkung 3.1.28 (Funktionalgleichung)
Es sei $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ stetig und es gelte

$$E(s + t) = E(s) \cdot E(t) \quad \text{für } s, t \in \mathbb{R}.$$

und $E(1) = e$. Dann gilt $E(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Induktiv folgt

$$E(n) = e^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin folgt aus der Funktionalgleichung

$$E(0) = 1 \quad \text{und} \quad E(-n) = e^{-n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Aus der Eindeutigkeit der n-ten Wurzel folgt

$$E(\tfrac{m}{n}) = e^{\frac{m}{n}} \quad \text{für } m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Da E stetig ist, folgt mit 2.4.17, daß $E(t) = e^t$ für $t \in \mathbb{R}$.

Satz 3.1.29 (Logarithmus) *Es gilt*

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \log x.$$

Das Integral (der Logarithmus) hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\log 1 = 0$ *und* $x \mapsto \log x$ *ist streng monoton wachsend.*
2. $\log(xy) = \log x + \log y$
3. $\frac{x-1}{x} < \log x < x - 1$ *für* $0 < x < \infty$, $x \neq 1$
4. $\log e = 1$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to 0} \log x = -\infty$.
6. *Die Umkehrfunktion zu* $x \mapsto \log x$ *ist die Exponentialfunktion* $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^t$.

Beweis. Wir bezeichnen das Integral mit $L(x) = \int_1^x \xi^{-1} d\xi$.

1. es ist $L(1) = 0$. Da der Integrand streng positiv ist, ist L streng monoton wachsend.
2. Nach der Transformationsformel 3.1.20 gilt mit der affinen Transformation $g : \xi \mapsto \eta = x\xi$, $(x > 0)$:
$$\int_x^{xy} \eta^{-1} d\eta = \int_1^y (x\xi)^{-1} x d\xi = \int_1^y \xi^{-1} d\xi = L(y)$$
Hiermit folgt:
$$\begin{aligned} L(xy) &= \int_1^{xy} (\eta)^{-1} d\eta \\ &= \int_1^x \eta^{-1} d\eta + \int_x^{xy} \eta^{-1} d\eta \\ &= L(x) + L(y). \end{aligned}$$

---

3. Für $x > 1$ gilt

$$L(x) = \int_1^x \xi^{-1} d\xi < \int_1^x 1\, d\xi = x - 1.$$

Für $0 < x < 1$ gilt

$$-L(x) = \int_x^1 \xi^{-1} d\xi > \int_x^1 1\, d\xi = 1 - x.$$

Also gilt $L(x) < x - 1$ für $0 < x < \infty$, $x \neq 1$.

Dann folgt

$$-L(x) = L(\frac{1}{x}) < \frac{1}{x} - 1 = -\frac{x-1}{x}.$$

4. Da die Stammfunktion L stetig ist, folgt aus (3.)

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = n\frac{(1+\frac{1}{n})-1}{1+\frac{1}{n}} \leqslant nL(1+\frac{1}{n}) \leqslant n((1+\frac{1}{n})-1) = 1.$$

Also ist $L(e) = \lim\limits_{n\to\infty} L((1+\frac{1}{n})^n) = \lim\limits_{n\to\infty} (nL(1+\frac{1}{n})) = 1$.

5. Da L monoton wachsend ist, gilt $L(2) > L(1) = 0$ und

$$\lim_{x\to\infty} L(x) = \lim_{n\to\infty} L(2^n) \lim_{n\to\infty} nL(2) = \infty.$$

und analog $\lim\limits_{x\to 0} L(x) = \lim\limits_{n\to\infty} L({\frac{1}{2}}^n) = -\infty$.

also ist das Bild $L((0,\infty)) = \mathbb{R}$.

6. Es gibt die stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion $E : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ von L.

Aus (4.) folgt $E(1) = e$ und aus (2.) folgt

$$E(s+t) = E(s) \cdot E(t) \quad \text{für } s,t \in \mathbb{R}.$$

Also gilt nach Bemerkung 3.1.28 $E(t) = e^t$ für $t \in \mathbb{R}$ und somit nach Definition 2.5.21 $L(x) = \log x$ für $x \in (0,\infty)$.

3.1.6 Riemannsche Summen von Regelfunktionen

Bemerkung. Die Riemannschen Summen $S(f, Z, \Xi)$ approximieren auch das Integral einer Regelfunktion f.

Die Riemannschen Summen von Regelfunktionen werden vorwiegend dazu verwendet, gewisse Eigenschaften endlicher Summen auf Integrale zu übertragen.

Lemma 3.1.30 *Es sei $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung*

$$Z = \{a = x_0 < \cdots < x_k = b\}$$

von $[a,b]$ der Feinheit

$$d(Z) < \delta$$

und jede Wahl von Stützstellen

$$\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\} \quad mit \quad \xi_\varkappa \in [x_{\varkappa-1}, x_\varkappa] \text{ für } \varkappa = 1, \ldots, k,$$

die Riemannsche Summe $S(t, Z, \Xi)$ das Integral mit einem Fehler, der kleiner als εist, approximiert:

$$\Big|\ S(t, Z, \Xi)\ -\ \int_{[a,b]} t\ \Big| < \varepsilon.$$

Beweis. Zu der Treppenfunktion $t \neq 0$ gibt es eine Zerlegung

$$Z^* = \{a = z_0^* < \cdots < z_l^* = b\},$$

so daß $t|(z_{\lambda-1}^*, z_\lambda^*) = c_\lambda$ konstant ist. Man setze

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4(l+1)\|t\|}\,.$$

Es sei nun

$$Z = \{a = x_0 < \cdots < x_k = b\}$$

eine Zerlegung. Durch Induktion über die Anzahl l der Teilpunkte zeigt man: Es gibt höchstens $2(l+1)$ abgeschlossene Teilintervalle $[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]$, die einen der Punkte z_λ^* enthalten. Es sei

$$M := \{\varkappa \mid \varkappa \in \{1, \ldots, k\},\ \exists\ z_\lambda^* \in [x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]\,\}.$$

und

$$N := \{1, \ldots, k\} \setminus N.$$

Wenn die Feinheit $d(Z) < \delta$, dann folgt für jede zulässige Wahl von Stützstellen $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$:

$$\begin{aligned}
S(t, Z, \Xi) - \int_{[a,b]} t
&= \sum_{\varkappa \in M} \Big(f(\xi_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})\ -\ \int_{[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]} t \Big) \\
&\quad + \sum_{\varkappa \in N} \Big(f(\xi_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})\ -\ \int_{[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]} t \Big) \\
&= \sum_{\varkappa \in M} \Big(f(\xi_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})\ -\ \int_{[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]} t \Big)
\end{aligned}$$

Man beachte, daß die Summanden für $\varkappa \in N$ verschwinden, da $f\big|[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]$ konstant ist. Folglich gilt

$$\Big|\, S(t, Z, \Xi) \;-\; \int_{[a,b]} t \,\Big| \;<\; 2\,(l+1)\,2\,\|t\|\,\delta = \varepsilon.$$

Satz 3.1.31 (Aproximation durch Riemann-Summen) *Es sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung*

$$Z = \{a = x_0 < \cdots < x_k = b\}$$

von $[a,b]$ der Feinheit

$$d(Z) < \delta$$

und jede Wahl von Stützstellen

$$\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\} \quad \textit{mit} \quad \xi_\varkappa \in [x_{\varkappa-1}, x_\varkappa] \textit{ für } \varkappa = 1, \ldots, k,$$

die Riemannsche Summe $S(t, Z, \Xi)$ das Integral mit einem Fehler, der kleiner als εist, approximiert:

$$\Big|\, S(f, Z, \Xi) \;-\; \int_{[a,b]} f \,\Big| < \varepsilon.$$

Beweis. Zu der Regelfunktion $f \in \mathcal{R}([a,b])$ gibt es eine Treppenfunktion t, so daß auf $[a,b]$ gilt:

$$\|f - t\| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}.$$

Zu t gibt es nach Lemma 3.1.30 ein $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung Z der Feinheit $d(Z) < \delta$ und jede zulässige Wahl von Stützstellen Ξ stets

$$\Big|\, S(t, Z, \Xi) \;-\; \int_{[a,b]} t \,\Big| < \varepsilon.$$

ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\Big|\, S(f, Z, \Xi) \;-\; \int_{[a,b]} f \,\Big| \\
&\qquad \leqslant \;\Big|\, S((f-t), Z, \Xi) \,\Big| \\
&\qquad\qquad + \Big|\, S(t, Z, \Xi) \;-\; \int_{[a,b]} t \,\Big| + \Big|\, \int_{[a,b]} (t - f) \,\Big| < 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Korollar 3.1.32 (Konvergenz der Riemann-Summen) *Es sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Für jede Folge $(Z_n)_N$ von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$, deren Feinheit gegen Null strebt:*

$$d(Z_n) \to 0,$$

und jede zulässige Wahl von Stützpunkten Ξ_n, $(n \in \mathbb{N})$, konvergieren die Riemannschen Summen gegen das Integral von f:

$$\lim_{n\to\infty} S(f, Z_n, \Xi_n) = \int_{[a,b]} f$$

Bemerkung Dagegen approximieren die entsprechenden Treppenfunktionen $t_{(f,Z_n,\Xi_n)}$ (Def. 3.1.22) im allgemeinen die Funktion f nicht gleichmäßig. In der ***L*₁-Norm** gilt aber:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - t_n\|_1 := \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} |f - t_n| = 0.$$

Konvergenz in der L_1-Norm untersuchen wir in Analysis III.

3.1.7 Partielle Integration

Bezeichnung 3.1.33 (Differenz der Randwerte)

Für zwei Funktionen F, $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ bezeichne

$$F\,G\,\Big|_a^b := F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Satz 3.1.34 (Partielle Integration)

Gegeben seien f, $g \in \mathcal{R}([a,b])$ und Stammfunktionen F von f und G von g. Dann gilt

$$\int_{[a,b]} F\,g = F\,G\,\Big|_a^b - \int_{[a,b]} f\,G$$

Bemerkung. Die Formel der partiellen Integration gilt für beliebige, fest gewählte Stammfunktionen F von f und G von g (vgl. Definition 3.1.4).

Bemerkung.

1. Es reicht, die partielle Integration für Treppenfunktionen zu zeigen. Durch Grenzwertbildung folgt sie dann für Regelfunktionen.

2. Es sei f eine Treppenfunktion mit Stammfunktion F und g eine Treppenfunktion mit Stammfunktion G.

Nach Bemerkung 3.1.18 kann man die Treppenfunktionen f und g in den Sprungstellen abändern, ohne die Stammfunktionen und die Werte der Integrale

$$\int\limits_{[a,b]} F\,g \quad \text{und} \quad \int\limits_{[a,b]} g\,F$$

zu ändern.

Wir können für den Beweis also ohne Einschränkung annehmen, daß f rechtsseitig und g linksseitig stetig ist.

Beweis. Es sei f eine Treppenfunktion mit Stammfunktion F und g eine Treppenfunktion mit Stammfunktion G.

Nach der Vorbemerkung können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $\boldsymbol{f}$ **rechtsseitig** und $\boldsymbol{g}$ **linksseitig** stetig ist.

Die Integrale $\int_{[a,b]} Fg$ und $\int_{[a,b]} fG$ approximiert man durch Riemannscher Summen zu Zerlegungen

$$Z = \{a = x_0 < \cdots < x_k = b\},$$

deren Feinheit $d(Z)$ hinreichend klein ist (vgl. Satz 3.1.31).

Man kann die Zerlegungspunkte zugleich als Stützpunkte wählen.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine $\delta > 0$, so daß aus $d(Z) < \delta$ stets folgt:

$$\Big| \int\limits_{[a,b]} F\,g - \sum_{\varkappa=1}^{k} F(x_\varkappa)g(x_\varkappa)\,(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})\Big| < \varepsilon$$
$$\Big| \int\limits_{[a,b]} f\,G - \sum_{\varkappa=1}^{k} f(x_{\varkappa-1})G(x_{\varkappa-1})\,(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})\Big| < \varepsilon$$

Man kann ohne Einschränkung solche Zerlegungen Z wählen, auf deren offenenen Teilintervallen $f|(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa)$ und $g|(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa)$ konstant sind, anderenfalls füge man die Sprungstellen von f und g als weitere Zerlegungspunkte hinzu.

Da f rechtsseitig und g linksseitig stetig ist, folgt:

$$\begin{aligned} f(x_{\varkappa-1}) &= f(x_{\varkappa-1}^{+}) \\ g(x_\varkappa) &= g(x_\varkappa^{-}), \\ F(x_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1}) &= f(x_{\varkappa-1})\,(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}), \\ G(x_\varkappa) - G(x_{\varkappa-1}) &= g(x_\varkappa)\,(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}). \end{aligned}$$

Für eine solche Zerlegung folgt durch *partielle Summation*:

$$\begin{aligned}
\sum_{\varkappa=1}^{k} F(x_\varkappa)g(x_\varkappa)\,(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) &= \sum_{\varkappa=1}^{k} F(x_\varkappa)(G(x_\varkappa) - G(x_{\varkappa-1}))\\
&= \sum_{\varkappa=1}^{k} F(x_\varkappa)G(x_\varkappa) - \sum_{\varkappa=0}^{k-1} F(x_{\varkappa+1})G(x_\varkappa)\\
&= F(x_k)G(x_k) - F(x_0)G(x_0) + \sum_{\varkappa=0}^{k-1}(F(x_\varkappa) - F(x_{\varkappa+1}))G(x_\varkappa)\\
&= F\,G\,\Big|_a^b - \sum_{\varkappa=1}^{k}(F(x_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1}))G(x_{\varkappa-1})\\
&= F\,G\,\Big|_a^b - \sum_{\varkappa=1}^{k} f(x_{\varkappa-1})G(x_{\varkappa-1})\,(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})
\end{aligned}$$

Also ist $\displaystyle\int_{[a,b]} F\,g = F\,G\,\Big|_a^b - \int_{[a,b]} f\,G.$

Beispiele 3.1.35 (Integral der Potenzfunktion x^n)
Wir berechnen **induktiv** die Stammfunktionen zu den Potenzen x^n:

$$\int_0^x \xi^n\,d\xi = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis.

$\boxed{n = 0\textbf{:}}$ $\displaystyle\int_0^x 1\,d\xi = x.$

$\boxed{n \Rightarrow n+1\textbf{:}}$ $\displaystyle\int_0^x \xi^{n+1}\cdot 1\,d\xi = \xi^{n+1}\cdot\xi\big|_0^x - \int_0^x (n+1)\xi^n\cdot\xi\,d\xi.$

Daraus folgt

$$(n+2)\int_0^x \xi^{n+1}\,d\xi = x^{n+2}.$$

Bezeichnung. Eine Funktion F heißt **unbestimmtes Integral** einer Funktion f, wenn für alle x_0, x_1 im Definitionsbereich von F und f gilt:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0)$$

Solche unbestimmten Integrale sind nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Man schreibt abkürzend

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Es gilt also für ein unbestimmtes Integral F von f:

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d(\xi).$$

Offensichtlich gilt die Formel der partiellen Integration für alle unbestimmten Integrale F von f und G von g:

$$\int\limits_{[a,b]} F\, g + \int\limits_{[a,b]} f\, G = F\, G\,\Big|_a^b$$

Beispiel.

$$\int x^{-n}\, dx = \frac{1}{-n+1}\, x^{-n+1} \quad \text{für } n = 2, 3 \ldots.$$

Beweis.

$\boxed{n = 2\text{:}}$ Vgl. Bsp. 3.1.27(3.) $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{x^2}\, d\xi = 1 - \frac{1}{x}.$

$\boxed{n \Rightarrow n+1\text{:}}$

$$\int_1^x \xi^{-(n+1)}\, d\xi = \int_1^x \xi^{-n+1} \xi^{-2}\, d\xi$$
$$= -\xi^{-n+1} \cdot \xi^{-1}\Big|_1^x - \int_1^x (n-1)\xi^{-n} \cdot \xi^{-1}\, d\xi.$$

Daraus folgt

$$-n \int_0^x \xi^{-(n+1)}\, d\xi = 1 - x^{n+2}.$$

Beispiele 3.1.36 $\int_1^x \log \xi\, d\xi = x \log x - x.$

$$\int_1^x \log \xi \cdot 1\, d\xi = \log(\xi)\, \xi\Big|_1^x - \int_1^x \frac{1}{\xi} \cdot \xi\, d\xi = x \log x - (x-1).$$

3.1.8 Integral der Umkehrfunktion

Bemerkung. Man veranschauliche die Aussage des folgenden Satzes und auch den Beweis mit einer Zeichnung.

Satz 3.1.37 (Integral der Umkehrfunktion)
1. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend mit Umkehrfunktion $g : [f(a), f(b)] \to [a, b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy = bf(b) - af(a).$$

2. Wenn f streng monoton fallend ist gilt die obige Formel für die Umkehrfunktion $g : [f(b), f(a)]$:

$$\int_{[a,b]} f - \int_{[f(b),f(a)]} g = bf(b) - af(a).$$

Beweis.1: f streng monoton wachsend: Es seien $Z = \{a = x_0 < x_1 \dots x_k = b\}$, $y_\varkappa := f(x_\varkappa)$, $(\varkappa = 1, \dots, k)$. Man erhält eine Einteilung $Z^* = \{f(a) = y_0 < y_1 < \dots < y_k = f(b)\}$ des Bildes. Man **addiere** die Riemannschen Summen von f und g:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\varkappa=1}^{k} f(x_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + \sum_{\varkappa=1}^{k} g(y_\varkappa)(y_\varkappa - y_{\varkappa-1}) \\
&\quad= \sum_{\varkappa=1}^{k} f(x_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + \sum_{\varkappa=1}^{k} x_\varkappa(f(x_\varkappa) - f(x_{\varkappa-1})) \\
&\quad= \sum_{\varkappa=1}^{k} f(x_\varkappa)x_\varkappa - f(x_{\varkappa-1})x_{\varkappa-1} \\
&\quad= f(x_k)x_k - f(x_0)x_0 = bf(b) - af(a).
\end{aligned}$$

Für eine Folge Z_n von Einteilung von $[a, b]$, deren Feinheit $d(Z_n) \to 0$, konvergiert auch die Feinheit der Bildeinteilung $d(Z_n^*) \to 0$. So folgt die Formel für die Integrale.

2: f streng monoton fallend: Es seien $Z = \{a = x_0 < x_1 \dots x_k = b\}$, $y_\varkappa := f(x_\varkappa)$, $(\varkappa = 1, \dots, k)$. Man erhält eine Einteilung $Z^* = \{f(b) = y_k < y_{k-1} < \dots < y_0 = f(a)\}$ von $[f(b), f(a)]$. Man **subtrahiere** die Riemannschen Summen von f und g:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\varkappa=1}^{k} f(x_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) - \sum_{\varkappa=0}^{k-1} g(y_{k-\varkappa})(y_{k-\varkappa} - y_{k-(\varkappa-1)}) \\
&\quad= \sum_{\varkappa=1}^{k} f(x_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + \sum_{\varkappa=1}^{k} g(y_\varkappa)(y_\varkappa - y_{\varkappa-1}) \\
&\quad= \sum_{\varkappa=1}^{k} f(x_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + \sum_{\varkappa=1}^{k} x_\varkappa(f(x_\varkappa) - f(x_{\varkappa-1})) \\
&\quad= \sum_{\varkappa=1}^{k} f(x_\varkappa)x_\varkappa - f(x_{\varkappa-1})x_{\varkappa-1} \\
&\quad= f(x_k)x_k - f(x_0)x_0 = bf(b) - af(a).
\end{aligned}$$

Also gilt die behauptete Gleichung (2.).

Beispiele 3.1.38 Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\int_0^y t^{\frac{1}{n}}\,dt = \tfrac{n}{n+1}\,y^{1+\frac{1}{n}}$.

Beweis.Für $0 < x$ und $y = x^n$ gilt

$$\int_0^x \xi^n\,d\xi + \int_0^y \eta^{\frac{1}{n}}\,d\eta, = xy$$

und somit

$$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \int_0^y \eta^{\frac{1}{n}}\,d\eta = x^{n+1}$$

Da $x = y^{\frac{1}{n}}$ ist, folgt

$$\int_0^y \eta^{\frac{1}{n}}\,d\eta = \frac{n}{n+1}\,y^{1+\frac{1}{n}}.$$

Übung.

