

# Vorlesungsskript zu Analysis 1

## Wintersemester 2000-2001

Universität des Saarlandes  
FR 6.1 Mathematik  
Prof. Dr. G. Wittstock

2. April 2001

---

### Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zahlen und Funktionen</b>	<b>1</b>	<b>1.3 Abbildungen</b>	<b>12</b>
1.1 Reelle Zahlen	1	1.3.1 Abbildungsbegriff	12
1.1.1 Körperaxiome	1	1.3.2 Graphen	14
1.1.2 Geordnete Körper	2	1.3.3 Umkehrabbildung	15
1.1.3 Anordnung	3	1.3.4 Komposition von Abbildungen	16
1.1.4 Minimum und Maximum	4	1.3.5 Endliche Mengen	17
1.1.5 Betrag	5	1.3.6 Kartesisches Produkt	18
1.2 Vollständige Induktion	5	1.4 Reellwertige Funktionen	20
1.2.1 Summen und Produktzeichen	5	1.4.1 Funktionen	20
1.2.2 Induktionsprinzip	7	1.4.2 Folgen	21
1.2.3 Varianten des Induktionsprinzips	9	1.5 Ungleichungen	23
1.2.4 Fakultät, Binomialkoeffizient	10	1.5.1 Bernoullische Ungleichung	23
1.2.5 Wohlordnung der natürlichen Zahlen	11	1.5.2 Approximation der Eulerschen Zahl	25
		<b>2 Konvergenz und Stetigkeit</b>	<b>28</b>
		2.1 Konvergenz von Folgen	28
		2.1.1 Archimedisches Axiom	29
		2.1.2 Grenzwertregeln	30

2.1.3	Uneigentliche Konvergenz	33	2.7.2	Häufungswerte von Folgen	70
2.2	Vollständigkeit der reellen Zahlen	34	2.7.3	Limes superior	70
2.2.1	Intervallschachtelungen	34	2.8	Gleichmäßige Konvergenz	74
2.2.2	Vollständig geordneter Körper	35	2.8.1	Funktionsfolgen	74
2.2.3	Cauchysches Konvergenzkriterium	36	2.8.2	Regelfunktionen	76
2.2.4	Monotone Folgen	37	<b>3</b>	<b>Integral und Ableitung</b>	<b>79</b>
2.2.5	n-te Wurzeln	38	3.1	Integral von Regelfunktionen	79
2.3	Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	40	3.1.1	Definition eines Integrals	79
2.3.1	Grenzwerte von Funktionen	40	3.1.2	Integral von Treppenfunktionen	82
2.3.2	Uneigentliche Grenzwerte	43	3.1.3	Integral von Regelfunktionen	84
2.3.3	Cauchy Kriterium	45	3.1.4	Integration stetiger Funktionen	87
2.3.4	Komposition von Grenzwerten	46	3.1.5	Logarithmus als Stammfunktion	89
2.3.5	Stetige Funktionen	47	3.1.6	Riemannsche Summen von Regelfunktionen	90
2.3.6	Allgemeine Grenzwertdefinition	48	3.1.7	Partielle Integration	92
2.3.7	Sprünge und Oszillationen	49	3.1.8	Integral der Umkehrfunktion	94
2.4	Konvexe Funktionen	51	3.1.9	Mittelwertsatz der Integralrechnung	96
2.4.1	Lipschitz-stetige Funktionen	51	3.1.10	Transformation des Integranden	97
2.4.2	Konvexe Funktionen	52	3.2	Differentialrechnung	99
2.4.3	Reelle Potenzen	55	3.2.1	Grenzwert des Differenzenquotienten	99
2.5	Supremum und Zwischenwertsatz	59	3.2.2	Rechenregeln für die Ableitung	101
2.5.1	Supremum	59	3.2.3	Kettenregel	102
2.5.2	Uneigentliche Suprema	61	3.2.4	Mittelwertsatz	104
2.5.3	Zwischenwertsatz	61	3.2.5	Hauptsatz der Integral- und Differential-Rechnung	108
2.5.4	Stetigkeit der Umkehrfunktion	63	3.2.6	Grenzwertsätze für Folgen differenzierbarer Funktionen	109
2.6	Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen	65	3.2.7	Ableitung als lineare Approximation	111
2.6.1	Satz vom Maximum	65	3.2.8	Rechnen mit Differentialen	112
2.6.2	Gleichmäßige Stetigkeit	66	3.3	Trigonometrische Funktionen	115
2.7	Konvergente Teilfolgen	68	3.3.1	Harmonische Schwingungen	116
2.7.1	Konvergente Teilfolgen	68			

3.3.2	Kurvenlänge und Bogenmaß . . . . .	122
3.3.3	Hyperbolische Funktionen . . . . .	124
3.3.4	Bogenmaß und arccos, arcsin . . . . .	125

# 1 Zahlen und Funktionen

## 1.1 Reelle Zahlen

Die folgenden Mengen von Zahlen werden als bekannt vorausgesetzt:

$\mathbb{N}$	$= \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$= \mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\mathbb{Z}$	$= \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	$= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{Q}_*$	$= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, p \neq 0, q \in \mathbb{N} \right\}$	rationale Zahlen ungleich Null
$\mathbb{Q}^+$	$= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N} \right\}$	nichtnegative rationale Zahlen
$\mathbb{Q}_*^+$	$= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \right\}$	positive rationale Zahlen

Die Menge der **reellen Zahlen** bezeichnen wir mit  $\mathbb{R}$ .

**Ziel 1.1.1** Wir werden die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  durch ihre Eigenschaften charakterisieren. Diese Eigenschaften lassen sich auf wenige Axiome zurückführen, die in die folgenden Gruppen unterteilt werden:

- die Körperaxiome (K1)-(K11),
- die Axiome (01)-(03) für die positiven Zahlen,
- das archimedische Axiom (A),
- das Intervallschachtelungsprinzip (I).

Die reellen Zahlen bilden das Fundament des Gebäudes Analysis, das wir bauen wollen. Für das Fundament geben wir nur die Anforderungen in Form der Axiome an und vertrauen vorerst den Konstrukteuren (Richard Dedekind 1872 und Georg Cantor 1883).

### 1.1.1 Körperaxiome

Die Menge  $\mathbb{R}$  genügt den **Körperaxiomen**:

**Definition 1.1.2 (Körperaxiome.) (K1)** Je zwei Elementen  $a, b \in \mathbb{R}$  ist eindeutig ein Element  $a + b \in \mathbb{R}$  zugeordnet, das Summe von  $a$  und  $b$  heißt.

**(K2)** Für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt das Assoziativgesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

**(K3)** Es gibt ein Element  $0 \in \mathbb{R}$ , so daß für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$a + 0 = a.$$

**(K4)** Zu  $a \in \mathbb{R}$  gibt es  $x \in \mathbb{R}$  mit  $a + x = 0$ .

**(K5)** Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt das Kommutativgesetz

$$a + b = b + a.$$

**(K6)** Für  $a, b \in \mathbb{R}$  ist eindeutig ein Element  $ab \in \mathbb{R}$  zugeordnet, das Produkt von  $a$  und  $b$  heißt.

**(K7)** Für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt das Assoziativgesetz

$$(ab)c = a(bc).$$

**(K8)** Es gibt ein Element  $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so daß für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$a1 = a.$$

**(K9)** Zu  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt es  $x \in \mathbb{R}$  mit  $ax = 1$ .

**(K10)** Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt das Kommutativgesetz

$$ab = ba.$$

**(K11)** Für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt das Distributivgesetz

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Eine Menge mit den Eigenschaften (K1) - (K11) heißt ein Körper.

Außer den reellen Zahlen gibt es noch viele weitere **Körper**, die zum Teil ganz andere Eigenschaften haben:

**Beispiele 1.1.3** 1. Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  mit der üblichen Addition und Multiplikation bilden einen Körper.

2. Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  bilden einen Körper. In  $\mathbb{C}$  gibt es eine Zahl  $i$  mit  $i^2 = -1$ .

3. Die Menge  $\mathbb{Z}_2$  bestehend aus den zwei Elementen 0 und 1 und den folgenden Verknüpfungen ist ein Körper:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

In  $\mathbb{Z}_2$  gilt  $1 = -1$ .

