4. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

Aufgabe 4.1 Man zeige die folgende Variante der Bernoullischen Ungleichung: Für $0 \leq x \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}.$$

Aufgabe 4.2 Man zeige die folgende Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung: Sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq x_k \leq 0$ für alle k oder $x_k \geq 0$ für alle k, so gilt

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Aufgabe 4.4 Die Folge

$$\left(\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist streng monoton fallend und es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$$

für alle n, m in $\mathbb{N}$.

Aufgabe 4.5 Man zeige, daß die Folgen

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

beschränkt sind.

Aufgabe 4.6 Man zeige für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen:

$$1 - \frac{1}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 + \frac{2}{n}.$$

Wichtig: Alle Lösungen sind zu begründen!

Abgabe: Mo 27.11.2000 in der Vorlesungspause