1. Nun folgt induktiv $\int_0^x t^{1+\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}}\,dt = \frac{n}{2n+2}x^{2+\frac{2}{n}}$ usw.
   Und schließlich $\int_0^x t^r\,dt = \frac{1}{r+1}x^{r+1}$ für $1 \leqslant r \in \mathbb{Q}$.
2. Man folgere aus (1.), daß $\int_0^x t^r\,dt = \frac{1}{r+1}x^{r+1}$ für $0 \leqslant r < 1, r \in \mathbb{Q}$.
3. Man folgere aus $\int x^{-2}\,dx = -x^{-1}$, daß
   $$\int_1^y \frac{1}{\sqrt{\eta}}\,d\eta = 2(\sqrt{y} - 1).$$
   D.h. $\int x^{-\frac{1}{2}} = 2\,x^{\frac{1}{2}}$.
4. $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1}$ für $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$.
5. $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Satz 3.1.39 (Integral der Exponentialfunktion)
Für $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^y e^t\,dt = e^y - e^0$$

Bemerkung. Die Exponentialfunktion $y \mapsto e^y$ ist ein *unbestimmtes Integral* von sich selbst. Man schreibt abkürzend:

$$\int e^x\, dx = e^x + C.$$

Beweis. Für $1 < x$ und $y = \log x$ gilt

$$\begin{aligned} & x \log x - (x-1) + \int_0^y e^t\, dt \\ &= \int_1^x \log \xi\, d\xi + \int_{\log 1}^{\log x} e^t\, dt \\ &= x \log x - 1 \log 1 = x \log x \end{aligned}$$

Also folgt $\int_0^y e^t\, dt = x - 1 = e^y - 1$.
Im Fall $0 < x < 1$ gilt eine analoge Rechnung für $[x, 1]$:

$$\begin{aligned} & -x \log x - (1-x) + \int_y^0 e^t\, dt \\ &= \int_x^1 \log \xi\, d\xi + \int_{\log x}^0 e^t\, dt \\ &= 1 \log 1 - x \log x = -x \log x. \end{aligned}$$

Beispiele 3.1.40 (Approximation der Exp.-Funktion)
Durch partielle Integration erhalt man

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{\xi_0}\, d\xi_0 &= e^x - 1, \\ \int_0^x \int_0^{\xi_1} e^{\xi_0}\, d\xi_0\, d\xi_1 &= e^x - 1 - x \\ \int_0^x \int_0^{\xi_2} \int_0^{\xi_1} e^{\xi_0}\, d\xi_0\, d\xi_1\, d\xi_2 &= e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}, \\ &\dots \\ \int_0^x \int_0^{\xi_n} \cdots \int_0^{\xi_1} e^{\xi_0}\, d\xi_0\, d\xi_1 \dots d\xi_n &= e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\ . \end{aligned}$$

Da $e^{\xi_0} \leqslant \max\{1, e^x\}$ folgt (vgl. 2.1.13)

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \max\{1, e^x\} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

3.1.9 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Feststellung 3.1.41 *Es seien $f,g \in \mathcal{R}([a,b])$ und $g \geqslant= 0$. Mit den Größen*

$$m := \inf_{x \in [a,b]} f(x), \qquad M := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

gilt

$$m \int\limits_{[a,b]} g \leqslant \int\limits_{[a,b]} fg \leqslant M \int\limits_{[a,b]} g.$$

Bemerkung. Aus dem Zwischenwertsatz 2.5.14 folgt nun:

Satz 3.1.42 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Es seien $f[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g \in \mathcal{R}([a,b])$ und $g \geqslant 0$. Dann gibt es eine $x_0 \in [a,b]$, so daß

$$f(x_0) \int\limits_{[a,b]} g = \int\limits_{[a,b]} fg$$

Bezeichnung. Für $f,\, g \in \mathcal{R}(I)$ und feste x_0,$x_1 \in I$ bilde man die **iterierten Stammfunktionen**:

$$\begin{aligned} f^{(-1)} = F &: x \mapsto \textstyle\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi, \\ f^{(-n-1)} &: x \mapsto \textstyle\int_{x_0}^{x} f^{(-n)}(\xi)\, d\xi \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \\ g^{(-1)} = G &: x \mapsto \textstyle\int_{x_1}^{x} g(\xi)\, d\xi, \\ g^{(-n-1)} &: x \mapsto \textstyle\int_{x_1}^{x} g^{(-n)}(\xi)\, d\xi \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Feststellung 3.1.43 (n-fache partielle Integration)
Es seien $I \subset \mathbb{R}$, $f,g \in \mathcal{R}(I)$. Dann gilt für $a,b \in I$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &\int_a^b f^{(-n)}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi \\ &\quad = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(-n+k)} g^{(-k-1)} \Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b f(\xi)\, g^{(-n)}(\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

Beweis. $\boxed{n = 1\text{:}}$ Klar.

$\boxed{n \Rightarrow n+1\text{:}}$ Mit $G := g^{(-1)}$ folgt: $\displaystyle\int_a^b f^{(-(n+1))}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi$

$$
\begin{aligned}
&= f^{(-(n+1))} G\Big|_a^b - \int_a^b f^{(-n)}(\xi)\, G(\xi)\, d\xi \\
&= f^{(-(n+1))} G\Big|_a^b - \Bigg[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(-n+k)} G^{(-k-1)}\Big|_a^b \\
&\quad + (-1)^n \int_a^b f(\xi)\, G^{(-n)}(\xi)\, d\xi\Bigg] \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(-(n+1)+k)} g^{(-k-1)}\Big|_a^b \\
&\quad + (-1)^{(n+1)} \int_a^b f(\xi)\, g^{(-(n+1))}(\xi)\, d\xi.
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Formuliert man die folgende Feststellung mit Ableitungen statt mit Stammfunktionen, so heißt dies Resultat **Taylorformel mit Restglied** und ist einer der wichtigsten Sätze der Analysis:

Feststellung 3.1.44 (n-te Stammfunktion)
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in \mathcal{R}(I)$ und $a \in I$. Für eine n-ten Stammfunktion $f^{(-n)}$ von f und $x \in I$ gilt:

$$f^{(-n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(-n+k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x f(\xi) \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\xi.$$

*Ist f **stetig**, so gibt es ein ξ_0 zwischen a und x, so daß*

$$f^{(-n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(-n+k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + f(\xi_0) \frac{(x-\xi)^n}{n!}.$$

(vgl. Mittelwertsatz der Integralrechnung 3.1.42)

Beweis. Setzt man in Feststellung 3.1.43 $g = 1$ und $x_1 = b$ so erhält man die Stammfunktionen

$$g^{(-n)}(\xi) := (-1)^n \frac{(b-\xi)^n}{n!}.$$

Also folgt

$$
\begin{aligned}
f^{(-n)}(b) - f^{(-n)}(a) &= \int_a^b f^{(-n+1)}(\xi) \cdot 1\, d\xi \\
= -\sum_{k=0}^{n-2} &(-1)^k f^{(-n+1+k)}(a) \cdot (-1)^{k+1} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&+ (-1)^{n-1} \int_a^b f(\xi) \cdot (-1)^{n-1} \frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\xi.
\end{aligned}
$$

Verschiebt man den Summationsindex, so folgt

$$f^{(-n)}(b) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(-n+k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f(\xi)\frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\xi.$$

Beispiele 3.1.45 (Logarithmus-Reihe)
Für $0 < x$ gilt

$$\log x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k + \int_1^x (-1)^n \xi^{-(n+1)}(x-\xi)^n\,d\xi.$$

Für $0 < x \leqslant 2$ konvergiert die Folge der Integrale:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^x (-1)^n \xi^{-(n+1)}(x-\xi)^n\,d\xi \to 0.$$

Man schreibt:

$$\log x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k.$$

Für $x = 2$ erhält man die bemerkswerte alternierende Reihe:

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

3.1.10 Transformation des Integranden

Bemerkung. Wir wollen die Transformationsformel 3.1.20 für affine, monoton wachsende Transformationen verallgemeinern.

Eine affine Funktion G ist die Stammfunktion einer konstanten Funktion $g = c = const$:

$$G : x \mapsto \int_a^x c\,d\xi + d = cx + d.$$

Die Transformationsformel 3.1.20 für affine, monoton wachsende Transformationen

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(G(x))\,g(x)\,dx.$$

überträgt sich, auf Grund der Intervall-Additivität des Integrals, auf stetige, **stückweise affine**, monoton wachsende Transformationen und dann auf deren Grenzwerte.

Feststellung 3.1.46

Gegeben sei eine Funktionenfolge $(h_n)_n$ in $\mathcal{R}([a,b])$, die gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen eine Grenzfunktion $h \in \mathcal{R}([a,b])$ konvergiert.

Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt dann:

1. *$f \circ h_n \in \mathcal{R}([a,b])$.*
2. *Die Funktionenflge $(f \circ h_n)_n$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $f \circ h$.*

Satz 3.1.47 (Transformation des Integrals)

Es sei $g \in \mathcal{R}([a,b])$, $g \geqslant 0$, und G ein unbestimmtes Integral von g. Also ist G eine stetige, monoton wachsende Abbildung von $[a,b]$ auf $[G(a), G(b)]$.

Für jede stetige Funktion $f : [G(a), G(b)] \to \mathbb{R}$ gilt die ***Transformationsformel***

$$\int\limits_{[G(a),G(b)]} f = \int\limits_{[a,b]} (f \circ G) \cdot g.$$

In Differentialschreibweise:

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(G(x)) \cdot g(x)\,dx.$$

Die letztere Transformationsformel gilt auch ohne die Voraussetzung $g \geqslant 0$. Wir werden dies im nächsten Kapitel als Folgerung 3.2.23 der Kettenregel 3.2.10 zeigen.

Bemerkung zum Beweis:

1. Im Fall $G(a) = G(b)$ sind die Integrale in 3.1.47 gleich 0.
2. Fall $G(a) < G(b)$: Man Wähle eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_n$ in $\mathcal{R}([a,b])$, die gleichmäßig gegen g konvergiert und für die $t_n \geqslant 0$ ist (vgl. Korollar 2.8.20).

   Dann konvergieren die Stammfunktionen $T_n : x \to G(a) + \int_a^x t_n(\xi)\,d\xi$ gleichmäßig gegen G:

   $$T_n(x) - T_n(a) = \int_a^x t_n \to \int_a^x g = G(x) - G(a).$$

   Man kann ohne Einschränkung die t_n so wählen, daß

   $$T_n(b) - T_n(a) > 0 \quad \text{und} \quad T_n(b) = G(b)$$

   ist. Anderenfalls betrachte man die Folge ab einem n_0 und setze

   $$\tilde{t}_n := \frac{G(b) - G(a)}{T_n(b) - T_n(a)}\,t_n.$$

Beweis. Man wähle also eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_n$ mit Stammfunktionen $(T_n)_n$, so daß $t_n \geqslant 0$ und

$$\begin{aligned} \|t_n - g\| &\to 0, \qquad & \|T_n - G\| &\to 0, \\ T_n(a) &= G(a,) \qquad & T_n(b) &= G(b). \end{aligned}$$

Zu t_n gibt es eine Zerlegung

$$Z_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k_n} = b\}$$

auf deren offenenen Teilintervallen $t_n|(x_\varkappa, x_{\varkappa-1}) = c_\varkappa$ konstant ist. Man setze $y_\varkappa := T_n(x_\varkappa)$. Dann gilt nach 3.1.20

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\eta)\,d\eta &= \sum_{\varkappa=1}^{k_n} \int_{y_{\varkappa-1}}^{y_\varkappa} f(\eta)\,d\eta \\ &= \sum_{\varkappa=1}^{k_n} \int_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa} f(T_n(\xi))t_n(\xi)\,d\xi = \int_a^b f(T_n(\xi))\,t_n(\xi)\,d\xi \end{aligned}$$

Beispiele 3.1.48 Aus dem Transformationssatz 3.1.47 folgt die Gleichung:

$$\int_1^b \log(\sqrt{y}-1)\,dy = \int_0^{\sqrt{b}-1} \log x \cdot 2(x+1)\,dx \quad \text{für } b \geqslant 1.$$

Dabei wurde die folgende *Substitution* angewandt:

$$G(x) = (x+1)^2, \quad g(x) = 2(x+1)$$

Mit partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} \int_1^b \log(\sqrt{y}-1)\,dx &= \Big[\log(x)\cdot(x+1)^2\Big|_0^{\sqrt{b}-1} - \int_0^{\sqrt{b}-1} \frac{1}{x}(x+1)^2\,dx \\ &= \Big[\log(x)\cdot(x+1)^2 - \frac{x^2}{2} - 2x - \log x\Big|_0^{\sqrt{b}-1}. \end{aligned}$$

Beispiele 3.1.49 Die Zahlenfolge $(r_n)_n$ konvergiere gegen $a \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_n$:

$$f_n : x \mapsto x^{r_n} \quad \text{für } x \in (0,\infty)$$

auf jedem kompakten Teilintervall $[a,b] \subset (0,\infty)$ gleichmäßig gegen $f : x \mapsto x^a$.

Beweis. Dies folgt aus der Abschätzung:

$$|x^a - x^r| = \left|e^{a\log x} - e^{r\log x}\right| = \left|\int\limits_{r\log x}^{a\log x} e^t\,dt\right|$$
$$\leqslant |a-r||\log x|\max\{x^a, x^r\}$$

Beispiele 3.1.50 (Integral der Potenzfunktion)
Man zeige mit Hilfe der Substitution $\xi = G(\eta) = \eta^n$ und $g(\eta) = (n-1)\eta^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$):

1. Für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{m}{n} \neq -1$ gilt

$$\int_1^x \xi^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{1+\frac{m}{n}}\left(x^{1+\frac{m}{n}} - 1\right) \quad \text{für } x \in (0,\infty).$$

2. Für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$ gilt:

$$\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \quad \text{für } x \in (0,\infty).$$

Bemerkung. Wenn der Exponent $a \geqslant 0$ ist, so gilt (2.) für $x \in \mathbb{R}$.

3.2 Differentialrechnung

Bemerkung. Man kann die Differentiation unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachten:

Global als Umkehrung der Integration: Wie sieht man einer Funktion F an, ob sie eine Stammfunktion ist, und wie findet man ihren Integranden f?

Lokal als geometrisches Problem: Bestimmung der **Tangente** in einem Punkt an einen Funktionsgraphen.

Die Tangente ist eine affine Funktion.

Lokal als Approximationsproblem: Bestimmung der ***besten* Approximation** einer Funktion in der Umgebung eines Punkte durch eine **affine Funktion**

Wir beginnen mit der **lokalen** Beschreibung der Ableitung und leiten daraus die globalen Eigenschaften her.

3.2.1 Grenzwert des Differenzenquotienten

Bemerkung. Es seien I ein **offenes** Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $a \in I$ ein fester Punkt.

Für eine weiteren Punkt $x \in I$, $x \neq a$, bilde man die **Sekante** durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\, t + f(a) \quad \text{(Sekantengleichung).}$$

Die Frage ist, ob für $x \to a$ die Sekanten gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Wenn ja, heiße diese Grenzfunktion die **Tangente** an den Graphen von f im Punkte $(a, f(a))$.

Offensichtlich existiert die Tangente (die Grenzfunktion) genau dann, wenn der Grenzwert der **Steigung** der Sekanten

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \text{Steigung der Tangente}$$

existiert.

Bemerkung. Wir lösen uns von der geometrischen Sprechweise und nennen die Steigung der Sekante **Differenzenquotient**.

Definition 3.2.1 (Differenzenquotient)

Es seien I ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$.

Die Funktion

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{für } x \in I \setminus \{a\}$$

*heißt der **Differenzenquotient** von f an der Stelle a.*

Definition 3.2.2 (Ableitung in einem Punkt)

*Sei I ein offenes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar im Punkt** $a \in I$, wenn der Grenzwert*

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*existiert. In diesem Fall heißt $f'(a)$ die **Ableitung** von f an der Stelle a.*

Bemerkung. Manchmal ist es praktischer, den um a verschobenen Differenzenquotienten zu betrachten.

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{für } h \in (I - a) \setminus \{0\}$$

Man erhält dann die Ableitung als Grenzwert im Nullpunkt:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Bezeichnung 3.2.3 (Abgeleitete Funktion)

Es sei I ein offenes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar auf** I oder *differenzierbar im Intervall* I, wenn f in jedem Punkt des Intervalls I differenzierbar ist.

Dann ist die Ableitung f' eine Funktion auf I:

$$f' : I \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f' : x \mapsto f'(x) \quad \text{für } x \in I.$$

f' heißt die **abgeleitete Funktion** zu f oder kurz die **Ableitung** von f.

Man findet in Literatur weitere Bezeichnungen für die Ableitung, insbesondere, wenn $f'(x)$ für alle $x \in I$ existiert.

Bezeichnung 3.2.4 (für die Ableitung)

Differentialquotient: Es sei x die unabhängige Variable der Funktion f. Nach LEIBNITZ nennt man die Ableitung auch Differentialquotient und schreibt für die Ableitung im Punkt a

$$\left(\frac{d}{dx}f\right)(a) = \frac{df}{dx}(a) = \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=a} := f'(a).$$

Für die abgeleitete Funktion schreibt man

$$\frac{d}{dx}f = \frac{df}{dx} := f'.$$

Differentiations-Operator: $D : f \mapsto Df = D(f) := f'$ und $Df(a) = (Df)(a) := f'(a)$

Bemerkung.

1. Wenn man das Differential df richtig definiert, ist der Differentialquotient (siehe 3.2.32) wirklich ein Quotient und man schreibt:

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

2. Der Begriff Differential wirkt zunächst etwas *schillernd*, da man in Physikbüchern häufig kommentarlos für **kleine Änderungen** Δx die **Differenz** $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ mit dem **Differential** $df = f'(x)\,dx$ **identifiziert** und df als **infinitesimale** Änderung bezeichnet.

3. Wir führen die Differentiale und den Differentialquotienten deshalb erst am Ende des Kapitels ein, wenn die wesentlichen Eigenschaften der Ableitung geklärt sind.

   Dann klärt sich auch der oben angedeutete Gebrauch der Differentiale in der Physik.

Bezeichnung.

1. In der Physik werden nach NEWTON Ableitungen nach der Zeit mit einem Punkt bezeichnet. Bsp.

$$a(t) = \dot{v}(t)$$

   ist die Beschleunigung a als Ableitung der Geschwindigkeit v.

2. Ableitungen werden auch bezeichnet, indem man die Variable, nach der differenziert wird, als Index schreibt:

$$f_x := f' \quad \text{und} \quad f_{xx} = f''.$$

   Dies ist besonders bei **partiellen Ableitungen** verbreitet:

$$f_t - f_{xx} := \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \text{(Wärmeleitungsgleichung).}$$

Beispiele 3.2.5 (Ableitung von Potenz und Wurzel)

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$.
2. $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (0, \infty)$.

Beweis.

1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \neq a$ gilt

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k} \to na^{n-1} \quad \text{für } x \to a.$$

2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist der Grenzwert für $x \to a$ und $x \neq a$:

$$\frac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{x - a} = \frac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{(x^{\frac{1}{n}})^n - (a^{\frac{1}{n}})^n} = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^{\frac{k}{n}} a^{\frac{n-1-k}{n}} \Big)^{-1}$$
$$\to \big(na^{\frac{n-1}{n}} \big)^{-1}.$$

Feststellung 3.2.6 (differenzierbar ⇒ stetig)
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ an der Stelle $a \in I$ differenzierbar, dann ist f an der Stelle a stetig.

Bemerkung. 1. Die Umkehrung ist falsch, wie das Beispiel der Betragsfunktion zeigt:

$$f(x) := |x| \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

2. Es gibt Beispiele stetiger Funktionen auf einem Intervall, die in keinem Punkte differenzierbar sind.

Das erste Beispiel einer solchen Funktion wurde von K. Weierstrass 1861 veröffentlicht. Einige Jahrzehnte zuvor hatte bereits B. Bolzano ein derartiges Beispiel konstruiert.

3. Für ein einfaches Beispiel von T. Takagi (1903) einer nirgends differenzierbaren, stetigen Funktion vergleiche man Kaballo Beispiel 19.15 oder Koenigsberger Kapitel 9.11.

Beweis (differenzierbar ⇒ stetig).

Man schreibe f in der Form:

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \quad \text{für } x \in I \setminus \{a\}$$

und folgere

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a).$$

3.2.2 Rechenregeln für die Ableitung

Satz 3.2.7 (Rechenregeln der Ableitung)

Es sei I ein offenes Intervall. Die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien im Punkt $a \in I$ differenzierbar.