**Bemerkung 1.1.4** 1. Aus den Körperaxiomen folgen alle weiteren bekannten Rechenregeln für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Zahlen.

2. Die Lösung der Gleichung (K3)  $a + x = 0$  ist eindeutig. Wir nennen die Lösung den negativen Wert von  $a$  und bezeichnen sie mit  $-a$ . Differenzen definieren wir wie üblich als  $b - a := b + (-a)$ .

3. Die Lösung der Gleichung (K9)  $ax = 1$  ist eindeutig. Wir nennen die Lösung den Kehrwert von  $a$  und bezeichnen sie mit  $\frac{1}{a}$ . Brüche definieren wir wie üblich  $\frac{b}{a} := b \frac{1}{a}$ .

4. Wir benutzen die Potenzschreibweise  $a^n$  für das  $n$ -fache Produkt von  $a$  mit sich, setzen  $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$  und verwenden die bekannten Rechenregeln für ganzzahlige Potenzen. Insbesondere setzen wir  $a^0 := 1$  für alle  $a \in \mathbb{R}$ .

## 1.1.2 Geordnete Körper

Die Menge der **positiven Zahlen** kann wie folgt **axiomatisch** eingeführt werden:

**Definition 1.1.5 (Geordneter Körper)**

**(O1)** Es gibt eine Teilmenge  $P \subseteq \mathbb{R}$ , so daß für alle  $a \in \mathbb{R}$  genau eine der folgenden drei Möglichkeiten zutrifft:

$$a = 0, \quad a \in P, \quad -a \in P.$$

(O2)  $P$  ist abgeschlossen unter der Addition, d.h. für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt  $a + b \in P$ .

(O3)  $P$  ist abgeschlossen unter der Multiplikation, d.h. für  $a, b \in P$  gilt  $ab \in P$ .

**Bezeichnung** Wir werden später die Menge der positiven reellen Zahlen mit  $\mathbb{R}_*^+$  bezeichnen oder als offenes Intervall  $(0, \infty)$  schreiben.

---

Ein Körper, der die Ordnungsaxiome (O1) - (O3) erfüllt, heißt ein geordneter Körper.

### Beispiele und Bemerkungen 1.1.6

1. In einem geordneten Körper ist für alle  $a \neq 0$  das Quadrat  $a^2 \in P$ , speziell ist  $1 \in P$ . Die Körper  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{Z}_2$  sind also keine geordneten Körper.
2. Aus  $a \in P$  folgt  $\frac{1}{a} \in P$ .
3. Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Mit  $1 \in P$  ist auch die Summe von  $n$  Einsen positiv. Jeder geordnete Körper enthält die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  und damit auch die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  und deren Quotienten, die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ .
4.  $\mathbb{Z} \cap P = \mathbb{N}$
5. Eine rationale Zahl  $\frac{p}{q}$  ist genau dann in  $P$ , wenn  $p, q \in \mathbb{N}$ . D.h.  $P \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_*^+$ .

---

### 1.1.3 Anordnung

Wir arbeiten im allgemeinen nicht mit den Axiomen (O1)-(O3), sondern mit den entsprechenden Regeln für die Anordnung:

**Definition 1.1.7 (Anordnung.)** Wir definieren eine Anordnung auf  $\mathbb{R}$  durch

$$a < b \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \in P$$

und führen die Notation

$$a > b \quad :\Leftrightarrow \quad b < a$$

ein.

---

Die Anordnung von  $\mathbb{R}$  drückt sich geometrisch in der vertrauten Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengeraden aus: Dabei bedeutet  $a < b$ , daß der Punkt  $a$  links vom Punkt  $b$  liegt.

Die Addition  $x \mapsto x + b$  wird zur Verschiebung (Translation) um die Strecke  $b$  und die Multiplikation  $x \mapsto xb$  mit einem  $b > 0$  zur Streckung um den Faktor  $b$ .

---

Man veranschauliche sich die geometrische Aussage der folgenden Regeln.

### Feststellung 1.1.8 (Rechenregeln für Ungleichungen.)

1.  $a \in P \Leftrightarrow a > 0$ .
2. Für beliebige reelle Zahlen  $a, b$  gilt genau eine der drei Relationen

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

3. Aus  $a < b$  und  $b < c$  folgt  $a < c$  (**Transitivität der Anordnung.**)

---

4.

$$\text{Aus } a < b \text{ folgt } \begin{cases} a + c < b + c & \text{für jedes } c \in \mathbb{R} \\ ac < bc & \text{falls } c > 0 \\ ac > bc & \text{falls } c < 0 \\ \frac{1}{b} < \frac{1}{a} & \text{falls } a > 0 \end{cases}$$

- 
5. Man kann Ungleichungen addieren:

$$\text{Aus } a < b \text{ und } c < d \text{ folgt } a + c < b + d.$$

6. Ungleichungen zwischen positiven Zahlen kann man multiplizieren:

$$\text{Aus } 0 < a < b \text{ und } 0 < c < d \text{ folgt } ac < bd.$$

7. Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 < a, 0 < b$ . Dann gilt

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^n < b^n.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KÖNIGSBERGER, S. 8].

---

**Bezeichnung 1.1.9** Wir führen eine abkürzende Bezeichnung ein:

$$b \leq a \quad :\Leftrightarrow \quad b < a \text{ oder } b = a$$

und entsprechend

$$a \geq b \quad :\Leftrightarrow \quad b \leq a.$$

---

**Bemerkung 1.1.10 (zur Relation  $\leq$ )**

1. Für beliebige reelle Zahlen  $a, b$  ist

$$\text{entweder } a \leq b \text{ oder } a > b.$$

2. Die Aussage  $a \leq b$  ist die Negation der Aussage  $b < a$ .

*Man kann eine Aussage  $a \leq b$  beweisen, indem man den die Annahme  $b < a$  zu einem Widerspruch führt*

3. Aus  $a \leq b$  und  $b \geq a$  folgt  $a = b$  (**Antisymmetrie**).

*Diese Schlußweise wird häufig benutzt, um kompliziertere Identitäten zu beweisen, die man nicht durch einfaches Anwenden von Formeln erhalten kann.*

---

4. Wenn

$$a \leq b + \varepsilon \text{ für alle } \varepsilon > 0$$

gilt, dann ist

$$a \leq b.$$

*Wenn man den Punkt  $b$  ein wenig nach rechts rückt, läßt sich die Abschätzung oft leichter zeigen*

---

## 1.1.4 Minimum und Maximum

**Definition 1.1.11 (Minimum und Maximum.)**

Es sei  $M \subset \mathbb{R}$ .

1. Eine Zahl  $a \in M$  heißt **Minimum** von  $M$ , falls für alle  $x \in M$  gilt:  $a \leq x$ . Man bezeichnet das Minimum von  $M$  mit  $\min M$ .
  2. Eine Zahl  $b \in M$  heißt **Maximum** von  $M$ , falls für alle  $x \in M$  gilt:  $x \leq b$ . Man bezeichnet das Maximum von  $M$  mit  $\max M$ .
- 

**Bemerkung 1.1.12 (Minimum und Maximum)**

1. Sind  $a_1$  und  $a_2$  Minima von  $M$  so ist  $a_1 = a_2$ .  
Ebenso sind Maxima eindeutig bestimmt.
  2. Wenn  $M$  ein Minimum hat, so ist  $\min M$  das **kleinste** Element von  $M$ .  
Wenn  $M$  ein Maximum hat so ist  $\max M$  das **größte** Element von  $M$ .
- 

**Beispiele 1.1.13 (Minimum und Maximum)**

1.  $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$  besitzt kein Minimum und kein Maximum.
2. Für  $J = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$  gilt

$$\min J = 0 \quad \text{und} \quad \max J = 1.$$

3. Die Mengen  $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  haben kein Maximum. Es ist  $\min \mathbb{N} = 1$ .
4.  $M$  habe ein Minimum. Dann hat die Menge

$$-M := \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in M\}$$

ein Maximum und es gilt

$$\max(-M) = -\min M$$

---

### 1.1.5 Betrag

**Definition 1.1.14 (Betrag.)** Der Betrag einer reellen Zahl  $a$  wird definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

**Bemerkung 1.1.15** 1. Für  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$|a| = \max\{a, -a\}$$

2. Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$|a| \leq |b| \Leftrightarrow -|b| \leq a \leq |b|$$

3. Für  $a, b, x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$a < x < b \text{ und } a < y < b \Rightarrow |x - y| < |b - a| = b - a.$$

---

Bei der Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengeraden mißt  $|a|$  den Abstand des Punktes  $a$  zum Nullpunkt und  $|a - b|$  mißt den Abstand der Punkte  $a$  und  $b$ .