Dann sind auch die Funktionen

$$f + g, \quad f \cdot g \quad \textit{und, falls } g(a) \neq 0, \ \frac{f}{g}$$

an der Stelle a differenzierbar.

Es gelten die Rechenregeln:

Linearität: $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Produktregel: $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Bemerkung. 1. Man präge sich die Produktregel in dieser Reihenfolge ein:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Die Produktregel gilt auch für andere, nicht notwendig kommutative *Produkte.*

Beispiel: Funktionen mit Werten in den Matrizen und das Matrizenprodukt oder für das Skalarprodukt vektorwertiger Funktionen.

2. Wir führen auch den Beweis der Quotientenregel so, daß er sich leicht auf die Inversenbildung in anderen Produkten übertragen läßt.

Beweis (Rechenregeln der Ableitung).

Linearität: $\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}$

$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \to f'(a)+g'(a) \quad \text{für } x \to a.$$

Produktregel: $\dfrac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)}{x-a}$

$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \to f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

Quotientenregel: Es reicht, den Fall $\dfrac{1}{g}$ zu untersuchen.

Da $g(a) \neq 0$ ist, existiert $g(x)^{-1}$ in einer Umgebung von a.

$$\begin{aligned}\frac{g(x)^{-1}-g(a)^{-1}}{x-a} &= g(x)^{-1}\cdot\frac{g(a)-g(x)}{x-a}\cdot g(a)^{-1}\\ &\to -g(a)^{-1}\cdot g'(a)\cdot g(a)^{-1} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$

Bemerkung. Mit den Rechenregeln 3.2.7 kann man **Polynome** und **rationale Funktionen** differenzieren.

Beispiele 3.2.8 1. Man zeige induktiv:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

2. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt

$$\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}.$$

Beweis.

1. Der Fall $n = 1$ ist klar. Nun wende man die Produktformel an.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel:

$$(x^{-n})' = \left((x^n)^{-1}\right)' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

3.2.3 Kettenregel

Bemerkung. Wir formulieren die Definition der Ableitung so um, daß man nicht mehr den Grenzwert eines Quotienten untersucht. Dies bringt folgende Vorteile:

- Die Beweise zur Differenzierbarkeit von Kompositionen differenzierbarer Funktionen (Kettenregel) und der Ableitung der Umkehrfunktion vereinfachen sich sehr, da man nicht darauf achten muß, ob irgendwelche Nenner eine Nullstelle haben.
- Wir wollen später auch Funktionen, deren Variable ein Vektor ist, differenzieren. Den Differenzenquotienten kann man für solche Funktionen nicht bilden, da man durch Vektoren nicht teilen kann!

  Die Sätze und Beweise mit der äquivalenten Definition gelten sinngemäß auch für Funktionen von Vektoren.

Bemerkung. Es sei f differenzierbar im Punkte a.

Wir bezeichnen den verschobenen Differenzenquotienten und seinen Grenzwert bei $h = 0$ für $h \in \{I - a\}$ mit

$$\varphi : h \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} & \text{für } h \neq 0, \\ f'(a) & \text{für } h = 0. \end{cases}$$

Die Funktion $\varphi : \{I - a\} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $h = 0$ mit Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = f'(a).$$

Für die Differenz $\Delta f(a, h)$ der Funktionswerte von f in den Punkten $a + h$ und a gilt

$$\Delta f(a, h) := f(a+h) - f(a) = \varphi(h) \cdot h.$$

Diese Umformung führt uns zu dem folgenden Feststellung:

Lemma 3.2.9 (Äquivalenz zur Differenzierbarkeit)
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *f ist differenzierbar im Punkt a.*
2. *Es gibt eine in $h = 0$ stetige Funktion*

   $$\varphi : \{I - a\} \to \mathbb{R},$$

   so daß für alle $h \in \{I - a\}$ gilt:

   $$\Delta f(a, h) = f(a+h) - f(a) = \varphi(h) \cdot h.$$

Wenn dies erfüllt ist, dann ist $f'(a) = \varphi(0)$.

Beweis. $\boxed{1\Rightarrow 2.:}$ Vergleiche die Vorbemerkung.

$\boxed{2\Rightarrow 1:}$ Nach Voraussetzung existiert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \varphi(h) = \varphi(0)$$

Satz 3.2.10 (Kettenregel)
Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und

$$h : I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Funktionen. Wenn

> *f an der Stelle $a \in I$ differenzierbar ist und*
>
> *g an der Stelle $f(a) \in J$ differenzierbar ist,*

dann ist die Komposition $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ an der Stelle a differenzierbar. Es gilt die ***Kettenregel***

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Bemerkung. Die Ableitung der Komposition $g \circ f$ ist das Produkt der Ableitungen der äußeren Funktion g mit der Ableitung der inneren Funktion f:

$$\boxed{(g\circ f)' = \underset{\textbf{äußere Ableitung}}{(g' \circ f)} \cdot \underset{\textbf{innere Abbleitung}}{f'}}$$

Bemerkung. Die Kettenregel gilt auch für Abbildungen zwischen Vektorräumen. Deren Ableitungen sind Matrizen und das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ.

Man präge sich deshalb die Kettenregel in dieser Reihenfolge ein:

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)}$$

Beweis. Nach Lemma 3.2.9 gibt es eine in 0 stetige Funktion

$$\gamma : \{J - f(a)\} \to \mathbb{R},$$
$$\gamma(0) = g'(f(a)),$$
$$g(f(a)+k) - g(f(a)) = \gamma(k) \cdot k$$

und eine in $h = 0$ stetige Funktion $\varphi : \{I - a)\} \to \mathbb{R}$, so daß

$$\varphi(0) = f'(a)$$
$$f(a+h) - f(a) = \varphi(h) \cdot h.$$

Setzt man $k := f(a+h) - f(a)$ so folgt

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) - g(f(a)) &= \gamma(f(a+h) - f(a)) \cdot (f(a+h) - f(a)) \\ &= \gamma(f(a+h) - f(a)) \cdot \varphi(h) \cdot h. \end{aligned}$$

Da $h \mapsto \gamma(f(a+h) - f(a)) \cdot \varphi(h)$ stetig in $h = 0$ ist, ist nach Lemma 3.2.9 $g \circ f$ differentierbar im Punkte a und

$$(g \circ f)'(f(a)) = \gamma(0) \cdot \varphi(0) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Bemerkung. Wenn $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton ist, dann ist $f(I)$ ein offenes Intervall (vgl. 2.5.15).

Wenn f und die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar sind, so folgt aus derKettenregel $1 = \mathrm{id}' = (f^{-1} \circ f)' = \big((f^{-1})' \circ f\big) \cdot f$ und somit

$$(f^{-1})'(f(a)) = \big(f'(a)\big)^{-1}.$$

Satz 3.2.11 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton, $J = f(I)$ und $g : J \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion zu f. Es sei f im Punkt $a \in I$ differenzierbar.

Die Umkehrfunktion g ist genau dann an der Stelle $f(a)$ differenzierbar, wenn $f'(a) \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$(g)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Beweis (Ableitung der Umkehrfunktion).

$\boxed{\Rightarrow:}$ Man vergleiche die Vorbemerkung.

$\boxed{\Leftarrow:}$ Nach Lemma 3.2.9 gibt es eine in 0stetige Funktion φ mit:

$$\varphi : \{I - a\} \to \mathbb{R},$$
$$f(a+h) - f(a) = \varphi(h) \cdot h,$$
$$\varphi(0) = f'(a)).$$

Da $\varphi(0) = f'(a) \neq 0$ und f streng monoton ist, gilt $\varphi(h) \neq 0$.
Man definiere eine stetige Funktion $\gamma : \{J - f(a)\} \to \mathbb{R}$ durch:

$$k \mapsto h := g(f(a) + k) - a, \quad \gamma : k \mapsto (\varphi(h))^{-1}.$$

Man löse auf: $k = f(a+h) - f(a) = \varphi(h) \cdot h$ und erhält:

$$g(f(a)+k) - g(f(a)) = h = (\varphi(h))^{-1} \cdot k = \gamma(k) \cdot k.$$
$$\gamma(0) = (\varphi(0)^{-1} = (f'(a))^{-1}.$$

Nach Lemma 3.2.9 ist g im Punkte $f(a)$ differenzierbar.

3.2.4 Mittelwertsatz

Bemerkung. Wir betrachten in diesem Abschnitt Funktionen auf einem Intervall, die in **jedem Punkt** des Intervalls differenzierbar sind. Für diese Funktionen zeigen wir den Mittelwertsatz und den Schrankensatz.

Beispiele überall differenzierbarer Funktionen sind unbestimmte Integrale F zu stetigen Integranden f. In diesem Fall

- ist der Integrand $f = F'$ (siehe 3.2.12)
- entspricht der Mittelwersatz der Integralrechnung 3.1.42 dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung 3.2.16.
- entspricht die Beschränktheit des Integrals 3.1.16(3.) dem Schrankensatz 3.2.18.

Feststellung 3.2.12 (Ableit. eines unbest. Integrals)
Es seien I ein offenes Intervall, $f \in \mathcal{R}(I)$ und $F : I \to \mathbb{R}$ ein unbestimmtes Integral von f, d.h.

$$F(x) - F(c) = \int_c^x f(\xi)\, d\xi \quad \text{für alle } x,c \in I.$$

Dann ist F in jedem Stetigkeitspunkt a von f differenzierbar und es gilt dort

$$F'(a) = f(a).$$

Beweis (Ableitung eines unbest. Integrals).

Da f im Punkt $a \in I$ stetig ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$|f(\xi) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für alle } \xi \in I, \text{ mit } |\xi - a| < \delta.$$

Folglich gilt für $x \in I \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$:

$$\begin{aligned}\Big|\frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a)\Big| &= \Big|\frac{1}{x - a}\int_a^x (f(\xi) - f(a))\,d\xi\Big| \\ &< \frac{\varepsilon}{|x - a|}|x - a| = \varepsilon.\end{aligned}$$

D.h. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a)$.

Beispiele 3.2.13 (Ableitung von $\exp$**,** $\log$ **und Potenz)**

1. $(e^x)' = e^x \quad$ für $x \in \mathbb{R}$.
2. Für $a > 0$ gilt:
$$(a^x)' = \log(a)\, a^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$
3. $(\log x)' = \dfrac{1}{x} \quad$ für $x \in (0, \infty)$.
4. Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:
$$(x^a)' = a x^{a-1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung. (3.) gilt allgemeiner:

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Beweis (Ableitung von $\exp$**,** $\log$ **und Potenz).**

Man schreibe $\exp$ und $\log$ als Stammfunktionen und benutze die Feststellung 3.2.12:

1. $e^x = 1 + \displaystyle\int_0^x e^\xi\, d\xi \quad$ für $x \in \mathbb{R}$.
2. Es sei $a > 0$. Nach der Kettenregel gilt:
$$(a^x)' = \big(\exp(\log(a)x)\big)' = \log(a)\, \exp(\log(a)x) = \log(a)a^x.$$
3. $\log x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\xi}\, d\xi \quad$ für $x \in (0, \infty)$.

4. $(x^a)' = \big(\exp(a \log x)\big)' = \exp(a \log x) \cdot \dfrac{a}{x} = a x^{a-1}$.

Bemerkung Das folgende Beispiel zeigt, daß unbestimmte Integrale von Regelfunktionen und überall differenzierbare Funktionen verschieden Klassen sind.

Beispiele 3.2.14 1. $|x|$ ist Stammfunktion von $2H - 1$, H die Heaviside-Funktion (vgl 2.3.30(1.). Aber $|x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

2. Die Funktion

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \quad \text{für } x \neq 0 \;\text{ und } f(0) = 0$$

ist überall differenzierbar, aber die Ableitung

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \text{für } x \neq 0 \text{ und } f(0) = 0.$$

oszilliert im Nullpunkt (vgl. Wackelfunktion 2.3.30(5)) und ist daher keine Regelfunktion.

Bemerkung. Man zeichne ein Bild eines *'glatten'* Funktionsgraphen mit den unten angegebenen Eigenschaften.

Die Funktion hat ein **Maximum** oder ein **Minimum** im Inneren des Intervalls.

In diesem Punkt ξ ist die Tangente *waagerecht*, d.h. $f'(\xi) = 0$.

Lemma 3.2.15 (Satz von Rolle)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und die Einschränkung $f|(a, b)$ sei auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar.

Wenn $f(a) = f(b)$ ist, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Rolle, Michel (1652-1719)

Bemerkung. Die obige Voraussetzung an eine Funktion f wird uns noch häufig begegnen. Wir sagen kurz:

*f ist stetig auf dem Intervall und im **Inneren** (des Intervalls) differenzierbar.*

Beweis (Satz von Rolle).

Fall f konstant: Man wähle ein $\xi \in (a, b)$.

Fall f nicht konstant: f hat ein Maximum oder ein Minimum, das nicht auf einem der Randpunkte liegt.

Sei etwa $\xi \in (a, b)$ und $f(\xi)$ ein Minimum. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \begin{cases} \leqslant 0 & \text{für } x < \xi,\ x \in [a, b], \\ \geqslant 0 & \text{für } x > \xi,\ x \in [a, b], \end{cases}$$

und folglich

$$f(\xi)' = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = 0.$$

Im Falle eines Maximums hat $-f$ ein Minimum und es ist $-f'(\xi) = 0$.

Satz 3.2.16 (Mittelwertsatz der Differentialrechn.)
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und die Einschränkung $f|(a,b)$ sei auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar.
Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so daß

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b-a).$$

ist.

Lagrange, Joseph, Louis (1736-1813)

Bemerkung Geometrisch besagt der Mittelwertsatz, däß die Tangente im Punkte $(a, f(a))$ an den Graphen von f dieselbe Steigung hat, wie die Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

D.h. Tangente und Sekante sind *parallel*.

Beweis (Mittelwertsatz).
Der Fall $b = a$ ist trivial. Es sei also $a < b$:

Subtrahiert man die *Gleichung der Sekante* durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b.f(b))$ von der Funktion f, so erhält man eine Funktion φ, auf die man den Satz von Rolle anwenden kann:

$$\varphi : x \mapsto f(x) - \Big(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\Big).$$

Es gibt also ein $\xi \in (a,b)$ mit $\varphi'(\xi) = 0$. D.h.

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ .$$

Bemerkung. Aus dem Mittelwertsatz folgt unmittelbar das folgende einfache, aber sehr bedeutsame Korollar:

Korollar 3.2.17 (Charakterisierung konstanter Funkt.)
Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar im Innern von I.

Wenn die Ableitung verschwindet

$$f'(x) = 0 \quad \text{für alle } x \text{ im Innern von } I,$$

dann ist f konstant auf I.

Bemerkung. Der Mittelwertsatz gilt nur für **reellwertige** Funktionen.

Häufig benötigt man aber nur eine aus dem Mittelwertsatz folgende Abschätzung, den **Schrankensatz**. Diese Methode, den Mittelwertsatz zum Abschätzen einzusetzen, läßt sich weitgehend verallgemeinern.

Korollar 3.2.18 (Schrankensatz)
Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar im Innern von I.

Dann sind äuivalent:

1. *Die Ableitung ist beschränkt: $|f'| \leqslant L$.*
2. *f Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstante L:*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2| \quad \text{für } x_1, x_2 \in I.$$

Bemerkung. Aus dem Mittelwertsatz folgt das Monotoniekriterium.

Feststellung 3.2.19 (Monotonie-Kriterium)
Es sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar im Innern von I. Dann gilt

1. *f ist genau dann monoton wachsend, wenn $f' \geqslant 0$ ist.*
2. *Wenn $f' > 0$, dann ist f streng monoton wachsend.*

Bemerkung. Das Beispiel $x \mapsto x^3$ zeigt, daß in (2.) die Umkehrung nicht gilt.

Feststellung 3.2.20 (lokales Minimum)
Es seien I ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$f'(a) = 0.$$

Dann gilt:

1. *Wenn es ein $\delta > 0$ so gibt, daß*

$$f'|(a-\delta, a) < 0 \quad \textit{und} \quad f'|(a, a+\delta) > 0$$

*ist, dann hat f ein **lokales Minimum** im Punkt a, d.h.*

$$f|(a-\delta, a) > f(a) \quad \textit{und} \quad f(a) < f|(a, a+\delta).$$

2. *Wenn die zweite Ableitung $f''(a)$ existiert und $f''(a) > 0$, dann hat f im Punkte a ein lokales Minimum.*

Bemerkung. Durch Übergang zu $-f$ erhält man die entsprechende Charakterisierung eines **lokalen Maximums**.

Beweis (lokales Minimum).

1. Nach Feststellung 3.2.19(2.) ist

$$\begin{array}{ll} f|(a-\delta, a) & \text{streng monoton fallend,} \\ f|(a, a+\delta) & \text{streng monoton wachsend.} \end{array}$$

2. Nach Lemma 3.2.9 gibt es eine in $h = 0$ stetige Funktion $\Phi : \{I - a)\} \to \mathbb{R}$, so daß

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= f''(a), \\ f'(a+h) - f'(a) &= \Phi(h) \cdot h. \end{aligned}$$

Da Φ in 0 stetig und $\Phi(0) = f''(a) > 0$ ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\Phi(h) > 0 \quad \text{für } |h| < \delta.$$

Da $f'(a) = 0$ ist, sind die Vorausetzungen von (1.) erfüllt:

$$f'(a+h) \cdot h = \Phi(h) \cdot h^2 > 0 \quad \text{für } 0 < |h| < \delta.$$

Bemerkung 3.2.21 (Einfache Form: de L'Hospital)

Es sei I ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ seien im Punkte a differenzierbar.

Es seien $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$

Dann gilt

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

3.2.5 Hauptsatz der Integral- und Differential-Rechnung

Bemerkung. Die folgenden Fakten ergeben zusammengenommen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

- Zwei unbestimmte Integrale F_1 und F_2 einer Regelfunktion $f \in \mathcal{R}(I)$ unterscheiden sich nur um eine Konstante:
$$F_1(x) - F_1(a) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi = F_2(x) - F_2(a) \quad \text{für } x \in I$$
- Wenn F ein unbestimmtes Integral einer **stetigen** Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ist, dann ist F im Inneren von I differenzierbar und $F' = f$ (vgl. Feststellung 3.2.12)
- Zwei auf einem Intervall überall differenzierbare Funktionen mit gleicher Ableitung unterscheiden sich nur um eine Konstante (vgl. Korollar 3.2.17 zum Mittelwertsatz).

Satz 3.2.22 (Hauptsatz der Diff.- u. Int.-Rechnung)
Es seien I ein nicht entartetes Intervall und $f \in \mathcal{R}(I)$ und stetig im Inneren von I.

Für eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

1. *F ist stetig auf I und differenzierbar im Inneren von I mit Ableitung $F' = f$.*
2. *F ist ein unbestimmtes Integral von f:*
$$\int_a^x f(\xi)\, d\xi = F(x) - F(a) \quad \textit{für alle } a,\ x \in I.$$

Bemerkung.

1. Der Schluß $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ des Hauptsatzes erlaubt es , Integrale einer stetigen Funktion f dadurch zu berechnen, daß man zu f eine **primitive** Funktion F mit $F' = f$ findet oder **rät** (siehe Formelsammlungen).
2. In der deutschen Literatur wurde der Begriff **primitive** Funktion durch den Begriff **Stammfunktion** verdrängt. Im Englischen und Französichen heißt F *the primitive of f* bzw. *le primitive de f*.
3. Der **wichtigere** Schluß $\boxed{2 \Rightarrow 1}$ des Hauptsatzes erlaubt es, Funktionen mit vorgegebner stetiger Ableitung f zu **konstruieren**

   Dies ist ein erster Schritt zu Lösung von **Differentialgleichungen**. Umgekehrt nennt man Lösungen von Differentialgleichungen machmal auch *Integrale.*

Beweis (Hauptsatz der Diff.- u. Int.-Rechnung).

$\boxed{\textbf{1}\Rightarrow\textbf{2:}}$ Zu $f \in \mathcal{R}(I)$und festem $a \in I$ bilde man die Funktion

$$\Phi : x \mapsto \int_a^x f(\xi)\, d\xi \quad \text{für } x \in I.$$

Nach Feststellung 3.1.5 ist Φ auf jedem kompakten Teilintervall von I stetig. Da der Integrand f im Inneren von I stetig ist, ist Φ nach Feststellung 3.2.12 dort differenzierbar mit Ableitung $\Phi' = f$. Also ist

$$\Phi' - F' = f - f = 0$$

Nach Korollar 3.2.17 ist $\Phi - F$ konstant.

$\boxed{\textbf{2}\Rightarrow\textbf{1:}}$ Vergleiche Feststellung 3.2.12.

Bemerkung. Man kann den Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung auf Regelfunktionen erweitern, wenn man die Differenzierbarkeit in allen Punkten etwas abschwächt: (vgl. Koenigsberger Kap. 9.10 und 11.4)

Hauptsatz der Diff.-u. Integralr. für Regelfunktionen.

Es sei I ein nichtausgeartetes Intervall. Für $f \in \mathcal{R}(I)$ und $F : I \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

1. *F ist stetig und bis auf eine abzählbare Ausnahmemenge $A \subset I$ differenzierbar mit Ableitung*

$$F'(x) = f(x), \quad \textit{für } x \in I \setminus A.$$

2. *F ist unbestimmtes Integral von f:*

$$\int_a^b f(\xi)\, d\xi = F(x) - F(a) \quad \textit{für alle } a,\, x \in I.$$

Bemerkung. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung 3.2.22 und der Kettenregel 3.2.10 ergibt sich unmittelbar die Substitutionsregel (vgl. Satz 3.1.47):

Satz 3.2.23 (Substitution)

Es seien I und J Intervalle. Die Funktionen

$$J \xrightarrow{g} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

seien stetig und g stetig differenzierbar im Innern von I.

Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann ist $F \circ g$ eine Stammfunktion zu $(f \circ g) \cdot g'$.
D.h. für alle $a,\, b \in I$ gilt

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

Bemerkung. Für die Anwendungen beachte man die **Integralgrenzen** der beiden Integrale!

3.2.6 Grenzwertsätze für Folgen differenzierbarer Funktionen

Bemerkung. Es sei f der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge $(f_n)_n$ differenzierbarer Funktionen. Dann kann folgendes passieren:

- f nicht differenzierbar.
- f differenzierbar, aber $(f_n')_n$ konvergiert nicht gegen f'.
  Das typische Beispiel ist eine Folge von Schwingungen
  $$f_n(t) = \frac{1}{n}\sin(n^2 t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R},$$
  deren Amplitude $\frac{1}{n} \to 0$ und deren Frequenz $n^2 \to \infty$ geht. Dann geht $f_n \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, aber die Folge der Ableitungen $f_n'(t) = n\cos(nt)$ konvergent nicht gegen 0.

Satz 3.2.24 (Folgen differenzierbarer Funktionen)
Es sei I ein offenes Intervall und $f_n : I \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ seien stetig differenzierbar auf I. Es gelte:

(i) *Die Folge der Ableitungen $(f_n')_n$ konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $g : I \to \mathbb{R}$.*

(ii) *Die Konvergenz $f_n' \to g$ ist gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall von I.*

(iii) *Es gibt ein $a \in I$ so daß die Zahlenfolge $f_n(a)$ konvergiert.*

Dann gilt: (a) *Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$.*

(b) *f ist differenzierbar mit Ableitung $f' = g$.*

(c) *Auf jedem kompakten Teilintervall von I konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Aus dem Hauptsatz 3.2.22 folgt

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(\xi)\, d\xi \quad \text{für } x \in I.$$

Da die Folge $(f_n')_n$ auf jedem kompakten Teilintervall $J \subset I$ gleichmäßig gegen g konvergiert, ist nach Satz 2.8.6 $g|J$ stetig. Also ist g stetig auf I. Man setze

$$f(a) := \lim_{n\to\infty} f_n(a),$$
$$f : x \mapsto f(a) + \int_a^x g(\xi)\, d\xi.$$

Aus dem Hauptsatz folgt $f' = g$.

Nach Korollar 3.1.17 gilt für ein kompaktes Teilintervall $J \subset I$ mit a, $x \in J$:

$$\Big| \int_a^x f_n'(\xi)\, d\xi - \int_a^x g(\xi)\, d\xi \Big| \leqslant |J| \max_{\xi \in J} |f_n'(\xi) - g(\xi)| \to 0$$

Also konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig auf J gegen f.

Für die Beispiele brauchen wir das Majorantenkriterium.

Satz 3.2.25 (Majorantenkriterium)

Gegeben seien eine Folge $(a_n)_n$ nichtnegativer Zahlen und eine Funktionenfolge $f_n : I \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$. Es gelte

1. *Die Folge der Partialsummen der a_n ist beschränkt:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M < \infty \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

2. *Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist $|f_n| \leqslant a_n$.*

Dann konvergiert die Funktionenfolge $(s_n)_n$ der Partialsummen der $(f_n)_n$:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} f_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

***gleichmäßig** auf I.*

Beweis (Majorantenkriterium).

Da die monoton wachsende Folge der Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} a_k$ beschränkt ist, ist sie eine Cauchyfolge (vgl. Satz 2.2.11) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so daß

$$\sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon \quad \text{und nach Vor. (2.)} \quad |f_k| \leqslant a_k$$

für $k, m, n \geqslant n_0$. Dann gilt für $x \in I$ und $n > m \geqslant n_0$

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \Big|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\Big| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

Also ist das Cauchysche Konvergenzkriterium 2.8.11 für gleichmäßige Konvergenz erfüllt.

Beispiele 3.2.26 (Potenzreihe des Logarithmus)

Man setze

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$
$$f_n' : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \begin{cases} \frac{1-(-1)^n x^n}{1+x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \\ n & \text{für } x = -1. \end{cases}$$

Für $x \in (-1, 1)$ konvergiert $f_n'(x) \to g(x) := \frac{1}{1+x}$ gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall $[-r, r] \subset (-1, 1)$:

$$|f_n(x) - g(x)| \leqslant \frac{r^n}{1-r} \to 0 \quad \text{für } x \in [-r, r].$$

Da $f_n(0) = 0$ konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gegen die Stammfunktion von g (vgl. mit Beispiel 3.1.45)

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \text{für } x \in (-1, 1).$$

Beispiel (Potenzreihe der Exponentialfunktion).

Man setze

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $f_n' = f_{n-1}$ und $1 + \int_0^x f_n(\xi)\, d\xi = f_{n+1}(x)$.

In Beispiel 3.1.40 hatten wir gezeigt:

$$\Big| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \Big| \leqslant \max\{1, e^x\} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert also gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall gegen die Exponentialfunktion.

Aus dem Grenzwertsatz 3.2.24 erhalten wir nun die bekannte Tatsache, daß die Ableitung der Exponentialfunktion die Exponentialfunktion ist.

Beispiele 3.2.27 (Potenzreihe von $\sin x$ und $\cos x$)

Für die Grenzwerte $\sin x$ und $\cos x$ der beiden konvergenten Reihen

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x & \sin 0 &= 0, \\
(\cos x)' &= -\sin x & \cos 0 &= 1.
\end{aligned}$$

Beweis (Potenzreihe von $\sin x$ und $\cos x$).

Setzt man – nach dem Vorbild der Exponentialreihe –

$$\begin{aligned}
s_n : x &\mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \\
c_n : x &\mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

dann gilt $s_n' = c_n$ und $c_n' = -s_{n-1}$. Aus der Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}\, |x|^{2k+1} \leqslant \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{|x|^k}{k!} \leqslant \exp|x|,$$

folgt nach 3.2.25, daß $(s_n)_n$ und analog $(c_n)_n$ auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig konvergiert. Nach Satz 3.2.24 haben die Grenzfunktionen die gewünschten Eigenschaften:

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \quad \text{und} \quad \cos x = \lim_{n\to\infty} c_n(x).$$

3.2.7 Ableitung als lineare Approximation

Bemerkung. Man schreibe nach Lemma 3.2.9:

$$\begin{aligned}\Delta f(a,h) &= f(a+h) - f(a) = \varphi(h)\cdot h\\ &= \varphi(0)\cdot h + \big((\varphi(h)-\varphi(0)))\cdot h\big)\end{aligned}$$

Mit $\varphi(0) = f'(a)$ und $r(h) := (\varphi(h)-\varphi(0)))\cdot h$ erhält man:

$$\Delta f(a,h) = f(a+h) - f(a) = f'(a)\cdot h + r(h).$$

Die lineare Abbildung $\mathbb{R} \ni h \mapsto f'(a)\cdot h$ approximiert die Differenz $\Delta f(a,h)$ in einer Umgebung von $h = 0$. D.h., für das **Restglied** $r(h)$ gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = \lim_{h\to 0} |\varphi(h) - f'(a)| = 0$$

Man sagt, das **Restglied** $r(h)$ geht für $h \to 0$ **schneller als linear** gegen 0.

Bemerkung. Für die gängigen Funktionen gilt sogar

$$|r(h)| \leqslant c\,|h|^2$$

mit einer Konstante $c \in [0,\infty)$

Bemerkung 3.2.28 (quadratisches Restglied)

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion. Zu $a \in I$ wähle man $\delta > 0$, so daß $[a-\delta, a+\delta] \subset I$.

Dann gilt für alle $h \in \{I - a\}$ mit $|h| \leqslant \delta$ $r(h)$ die Abschätzung des Restgliedes:

$$|r(h)| \leqslant \max_{|\chi|\leqslant\delta} |f''(a+\chi)|h^2.$$

Beweis (quadratisches Restglied).

Es seien g eine stetige Funktion und $g^{(-1)}$, $g^{(-2)}$eine erste bzw. zweite Stammfunktion. Nach der Taylor-Formel 3.1.44 gibt es zu jedem x ein ξ_0 zwischen a und x, so daß

$$g^{(-2)}(x) = g^{(-2)}(a) + g^{(-1)}(a)(x-a) + g(\xi_0)\frac{(x-a)^2}{2!}\ .$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes 3.2.22 kann man dies umformulieren:

Für eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, a und $h \in \{I - a\}$ gibt es ein ξ_0 zwischen a und $a + h$, so daß

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi_0)}{2!}h^2.$$

Hieraus folgt unmittelbar die behauptete Absch"atzung des Restgliedes.

Die Formulierung der Differenzierbarkeit als lineare Approximation ist der Schlüssel für die vielen Anwendungen der Differentialrechnung in Naturwissenschaft und Technik.

Satz 3.2.29 (Ableitung als lineare Approximation)

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $a \in I$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *Die Funktion f ist differenzierbar in $a \in I$.*
2. *Es gibt eine* ***lineare Abbildung*** *$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Funktion $r : \{I - a\} \to \mathbb{R}$, genannt* ***Restglied****, derart, daß für $h \in \{I - a\}$ gilt:*

$$\Delta f(a,h) := f(a+h) - f(a) = L(h) + r(h),$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

In diesem Fall ist $L(h) = f'(a) \cdot h$.

Beweis (Ableitung als lineare Approximation).

$\boxed{\textbf{1}\Rightarrow\textbf{2:}}$ Wir hatten eingangs aus Lemma 3.2.9 gefolgert, daß die Ableitung eine lineare Approximation mit den gewünschten Eigenschaften des Restgliedes liefert.

$\boxed{\textbf{2}\Rightarrow\textbf{1:}}$ Aus (2.) folgt für den Differenzenquotienten

$$\left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{L(h)}{h}\right| = \frac{|r(h)|}{|h|} \to 0$$

für $h \to 0$. Eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Form

$$L(h) = l \cdot h$$

mit einem $l \in \mathbb{R}$ und somit existiert die Ableitung $f'(a) = l$.

Ausblick. Angesichts des simplen Beweises sieht die Formulierung und die Unterscheidung zwischen der linearen Abbildung $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der Zahl $f'(a) = l$ *aufgebläht* aus.

Das liegt daran, daß wir bisher nur den **eindimensionalen** Fall $\mathbb{R}^1$ mit einem **festem Basisvektor** betrachten.

- Diese Begriffsbildung läßt sich jedoch sofort auf $\boldsymbol{n}$ **Dimensionen** übertragen: L wird eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen und die Ableitung $f'(a) = l$ die zugehörige Matrix bezüglich einer Basis.
- Weiterhin läßt sich diese Begriffsbildung für Funktionen auf **Kurven** übertragen. Die **Tangentialgerade** in einem Punkt der Kurve übernimmt die Rolle des Vektorraumes $\mathbb{R}^1$.
- Der nächste Schritt sind dann **Flächen** und die n-dimensionalen Gebilde, die **Mannigfaltigkeiten**.

3.2.8 Rechnen mit Differentialen

Bemerkung.

- Die Auffasung der Ableitung als lineare Approximation klärt, was das **Differential** df einer auf einem Intervall I differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sein soll.
- In der Lehrbuchliteratur wird die Einführung des Differentials häufig bis zur Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variabler aufgeschoben.
- In den Anwendungsfächern ist das **formale hantieren** mit Differentialen – da sehr suggestiv – üblich und später wird es auch in der Mathematik benutzt.
- Zur Vereinheitlichung der Anwendungen und Schreibweisen, setzen wir von vornherein voraus, das das f, zu dem man das Differential df bildet, stetig differenzierbar ist.

Bezeichnung 3.2.30 (Differential einer Funktion)

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei auf ganz I (stetig) differenzierbar. Zu jedem Punkt $a \in I$ gehört gemäß Satz 3.2.29 die lineare Abbildung

$$h \mapsto f'(a) \cdot h \quad \text{für } h \in \mathbb{R},$$

die wir das **Differential** von f im Punkt a nennen und folgendermaßen bezeichnen:

$$df(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h \mapsto df(a)(h) := f'(a) \cdot h.$$

Bemerkung. (Das Differential ist eine Abbildung)

1. Das Differential df einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ordnet jedem Punkt $a \in I$ die lineare Abbildung (Linearform) $df(a) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ zu.
$$df : a \mapsto df(a) \quad \text{für } a \in I.$$
df ist eine Abbildung von I in den Raum $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R})$ der **Linearformen** auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^1$.

   Man kann df als Funktion von zwei Variablen auffassen:
$$\begin{aligned} df &: I \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}, \\ df &: (a, h) \mapsto df(a)(h) = f'(a) \cdot h. \end{aligned}$$

2. In jedem Punkte $a \in I$ gilt die lineare Approximation
$$\Delta f(a, h) = df(a)(h) + r_a(h)$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{r_a(h)}{|h|} = 0.$$

Bemerkung. (Rechnen mit Differentialen)

1. Wir erklären das **Rechnen** mit Differentialen. Im eindimensionalen Fall, d.h. der Definitionsbereich $I \subset \mathbb{R}^1$, handelt es sich lediglich um andere Schreibweisen für die zuvor gewonnenen Ergebnisse.

2. **Hinweis:** Im Fall von Funktionen von $\boldsymbol{n}$ **Variablen** gelten die Formeln, trotz analoger Bezeichnungen, nicht ganz

   so einfach weiter (siehe Analysis II).

   - Das Produkt einer Funktion mit einem Differential ist i. a. kein Differential einer Funktion.
   - Der Begriff **Differentialquotient** macht keinen Sinn mehr.
   - Die Integrale werden durch entsprechende **höherdimensionale Integralformeln** ersetzt.

Bezeichnung (Differential der identischen Abb.)

Zu der identischen Abbildung des Intervalls I gehört das Differential $d\,\mathrm{id}_I(a)$. Schreibt man die identische Abbildung als x, so ist $dx = d\,\mathrm{id}_I$ und
$$dx(a) : h \mapsto dx(a)(h) = 1 \cdot h = h.$$
Es gilt also $df(a)(h) = f'(a) \cdot h = f'(a) \cdot dx(a)(h)$, kurz:
$$df = f' \cdot dx.$$
Alle Differentiale sind von der Form
$$\textbf{Funktion} \cdot dx.$$

Bemerkung. Die identische Abbildung und ihr Differential müssen nicht x und dx heißen. Man kann jeden anderen Buchstaben, der nicht mißverständlich ist, wählen. Man sollte nur die Bezeichnung beibehalten!

Bezeichnung 3.2.31 (Produkt: Funktion· Differential) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f,\, g : I \to \mathbb{R}$ stetig und f stetig differenzierbar.

Man erklärt ein **Produkt** von Funktionen mit Differentialen, das wieder ein Differential ergibt:

Man wähle eine Stammfunktion H von gf'. Dann sei

$$g\,df = g \cdot df := gf' \cdot dx = H' \cdot dx = dH.$$

Bemerkung. 1. Das Produkt ist **wohldefiniert**.

2. Das Produkt ist assoziativ, distributiv und kommutativ $f\,dg = (dg)f$. Bevorzugt wird $f\,dg$ geschrieben.

3. Beispiel: $df = f' \cdot dx$.

4. Produktformel: $d(f\,g) = f \cdot dg + g \cdot df$.

5. Kettenregel: $d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot dg$.

Bezeichnung 3.2.32 (Differentialquotient)

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f,\, g : I \to \mathbb{R}$ sei auf ganz I differenzierbar.

Wenn $g'(a) \neq 0$ für alle $a \in I$, so gilt für die Differentiale $df = f'\,dx$ und $dg = g'\,dx$ die Beziehung:

$$df = \frac{f'}{g'} \cdot dg.$$

Da das Produkt kommutativ ist, definiert man in diesem Fall, wie bei Zahlen, den **Differentialquotienten**

$$\frac{df}{dg} : a \mapsto \frac{df}{dg}(a) := \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \text{für } a \in I.$$

Bemerkung. Speziell gilt also für $f : x \mapsto f(x)$

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a).$$

Bezeichnung (Integral eines Differentials).

Es seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Innneren stetig differenzierbar. Man setzt dann

$$\int_a^b f\,dg := \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Das obige Integral $\int_a^b f\,dg$ ist ein Spezialfall eines **Riemann-Stieltjes Integrals**.

Bemerkung (Zum Hauptsatz der Diff.- u. Int.-Rechn. Den Hauptsatz 3.2.22 kann man folgendermaßen kurz formulieren.

Es sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren des Intervalls stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b dF = F(b) - F(a).$$

Bemerkung (Zur Substitution von Integralen).

Es seien I und J Intervalle. Die Funktionen

$$J \xrightarrow{g} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar. Dann gilt

$$d(f \circ g) = (f' \circ g)g'\,dx = (f' \circ g)\,dg.$$

Für eine stetige Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ gilt (vgl. Satz 3.2.23)

$$\int_{g(a)}^{g(b)} h\,df = \int_a^b (h \circ g)\,d(f \circ g).$$

Für die identische Funktion x gilt $d(x \circ g) = dg$ und somit speziell

$$\int_{g(a)}^{g(b)} h\,dx = \int_a^b (h \circ g)\,dg.$$

Bemerkung. (Infinitesimale Größen)

Wie verträgt sich diese Definition des Differentials mit dem anschaulichen Gebrauch des Differential in den Naturwissenschaften?

Man betrachtet dort eine physikalische Größe f, die von einem Parameter x abhängt.

Man spricht von der **infinitesimalen Änderung** df, die f erfährt, wenn der Parameter x sich um einen *verschwindend kleinen* (infinitesimalen) Wert dx ändert.

Vergleichen wir dies mit der Definition des Differentials:

- In dieser Sprechweise sind die Variablen nicht angegeben:
  - der Punkt x_0, in dem sich das System befindet,
  - die Änderung $\Delta x(x_0, h) = (x_0 + h) - x_0 = h$
    Man schreibt für die Änderung h kurz Δx.

- Die Differentiale dx und df sind mit ihrem Funktionswerten identifiziert:

$$dx = dx(x_0)(\Delta x) = \Delta x, \quad df = df(x_0)(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Das Differential $df = df(x_0)(\Delta x)$ ist linear in der Variablen Δx, ändert sich also **proportional** zu Δx. Wenn Δx sehr klein wird, wird eben $df = df(x_0)(\Delta x)$ im selben Maße klein. Das ist die Deutung des Begriffes **infinitesimal Größe**.

Die Differenz Δf und das Differential df unterscheiden sich nur um das Restglied:

$$\Delta f - df = \Delta f(x_0, \Delta x) - df(x_0)(\Delta x) = r_{x_0}(\Delta x).$$

Der Unterschied geht schneller als linear – in den praktischen Fällen meist sogar quadratisch – gegen Null.

Diese *beliebig kleine Unterschied* ist nicht Null, wird aber für die betreffende physikalische Argumentation klein genug gewählt. In diesem Sinne gilt die *Gleichung* $\Delta f = df$.

3.3 Trigonometrische Funktionen

Bemerkung. Die Funktionen cos und sin wurden bereits kurz im Beispiel 3.2.27 als Potenzreihen eingeführt.

- Die Eigenschaften des **Sinus** und des **Cosinus** werden aus ihren Ableitungseigenschaften hergeleitet:

$$\cos' = -\sin\,, \qquad \sin' = \cos\,.$$

  Die Funktionen $\cos t$ und $\sin t$ sind also Lösungen der **freien Schwingungsgleichung**.