Viele Rechnungen mit Beträgen beruhen nur auf dem Abstandsbegriff und benutzen nicht die Definition des Betrages.

Rechnungen, die auf den folgenden Regeln für einen Betrag beruhen, lassen sich problemlos auf den Abstand komplexer Zahlen und weitere Abstandsbegriffe übertragen.

---

**Satz 1.1.16 (Rechenregeln für den Betrag.)** Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gelten:

1.  $|a| \geq 0$
2.  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3.  $|ab| = |a||b|$
4.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (**Dreiecksungleichung**)

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 9].

**Korollar 1.1.17** Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 9].

---

**Beispiele 1.1.18**

Für die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3||x + 3| < 16\}$$

gilt

$$x \in M \Leftrightarrow -5 < x < 5.$$

---

## 1.2 Vollständige Induktion

### 1.2.1 Summen und Produktzeichen

Summen von endlich vielen reellen Zahlen nennt man im Unterschied zu den noch zu behandelnden unendlichen Reihen auch endliche Summen oder endliche Reihen.

---

Summen werden mit Hilfe des Summenzeichens abgekürzt:

**Bezeichnung 1.2.1 (Summenzeichen)** 1. Es seien  $m, n \in \mathbb{Z}$  und  $m < n$ . Wir schreiben die Summe der Zahlen  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  mit dem Summenzeichen:

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

2. Man nennt

- $m$  untere Summationsgrenze
- $n$  obere Summationsgrenze,
- $k$  Laufindex oder Summationsindex,
- $a_k$  Summand.

Die Anzahl der Summanden ist  $n - m + 1$ .

---

3. Eine formale Erweiterung des Summenzeichens ist die **leere Summe**: Eine Summe bei der der obere Summationsindex kleiner als der untere Summationsindex ist, heißt leere Summe. Die leere Summe wird als 0 definiert.

Bei der leeren Summe wird nichts addiert, die formalen Summanden müssen nicht einmal definiert sein.

Ein Beispiel einer leeren Summe ist

$$0 = \sum_{k=10}^1 k \neq 10 + 9 + \dots + 1.$$

### Beispiele 1.2.2 (Summenzeichen)

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad (\text{geometrische Reihe}),$$

$$\sum_{k=0}^{10} 2^{-k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1024},$$

$$\sum_{k=-m}^n c_k 10^k \quad \text{wobei } c_k \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{Dezimalzahl})$$

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (\text{Polynom vom Grad } n),$$

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k = 0 \quad (\text{leere Summe})$$

### Feststellung 1.2.3 (Rechenregeln für endliche Summen)

1. Auf die Bezeichnung des Index kommt es nicht an:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m}^n a_j.$$

2. Verschiebung des Laufindex:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m+l}^{n+l} a_{j-l}.$$

Die Summationsgrenzen müssen entgegengesetzt verschoben werden.

3. Das **Assoziativgesetz** gilt: Wenn  $l, m, n \in \mathbb{Z}$  und  $l < m < n$  ist so gilt

$$\sum_{k=l}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=l}^n a_k.$$

Beachte, das Summenzeichen bindet stärker als das '+'-Zeichen.

4. Das **Kommutativgesetz** gilt: Bei einer Umordnung (Permutation) der Summanden ändert sich der Wert der Summe nicht.
5. Beispiel: umgekehrte Reihenfolge der Summanden:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n a_{n+m-k}.$$

6. Beispiel: Summen mit gleichen Summationsgrenzen kann man unter einem Summenzeichen zusammenfassen:

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k).$$

7. Beispiel: Bei **Doppelsummen** kann man die Summationsreihenfolge vertauschen:

$$\sum_{k=m}^n \sum_{l=p}^q a_{kl} = \sum_{l=p}^q \sum_{k=m}^n a_{kl}.$$

Man ordne die Summanden in einem Rechteck an:

$a_{m,p}$	$a_{m,p+1}$	$\dots$	$a_{m,q}$
$a_{m+1,p}$	$a_{m+1,p+1}$	$\dots$	$a_{m+1,q}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$a_{n,p}$	$a_{n,p+1}$	$\dots$	$a_{n,q}$



Man kann nun entweder zuerst die Zeilensummen bilden und diese aufaddieren oder mit den Spaltensummen beginnen. Auf beiden Wegen erhält man die Summe aller Einträge.

8. Das **Distributivgesetz** gilt:

$$c \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n c a_k.$$

9. Beispiel: Für das Produkt zweier Summen gilt:

$$\left( \sum_{k=m}^n a_k \right) \left( \sum_{l=p}^q b_l \right) = \sum_{k=m}^n \sum_{l=p}^q a_k b_l.$$

Man kann also auf die Klammern auf der linken Seite verzichten.

Produkte werden mit Hilfe des Produktzeichens abgekürzt:

### Bezeichnung 1.2.4 (Produktzeichen)

1. Es seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $m \leq n$ . Wir schreiben das Produkt der Zahlen  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  mit dem Produktzeichen:

$$\prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

2. Ein Produktzeichen, bei dem die obere Grenze kleiner als die untere Grenze ist, heißt *leeres Produkt*. Das leere Produkt wird als 1 definiert.

### Bemerkungen und Beispiele 1.2.5 (Produktzeichen)

1. Auf die Bezeichnung des Index kommt es nicht an; es ist:

$$\prod_{k=n}^m a_k = \prod_{j=n}^m a_j$$

2. Der Laufindex läßt sich transformieren:

$$\prod_{k=n}^m a_k = \prod_{j=n+l}^{m+l} a_{j-l}.$$

Die Grenzen müssen entsprechend transformiert werden.

3. Das Produkt ist assoziativ und die Reihenfolge der Faktoren kann beliebig permutiert werden.

4. Beispiel eines leeren Produktes:

$$\prod_{j=n+1}^n a_j = 1.$$

5. Für  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$\prod_{k=1}^n a = a^n.$$

Für  $n < 0$  stimmt dies nicht!

6. Das Produkt der Zahlen  $1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$  nennt man Fakultät von  $n$  und bezeichnet es mit  $n!$ . Man setzt  $0! := 1$ . Sprich:  $n$ -Fakultät.

Es gilt für  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

## 1.2.2 Induktionsprinzip

Wir setzen weiterhin die natürlichen Zahlen als bekannt voraus, wollen aber ihre Eigenschaft etwas formaler beschreiben. Das kann auf verschiedenen Weisen geschehen.

Üblich ist das folgende Axiomensystem (**Peano Axiome**), das wir hier nur umgangssprachlich formulieren.

Die Axiome präzisieren den Vorgang des Zählens:

- Es gibt eine natürliche Zahl 1.
- Auf jede natürliche Zahl  $n$  folgt eine nächste, die man mit  $n + 1$  bezeichnet.
- Man kann beim Zählen nicht mehrmals auf dieselbe Zahl stoßen. D.h. wenn zwei natürliche Zahlen  $m, n$  denselben Nachfolger haben, sind sie gleich:

$$m + 1 = n + 1 \quad \Rightarrow \quad m = n.$$

- Man kommt beim Zählen nicht zurück zur 1. D.h. für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt:

$$n + 1 \neq 1$$

- Man erreicht durch Zählen, ausgehend von der 1, alle natürlichen Zahlen.

Die zuletzt genannte Eigenschaft heißt das **Induktionsprinzip**. Wir formulieren es in der Sprache der Mengenlehre.