- Aus der Form der Schwingungsgleichung folgen die **Eindeutigkeit** der Lösung des Anfangswertproblems, die **Potenzreihenentwicklung** der Lösungen, die Periodizität und andere trigonometische Formeln.

  Die Funktionen $\cos t$ und $\sin t$ sind periodisch mit der Perode 2π.

- Die Punkte $(\cos t, \sin t)$ liegen auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1$. Für das Intervall $(-\pi, 2\pi]$ ist die Abbildung

$$(-\pi, \pi] \ni t \mapsto \mathbb{S}^1$$

  bijektiv. Die Umkehrabbildung heißt **Argument-Funktion** $\arg(x, y)$

- Der Kreis ist orientiert: er wird im **mathematischen Drehsinn** entgegengesetz zum Uhrzeigersinn durchlaufen. Die Argumentfunktion ist streng monoton wachsend.

  Ein Kreisbogen hat, wie ein Intervall, einen Anfangs- und einen Endpunkt.

- Zur Definition der Länge eines Kreisbogens betrachtet man den oberen und unteren Halbkreis jeweils als Graphen einer differenzierbaren Funktion und definiert die **Kurvenlänge** dieser Graphen als **Bogenlänge**.

- Zwischen Argument-Funktion und Bogenlänge auf dem Einheitskreis besteht die folgende Beziehung:

  Die Länge eines Kreisbogens mit Anfangspunkt P und Endpunkt Q, der nicht den Punkt $(-1, 0)$ enthält, ist die Differenz der Argumente vom Endpunk und Anfangspunkt des Kreisbogens:

$$\mathit{Länge}(\overset{\frown}{PQ}) = \arg Q - \arg P$$

- Das Argument $\arg P$ eines Punktes P nennt man auch den **Winkel** der Geraden vom Ursprung O durch den Punkt P gegen die positive x-Achse. Der Winkel wird im **Bogenmaß** gemessen.

  Man kann nun die hergebrachte Beschreibung der trigonometrischen Funktionen auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ als **Winkel-Funktionen** geben.

- Im nächsten Kapitel (Analysis II) werden dann die **komplexen Zahlen** und die Exponentialfunktion im Komplexen eingeführt.

  Im Komplexen lassen sich Beziehungen unter den trigonometrischen Funktionen, weiter vereinheitlichen und vereinfachen.

3.3.1 Harmonische Schwingungen

Bemerkung. Die Schwingungsgleichung ist eine **lineare Differentialgleichung** zweiter Ordnung bzw. ein **System** von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung.

Bemerkung und Bezeichnung 3.3.1

1. Die Funktionen $u : t \mapsto \cos(t)$ und $v : t \mapsto \sin(t)$ (vgl. 3.2.27) sind Lösungen der **Schwingungsgleichung**:

   $$u'' + u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} u' & = -v, \\ v' & = u. \end{array}$$

   mit den **Anfangswerten** zur Zeit $t = 0$

   $$u(0) = 1,\ u'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(0) = 1,\ v(0) = 0.$$

2. Wenn man in der linken Gleichung $v := -u'$ setzt, erhält man die rechte und umgekehrt.

Bemerkung.

1. Physikalischen Deutung der Schwingungsgleichung:

   - u Auslenkung eines Massenpunktes der Masse m aus der Ruhelage.
   - **Rückstellkraft** ist proportional zur Auslenkung: $F = -Du$. Es wirken keine weiteren Kräfte ein.
   - u' Geschwindigkeit, u"Beschleunigung.
   - **Newtonsches Kraftgesetz**: $mu'' = -Du$. Zur Vereinfachung sind $m = 1$ und $D = 1$ gesetzt.

   Die Abbildung $t \mapsto (u(t), u'(t)) \in \mathbb{R}^2$ durchläuft im Phasenraum $\mathbb{R}^2$ eine Kreislinie im Uhrzeigersinn.

2. Wir haben $v = -u'$ gesetzt, damit die Abbildung

   $$t \mapsto (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$$

   die Kreislinie im **mathematischen Drehsinn** durchläuft.

Feststellung 3.3.2 (Schwingungsgleichung ist linear)
Die Schwingungsgleichung

$$\begin{aligned} u' &= -v, \\ v' &= u. \end{aligned}$$

*ist **linear**. D.h., sind u_1,v_1 und u_2,v_2 Lösungen (mit unterschiedlichen Anfangswerten), dann ist auch jede **Linearkombination**:*

$$\begin{aligned} &\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \\ &\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \end{aligned}$$

mit Konstanten α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, wieder eine Lösung der Schwingungsgleichung.

Beispiele 3.3.3 (Anfangswertprobleme)

1. $u : t \mapsto \cos t$, $v : t \mapsto \sin t$ ist Lösung der Schwingungsgleichung mit den Anfangswerten:

$$u(0) = 1,\ v(0) = 0.$$

2. $\tilde{u} : t \mapsto -\sin t$, $\tilde{v} : t \mapsto \cos t$ ist Lösung der Schwingungsgleichung mit den Anfangswerten:

$$\tilde{u}(0) = 0,\ \tilde{v}(0) = 1.$$

3. Die Schwingungsgleichung mit den Anfangswerten:

$$u_{u_0,v_0}(0) = u_0,\ v_{u_0,v_0}(0) = v_0 \quad \text{mit } u_0,v_0 \in \mathbb{R},$$

hat die als Lösung die eine Linearkombination der Lösungen von (1.) und (2.):

$$\begin{aligned} u_{u_0,v_0} &: t \mapsto u_0 \cos t - v_0 \sin t \\ v_{u_0,v_0} &: t \mapsto u_0 \sin t + v_0 \cos t \end{aligned}$$

Bemerkung 3.3.4 (Energie konstant)

1. Die Funktion E heißt die Energie der Schwingung:

$$E := u^2 + v^2$$

E ist konstant:

$$E' = 2uu' + 2vv' = 0 \quad \Rightarrow \quad E = E(0).$$

2. Für die Lösung des Anfangswertproblems 3.3.1(1.)

$$u(0) = 0,\ v(0) = 1$$

gilt $u^2 + v^2 = 1$, d.h $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$.

Feststellung 3.3.5 (Eindeutigkeit der Lösung)
Die Lösung der Schwingungsgleichung ist durch die Anfangswerte eindeutig bestimmt.

Beweis (Eindeutigkeit der Lösung).
Es seien u_1,v_1 und u_2,v_2 Lösungen der Schwingungsgleichung mit jeweils gleichen Anfangswerten. Dann ist die Differenz eine Lösung mit Anfangswerten Null (vgl. 3.3.2)

$$\begin{aligned} u &:= u_1 - u_2, & u(0) &= u_1(0) - u_2(0) = 0, \\ v &:= v_1 - v_2, & v(0) &= v_1(0) - v_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Man bilde die Funktion (Energie)

$$E := u^2 + v^2$$

Dann folgt nach Korollar 3.2.17:

$$E' = 2uu' + 2vv' = 0 \quad \Rightarrow \quad E = E(0) = 0.$$

Also sind $u = 0$, $v = 0$ und somit $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$.

Bemerkungen und Beispiele 3.3.6

1. Die Schwingungsgleichung 3.3.1 mit den Anfangswerten

   $$u(0) = 1,\ v(0) = 0$$

   hat die Lösungen $u(t) = \cos t$, $v(t) = \sin t$ und:

   $$\tilde{u}(t) := u(-t) \quad \text{und} \quad \tilde{v}(t) := -v(-t).$$

   Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt:
   cos ist eine **gerade Funktion**,
   sin ist eine **ungerade Funktion**.

2. Die Schwingungsgleichung mit den Anfangswerten:

   $$u_{u_0,v_0}(0) = u_0,\ v_{u_0,v_0}(0) = v_0 \quad \text{mit } u_0,v_0 \in \mathbb{R},$$

   hat die **eindeutige** Lösung

   $$\begin{aligned} u_{u_0,v_0} &: t \mapsto u_0 \cos t - v_0 \sin t \\ v_{u_0,v_0} &: t \mapsto u_0 \sin t + v_0 \cos t \end{aligned}$$

Bemerkung. Man approximiert Lösungen von Differentialgleichungen durch Näherungen, die man durch Integrieren verbessert. Im Fall der Schwingungsgleichung sieht das so aus:

Für das Anfangswertproblem 3.3.1(1.) $u(0) = 1$, $v(0) = 0$ gilt $\cos t = u(t) \leqslant 1$. Durch sukzessive Integration über $[0, t]$ folgt:

$$\begin{array}{lcr}
v' = u,\ v(0) = 0 & \Rightarrow & v(t) \leqslant t \\
u' = -v,\ u(0) = 1 & \Rightarrow & 1 - \dfrac{t^2}{2} \leqslant u(t) \\
v' = u,\ v(0) = 0 & \Rightarrow & t - \dfrac{t^3}{3!} \leqslant v(t) \\
u' = -v,\ u(0) = 1 & \Rightarrow & u(t) \leqslant 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{4!} \\
v' = u,\ v(0) = 0 & \Rightarrow & v(t) \leqslant t - \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^5}{5!} \\
u' = -v,\ u(0) = 1 & \Rightarrow & 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{4!} - \dfrac{t^6}{6!} \leqslant u(t)
\end{array}$$

Bemerkung 3.3.7 (Sukzessive Approximation)

Integriert man die Abschätzung $\cos(t) \leqslant 1 \quad$ für $t \in \mathbb{R}$, **sukzessive** über das Intervall $[0, t]$, so erhält man induktiv für $n = 0, 1, \dots$ und $t > 0$ die Abschätzungen:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, t^{2k} \leqslant \cos(t) \leqslant \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, t^{2k}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, t^{2k+1} \leqslant \sin(t) \leqslant \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, t^{2k+1}. \tag{2}$$

Hieraus folgt für $n = 0, 1, \dots$ und $t \in \mathbb{R}$:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, t^{2k} - \cos(t) \right| < \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!}, \tag{3}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, t^{2k+1} - \sin(t) \right| < \frac{t^{2n+3}}{(2n+3)!}. \tag{4}$$

Beweis (Sukzessive Approximation).

1. Die Ungleichungen (1) und (2) ergeben sich induktiv, wie in der Vorbemerkung gezeigt wurde.

2. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems 3.3.1(1.) $u(0) = 1$, $v(0) = 0$ folgt
$$u(-t) = u(t) \quad \text{und} \quad v(-t) = -v(t).$$
3. Also gilt die Abschätzung von $u(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

   In der Abschätzung von $v(t)$ verkehren sich für $t < 0$ die Vorzeichen. Aus (1) folgt also (3) und aus (2) folgt (4).

Korollar 3.3.8 (Postenzereihen von $\cos$ **und** $\sin$**)**

Da
$$\lim_{n\to\infty} \frac{t^n}{n!} = 0 \quad \textit{für } t \in \mathbb{R},$$
konvergiert die Potenzreihe (3) *gegen* $\cos t$ *und die Potenzreihe* (4) *gegen* $\sin t$ *(vgl.* Beispiel 3.2.27*).*
$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k},$$
$$\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}.$$

Bemerkung 3.3.9 (Kleinste Nullstelle von $\cos t$)

Es gibt eine **kleinste positive Nullstelle** t_0 der Funktion $t \mapsto \cos t$. Diese liegt im Intervall
$$t_0 \in \left[\sqrt{2}, \sqrt{6-\sqrt{12}}\right] \approx [1.41, 1.59]$$
und ist eine **einfache Nullstelle**. D.h, die Ableitung $-\sin t_0 \neq 0$. Es ist $\sin t_0 = 1$ und
$$0 < \cos t \quad \text{für } t \in (-t_0, t_0),$$
$$0 < \sin t \quad \text{für } t \in (0, t_0].$$

Bezeichnung 3.3.10 (Zahl π)

Man bezeichnet
$$\pi := 2t_0,$$
wobei t_0 die kleinste positive Nullstelle der Funktion $t \mapsto \cos t$ ist.

Beweis (Kleinste Nullstelle von $\cos t$).
Nach Bemerkung 3.3.7, Gleichung (1) gilt

$$1 - \frac{t^2}{2} \leqslant \cos t \leqslant 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} \quad \text{für } 0 \leqslant t.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 0 < \cos t \qquad & \text{für } 0 \leqslant t < t_1 = \sqrt{2} \approx 1,41, \\ \cos t_2 \leqslant 0 \qquad & \text{für } t_2 = \sqrt{6 - \sqrt{36 - 24}} \approx 1.59, \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz 2.5.14 hat $\cos t$ mindestens eine Nullstelle im Intervall $[t_1, t_2]$.
Für die Ableitung $(\cos t)' = -\sin t$ gilt nach Bemerkung 3.3.7, Gleichung (2)

$$-\sin t \leqslant -t + \frac{t^3}{3!} < 0 \quad \text{für } 0 < t < \sqrt{6} \approx 2.45,$$

Also gibt es genau eine einfache Nullstelle $\cos t_0 = 0$ in $[t1, t2]$. und es ist $\sin t_0 = 1$. Ferner gilt $0 < \cos t$ für $t \in [0, t_0)$.

Bemerkung 3.3.11 (Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$)

1. Es gilt (vgl. Abbildung 3.3.14(2.))

$$\begin{aligned} \cos(t + \frac{\pi}{2}) &= -\sin t, \\ \sin(t + \frac{\pi}{2}) &= \ \cos t \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \cos(t - \frac{\pi}{2}) &= \ \sin t, \\ \sin(t - \frac{\pi}{2}) &= -\cos t. \end{aligned}$$

2. Aus den Anfangswerten erhält man die Wertetabelle:

t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos t$	-1	0	1	0	-1	0	1
$\sin t$	0	-1	0	1	0	-1	0

Beweis.1. Die Funktionen

$$u : t \mapsto -\cos(t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{und} \quad v : t \mapsto \sin(t + \frac{\pi}{2})$$

sind eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u' &= -v, \\ v' &= u. \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} u(0) &= 0, \\ v(0) &= 1. \end{aligned}$$

Da die Lösung eindeutig ist (vgl. 3.3.5), folgen die linken Gleichungen.

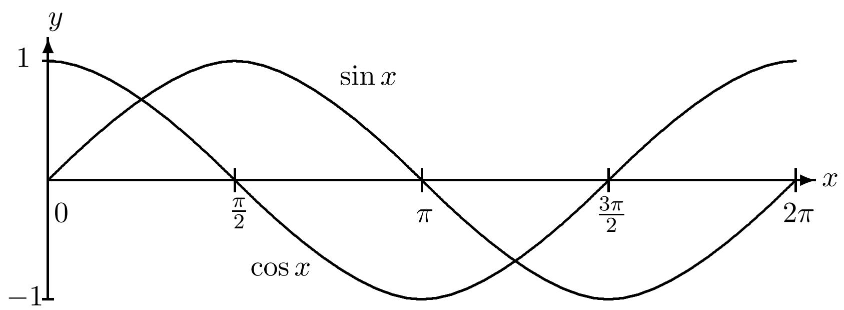
Nach Beispiel 3.3.6(1) ist $\cos$ eine gerade Funktion und $\sin$ ungerade:

$$\cos(t - \frac{\pi}{2}) = \cos(-t + \frac{\pi}{2}) = -\sin(-t) = \sin t,$$
$$\sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\sin(-t + \frac{\pi}{2}) = -\cos(-t) = -\cos t.$$

Bemerkung 3.3.12 (Kleinste Nullstelle von $\sin t$)

1. Es ist $0 < \sin t$ für $0 < t < \pi$.
2. π ist die kleinste positive Nullstelle von $t \mapsto \sin t$.
3. Es gelten die folgenden Vorzeichen:

$t \in$	$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, \pi)$
$\cos t$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\sin t$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$



Beweis (Kleinste Nullstelle von $\sin t$).

1. Nach 3.3.7 (2)

$$0 < t - \frac{t^3}{3!} \leqslant \sin t \quad \text{für } 0 < t < \sqrt{6},$$

Nach Definition 3.3.10 von π folgt:

$$0 < \sin t \quad \text{für } 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \sqrt{6 - \sqrt{36 - 24}} < \sqrt{6},$$

Nach 3.3.7 (1) und 3.3.11 gilt:

$$1 - \frac{t^2}{2} \leqslant \cos t = \sin(t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{für } 0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}.$$

Also ist $0 < \sin t$ für $0 < t < \pi$.

2. Aus Bemerkung 3.3.11 folgt $\sin \pi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Bezeichnung 3.3.13 (Periodische Funktionen)

1. Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Zahl $0 < p$ heißt eine Periode von f, wenn
$$f(t+p = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$
2. Eine nichtkonstante, stetige, periodische Funktion hat eine kleinste Periode
$$p := \min\{q \mid q \text{ ist eine Periode von } f\}$$
f heißt dann **periodisch** mit **der** Periode p.

Bemerkung 3.3.14 ($\sin$ und $\cos$ sind 2π-periodisch)

1. Für $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt
$$\cos(t+n\pi) = (-1)^n \cos t,$$
$$\sin(t+n\pi) = (-1)^n \sin t.$$
2. Die Funktionen $t \mapsto \sin t$ und $t \mapsto \cos t$ haben die (kleinste) Periode 2π.

Beweis.

1. Die Aussage folgt induktiv aus dem Fall $n = \pm 1$.

   Aus Bemerkung 3.3.11 folgt
$$\cos(t+\pi) = -\sin(t+\frac{\pi}{2}) = -\cos t,$$
$$\cos(t-\pi) = \sin(t-\frac{\pi}{2}) = -\cos t.$$
   Analog folgt die Behauptung für $t \mapsto \sin t$.
2. Da $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ ist, haben Sinus und Cosinus die gleiche Periode.

   2π ist eine Periode von $\sin$ und $\cos$.

   Wenn es eine kleinere Periode p gibt, dann gilt $\sin p = \sin(0+p) = \sin 0 = 0$. Da π die kleinste positive Nullstelle ist (vgl. 3.3.12), folgt $p = \pi$.

   Da $\cos(\pi) = -\cos 0 = -1$ist, ist π keine Periode.

Bemerkung. (Phasenbild im Phasenraum)

- Das Verhalten einer Lösung der Schwingungsgleichung läßt sich geometrisch besser im $\mathbb{R}^2$ beschreiben:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$$

  In der Physik heißt dies das **Phasenbild**.

- Hat die Lösung die Anfangswerte

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0,$$

  so liegen Punkte (u(t),v(t)) auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius r (vgl. Bemerkung 3.3.4(1.)):

$$r := \sqrt{u_0^2 + v_0^2}.$$

- Wir wollen zeigen, daß die Bildpunkte $\big\{(u(t), v(t)) \mid t \in [0, 2\pi)\big\}$ den gesammten Kreis mit Radius r ausfüllen.

Satz 3.3.15 (Argumentfunktion, Polarkordinaten)

1. *Zu jedem Punkt (x, y) auf dem Einheitskreis*

$$\mathbb{S}^1 := \big\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 + y^2 = 1\big\}$$

   gibt es genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit

$$\cos\varphi = x, \qquad \sin\varphi = y.$$

   Die Abbildung des Einheitskreises

$$\begin{aligned} \arg : \mathbb{S}^1 &\to (-\pi, \pi], \\ \arg : (x, y) &\mapsto \varphi \end{aligned}$$

   *heißt **Argument-Funktion**.*

2. *Zu jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$ gibt es genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ und ein $r \in (0, \infty)$, so daß*

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

   Es ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arg(x, y) := \arg(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$.

Beweis.

1. Man setze $\arg(1,0) := 0$ und $\arg(-1,0) := \pi$.
   Die Funktion
   $$\begin{aligned} (0,\pi) &\overset{\cos}{\to} (-1,1) \text{ ist bijektiv, streng monoton fallend,} \\ (-\pi,0) &\overset{\cos}{\to} (-1,1) \text{ ist bijektiv, streng monoton wachsend.} \end{aligned}$$
   Zu $x \in (-1,1)$ gibt es also zwei Werte
   $$t_1 \in (0,\pi), \qquad t_2 \in (-\pi,0),$$
   mit $\cos t_1 = x = \cos t_2$. Nun ist $|\sin t_1| = |\sin t_2| = |y|$ und
   $$\sin t_1 > 0, \qquad \sin t_2 < 0.$$
   Man wähle also $\varphi \in \{t_1, t_2\}$, so daß $\sin\varphi = y$.
2. Man setze $r := \sqrt{x^2+y^2}$ und $\varphi = \arg(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$.

Bezeichnung 3.3.16 (Polarkordinaten)
Die durch den Satz 3.3.15(2) definierte bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\to (0,\infty) \times [0, 2\pi), \\ (x,y) &\mapsto (r,\varphi) \end{aligned}$$

heißt **Polarkoordinaten**. Man nennt

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ die **euklidische Norm** des Vektors.

$\varphi = \arg(x,y) := \arg(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ das **Argument** des Vektors.

Bemerkung.1. Eine alternative Definition des Arguments ist:

$$\phi := \begin{cases} \varphi & \text{für } 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ \varphi + 2\pi & \text{für } -\pi < \varphi < 0. \end{cases}$$

2. Man nennt φ (oder ϕ) den im **Bogenmaß** gemessenen **Winkel** des Vektors (x,y) gegen die x-Achse oder den Winkel zwischen dem ersten Basisvektor $(1,0)$ und dem Vektor (x,y).

Wir vereinbaren **ad hoc**:

Bezeichnung 3.3.17 (Positiver Drehsinn)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{S}^1$ eine stetige Abbildung in den Einheitskreis.

Wir sagen, f läuft im **positiven Drehsinn**, wenn es zu jedem inneren Punkt $t \in I$ mit $f(t) \neq (-1, 0)$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\arg \circ f : (t - \delta, t + \delta) \to (-\pi, \pi]$$

monoton wächst.

Beispiel. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{S}^1$$

wickelt die Zahlengerade $\mathbb{R}$ abzählbar unendlich oft im mathematischen positiven Drehsinn um den Einheitskreis $\mathbb{S}^1$

Bemerkung 3.3.18 (Additionstheorem für $\cos$ **und** $\sin$**)**

Für t,$\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(t + \varphi) &= \cos t \cos \varphi - \sin t \sin \varphi \\ \sin(t + \varphi) &= \sin t \cos \varphi + \cos t \sin \varphi \end{aligned}$$

Bemerkung

1. Jede Lösung der Schwingungsgleichung hat die Form

   $$u : t \mapsto r \cos(t + \varphi) \quad \text{und} \quad v : t \mapsto r \sin(t + \varphi)$$

   mit einer **Amplitude** $r \in [0, \infty)$ und einer **Phasenverschiebung** $\varphi \in [0, 2\pi)$. Dabei sind (r, φ) die Polarkoordinaten der Anfangswerte $(u(0), v(0))$.

2. Das Additionstheorem schreibt sich einfacher mit Hilfe der **komplexen Zahlen** und der **Eulerschen Formeln**:

   $$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad e^{i(t+\varphi)} = e^{it} \cdot e^{i\varphi}.$$

Beweis (Additionstheorem für $\cos$ **und** $\sin$**).**

Die Funktionen

$$u : t \mapsto \cos(t + \varphi) \quad \text{und} \quad v : t \mapsto \sin(t + \varphi)$$

sind eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u' &= -v, \\ v' &= u. \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} u(0) &= \cos \varphi, \\ v(0) &= \sin \varphi. \end{aligned}$$

Da die Lösung eindeutig ist (vgl. 3.3.5) stimmen diese Lösung und die Lösung gemäß 3.3.6 (2) überein. D.h.

$$\begin{aligned} \cos(t + \varphi) &= \cos t \cos \varphi - \sin t \sin \varphi, \\ \sin(t + \varphi) &= \sin t \cos \varphi + \cos t \sin \varphi. \end{aligned}$$

3.3.2 Kurvenlänge und Bogenmaß

Bemerkung. Wir wollen die Länge des Graphen $\mathrm{L}_{[a,b]}\, f$ einer stetig differenzierbaren Funktion f über einem Intervall $[a, b]$ durch anschauliche Forderungen eindeutig beschreiben.

Dazu beschränken wir die Betrachtung zunächst auf monotone Funktionen f, g auf einem offenen Intervall I.

- Es seien f und g monoton wachsend. Wenn man ihren Graphen wie einen Berghang hochläuft, so wird über demselben Intervall der steilere Graph den längeren Weg ergeben.
- Wenn die eine Funktion wächst und die andere fällt, so wird ebenfalls der steilere Weg der längere sein.

Ferner soll die Länge additiv sein. Für Geradenstücke wird die Länge mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmt.

Definition 3.3.19 (Axiome der Länge eines Graphen)
*Es sei I ein offenes Intervall. Die **Kurvenlänge** ordnet jeder stetig differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und jedem kompakten Intervall $[a, b] \subset I$, eine reelle Zahl zu:*

$$f \mapsto \mathrm{L}_{[a,b]} f.$$

Dabei sollen die folgenden Regeln gelten:

Intervall-Additivität: *Für a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ gilt:*

$$\mathrm{L}_{[a,b]} f \; + \; \mathrm{L}_{[b,c]} f = \mathrm{L}_{[a,c]} f.$$

Monotonie *in den Ableitungen:*

$$0 \leqslant |f'| \leqslant |g'| \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}_{[a,b]}\, f \leqslant \mathrm{L}_{[a,b]}\, g$$

Eichung: *Für eine affine Funktion $x \mapsto \alpha x + \beta$ gilt:*

$$\mathrm{L}_{[a,b]}(\alpha x + \beta) := \sqrt{1 + \alpha^2}\,(b - a)$$

Bemerkung (Integralformel: Kurvenlänge).
Für stetig differenzierbare Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ und Intervalle $[a, b] \subset I$ erfüllt die folgende Integralformel offensichtlich die Axiome 3.3.19 der Länge eines Graphen:

$$f \mapsto \int_{[a,b]} \sqrt{1 + (f')^2}.$$

Wir wollen zeigen, daß dies die einzige Möglichkeit ist, die Länge zu definieren.

Feststellung 3.3.20 (Kurvenlänge existiert eindeutig) *Die Länge von Graphen stetig differenzierbarer Funktionen ist durch die Axiome 3.3.19 eindeutig bestimmt.*

Für eine stetig differenzierbare Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I und jedes kompakte Teilintervall $[a, b] \subset I$ gilt für die Kurvenlänge:

$$\mathrm{L}_{[a,b]}\, f = \textstyle\int_{[a,b]} \sqrt{1 + (f')^2}.$$

Beweis (Kurvenlänge existiert eindeutig).

Wir müssen noch die **Eindeutigkeit** zeigen:

Es sei L eine Kurvenlänge ist, die die Axiome 3.3.19 erfült. Man fixiere einen Punkt $a \in I$ und bilde die folgende Funktion:

$$l : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{L}_{[a,x]}\, f & \text{für } x \in I,\ a \leqslant x, \\ -\mathrm{L}_{[x,a]}\, f & \text{für } x \in I,\ x < a, \end{cases}$$

Für $x_0 < x$ gilt $l(x) - l(x_0) = L_{[x_0,x]}$. Da L monoton ist, folgt

$$\min_{\xi \in [x_0,x]} \sqrt{1 + f'(\xi)^2} \leqslant \frac{l(x) - l(x_0)}{x - x_0} \leqslant \max_{\xi \in [x_0,x]} \sqrt{1 + f'(\xi)^2}.$$

Da f' stetig ist, existiert der rechseitige Grenzwert:

$$\lim_{x \downarrow x_0} \frac{l(x) - l(x_0)}{x - x_0} = \sqrt{1 + f'(x_0)^2}.$$

Analog erhält man für den linkseitigen Grenzwert denselben Wert. Also ist $l' = \sqrt{1 + (f')^2}$ und $l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'(\xi)^2}\, d\xi$.

Feststellung 3.3.21 (Kurvenlänge der Umkehrfunkt.)

Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \to J$ eine streng monoton Funktion mit Umkehrfunktion $g : J \to I$.

Es sei f stetig differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für $x \in I$.

Dann haben der Graph von f und der Graph der Umkehrfunktion g über einander entsprechenden Intervallen die gleiche Kurvenlänge:

$$L_{[a,b]}(f) = L_{f([a,b])}(g) \quad \textit{für } [a, b] \subset I.$$

Bemerkung.

1. Wenn f streng monoton wachsend ist, gilt
$$L_{[a,b]}(f) = L_{[f(a),f(b)]}(g) \quad \text{für } [a, b] \subset I.$$
2. Wenn f streng monoton fallend ist, gilt
$$L_{[a,b]}(f) = L_{[f(b),f(a)]}(g) \quad \text{für } [a, b] \subset I.$$

Beweis (Kurvenlänge der Umkehrfunktion).

Fall f streng monoton wachsend: Da nach Vorausetzung $f'(x) \neq 0$ ist, folgt aus dem Monotonie-Kriterium 3.2.19, daß $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ ist.

Für ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset I$ folgt nun aus der Beziehung (vgl. Satz 3.2.11) $(g)'(f(x)) = f'(x)^{-1}$ und der der Substitutionsformel 3.2.23

$$\begin{aligned} L_{[f(a),f(b)]}(g) &= \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + g'(y)^2}\, dy \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + g'(f(x))^2} f'(x)\, dx \\ &= \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx = L_{[a.b]}. \end{aligned}$$

Fall f streng monoton wachsend: Analog.

3.3.3 Hyperbolische Funktionen

Bemerkung. Die Namen der Hyperbel-Funktionen erklären sich aus einer formalen Ähnlichkeit mit den trigonometrischen Funktionen cos und sin, bei der an Stelle des Kreises die Hyperbel auftritt.

In vielen Anwendungen kommen die folgenden Linearkombinationen der Exponentialfunktion vor:

Definition 3.3.22 (Hyperbelfunktionen)

$$\begin{aligned} \cosh : x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}, \\ \sinh : x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cosinus hyperbolicus *oder* Hyperbel-Cosinus*,*

Sinus hyperbolicus *oder* Hyperbel-Sinus*.*

Bemerkung.

1. Es gilt

$$\begin{aligned} \cosh' t &= \sinh t, & \sinh' t &= \cosh t, \\ \cosh 0 &= 1, & \sinh 0 &= 0. \end{aligned}$$

2. Da

$$(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1,$$

liegen die Werte $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ auf dem rechten Zweig der Einheitshyperbel

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 - y^2 = 1 \text{ und } x > 0\}.$$

Man beachte, daß der Parameter t hier aber die Bedeutung der Fläche eines Hyperbelsektors und nicht die einer Bogenlänge hat!

Die Umkehrfunktionen heißen deshalb **Area**-Funktionen.

Definition 3.3.23 (Area hyperbolici Funktionen)

1. $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt* ***Area-Cosinus****:*

$$\begin{aligned} &\operatorname{ar}\cosh : [1, \infty) \to [0, \infty), \\ &\operatorname{ar}\cosh : y \mapsto \log(y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \textit{für } (y \in [1, \infty)). \end{aligned}$$

2. $\cosh : [-\infty, 0]) \to [1, \infty)$ *ist streng monoton fallend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt der andere Zweig des* ***Area-Cosinus****:*

$$\begin{aligned} &\operatorname{ar}\cosh : [1, \infty) \to (-\infty, 0], \\ &\operatorname{ar}\cosh : y \mapsto \log(y - \sqrt{y^2 - 1} \quad \textit{für } (y \in [1, \infty)). \end{aligned}$$

3. $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt* ***Area-Sinus****:*

$$\operatorname{ar}\sinh : y \mapsto \log(y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \textit{für } (y \in [1, \infty)).$$

Beispiele 3.3.24 (Bogenlänge der Parabel)

Die Bogenlänge der Einheitsparabel $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2$ über dem Intervall $[0, x]$ ist:

$$\int_0^x \sqrt{1 + 4\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \operatorname{ar}\sinh(2x).$$

Man beachte die Ableitung der Area-Sinus Funktion:

$$(\operatorname{ar}\sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

3.3.4 Bogenmaß und arccos, arcsin

Bemerkung (Einheitskreis)

1. Der Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ ist die Kurve im $\mathbb{R}^2$, die aus Punkten besteht, deren Abstand zum Ursprung gleich 1 ist:
$$\{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$$
$\mathbb{S}^1$ ist im mathematisch positiven Drehsinn, also gegen den Uhrzeigersinn, orientiert.

2. Der Einheitskreis wird durch die bijektive Abbildung
$$(-\pi, \pi] \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{S}^1$$
parametrisiert. Nach Satz 3.3.15 ist die Umkehrfunktion hierzu die Argumentfunktion $\arg : \mathbb{S}^1 \to (-\pi, \pi]$.

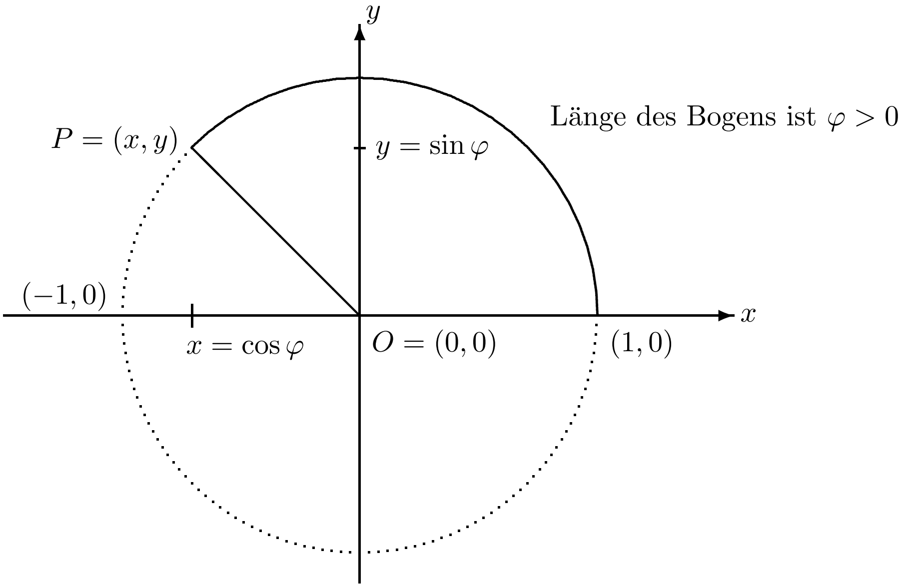
Ziel. Versieht man die Kurvenlänge auf dem Einheitskreis mit einem Vorzeichen, je nachdem, in welcher Richtung ein Kurvenstück durchlaufen wird, so erhält man das Bogenmaß.

Die Argumentfunktion 3.3.15 gibt das Bogenmaß auf dem Einheitskreis an:

Für einen Punkt $P = (x,y) \in \mathbb{S}^1$ betrachte man denjenigen Kreisbogen vom Punkt $(1,0)$ zum Punkt P, der den Punkt $(-1,0)$ nicht enthält.

*$\varphi = \arg(x,y)$ ist die **orientierte Länge** dieses Kreisbogens. D.h.:*

- *Wenn P im oberen Halbkreis liegt, liegt der Kreisbogen im oberen Halbkreis und seine absolute Länge ist φ.*
- *Wenn P im unteren Halbkreis liegt, liegt der Kreisbogen im unteren Halbkreis und seine absolute Länge ist $-\varphi$.*



Für den Kreisbogen im oberen Halbkreis ist die Länge gleich dem Argument φ des Endpunktes P. (vgl. auch die Abbildung zu Korollar 3.3.30)

Bemerkung (Parametrisierung der Halbkreise).

1. Den oberen und den unteren Halbkreis kann man als Graph einer Funktion schreiben:

$$[-1,1] \ni x \mapsto \sqrt{1-x^2} \qquad \text{(oberer Halbkreis)}$$
$$(-1,1] \ni x \mapsto -\sqrt{1-x^2} \qquad \text{(unterer Halbkreis)}$$

   Die Funktionen sind stetig und im offenen Intervall $(-1,1)$ stetig differenzierbar.

   Die Parametrisierung des oberen Halbkreises durchläuft den Halbkreis entgegen dem mathematischen Drehsinn.

2. Analog kann man den rechten und linken Halbkreis als Graph über der y-Achse schreiben:

$$[-1,1] \ni y \mapsto \sqrt{1-y^2} \qquad \text{(rechter Halbkreis)}$$
$$(-1,1) \ni y \mapsto -\sqrt{1-y^2} \qquad \text{(linker Halbkreis)}$$

Bezeichnung 3.3.25 (Arcus-Funktionen)

1. Es ist $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ streng monoton fallend, stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion **Arcus-Cosinus**

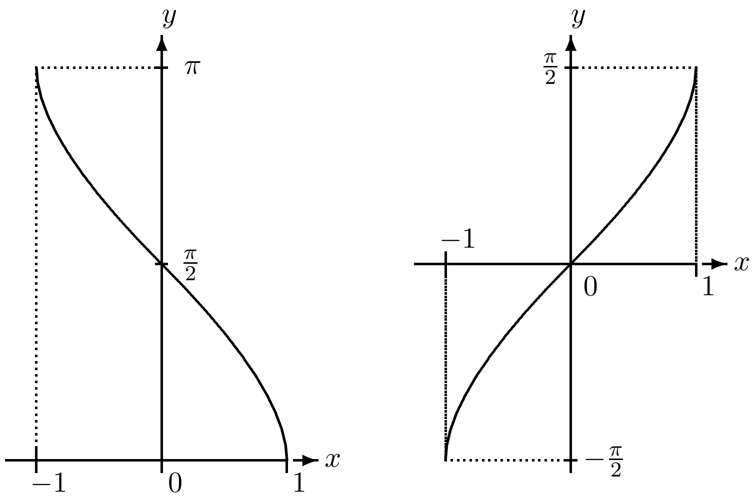
$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi].$$

   ist also streng monoton fallend, stetig und bijektiv.

2. Es ist $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion **Arcus-Sinus**

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

ist also streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.



$\arccos : [-1, 1] \to [0, 2\pi]$ $\qquad$ $\arcsin : [-1, 1] \to [0, 2\pi]$

Beispiel (Ableitung von arccos, arcsin).

Man beachte, daß

$$\begin{aligned} \sin t \geqslant 0 \quad & \text{für } t \in [0, \pi], \\ \cos t \geqslant 0 \quad & \text{für } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Für die Umkehrfunktionen folgt nach Satz 3.2.11:

$$\begin{aligned} (\cos t)' &= -\sin t = -\sqrt{1 - (\cos t)^2} \\ &\Rightarrow \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ , \\ (\sin t)' &= \cos = -\sqrt{1 - (\sin t)^2} \\ &\Rightarrow \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ . \end{aligned}$$

Beweis.

1. Nach Bemerkung 3.3.12 ist die Ableitung
$$(\cos x)' = -\sin x < 0 \quad \text{für } x \in (0, \pi).$$
Es ist $\cos 0 = 1$ und $\cos(-\pi) = -1$ (vgl. Wertetabelle 3.3.11 2). Nach Satz 3.2.19 ist
$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$
streng monoton fallend, stetig und bijektiv. Nach Satz 2.5.17 existiert die stetige Umkehrfunktion.

2. Der Beweis geht analog:
Nach Bemerkung 3.3.9 und Beispiel 3.3.6(1) ist die Ableitung
$$(\sin x)' = \cos x > 0 \quad \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$
Es ist $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ (vgl. Wertetabelle 3.3.11 2).

Feststellung 3.3.26 (arg auf oberen Halbkreis)

1. *Für Punkte (x, y) auf dem oberen Halbkreis gilt:*
$$\arg(x, y) = \arccos x \quad \textit{\textbf{(oberer Halbkreis)}}.$$

2. *Für Punkte (x, y) auf dem unteren Halbkreis mit $x \in (-1, 1]$ gilt:*
$$\arg(x, y) = -\arccos x \quad \textit{\textbf{(unterer Halbkreis)}}.$$

Beweis (arg auf oberen Halbkreis).

1. Für Punkte (x, y) auf dem oberen Halbkreis ist $x \in [-1, 1]$ $y = \sqrt{1 - x^2}$). Man setze
$$\varphi := \arccos x \in [0, \pi].$$
Nach Bemerkung 3.3.12 ist
$$0 \leqslant \sin \varphi = \sqrt{1 - (\cos \varphi)^2} \quad \text{für } \varphi \in [0, \pi].$$
Also ist $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$ und somit $\arg(x, y) = \varphi$.

2. Für Punkte (x, y) auf dem unteren Halbkreis ist $x \in (-1, 1]$ $y = -\sqrt{1 - x^2}$). Man setze $\varphi := -\arccos x \in (-\pi, 0]$. Dann ist $x = \cos(-\varphi) = \cos \varphi$. Nach Bemerkung 3.3.12 ist
$$0 \geqslant \sin \varphi = -\sqrt{1 - (\cos \varphi)^2} \quad \text{für } \varphi \in [-\pi, 0].$$
Also ist $y = \sin \varphi$ und $\arg(x, y) = \varphi$.