**Feststellung 1.2.6 (Induktionsprinzip)** *Es sei  $M \subseteq \mathbb{N}$  ein Teilmenge der natürlichen Zahlen mit den Eigenschaften*

- a)  $1 \in M$
- b)  $n \in M \quad \Rightarrow \quad n + 1 \in M$

Dann folgt schon  $M = \mathbb{N}$

In den Anwendungen hat man eine Aussage  $A(n)$  über eine natürliche Zahlen  $n$ . Die Aussage sei für alle natürlichen Zahlen formulierbar. Man möchte die Aussage  $A(n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  beweisen.

Dazu bilde man die Menge

$$M := \{n \mid n \in \mathbb{N}, A(n) \text{ ist richtig für } n\}$$

und zeige mit Hilfe des Induktionsprinzips, daß  $M = \mathbb{N}$  ist.

Dazu muß man für  $M$  die Eigenschaften a) und b) nachweisen. Man kommt so zu dem folgendem Beweisprinzip:

### Feststellung 1.2.7 (Vollständige Induktion)

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei eine Aussage  $A(n)$  gegeben. Es gelte:

**Induktionsanfang:**  $A(1)$  ist richtig .

**Induktionsschritt:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt der Schluß:

$$A(n) \quad \Rightarrow \quad A(n + 1).$$

Dann ist  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  richtig.

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 13].

### Beispiele 1.2.8 (Induktionsbeweise)

1. Dreiecksungleichung für endliche Reihen:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

2. Summenformel der geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{für } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

3. Zweite binomische Formel:

$$(x - y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k = x^{n+1} - y^{n+1}.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 14].

### 1.2.3 Varianten des Induktionsprinzips

**Anmerkung.** Aus den Peano-Axiomen folgen alle weiteren Eigenschaften der natürlichen Zahlen; insbesondere:

- Die natürlichen Zahlen haben eine Anordnung (totale Ordnung).
- Die Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen ergibt wieder natürliche Zahlen.

Die Herleitung dieser Aussagen erfolgt in einer langen Kette an sich einfacher Induktionsbeweise, die man aber in der richtigen Reihenfolge durchführen muß (siehe [LANDAU]).

**Wir verwenden diese Regeln im folgenden kommentarlos.**

---

**Anmerkung.** Darüber hinaus kann man zeigen:

Jeder geordnete Körper, insbesondere  $\mathbb{R}$ , enthält die natürlichen Zahlen.

Letzteres kann man auch zur Definition der natürlichen Zahlen erheben.

In einem *strengen axiomatischen Aufbau* führe man zunächst die reellen Zahlen mit den folgenden Axiomen ein:

Körperaxiome (K1)-(K11), Ordnung (O1)-(O3) und die Supremumseigenschaft (S)

Anschließend kann man die natürlichen Zahlen als Teilmenge von  $\mathbb{R}$  definieren und das Induktionsprinzip beweisen:

$\mathbb{N}$  ist der Durchschnitt aller Teilmengen  $M \subset \mathbb{R}$ , die die folgenden beiden Eigenschaften haben:

$$1 \in M.$$

Aus  $n \in M$  folgt  $n + 1 \in M$ .

Es gibt solche Mengen  $M$ , z. B.  $\mathbb{R}$  selber. Also ist  $\mathbb{N}$  wohldefiniert und erfüllt das Induktionsprinzip.

---

Manchmal ist es praktischer, eine Aussage nicht für die natürlichen Zahlen, sondern für alle ganzen Zahlen ab einem  $n_0 \in \mathbb{Z}$  zu formulieren:

**Feststellung 1.2.9 (Vollständige Induktion ab  $n_0$ )**

Es sei  $n_0 \in \mathbb{Z}$ . Für  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $n \geq n_0$  sei eine Aussage  $A(n)$  gegeben. Es gelte:

**Induktionsanfang:**  $A(n_0)$  ist richtig .

**Induktionsschritt:** Für alle  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq n_0$  gilt der Schluß:

$$A(n) \Rightarrow A(n + 1).$$

Dann ist  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $n \geq n_0$  richtig.

---

Manchmal ist es hilfreich, statt der Aussage  $A(n)$  die folgende Aussage zu beweisen:

$$B(n) \Leftrightarrow A(1) \text{ und } \dots \text{ und } A(n).$$

Beim Induktionsschluß  $B(n) \Rightarrow B(n + 1)$  hat man stärkere Voraussetzungen, muß aber nur  $A(n + 1)$  zeigen:

**Feststellung 1.2.10 (Schluß  $1, \dots, n \Rightarrow n + 1$ )**

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei eine Aussage  $A(n)$  gegeben. Es gelte:

**Induktionsanfang:**  $A(1)$  ist richtig .

**Induktionsschritt:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt der Schluß:

$$A(1) \text{ und } \dots \text{ und } A(n) \Rightarrow A(n + 1).$$

Dann ist  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  richtig.

---

**Bezeichnung** ( $\{1, \dots, n\}$ )

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir schreiben zur Abkürzung:

$$\{1, \dots, n\} := \{k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq n\}.$$

**Anmerkung.** Manchmal schreibt man auch suggestiver

$$\{1, 2, \dots, n\} := \{1, \dots, n\}.$$

Man beachte aber, daß im Falle  $n = 1$  dann  $2 \notin \{1, 2, \dots, n\}$  ist!

---

Eine äquivalente Formulierung des Induktionsprinzips ist:

**Feststellung 1.2.11** ( $\{1, \dots, n\} \subset M \Rightarrow n + 1 \in M$ )

Es sei  $M \subseteq \mathbb{N}$  ein Menge mit den Eigenschaften

**Induktionsanfang:**  $1 \in M$

**Induktionsschritt:**  $\{1, \dots, n\} \subseteq M \Rightarrow n + 1 \in M$

Dann folgt  $M = \mathbb{N}$ .

---

Man benutzt das Induktionsprinzip bei der **rekursiven Definition** einer Funktion  $f$ , die für alle natürlichen Zahlen erklärt werden soll:

**Feststellung 1.2.12 (rekursive Definition)**

**Anfangswert:** Man gebe den Wert  $f(1)$  an.

**Rekursion:** Man gebe eine Vorschrift an, wie aus den Werten  $f(1), \dots, f(n)$  der Wert  $f(n + 1)$  zu bilden ist.

Dann ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{N}$  erklärt.

**Bemerkung.** 1. Manchmal beginnt die rekursive Definition auch mit einem Anfangswert  $f(n_0)$  für ein  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .

2. Die Herleitung des Rekursionsprinzips aus dem Induktionsprinzip ist nicht so einfach (vgl. [VAN DER WAERDEN]).

---

## 1.2.4 Fakultät, Binomialkoeffizient

**Beispiele 1.2.13 (Rekursive Definition der Fakultät)**

Man setze

$$0! := 1.$$

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  setze man

$$(n + 1)! := n!(n + 1).$$

Offensichtlich gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$n! = \prod_{k=1}^n k.$$

---

**Satz 1.2.14 (Anzahl der Permutationen)**

Es ist  $n!$  die Anzahl der möglichen Anordnungen (**Permutationen**) einer Menge aus  $n$  Elementen.

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 15].

**Definition 1.2.15** Es sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Für  $k \in \{0, \dots, n\}$  bezeichnet der **Binomialkoeffizient**  $\binom{n}{k}$  die Anzahl der möglichen Auswahlen von  $k$  Elementen aus einer Menge mit  $n$  Elementen.

Anmerkung: Es ist  $\binom{n}{0} := 1$ .

---

**Lemma 1.2.16** Für  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $k \in \{0 \dots n + 1\}$  gilt:

$$\binom{n + 1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k - 1}.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 16].

Aus diesem Lemma erhalten wir das **Pascalsche Dreieck**:

n=0						1
n=1					1	1
n=2				1	2	1
n=3			1	3	3	1
n=4		1	4	6	4	1

Jede Zahl ist die Summe der beiden darüberstehenden Zahlen.

**Satz 1.2.17** Für  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $k \in \{0, \dots, n\}$  gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 15].

---

**Satz 1.2.18 (Binomischer Satz)** Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 17].

**Anmerkung.** Man vergleiche die ähnliche zweite binomische Formel 1.2.8 (3)

---

## 1.2.5 Wohlordnung der natürlichen Zahlen

**Satz 1.2.19 (Minimum und Maximum)**

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Jede nichtleere Teilmenge  $M \subset \{1, \dots, n\}$  hat ein Minimum und ein Maximum.