Bemerkung 3.3.27 (arg auf rechten Halbkreis)

Für Punkte (x, y) auf dem rechten Halbkreis gilt:

$$\arg(x, y) = \arcsin y \quad \textbf{(rechter Halbkreis)}.$$

Beweis. Für Punkte (x, y) auf dem rechten Halbkreis ist $y \in [-1, 1]$ und $x = \sqrt{1 - x^2}$. Man setze

$$\varphi := \arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Nach Bemerkung 3.3.9 ist

$$0 \leqslant \cos\varphi = \sqrt{1 - (\sin\varphi)^2} \quad \text{für } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Also ist $y = \sin\varphi$, $x = \cos\varphi$ und somit $\arg(x, y) = \varphi$.

Bemerkung. Auf dem linken Halbkreis hat die Argumentfunktion im Punkte $(-1, 0)$ eine *Sprungstelle*. Es gibt daher keine *geschlossenen* Formeln für die Argumentfunktion auf dem linken Halbkreis.

Feststellung 3.3.28 (Bogenmaß: oberer Halbkreis)

Für einen Punkt $x \in [-1, 1]$ sei $P_x := (x, \sqrt{1 - x^2})$ der Punkt auf dem oberen Halbkreis über x.

Auf dem oberen Halbkreis gilt für die Länge des Bogens über dem Intervall $[x_1, x_2] \subset (-1, 1)$

$$\begin{aligned} L_{[x_1, x_2]} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \arccos x_1 - \arccos x_2 \\ &= \arg P_{x_1} - \arg P_{x_2}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Es existieren die Grenzwerte:

$$\lim_{x \uparrow 1} \arccos x = \arccos 1 = 0 \qquad \lim_{x \downarrow -1} \arccos x = \arccos(-1) = \pi$$

Korollar 3.3.29 *Im* ***Grenzwert*** *ist die Länge des Bogens auf dem oberen Halbkreis über dem Intervall $[x, 1] \subset [-1, 1]$:*

$$L_{[x,1]} := \arg P_x$$

Beweis (Bogenmaß: oberer Halbkreis).

Man beachte, daß der Integrand $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$ in den Endpunkten $\xi = \pm 1$ gegen ∞ geht.

Es ist $\cos : [0, \pi] \to (-1, 1)$ streng monoton fallend, bijektiv und stetig differenzierbar. Die Umkehrfunktion

$$\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi).$$

ist streng monoton fallend, bijektiv und stetig differenzierbar.

Für $[x_1, x_2] \subset (-1, 1)$ substituiere man $\xi = \cos t$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\int\limits_{\arccos x_1}^{\arccos x_2} dt = \arccos x_1 - \arccos x_2.$$

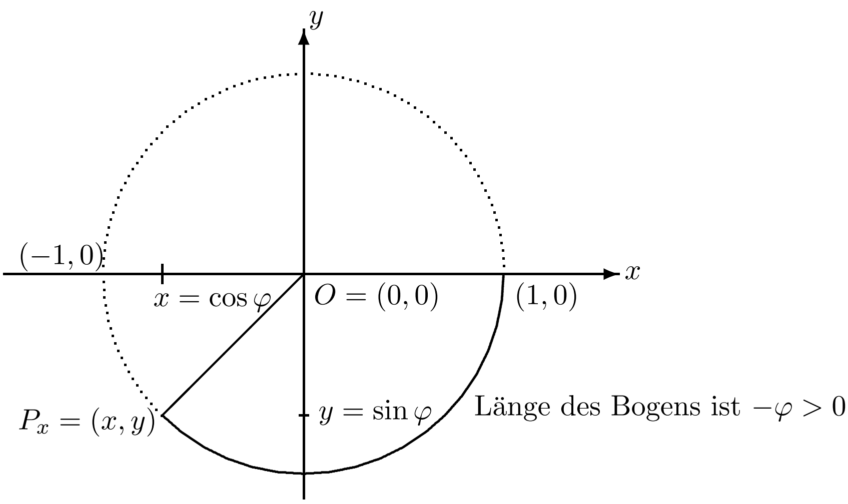
Nach Feststellung 3.3.26(1.) gilt auf dem oberen Halbkreis

$$\arccos x_1 - \arccos x_2 = \arg P_{x_1} - \arg P_{x_2}$$

Korollar 3.3.30 (Bogenmaß: unterer Halbkreis)

Eine analoge Betrachtung zu 3.3.28 auf dem unteren Halbkreis zeigt, daß für Länge des unteren Bogens über dem Intervall $[x, 1] \subset (-1, 1]$ *die Beziehung gilt:*

$$L_{[x,1]} = -\arg P_x.$$



3.4 Komplexe Zahlen

Bemerkung

1. Man kann die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ relativ schnell auf algebraischen Wege einführen. $\mathbb{C}$ ist der **kleinsten Erweiterungskörper** der reellenZahlen, in dem -1 ein Quadrat ist, d.h. die Gleichung $\xi^2 + 1 = 0$ ist lösbar. Es gibt also eine komplexe Zahl $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.

   Man erhält diesen Erweiterungskörper, als Quotient des Polynomrings $\mathbb{R}[\xi]$ nach dem maximalen Ideal $(\xi^2 + 1)\mathbb{R}[\xi]$ (A. L. Cauchy 1847).

Die Bildung des Quotientenringes bedeutet, daß zwei Polynome in derselben Klasse liegen, wenn ihre Differenz ein Vielfaches von $\xi^2 + 1$ ist. Die Klasse eines Polynoms $P(\xi)$ ist also die Menge

$$P(\xi) + (\xi^2 + 1)\mathbb{R}[\xi].$$

Der Körper $\mathbb{C}$ ist also ein zweidimsionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, der als den Basisvektoren die Klassen

$$1_{\mathbb{C}} := 1 + (\xi^2 + 1)\mathbb{R}[\xi] \quad \text{und} \quad i := \xi + (\xi^2 + 1)\mathbb{R}[\xi]$$

hat. Es gilt also

$$\mathbb{C} := \{x1 + y\xi + (\xi^2 + 1)\mathbb{R}[\xi] \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Als reeller Vektorraum ist $\mathbb{C}$ isomorph zu $\mathbb{R}^2$.

2. In dieser Basis hat jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ die Form

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Nach den Rechenregeln in einem Körper und wegen $i^2 = -1$ gelten für Summe und das Produkt zweier komplexer Zahlen $z = x \cdot 1 + y \cdot i$, $w = u \cdot 1 + v \cdot i$ die Regeln:

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u) \cdot 1 + (y + v) \cdot i, \\ z + w &= (xu - yv) \cdot 1 + (xv + yu) \cdot i. \end{aligned}$$

Für den Kehrwert von $z = x \cdot 1 + y \cdot i \neq 0$ findet man

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot 1 + \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot i.$$

3. In vielen Lehrbüchern wird ausgehend von diesen Formeln eine Summe und ein Produkt auf $\mathbb{R}^2$ definiert und nachgerechnet, daß man so einen Körper erhält, indem die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung hat (W. R. Hamilton 1833).

   Man umgeht so die Bildung des Polynomringes $\mathbb{R}[x]$ und die Bildung des Quotientenkörpers $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1]\mathbb{R}[x]$.

---

4. Man sieht nur diesem so konstruierten Körper nicht an, warum er für die Analysis und ihre Anwendungen in Physik und Technik so wichtig ist.

   Dazu und für weiterführende mathematischen Aussagen, wie den **Hauptsatz der Algebra**, bedarf es nicht-algebraischer Hilfsmittel: die Vollständigkeit der reellen Zahlen und die Deutung der komplexen Multiplikation als **Drehung** und **Streckung** der Ebene. Letzteres geschah historisch gesehen mit Hilfe der **Eulerschen Formeln**, in denen die komplexe Multiplikation durch trigonometrische Funktionen ausgedrückt wird (A. de Moivre 1724, L. Euler 1748).

5. Aus dem Hauptsatz der Algebra folgt, daß die komplexen Zahlen die einzige **endlichdimensionale Körpererweiterung** der reellen Zahlen sind.

---

6. Wir gehen deshalb vom Begriff der Drehung aus. Die Drehungen der Ebene bilden eine Gruppe, die sogenannte **Torusgruppe** $\mathbb{T}$, die wir zunächst einführen.

   Wir konstruieren zwei isomorphe Bilder der Torusgruppe:

   (a) Als Quotientengruppe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ der reellen Zahlen.

   (b) Als Drehungen der Ebene ist die Torusgruppe eine Untergruppe des Ringes der reellen 2×2-Matrizen.

   Als Menge identifizieren wir die Torusgruppe $\mathbb{T}$ mit dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

7. Dann betrachten wir die Drehungen und Streckungen der Ebene und ihre Zusammensetzungen, die **Drehstreckungen**. Die Drehstreckungen sind die Ähnlichkeitsabbildungen der Ebene, die den Ursprung festhalten und die die Orientierung erhalten.

---

8. **Komposition** und **Summe** von Drehstreckungen sind wieder Drehstreckungen. Sie bilden also eine Unteralgebra der reellen Algebra der 2×2-Matrizen. Da die **Inverse** einer Drehstreckung wieder eine Drehstreckung ist, ist diese Unteralgebra sogar ein Körper .

   Wir nennen die **Menge der Drehstreckungen** den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (J. R. ARGAND 1806).

   Eine Basis bilden die identische Abbildung 1 und die Drehung um $\pi/2$, die mit i bezeichnet wird:
$$i := \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Dann ist i^2 die Drehung um π. Diese überführt jeden Vektor $w \in \mathbb{R}^2$ in $-w$, d.h. $i^2 = -1$.

3.4.1 Torusgruppe

Bemerkung.

1. Die Abbildung
$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$$
   ist periodisch mit der Periode 2π (vgl. Bemerkung 3.3.14. Ihr Bild ist der gesamte Einheitskreis $\mathbb{S}^1$.

2. Die Einschränkung dieser Abbildung auf das Intervall $(-\pi, \pi]$ ist eine Bijektion auf den Einheitskreis. Die Umkehrabbildung ist die Argumentfunktion (vgl. Satz 3.3.15)

$$\mathbb{S}^1 \ni (x, y) \mapsto \arg(x, y) \in (-\pi, \pi].$$

Lemma 3.4.1 *Für $s,t \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:*

1. $(\cos s, \sin s) = (\cos t, \sin t)$.
2. *Es gibt eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so daß*

$$s - t = 2\pi n.$$

Bemerkung.

1. Die reellen Zahlen bilden mit der Addition als Verknüpfung eine abelsche Gruppe $(\mathbb{R}, +)$.

   Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$.

   Eine weitere Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ sind die ganzzahligen Vielfachen von 2π:

$$2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Zwei reelle Zahlen $s,t \in \mathbb{R}$ heißen **kongruent modulo 2π**, wenn es eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß

$$t = s + 2\pi n.$$

   D.h. $s - t \in 2\pi\mathbb{Z}$.

---

3. Für eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ bilde man die **Äquivalenzklasse von** s :

$$[s] := \{t \mid t \in \mathbb{R}, s - t \in 2\pi\mathbb{Z}\} = s + 2\pi\mathbb{Z}.$$

   Ein Element $\tilde{s} \in [s]$ heißt ein **Repräsentant** der Klasse $[s]$. Für einen Repräsentanten $\tilde{s}$ gilt $[\tilde{s}] = [s]$.

4. Man erklärt eine Verknüpfung auf der Menge der Äquivalenzklassen durch die Vorschrift:

$$[s] + [t] := [s + t].$$

   Diese Verknüpfung ist wohldefiniert, d.h. die rechte Seite $[s + t]$ ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $s \in [s]$ und $t \in [t]$.

5. Die Klasse $[0] = 2\pi\mathbb{Z}$ ist das neutrale Element unter dieser Verknüpfung.
6. Es gilt $[s] + [-s] = [0]$.

Bezeichnung 3.4.2 (Quotientengruppe $\mathbb{R}|2\pi\mathbb{Z}$)
Die Quotientengruppe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ist die Menge der Äquivalenzklassen

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} := \{\, [s] \mid s \in \mathbb{R}\}$$

versehen mit der Verknüpfung

$$[s] + [t] := [s + t].$$

$R/2\pi\mathbb{Z}$ ist eine abelsche Gruppe.

Bemerkung.

1. Auf Grund von Lemma 3.4.1 erhalten wir eine wohldefinierte Bijektion

   $$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni [t] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{S}^1.$$

   Mit Hilfe dieser Bijektion übertragen wir die Gruppenstruktur von $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ auf den Einheitskreis, so daß diese Abbildung ein Gruppenisomorphismus wird.

   Die so erklärte Verknüpfung auf dem Einheitskreis schreibt man mit einem Malpunkt und nennt die so definierte abelsche Gruppe die **Torusgruppe** oder den **Torus** $\mathbb{T}$.

2. Für die Verknüpfung $z \cdot w$ zweier Elemente $z,w \in \mathbb{T}$ gilt

   $$[\arg(z \cdot w)] = [\arg z] + [\arg w]$$

   Die Abbildung $\mathbb{T} \ni w \mapsto z \cdot w$ beschreibt die **Drehung** des Einheitskreises um den Winkel $\arg z$.

Bezeichnung 3.4.3 (Torusgruppe $\mathbb{T}$)
Die Torusgruppe $\mathbb{T}$ ist der Einheitkreis versehen mit der folgenden Gruppenverknüpfung: Für $z,w \in \mathbb{T}$ sei

$$z \cdot w := (\cos(\varphi + \psi), \sin(\varphi + \psi)),$$

wobei $\varphi := \arg z$ und $\psi := \arg w$ ist.

Bemerkung 3.4.4 (Isomorphismus $\mathbb{T}$ mit $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$)

1. Die folgenden Abbildung sind zueinander inverse Gruppenisomorphismen:

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni [t] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{T},$$
$$\mathbb{T} \ni z \mapsto [\arg z] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

2. Manchmal nennt man auch die Abbildung $z \mapsto [\arg z] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ Argumentfunktion und die Funktion $z \mapsto \arg z \in (-\pi, \pi]$ den **Hauptzeig der Argumentfunktion**.

Bemerkung Man kann das Produkt in $\mathbb{T}$ auch ohne Benutzung trigonometrischer Funktionen direkt aus den Koordinaten berechnen. Die entstehende Formel wird klarer, wenn man sie als Matrizenprodukt liest.

Satz 3.4.5 (Produktformel in der Torusgruppe)

1. *Für Das Produkt zweier Elelemente $z = (x, y)$, $w = (u, v) \in \mathbb{T}$ gilt*

$$z \cdot w = (xu - yv, xv + yu).$$

2. *Bezüglich der Standardbasis beschreibt die Formel* 1. *die Wirkung einer Matrix auf eine Spaltenvektor:*

$$z \cdot w = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Beweis (Produktformel in der Torusgruppe).

1. Der Beweis der Formel folgt aus dem Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen 3.3.18. Es sei

$$\varphi := \arg z, \qquad \psi := \arg w.$$

Nach Definition des Produktes 3.4.3 gilt

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (\cos(\varphi + \psi), \sin(\varphi + \psi)) \\ &= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi,\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) \\ &= (xu - yv,\ yu + xv). \end{aligned}$$

2. Nachrechnen.

Bemerkung Eine reelle $n \times n$-Matrix A heißt **orthonormal**, wenn die transponierte $A^t = A^{-1}$ ist. Dann ist $\det(A) \in \{1, -1\}$.

Die **spezielle orthonormale Gruppe** $SO(n)$ besteht aus allen orthonormalen $n \times n$-Matrizen A mit $\det(A) = 1$. Die Elemente von $SO(n)$ heißen **Drehungen**.

Korollar 3.4.6 (Spezielle orthonormale Gruppe $SO(2)$) *Die Torusgruppe ist isomorph zu der Gruppe $SO(2)$. Der Isomorphismus wird durch die folgende Abbildung gegeben:*

$$\mathbb{T} \ni z = (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in SO(2).$$

Beweis. Man rechnet leicht nach, daß die angegebene Abbildung

$$\mathbb{T} \ni z = (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in SO(2).$$

ein Gruppenisomorphismus von $\mathbb{T}$ in $SO(2)$ ist.

Es ist zu zeigen, daß diese Abbildung surjektiv ist. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SO(2).$$

Nach der Kramerschen Regel ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Vergleicht man dies mit der Transponierten A^t so folgt

$$A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

mit $x,y \in \mathbb{R}$ und $\det A = x^2 + y^2 = 1$.

3.4.2 Konstruktion der komplexen Zahlen

Bemerkung 3.4.7 (Drehstreckungen)

1. Ein positives Vielfaches $C = rZ$ einer Drehung $Z \in SO(2)$ mit einem reellen Faktor $r > 0$ heißt eine **Drehstreckung**. Also sind alle reellen 2×2-Matrizen der Form

   $$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

   mit $r = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ Drehstreckungen (vgl. Korr. 3.4.6).

2. Sind $C = rZ$, $D = \rho W$ mit $Z,W \in SO(2)$ und $r,\rho \in (0, \infty)$ Drehstreckungen, so ist auch ihr Produkt:

   $$C \cdot D = r\rho Z \cdot W$$

   und die Inverse eine Drehstreckung:

   $$C^{-1} = r^{-1}Z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

3. Mit zwei Drehstreckung C,D und $C \neq -D$ ist auch die Summe $C + D$ eine Drehstreckung, da diese Matrix wieder die Form

$$C + D = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

hat.

Für eine reelle Zahl $\lambda \neq 0$ ist λC eine Drehstreckung.

4. Nimmt man zu den Drehstreckungen noch die Nullmatrix hinzu, so erhält man eine unitale **Unteralgebra** $\mathbb{C}$ der Algebra der reellen 2×2-Matrizen.

Nach 2. enthält die Algebra $\mathbb{C}$ mit jedem Element $C \neq 0$ auch das Inverse C^{-1}. Die Algebra $\mathbb{C}$ ist also ein **Körper**.

5. Die Matrixschreibweise für die Elemente von $\mathbb{C}$ ist etwas aufwendig. Wir führen noch eine abkürzende Bezeichnung ein.

Definition 3.4.8 (Komplexe Zahlen)

1. *Der Körper der komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ *besteht aus allen reellen* 2×2-*Matrizen der Form*

$$c = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

2. *Man wählt als Basis von* $\mathbb{C}$ *die Einheitsmatrix* 1 *und die imaginäre Einheit*

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $i^2 = -1$.

Die Elemente von $\mathbb{C}$ *haben also die Form* $c = a \cdot 1 + b \cdot i$. *Man kürzt dies ab zu*

$$c = a + ib.$$

Bemerkung.

1. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum. Durch die Wahl der festen Basis $\{1, i\}$ ist $\mathbb{C}$ als Vektorraum isomorph zu dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

2. Entsprechend zur Darstellung der reellen Zahlen auf einer Geraden, stellt man die komplexen Zahlen als Punkte in einer Ebene dar. Man spricht von der **komplexen Ebene** oder **Gaußschen Ebene**.

   Man wählt in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem mit einer waagerechten x-Achse und einer senkrechten y-Achse.

   Eine komplexe Zahl $c = a + ib$ wird dann durch den Punkt mit den Koordinaten (a, b) oder einen Vektor mit den Koordinaten (a, b) dargestellt.

Satz 3.4.9 (Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$)
Die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = x \cdot 1 + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$$

ist ein Körperisomorphismus. D.h. die den reellen Zahlen entsprechenden komplexen Zahlen werden genauso addiert und multipliziert wie die reellen Zahlen. Sie bilden einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Unterkörper von $\mathbb{C}$.

Bezeichnung 3.4.10 ($\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$)
Die komplexen Zahlen der Form $z = x \cdot 1 + 0 \cdot i$ heißen **reell**. Man schreibt kurz x und betrachtet von nun an die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Bemerkung Auf $\mathbb{C}$ gibt es **keine Ordnung**, die den Axiomen eines geordneten Körpers 1.1.5 genügt.

In einem geordneten Körper sind Quadrate immer positiv (vgl. 1.1.6(1)). Es ist

$$1 = 1^2 \quad \text{und} \quad -1 = i^2.$$

Gäbe es eine solche Ordnung, so wären im Widerspruch zum Ordnungsaxiom sowohl 1 als auch -1 positiv .

Bemerkung.

1. Wir betrachten von nun an die komplexen Zahlen als eine Grundstruktur der Mathematik und nehmen auf ihre Konstruktion nur noch ganz selten bezug.