---

**Beweis (Minimum und Maximum).**

**Minimum:** Beweis durch Induktion nach  $n \in \mathbb{N}$ .

$$n = 1: \quad \emptyset \neq M \subset \{1\} \Rightarrow \min M = 1$$

$n \Rightarrow n + 1:$  Wenn  $M = \{n + 1\}$  so ist  $\min M = n + 1$ , anderenfalls ist

$$\min M = \min(M \cap \{1, \dots, n\}).$$

**Maximum:** Beweis durch Induktion nach  $n \in \mathbb{N}$ .

$$n = 1: \quad \emptyset \neq M \subset \{1\} \Rightarrow \max M = 1$$

$n \Rightarrow n + 1:$  Wenn  $n + 1 \in M$  so ist  $\max M = n + 1$ , anderenfalls ist

$$\max M = \max(M \cap \{1, \dots, n\}).$$

---

**Satz 1.2.20 (Wohlordnung der natürlichen Zahlen)**

Jede nichtleere Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$  hat ein Minimum.

---

**Beweis (Wohlordnung der natürlichen Zahlen).**

Es gibt ein  $n_0 \in M$ . Dann hat nach Satz 1.2.19 die Menge  $M \cap \{1, \dots, n_0\}$  ein Minimum und es gilt:

$$\min M = \min(M \cap \{1, \dots, n_0\}).$$

## 1.3 Abbildungen

### 1.3.1 Abbildungsbegriff

**Definition 1.3.1 (Anschauliche Definition: Abbildung)** *Es seien zwei Mengen  $M, N$  gegeben. Unter einer Abbildung  $f$  von  $M$  nach  $N$  verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element  $x \in M$  genau ein Element  $y = f(x) \in N$  zuordnet.*

#### Bemerkung 1.3.2 (zur Definition einer Abbildung)

Hier wird der Begriff *Abbildung* durch den ebenfalls undefinierten Begriff *Vorschrift* erklärt. Wir werden unten (siehe 1.3.10) den Abbildungsbegriff mit Hilfe der Mengenlehre präzisieren.

---

#### Bezeichnung 1.3.3 (Definitions-, Zielbereich)

1.  $M$  heißt der **Definitionsbereich** der Abbildung  $f$ . Wir bezeichnen den Definitionsbereich mit  $D(f) := M$ .
2.  $N$  heißt der **Zielbereich** von  $f$ . Wir bezeichnen den Zielbereich mit  $Z(f) := N$ . Statt Zielbereich sagt man auch Wertevorrat von  $f$ . (vgl. die Anmerkung zu 1.3.11)
3. Wenn  $y = f(x)$  ist, so heißt  $y$  der **Wert** der Abbildung  $f$  an der Stelle  $x$  oder auch das Bild von  $x$  unter der Abbildung  $f$ .
4. In dem Ausdruck  $f(x)$  nennen wir  $x$  das **Argument** der Abbildung  $f$ . Um zu betonen, daß in einer Aussage über  $f(x)$  das Argument  $x$  beliebig in  $M$  gewählt werden darf, sprechen wir von der **Variablen**  $x$ .

---

#### Definition 1.3.4 (Gleichheit von Abbildungen)

1. Das Symbol  $f$  für eine Abbildung beinhaltet die Abbildungsvorschrift, den Definitionsbereich  $D(f)$  und den Zielbereich  $Z(f)$ .
2. Zwei Abbildungen  $f, g$  werden nur dann als **gleich** betrachtet, wenn sowohl ihre Definitionsbereiche als auch ihre Zielbereiche übereinstimmen:

$$D(f) = D(g), \quad Z(f) = Z(g)$$

und wenn für alle  $x$  im Definitionsbereich die Werte übereinstimmen:

$$f(x) = g(x).$$

---

### Bezeichnung 1.3.5 (Abbildungen)

1. Kurzschreibweisen um Namen, Definitionsbereich und Zielbereich einer Abbildung zu benennen:

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow N \\ M &\xrightarrow{f} N \\ M \ni x &\xrightarrow{f} y \in N \\ x &\xrightarrow{f} y \end{aligned}$$

Statt des Wertes  $y$  kann auch eine *Formel* oder  $y = \text{Formel}$  stehen.  
Man beachte die Form des Pfeiles in letzten beiden Zeilen!

- 
2. Bei Angabe einer *Formel* vergibt man häufig kein Namenssymbol für die Funktion:

$$M \ni x \mapsto \text{Formel}$$

3. Wenn eine Funktion  $f$  innerhalb einer umfangreichen Formel vorkommt, schreibt man manchmal

$$f(\cdot)$$

statt  $f$ . Man sieht dann leichter, wo die Variable einzusetzen ist. Es gilt  $f(\cdot) := f$ .

4. Die Klammern um das Argument können auch entfallen, wenn dadurch keine Mißverständnisse entstehen können. Beispiele:

$$\log x, \sin x, \text{ lineare Abbildung } \Phi x.$$

---

### Anmerkung: (unabhängige und abhängige Variable)

Wenn klar ist, welche Funktion gemeint ist, findet man in Physikbüchern die Kurzschreibweise  $y = y(x)$ . Man nennt  $x$  die **unabhängige Variable** und  $y$  die **abhängige Variable**.

Physikalische Größen werden mit einem feststehenden Buchstaben bezeichnet. Wenn eine Größe von einer anderen abhängt, wird ihr Buchstabe auch für das Abbildungssymbol

verwendet. Z.B.:

$v$	Geschwindigkeit
$t$	Zeit
$v(t)$	Geschwindigkeit als Funktion der Zeit

---

### Beispiele 1.3.6 (identische und konstante Abbildung)

a) Für  $N = M$  erklären wir die identische Abbildung:

$$\begin{aligned} id &= id_M : M \rightarrow M \\ id_M(x) &= x \text{ für } x \in M. \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel:

$$f = id_M \Leftrightarrow f(x) = x \text{ für alle } x \in M.$$

Häufig läßt man bei der identischen Abbildung das Funktionssymbol weg und schreibt nur  $x$ .

b) Für festes  $c \in N$  wird eine **konstante Abbildung**

$$\begin{aligned} c : M &\rightarrow N, \\ c(x) &:= c \text{ für } x \in M \end{aligned}$$

definiert.

Das Zeichen  $c$  steht also sowohl für das Element in  $N$  wie auch für den Namen der konstanten Funktion. Strenggenommen müßten wir hierfür unterschiedliche Symbole verwenden.

### Beispiele 1.3.7 (Funktionen)

Abbildungen in die Zahlen heißen auch **Funktionen**.

d) Für  $M = N := \mathbb{R}$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  wird durch  $f(x) = ax + b$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , eine **affine Funktion**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert.

In Rechnungen spart man sich häufig den Funktionsnamen und spricht von der affinen Funktion  $ax + b$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

e) Es sei  $n \in \mathbb{N}$  fixiert. Man definiert die **Potenzfunktion** zur Potenz  $n$ :

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n$$

e) Es seien  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Man erklärt ein **Polynom**  $P$  durch:

$$\begin{aligned} P &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ P(x) &:= \sum_{k=0}^n c_k x^k \end{aligned}$$

Die Zahlen  $c_0, \dots, c_n$  heißen die Koeffizienten des Polynoms.

---

### 1.3.2 Graphen

#### Definition 1.3.8 (Kartesisches Produkt)

Für Mengen  $M, N$  bezeichnet

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$$

das **kartesische Produkt** von  $M$  und  $N$ , d.h. die Menge aller geordneten Paare  $(x, y)$  mit  $x \in M$  und  $y \in N$ .

Der Name *kartesisches Produkt* erinnert an **René Descartes** (1596-1650), den Begründer der *analytischen Geometrie*.

**Beispiel:**  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  können wir durch eine Ebene veranschaulichen. Man zeichne in der Ebene zwei Koordinatenachsen. Jedem Punkt  $P$  ist dann durch seine Koordinaten  $x$  und  $y$  auf den Achsen eindeutig bestimmt. Die Punkte der Ebenen entsprechen so eineindeutig den Koordinaten-Paaren  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

---

#### Bemerkung 1.3.9 (Graph einer Abbildung)

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  wird durch ihren **Graphen**

$$\begin{aligned} \Gamma(f) &:= \{(x, y) \mid x \in M, y = f(x)\} \\ &= \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N \end{aligned}$$

eindeutig festgelegt. Dieser hat offensichtlich die Eigenschaft:

$$\forall x \in M \quad \exists_1 y \in N \quad : \quad (x, y) \in \Gamma(f).$$



In Worten: Für alle  $x \in M$  gibt es **genau ein**  $y \in N$ , so daß  $(x, y) \in \Gamma(f)$  ist.

Umgekehrt ist die Abbildung  $f$  durch ihren Graphen eindeutig festgelegt:

$$y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma(f).$$

---

**Anmerkung:** Etwas präziser sollte man zuerst Graphen einführen und dann die Definition 1.3.1 einer Abbildung nicht als *Definition* sondern *Vereinbarung* einer (praktischeren) Schreibweise betrachten.

### Definition 1.3.10 (Graphen)

Ein Graph  $\Gamma$  mit Definitionsbereich  $M$  und Zielbereich  $N$  ist eine Teilmenge

$$\Gamma \subseteq M \times N,$$

für die gilt:

$$\forall x \in M \quad \exists_1 y \in N : (x, y) \in \Gamma.$$

---

### Anmerkung: (alternative Definition von Abbildungen)

Es sei  $\Gamma \subset M \times N$  ein Graph.

- Man vereinbart dann die Abbildungsbezeichnung  $f = f_\Gamma : M \rightarrow N$  und erklärt:

$$y = f(x) : \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma.$$

- In dieser alternativen Definition sind eine Abbildung und ihr Graph dasselbe Objekt.
  - Im folgenden wird die mehr intuitive Vorstellung von Abbildungen im Sinne der Definition 1.3.1 beibehalten und die Graphen als die daraus abgeleiteten Objekte angesehen.
- 

### 1.3.3 Umkehrabbildung

#### Definition 1.3.11 (Bild und Urbild)

Es sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung.

1. Für  $A \subseteq M$  erklären wir durch

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

das **Bild von A**. Es ist  $f(A) \subset Z(f) = N$ .

2. Für  $B \subseteq N$  erklären wir durch

$$f^{-1}(B) := \{x \in M \mid f(x) \in B\}$$

das **Urbild von B**. Es ist  $f^{-1}(B) \subset D(f) = M$ .

**Anmerkung.** Man unterscheide  $\text{Bild}(f) := f(M)$  und den Zielbereich  $Z(f)$  einer Abbildung.

---

#### Definition 1.3.12 (injektiv, surjektiv, bijektiv)

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt

1. **injektiv**, falls für alle  $x, x' \in M$  gilt:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

2. **surjektiv**, falls es zu jedem  $y \in N$  ein  $x \in M$  so gibt, daß  $y = f(x)$  ist.
3. **bijektiv**, falls  $f$  injektiv und surjektiv ist.

**Anmerkung:** Für eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  gilt:

$$f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow f(M) = N.$$

### Feststellung 1.3.13 (bijektive Abbildungen)

Es sei  $f : M \rightarrow N$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1.  $f$  ist bijektiv
2. Zu jedem  $y \in N$  gibt es genau ein  $x \in M$ , so daß  $y = f(x)$  ist.

Man sagt,  $x$  ist die eindeutige Lösung der Gleichung  $f(x) = y$ .

### Definition 1.3.14 (Umkehrabbildung)

Es sei  $f : M \rightarrow N$  eine **bijektive** Abbildung. Die **Umkehrabbildung**

$$f^{-1} : N \rightarrow M$$

wird für alle  $y \in N$  definiert durch:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

## 1.3.4 Komposition von Abbildungen

Wenn der Zielbereich einer Abbildung  $f$  im Definitionsbereich einer weiteren Abbildung  $g$  enthalten ist, können wir die beiden Abbildungen nacheinander ausführen:

### Definition 1.3.15 (Komposition)

Für Abbildungen  $f : M \rightarrow N$ ,  $g : N \rightarrow L$  definiert man die **Komposition**

$$g \circ f : M \rightarrow L$$

durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

für alle  $x \in M$ .

### Anmerkung

1. Sprich  $g$  nach  $f$  für die zusammengesetzte Abbildung  $g \circ f$ .
2. Statt Komposition sagt man auch **Zusammensetzung**, **Hintereinanderausführung** oder **Verkettung**.
3. Die Komposition bindet stärker als das Argument:

$$g \circ f(x) = (g \circ f)(x).$$

Um Mißverständnisse zu vermeiden, sollte man die Klammern aber setzen.

4. In längeren Formeln schreibt man statt  $g \circ f$  auch

$$g(f) \quad \text{oder} \quad g(f(\cdot)).$$

5. Man kann die Komposition auch anschaulicher als Diagramm schreiben:

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L.$$

### Beispiel.

Auch wenn  $M = N$  ist, so ist im allgemeinen  $g \circ f \neq f \circ g$ . Z.B.:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni x &\xrightarrow{f} |x| \\ \mathbb{R} \ni x &\xrightarrow{g} -x. \end{aligned}$$

Dann ist  $(g \circ f)(x) = -|x|$  und  $(f \circ g)(x) = |x|$ .

**Feststellung 1.3.16 (Assoziativgesetz der Komposition)** Für

$$f : M \rightarrow N, \quad g : N \rightarrow L, \quad h : L \rightarrow K$$

gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

Man kann also kurz  $h \circ g \circ f$  schreiben.

Wir veranschaulichen das Resultat als kommutierendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g \circ f} & L \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{h \circ g} & K \end{array}$$

**Feststellung 1.3.17 (Umkehrabbildung)**

Eine Abbildung

$$f : M \rightarrow N$$

ist genau dann **bijektiv**, wenn eine Abbildung

$$g : N \rightarrow M$$

so existiert, daß

$$g \circ f = id_M \quad \text{und} \quad f \circ g = id_N .$$

Dann ist  $g = f^{-1}$ .

Als kommutatives Diagramm sieht das so aus:

$$\begin{array}{ccc} M & \xlongequal{\quad} & M \\ f \downarrow & & \uparrow g \\ N & \xlongequal{\quad} & N \end{array}$$

**1.3.5 Endliche Mengen**

**Bemerkung 1.3.18 (Mengen  $\{1, 2, \dots, n\}$ )**

1. Es seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $m < n$ .
  - a) Es gibt keine injektive Abbildung  $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ .
  - b) Es gibt keine surjektive Abbildung  $\{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ .
2. Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Für jede Abbildung

$$f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

gilt:

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv.}$$

3. Eine bijektive Abbildung

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

heißt eine **Permutationen** der Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Bemerkung 1.3.19**

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $M \subset \{1, \dots, n\}$  eine nichtleeren Teilmenge.

1. Es gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$ , und eine bijektive Abbildung

$$f : \{1, \dots, m\} \rightarrow M.$$

2.  $M \neq \{1, \dots, n\} \iff m < n$ .

**Bemerkung 1.3.20 (endliche Mengen)**

1. Eine Menge  $A$  heißt **endlich**, wenn es ein  $n \in \mathbb{N}$  und eine surjektive Abbildung

$$a : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$$

gibt oder  $A = \emptyset$  ist.

Man schreibt dann die Werte in der Form  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , und kürzt den Sachverhalt folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \\ &= \{a_k \mid k = 1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

2. Zu einer endlichen Menge  $A$  gibt es immer eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  und eine bijektive Abbildung (**Aufzählung**)

$$a : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$$

Die Zahl  $n$  heißt die Anzahl der Elemente von  $A$  oder die **Mächtigkeit** von  $A$ .

Auf Grund von Bemerkung 1.3.18 ist die Mächtigkeit einer endlichen Menge wohldefiniert.