2. Die reellen Zahlen fassen wir als einen Unterkörper $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ der komplexen Zahlen auf.

3. Wir schreiben die komplexen Zahlen z nicht als Matrizen sondern in der Form
$$z = x + iy \qquad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}.$$
Natürlich ist $x + iy = x + yi$. Man schreibt aber den Faktor i meistens zuerst. So sind Realteil und Imaginärteil optisch schneller zu erkennen.

---

4. Die Torusgruppe fassen wir als eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ auf:
$$\mathbb{T} := \{z \mid z = x + iy \in \mathbb{C}^*,\ x^2 + y = 1\}.$$
Die Torusgruppe ist also der Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ mit der komplexen Multiplikation.

Wir schreiben $\mathbb{T}$, wenn wir die Gruppenstruktur betonen wollen, ansonsten $\mathbb{S}^1$.

Bezeichnung 3.4.11 (Realteil, Imaginärteil)

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ heißen die reellen Zahlen x, y **Realteil** von z bzw. **Imaginärteil** von z.

Die Abbildungen Real- und Imaginärteil sind reell linear:
$$\begin{aligned} \Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, &\qquad z = x + iy \mapsto \Re z := x, \\ \Im : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, &\qquad z = x + iy \mapsto \Im z := y. \end{aligned}$$
Geometrisch sind die Abbildungen $z \mapsto \Re z$ bzw. $z \mapsto \Im z$ die orthogonalen Projektionen der Ebene auf die Koordinatenachsen.

Für eine komplexe Zahl z gilt
$$z = \Re z + i \Im z.$$

Bemerkung.

1. Dem Transponieren von Matrizen entspricht die **Konjugation** komplexer Zahlen.
2. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat zwei Nullstellen i und $-i$. Algebraisch gesehen, ist $\mathbb{C}$ der kleinste Oberkörper von $\mathbb{R}$, der diese Nullstellen enthält. **Konjugation** entsteht durch Vertauschen dieser beiden Nullstellen.
3. Geometrisch handelt es sich bei der Konjugation um die Spieglung an der reellen Achse.

Bezeichnung 3.4.12 (Konjugation $z \mapsto \overline{z}$)
Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ setzt man

$$\overline{z} = x - iy.$$

$\overline{z} = \Re z - i\Im z$ heißt die **konjugiert komplexe** Zahl zu z.

Feststellung 3.4.13 (Rechenregeln: Konjugation)
Für die Konjugation gelten die folgenden Rechenregeln:

1. $\overline{\overline{z}} = z,$
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
3. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w},$
4. $\Re z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \Im z = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z}).$
5. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
6. $z\overline{z} = x^2 + y^2$ *ist reell und* $z\overline{z} \geq 0.$
7. *Für* $z \neq 0$ *ist*

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}.$$

Bemerkung. Die Regeln 1-3 besagen, daß die Konjugation ein **involutorischer Körperisomorphismus** von $\mathbb{C}$ ist.

Bezeichnung 3.4.14 (Der absolute Betrag $|z|$)
Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die nichtnegative Zahl

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt der **(absolute) Betrag** der komplexen Zahl z.

Bemerkung.

1. Der Betrag von z ist der **euklidische Abstand** des Punktes mit den Kordinaten (x, y) vom Ursprung.
2. Für reelle x ist $|x| = \max\{x, -x\}$. Die Definition 1.1.14 des Betrages in $\mathbb{R}$ mit Hilfe der Ordnung und der Betrag in $\mathbb{C}$ ergeben dasselbe Resultat.

3. $|z|^2$ ist zugleich die **Determinante** der Drehstreckung

$$z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Feststellung 3.4.15 (Rechenregeln: Betrag)
Für $z,w \in \mathbb{C}$ gelten:

1. $|z| \geqslant 0$ *und* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
2. $|zw| = |z||w|$ (multiplikativ),
3. $|\overline{z}| = |z|$,
4. *Für* $w \neq 0$ *gilt* $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.
5. $|\Re z| \leqslant |z|$ *und* $|\Im z| \leqslant |z|$,
6. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung),

Korollar 3.4.16 *Für $z,w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$||z| - |w|| \leqslant |z - w|.$$

Beweis (Rechenregeln: Betrag).
Es seien $z,w \in \mathbb{C}$, dann folgt:

1. klar.
2. $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z} \cdot \cdot w\overline{w} = |z|^2|w|^2$.
3. $|\overline{z}|^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.
4. Für $w \neq 0$ gilt $\left|\frac{z}{w}\right|^2 = \frac{z\overline{z}}{w\overline{w}}^2 = \left(\frac{|z|}{|w|}\right)^2$.
5. $|\Re z| = |x| \leqslant |z|$ und $|\Im z| = |y| \leqslant |z|$,
6. $$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = |z|^2 + 2\Re z\overline{w} + |w|^2 \\ &\leqslant |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Korollar folgt aus der Dreiecksungleichung.

3.4.3 Tangens und Arcus-Tangens

Beispiele 3.4.17 (Gebrochen lineare Funktionen)

1. $\mathbb{D} := \{z \mid |z| < 1\}$ heißt **offene Einheitskreisscheibe**,
   $\overline{\mathbb{D}} := \{z \mid |z| \leqslant 1\}$ heißt **abgeschlossene Einheitskr**.

2. Es sei $c \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\begin{aligned} |c| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \{z \mid |z-c| \leqslant |1-\overline{c}z|\} = \mathbb{D} \\ |c| = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \{z \mid |z-c| \leqslant |1-\overline{c}z|\} = \mathbb{C} \\ |c| > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \{z \mid |z-c| \leqslant |1-\overline{c}z|\} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \end{aligned}$$

3. Wenn $c \in \mathbb{C}$ und $|c| < 1$, dann bildet die Abbildung

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto \frac{z-c}{1-\overline{c}z} \in \mathbb{D}$$

   die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ bijektiv auf sich ab.

   Dieselbe Abbildung bildet auch $\mathbb{S}^1$ bijektiv auf sich ab.

Beispiele 3.4.18 (f : Obere Halbebene → Kreisscheibe)

1. Die Menge $\mathrm{H} := \{z \mid z \in \mathbb{C},\ \Im z > 0\}$ heißt die **obere Halbene**. Wenn $\Im c > 0$ ist, so gilt (Zeichnung!)

$$\{z \mid z \in \mathbb{C},\ |z-c| < |z-\overline{c}|\} = \mathrm{H}.$$

2. Es sei $c \in \mathbb{C}$, $\Im c > 0$ und $w_0 \in \mathbb{S}^1$. Die Funktion

$$\mathbb{C} \setminus \{\overline{c}\} \ni z \mapsto w := w_0 \frac{z-c}{z-\overline{c}} \in \mathbb{C}$$

   - bildet die obere Halbebene H bijektiv auf die offene Kreisscheibe $\mathbb{D}$ ab.
   - bildet die reelle Achse bijektiv auf $\mathbb{S}^1 \setminus \{w_0\}$ ab.
     Anschaulich gilt für x auf der reellen Achse:

$$\lim_{x\to\infty} w_0 \frac{x-c}{z-\overline{c}} = \lim_{x\to-\infty} w_0 \frac{x-c}{x-\overline{c}} = w_0.$$

Beispiele 3.4.19 (Rationale Parametrisierung von $\mathbb{S}^1$)

1. Die Funktion (Cayley-Transformation)

$$\mathrm{H} \cup \mathbb{R} \ni w \mapsto z := \frac{i-w}{i+w} \in \overline{\mathbb{D}}$$

bildet die obere Halbebene H bijektiv auf die offene Kreisscheibe $\mathbb{D}$ und die reelle Achse $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ ab.

w	0	1	-1	i	$(0,\infty)$	$(-\infty,0)$	$\pm\infty$
z	1	i	-i	0	oberer Halbkreis	unterer Halbkreis	-1

2. Man hat eine **rationale Parametrisierung** der Kreislinie

$$\mathbb{R} \ni u \mapsto \frac{1-u^2}{1+u^2} + i\frac{2u}{1+u^2} \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}.$$

3. Die Umkehrfunktion ist

$$\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\} \ni x+iy \mapsto u := \frac{y}{1+x} \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung (Tangens und Arcus-Tangens).

1. Die rationale Parametrisierung des Einheitskreises aus Beispiel 3.4.19 hängt eng mit der trigonometrischen Funktion $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \ni \varphi \mapsto \tan\varphi \in \mathbb{R}$ und ihrer Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ zusammen.

2. Im Schulunterricht setzt man für $\varphi \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$\tan\varphi := \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad \Rightarrow \quad (\tan\varphi)' = 1 + (\tan\varphi)^2 .$$

   Die funktion $\varphi \mapsto \tan\varphi$ strikt monoton wachsend. Ihre Bildmenge ist ganz $\mathbb{R}$.

3. Die Umkehrfunktion wird mit $x \mapsto \arctan x$ bezeichnet und hat die Ableitung

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} .$$

Bemerkung

1. Wir definieren zunächst die Funktion $x \mapsto \arctan x$ als Stammfunktion und $\varphi \mapsto \tan\varphi$ als Umkehrfunktion.

2. Im folgenden Beispiel 3.4.21 zeigen wir dann, daß die so definierten Funktionen die aus der Schule bekannten Eigenschaften haben.

Bezeichnung 3.4.20 (arctan x und tan φ)

1. Wir nennen die folgende Stammfunktion **Arcus-Tangens**:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \arctan x := \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} .$$

   Arcus-Tangens ist streng monoton wachsend.

2. Die Umkehrfunktion heißt **Tangens**: $\varphi \mapsto \tan\varphi$.

Beispiele 3.4.21 (Kreisparametrisierungmit $\tan\frac{\varphi}{2}$**)**

1. Wir berechnen für die Parametrisierung 3.4.19 für einen Punkt auf dem oberen Halbkreis mit Parameter $u \in (0,\infty)$ das Argument $\varphi \in (-\pi,\pi)$.

Nach Feststellung 3.3.28 gilt für das Argument

$$\varphi := \arg\left(\frac{i-u}{i+u}\right) = \int\limits_{\frac{1-u^2}{1+u^2}}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \,.$$

Mit der Substitution $(0,\infty) \ni t \mapsto \xi \in (-1,1)$

$$\xi := \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad d\xi = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt$$

und der Definition der Funktion arctan erhält man

$$\varphi := \arg\left(\frac{i-u}{i+u}\right) = 2\int\limits_0^u \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan u\,.$$

2. Eine analoge Rechnung zeigt, daß dieselbe Beziehung auch für den unteren Halbkreis gilt (vgl. Korollar 3.3.30).

3. Die Bildmenge der Funktion Arcus-Tangens ist das Intervall $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

4. Aus $u = \tan\frac{\varphi}{2}$ erhalten wir die Parametrisierung des Kreises $\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$:

$$(-\pi,\pi) \ni \varphi \mapsto \frac{1-(\tan\frac{\varphi}{2})^2}{1+(\tan\frac{\varphi}{2})^2} + i\frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1+(\tan\frac{\varphi}{2})^2}$$

5. Da φ das Argument des Bildpunktes ist, erhalten wir durch Vergleich mit $\varphi \mapsto \cos\varphi + i\sin\varphi$ die **Halbwinkelformeln**:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1-(\tan\frac{\varphi}{2})^2}{1+(\tan\frac{\varphi}{2})^2} \\ \sin\varphi &= \frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1+(\tan\frac{\varphi}{2})^2} \end{aligned}\right. \qquad \text{für } \varphi \in (-\pi,\pi).$$

---

6. Wir Berechnen die Bogenlänge auf dem rechten Halbkreis

$$(-1,1) \ni u \mapsto \frac{i-u}{i+u}\,.$$

Auf dem rechten Halbkreis ist $\cos\varphi = x > 0$ und

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x} = \frac{2u}{1-u^2}\,.$$

Mit der Substitution $(-1,1) \ni t \mapsto s \in (-\infty,\infty)$:

$$s = \frac{2t}{1-t^2}\,, \qquad ds = 2\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}dt$$

folgt für die Bogenlänge:

$$\arctan\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) = \int_0^{\frac{2u}{1-u^2}} \frac{ds}{1+s^2} = 2\int_0^u \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan u = \varphi.$$

Feststellung 3.4.22 (Umrechnung: $\sin\varphi, \cos\varphi, \tan\varphi, \tan\frac{\varphi}{2}$**)**
Wir haben die folgenden Formeln erhalten:

1.
$$\tan\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \qquad \textit{für } \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

2.
$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1-(\tan\frac{\varphi}{2})^2}{1+(\tan\frac{\varphi}{2})^2} \\ \sin\varphi &= \frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1+(\tan\frac{\varphi}{2})^2} \end{aligned}\right. \qquad \textit{für } \varphi \in (-\pi, \pi).$$

3.
$$\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1-(\tan\varphi)^2} \qquad \textit{für } \varphi \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$$

4.
$$\arctan\frac{2u}{1-u^2} = 2\arctan u \qquad \textit{für } u \in (-1,1).$$

Ziel: Wir werden die bisher betrachteten Funktionen folgendermaßen zusammenfassen:

- **komplexe Exponentialfunktion**:
$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y) \quad \text{für } z = x+iy \in \mathbb{C}.$$

- Hauptzweig des **komplexen Logarithmus**:
$$\begin{aligned} \log w &:= \log|w| + i\arg w \\ &= \log|w| + i\,2\arctan\Big(\frac{v}{|w|+u}\Big) \end{aligned}$$
für $w = u + iv$ mit $|w| \neq -u$.

Beispiel: $\exp(2\pi i) = 1$ und $i^i = e^{-\pi/2}$ (L. Euler 1728).

Zuvor betrachten wir das verwandte, aber etwas einfachere Problem des **Wurzelziehens**.

3.4.4 Einheitswurzeln

Beispiele 3.4.23 (Quadratische Gleichungen)
Man findet die Nullstellen einer quadratischen Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $p,\ q \in \mathbb{C}$ durch Bildung der **quadratischen Ergänzung**:

$$z^2 + pz + q = \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = w^2 - c.$$

Man berechne die **beiden Wurzeln** aus $c := 1/4(p^2 - 4q)$:

$$w_{1,2} := \pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}\ .$$

Es folgt bekannte Formel für die beiden Nullstellen z_1 und z_2 einer quadratischen Gleichung:

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p - 4q}.$$

Feststellung 3.4.24 (Quadratwurzel)
Es sei $c = a + ib \in \mathbb{C}$. Die Gleichung

$$w^2 = c$$

hat zwei Lösungen:

$$w_{1,2} := \pm \begin{cases} \sqrt{a} & \text{wenn } a > 0,\ b = 0, \\ \sqrt{|a|}\, i & \text{wenn } a < 0,\ b = 0, \\ \sqrt{\frac{1}{2}(|c| + a)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(|c| - a)} & \text{wenn } b > 0, \\ \sqrt{\frac{1}{2}(|c| + a)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(|c| - a)} & \text{wenn } b < 0. \end{cases}$$

Bemerkung. 1.Wir nennen die jeweile +-Wurzel den **Hauptzweig** der Quadratwurzel.

2. Wir leiten unten eine einheitliche Formel für den Hauptzweig der Quadratwurzel her, aus der klarer hervorgeht, was der Hauptzweig ist.

Beweis (Quadratwurzel).

$$\begin{aligned} & w^2 = (u + iv)^2 = c = a + ib \\ \Leftrightarrow\quad & u^2 - v^2 = a \quad \text{und} \quad 2uv = b \end{aligned}$$

Aus $u^2 + v^2 = |w|^2 = |c|$ folgt

$$u^2 = \frac{1}{2}(|c| + a),$$
$$v^2 = \frac{1}{2}(|c| - a).$$

Also ist

$$|u| = \sqrt{\frac{1}{2}(|c| + a)}\ ,$$
$$|v| = \sqrt{\frac{1}{2}(|c| - a)}\ .$$

Berücksichtigt man nun die verschieden Fälle für die Vorzeichen von b, so folgt aus $2uv = b$ die behauptete Formel.

Beispiele 3.4.25 (Dritte Einheitswurzeln)
Die Gleichung

$$z^3 - 1 = 0$$

hat drei Lösungen ζ_0,ζ_1,$\zeta_2 \in \mathbb{T}$. Sie heißen die **dritten Einheitswurzeln**:
Da

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

ist, sind dies die Zahlen $\zeta_0 = 1$ und die beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$:

$$\zeta_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{und} \quad \zeta_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Es gilt

$$|1 - \zeta_1| = |1 - \zeta_2| = |\zeta_1 - \zeta_2| = \sqrt{3}.$$

Die dritten Einheitswurzeln sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.

Bemerkung. Wir wollen ***n*-te Wurzeln** aus komplexen Zahlen berechnen. Dazu ersetzen wir die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ durch eine isomorphe Gruppe, in der sich Potenzen und Wurzeln besser berechnen lassen:

1. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}^*$ läßt sich eindeutig in der folgenden Form schreiben:

$$z = rw \quad \text{mit } r := |z| \in \mathbb{R}_+^*,\ w = \frac{z}{|z|} \in \mathbb{T}.$$

2. In der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}_+^*$ der positiven reellen Zahlen kan man n-te Wurzeln eindeutig berechnen (vgl. Feststellung 2.2.13).

3. Die Argumentfunktion liefert einen bijektiven Gruppenisomorphismus $\mathbb{T} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (vgl. Bemerkung 3.4.4).

---

4. Die Polarkoordinaten (vgl. Satz 3.3.15(2.)) liefern einen bijektiven Gruppenisomorphismus

$$\begin{gathered}\mathbb{C}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \\ z \mapsto (|z|, [\arg z])\end{gathered}$$

mit Umkehrabbildung

$$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni (r, [\varphi]) \mapsto r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}^*.$$

5. In $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ kann man die n-ten Wurzeln in jeder Koordinate einzeln bestimmen.

   Wir müssen also noch die n-te Wurzel in der Gruppe $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ zu untersuchen.

   Diese ist nicht eindeutig. Deshalb betrachten wir zunächst die ***n*-ten Einheitwurzeln**:

$$\{\zeta \mid \zeta \in \mathbb{T},\ \zeta^n = 1\}.$$

Feststellung 3.4.26 (*n*-te Einheitswurzeln)

1. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Gleichung $z^n = 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen*

$$\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \textit{für } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

   *$\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ heißen die **n-ten Einheitswurzeln**.*

2. *Da*

$$\zeta_k = \left(\zeta_1\right)^k \quad \textit{für } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

   *ist, bilden die n-ten Einheitswurzeln eine **zyklische Untergruppe** der Ordnung n der Torusgruppe $\mathbb{T}$.*

   $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ni [k] \mapsto \zeta_k \in \mathbb{T}$ ist ein Gruppenisomorphismus der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_n$ in die Torusgruppe.

Bemerkung. Die n-ten Einheitswurzeln bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf dem Einheitskreis. Daher heißt die Gleichung $z^n = 1$ auch die **Kreisteilungsgleichung**.

Beweis Einheitswurzeln.
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Da für $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned}(\zeta_k)^n &= (\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n})^n \\ &= \cos(n\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(n\frac{2k\pi}{n}) = 1\end{aligned}$$

ist, sind die ζ_k Lösungen der Gleichung $z^n = 1$.
Gilt umgekehrt für ein $z = \cos\varphi + i\sin\varphi \in \mathbb{T}$

$$1 = z^n = \cos(n\varphi) + \sin(n\varphi),$$

so ist (vgl. Lemma 3.4.1) $n\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$. D. h. es gibt ein $l \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varphi = \frac{l2\pi}{n}.$$

Es gibt genau ein $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, so daß

$$k \equiv l \mod n.$$

Also ist $z = \zeta_k$.

3.4.5 Komplexe Exponentialfunktion

Literatur

[Bröcker] Bröcker, Theodor: *Analysis1 (2. Auflage) 1995* Spektrum, Akad. Verl.

[Dieudonné] Dieudonné, J.: *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press 1960. Deutsche Übersetzung: *Grundzüge der modernen Analysis* Vieweg 1981

[Forster] Forster, Otto: *Analysis 1 (4. Auflage)* Vieweg 1983

[Kaballo] Kaballo, Winfried: *Einführung in die Analysis I (2. Auflage)* Spektrum Akademische Verlag, Heidelberg Berlin

[Königsberger] Königsberger, Konrad: *Analysis I (2. Auflage)* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York

[LANDAU] LANDAU, Edmund: Grundlagen der Analysis (Das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen) Leipzig 1930, dritte Auflage: New York 1960.

[VAN DER WAERDEN] VAN DER WAERDEN, B. L.: Algebra (Band I) 7. Auflage: Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1966.