3. Es kommt auf die Reihenfolge der Aufzählung nicht an.  
Hat man eine andere Aufzählung, so gibt es eine Permutation  $\sigma$  von  $\{1, 2, \dots, n\}$ , so daß die andere Aufzählung die Form

$$k \mapsto a_{\sigma(k)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

hat:

$$A = \{a_1, \dots, a_n\} = \{a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}\}.$$

4. Auf Grund von Bemerkung 1.3.19 ist eine Teilmenge  $M$  einer endlichen Menge  $A$  endlich.

Wenn die Teilmenge  $M \neq A$  ist, so ist die Mächtigkeit von  $M$  kleiner als die Mächtigkeit von  $A$ .

5. Es sei  $A$  eine endliche Menge und  $f : A \rightarrow A$ . Dann gilt:

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv}.$$

**Feststellung 1.3.21 (Maximum endliche Menge)** Jede endliche Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  hat ein Maximum.

**Beweis.** Zum Begriff der endlichen Menge vgl. Bemerkung 1.3.20. Wir zeigen die folgende Behauptung durch vollständige Induktion:

Eine Teilmenge  $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{N}$  mit  $n$  Elementen,  $n \in \mathbb{N}$ , hat ein Maximum.

$$\boxed{n = 1:} \quad M = \{x_1\} \text{ und } \max M = x_1.$$

$$\boxed{n \Rightarrow n + 1:} \quad M = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\} = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\}. \text{ Also ist}$$

$$\max M = \max\{\{x_1, \dots, x_n\}, x_{n+1}\}.$$

### 1.3.6 Kartesisches Produkt

Wir verallgemeinern die Definition 1.3.8 und erklären das Kartesische Produkt von endlich vielen Mengen:

**Definition 1.3.22 (Kartesisches Produkt  $\prod_{k=1}^n A_k$ )**

Sind die Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  nicht leere Mengen, dann heißt die Menge

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_k \in A_k, k = 1, 2, \dots, n\}$$

das **kartesische Produkt** der Mengen  $A_1, \dots, A_n$ .

**Anmerkung:**

1. Man erklärt das Produktzeichen für Mengen:

$$\prod_{k=1}^n A_k := A_1 \times \dots \times A_n.$$

2. Beim kartesischen Produkt kommt es auf die Reihenfolge der Faktoren an!
3. Die Elemente des kartesischen Produktes  $A_1 \times \dots \times A_n$  heißen  **$n$ -Tupel**.
4.  $(a_1, a_2)$  heißt ein Paar.  
 $(a_1, a_2, a_3)$  heißt ein Tripel  
 $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  heißt ein Quadrupel.

5. Man schreibt zu Abkürzung:

$$(a_k)_{k=1}^n := (a_1, \dots, a_n).$$

6. Sind alle  $A_k$  gleich einer Menge  $A$  so schreibt man

$$A^n := \prod_{k=1}^n A.$$

7. Auch in diesem Fall kommt es auf die **Reihenfolge** der Koeffizienten eines  $n$ -Tupels an. Beispiel:  $A = \{0, 1\}$ :

$$\{0, 1\}^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

#### Anmerkung: (Abbildungen mit $n$ Variablen)

Abbildungen von einem kartesischen Produkt  $A_1 \times \dots \times A_n$  in eine Menge  $M$  nennt man auch Abbildungen mit  $n$  Variablen:

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow M$$

Beispiele sind die **Projektionen** auf die Koordinaten:

$$p_k : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_k, \\ p_k(a_1, \dots, a_n) := a_k,$$

für  $k = 1, \dots, n$ . Man spricht auch kurz von den Koordinaten eines  $n$ -Tupels.

**Verknüpfungen** sind Abbildungen  $A \times A \rightarrow A$

Die Addition ist eine Verknüpfung:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

#### Bezeichnung 1.3.23 (Tupel von Abbildungen)

Es seien  $M$  eine Menge und  $f_k : M \rightarrow A_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , Abbildungen. Man definiert dann das  $n$ -Tupel:

$$f := (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n, \\ (f_1, \dots, f_n)(x) := (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

**Beispiel:** Ein Punkt in der Ebene ist durch seine Koordinaten  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  festgelegt. Eine zeitliche Bewegung eines Punktes in der Ebene beschreibt man durch zwei Funktionen

$$f_1 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_2 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dabei sei  $[0, T]$  ein Zeitintervall. Das Tupel

$$(f_1, f_2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

beschreibt den Weg des Punktes in der Ebene.

#### Bezeichnung 1.3.24 (kartesisches Produkt von Abbildungen)

Es seien  $g_k : A_k \rightarrow B_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , Abbildungen. Man definiert das kartesische Produkt der Abbildungen:

$$g := g_1 \times \dots \times g_n : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B_1 \times \dots \times B_n, \\ (g_1 \times \dots \times g_n)(a_1, \dots, a_n) := (g_1(a_1), \dots, g_n(a_n)).$$

**Beispiel:** Ein Tupel von Abbildungen:

$$f := (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n$$

Ein kartesisches Produkt von Abbildungen:

$$g := g_1 \times \dots \times g_n : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B_1 \times \dots \times B_n.$$

Die Komposition  $g \circ f$  dieser Abbildungen ist dann:

$$g \circ f = (g_1 \circ f_1, \dots, g_n \circ f_n) : x \mapsto (g_1(f_1(x)), \dots, g_n(f_n(x))).$$

## 1.4 Reellwertige Funktionen

### 1.4.1 Funktionen

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit Zielbereich  $\mathbb{R}$  heißt auch **Funktion**. Für Funktionen  $f, g$  lassen sich **Summe**, **Produkt**, und **Quotient** punktweise für  $x \in M$  definieren:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &:= f(x) + g(x), \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x), \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0, ,\end{aligned}$$

wobei  $\frac{f}{g}$  nur auf  $M \setminus \{x \in M \mid g(x) = 0\}$  erklärt ist.

Entsprechend definiert man

$$\begin{aligned}|f|(x) &:= |f(x)|, \\ \max(f, g)(x) &:= \max\{f(x), g(x)\}\end{aligned}$$

und  $\min(f, g)$ . Weiter hat man die punktweisen Beziehungen

$$f \leq g \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in M : f(x) \leq g(x).$$

und

$$f < g \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in M : f(x) < g(x).$$

**Definition 1.4.1** Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  heißt

a) *nach oben beschränkt, falls*

$$\exists C \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \leq C.$$

b) *nach unten beschränkt, falls*

$$\exists C \in \mathbb{R} \forall x \in M : C \leq x.$$

c) *beschränkt, falls  $M$  nach unten und nach oben beschränkt ist.*

Die  $C \in \mathbb{R}$ , die a) bzw. b) erfüllen heißen **obere**, bzw. **untere Schranke** von  $M$ .

$M$  ist genau dann beschränkt, wenn ein reelles  $C$  existiert, so daß für alle  $x$  aus  $M$  gilt  $|x| \leq C$ .

**Beispiele 1.4.2** Siehe auch [KABALLO, S. 22].

- Hat  $M \subset \mathbb{R}$  ein Maximum, so ist  $M$  nach oben beschränkt. Hat  $M \subset \mathbb{R}$  ein Minimum, so ist  $M$  nach unten beschränkt.
- Für  $0 \leq q < 1$  ist  $\{\sum_{k=0}^n q^k \mid n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq 2\}$  ist nach oben, aber nicht nach unten beschränkt.

Wichtige Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind beschränkte oder unbeschränkte **Intervalle**:

$$\begin{aligned}[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\} \\ (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\ (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}\end{aligned}$$

Das Symbol  $\infty$  für „unendlich“ steht hier, wie im folgenden, lediglich als Abkürzung.

Die Beschränktheitsbegriffe für Mengen lassen sich auf Funktionen übertragen, in dem man sie auf die Bilder der Funktionen anwendet.

**Definition 1.4.3** Sei  $M$  eine Menge. Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

- nach oben beschränkt, falls  $f(M)$  nach oben beschränkt ist.*
- nach unten beschränkt, falls  $f(M)$  nach unten beschränkt ist.*

3. **beschränkt**, falls  $f(M)$  beschränkt ist.

---

**Definition 1.4.4** Sei  $M$  eine Menge.

1. Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt ein **Minimum**, falls  $f(M)$  ein Minimum besitzt. Punkte  $x_0 \in M$  mit

$$f(x_0) = \min_{x \in M} f(x) := \min f(M)$$

heißen Minimalstellen.

2. Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt ein **Maximum**, falls  $f(M)$  ein Maximum besitzt. Punkte  $x_0 \in M$  mit

$$f(x_0) = \max_{x \in M} f(x) := \max f(M)$$

heißen Maximalstellen.

Maximalstellen und Minimalstellen nennen wir auch **Extremalstellen**.

---

Für Funktionen mit  $D(f) \subseteq \mathbb{R}$  führt man folgende Monotoniebegriffe ein:

**Definition 1.4.5** Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

- (a) **monoton wachsend**, falls für alle  $x, y \in M$  aus  $x < y$  folgt, daß  $f(x) \leq f(y)$  ist.  
(b) **streng monoton wachsend**, falls für alle  $x, y \in M$  gilt, daß aus  $x < y$  die Abschätzung  $f(x) < f(y)$  folgt.
  - (a) **monoton fallend**, falls für alle  $x, y \in M$  mit  $x < y$  stets  $f(x) \geq f(y)$  ist.  
(b) **streng monoton fallend**, falls  $f(x) > f(y)$  für alle  $x, y \in M$  mit  $x < y$ .
- 

**Beispiele 1.4.6** Siehe auch [KABALLO, S. 24].

- Konstante Funktionen sind monoton wachsend und fallend.
- Die Potenzfunktionen sind auf  $[0, \infty)$  streng monoton wachsend.

3. Die Potenzfunktionen  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow x^n$  sind genau dann streng monoton wachsend, wenn  $n$  ungerade ist.

4. Die Inversion  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ist auf  $(0, \infty)$  streng monoton fallend.

---

**Bemerkung 1.4.7** Im Fall  $M, N \subseteq \mathbb{R}$  nennt man die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  der Funktion  $f : M \rightarrow N$  auch **Umkehrfunktion**.

**Satz 1.4.8** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend.

- Dann ist  $f$  injektiv.
- Dann ist  $f : M \rightarrow f(M)$  bijektiv.
- Dann ist  $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$  streng monoton wachsend.

Dieser Satz gilt sinngemäß auch für streng monoton fallende Funktionen.

---

**Beispiele 1.4.9** Siehe auch [KABALLO, S. 26].

- Die Potenzfunktionen  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow x^n \in \mathbb{R}$  sind genau dann injektiv, wenn  $n$  ungerade ist. Wir werden später sehen, daß sie dann sogar bijektiv sind.
  - Die Inversion  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ist auf  $(0, \infty)$  bijektiv.
- 

## 1.4.2 Folgen

**Definition 1.4.10** Eine Funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Folge**. Die Funktionswerte  $a_n := a(n)$  heißen **Folglieder**. Man schreibt die Folge  $a$  in der Form:

$$(a(n))_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_n := a.$$

oder auch als  $a_n, n \in \mathbb{N}$ , bzw.  $a_n (n \in \mathbb{N})$  oder ganz anschaulich als

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Folgen können auch mit einem  $n_0 \in \mathbb{Z}$  beginnen. z.B.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

Bei einer Folge kommt es auf die Reihenfolge der Folgenglieder an. Man unterscheide die **Folge**  $(a_n)_n$  und ihre **Bildmenge**  $a(\mathbb{N}) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Allgemeiner nennt man eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \rightarrow M$  eine Folge in der Menge  $M$  und spricht im Fall  $M = \mathbb{R}$  von **reellen Folgen**.

### Beispiele: (Folgen)

1.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} &= 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \\ \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty} &\leq \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ (a_n)_n (b_n)_n &= (a_n b_n)_n \end{aligned}$$

Wenn alle Folgenglieder  $b_n \neq 0$ , so ist  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  wieder eine Folge.

2. Zu einer Folge  $(a_n)_n$  kann man die Folge  $(s_n)_n$  der **Partialsommen**

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

bilden. Die Folge  $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)_n$  nennt man auch eine (unendliche) **Reihe** und die  $a_n$  die Summanden der Reihe.

3. Da Folgen Funktionen sind, kann man auf sie die bereits bekannten Beschränktheits- und Monotoniebegriffe verwenden.

Eine Folge  $(a_n)_n$  heißt **monoton wachsend**, wenn  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt und streng monoton wachsend, wenn ...

Eine Folge von Partialsommen  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ist monoton wachsend, wenn die Summanden  $a_n \geq 0$  sind.

4. Die vollständige Induktion ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung von Folgen. Man kann Folgen auch **rekursiv** definieren. Z.B. die Folge der Fibonacci-Zahlen:

$$\text{Anfangswerte: } a_0 := 0, a_1 := 1$$

$$\text{Rekursion: } a_n := a_{n-2} + a_{n-1} \quad \text{für } n = 2, 3, \dots$$

Es ist also:

$$(a_n)_n = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

### Beispiele 1.4.11 (harmonische Reihe)

- Die Folge  $h_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) heißt harmonische Reihe.
- Wir werden später sehen, daß die Partialsommen  $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) gegen  $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449340$  streben.

$n$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$
2	1,5	1,25
3	1,833	1,3611
5	2,2833	1,46361
10	2,92897	1,54977
100	5,18738	1,63498
10 000	9,78761	1,64483
$10^6$	14,39272672	1,6449331
$10^{10}$	23,60306659	1,6449340

**Satz 1.4.12** Für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $n \geq 2^m$  gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{m}{2}.$$

Anmerkung: Dies wurde zum erstenmal um 1350 von Nicole ORESME – Bischof von Lisieux – gezeigt.

Da  $\mathbb{N}$  anschaulich unbeschränkt ist – dies werden wir auch noch als Axiom formulieren – ist die Folge  $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)_n$  unbeschränkt.



**Satz 1.4.13** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 33].

**Beweis.**

Wir geben hierfür zwei Beweise:

1. Man vergleiche  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  mit der **Teleskopsumme**

$$1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

2. Man zeige induktiv, daß

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

ist.

## 1.5 Ungleichungen

Die Aufgabe einer Ungleichung ist es, komplizierte, schwer berechenbare Ausdrücke durch einfachere, übersichtlichere nach oben oder nach unten abzuschätzen.

Interessante Gleichungen der Analysis werden häufig durch Ungleichungen bewiesen. Am Ende steht dann der Schluß:

$$a \leq b \quad \text{und} \quad b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Abschätzen ist eine Kunst, die man durch Übung und Verinnerlichen von Beispielen erwirbt. Dazu gehört die Kenntnis einer Reihe von Rezepten, sprich Standard-Ungleichungen, die man bei der Tätigkeit des Abschätzens nacheinander - in der richtigen Reihenfolge - anwendet.

Beim Abschätzen von Produkten, Potenzen und Fakultäten hilft häufig die **Bernoulli-sche Ungleichung**.

---

### 1.5.1 Bernoullische Ungleichung

**Satz 1.5.1 (Bernoullische Ungleichung)** Es gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{für } x \geq -2 \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Jakob Bernoulli, 1654-1705.

**Anmerkung:** Zum Beweis unterscheide man die Fälle:

$-2 \leq x < -1$ : klar

$-1 \leq x$ : Vollständige Induktion.

---

### Satz 1.5.2

1. Für alle  $q \in (0, 1)$  existiert ein  $C > 0$  so, daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$q^n \leq \frac{C}{n}.$$

2. Für alle  $q > 1$  existiert ein  $C > 0$  so, daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$q^n \geq Cn.$$

Hinweis: (1) Man schreibe

$$C := \frac{q}{1-q} \Leftrightarrow \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{C}.$$

und benutze nun die Bernoullische Ungleichung.

Zur Abschätzung der Fakultäten  $n!$  ist es naheliegend die Faktoren durch ihren „Mittelwert“  $\frac{n}{2}$  zu ersetzen.

Wir zeigen in den beiden folgenden Sätzen, daß für  $n = 1, 2, \dots$

$$3 \left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

gilt.

**Lemma 1.5.3** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

**Satz 1.5.4** Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

**Beweis.**

$n = 1$ : nachrechnen!

$n \Rightarrow n + 1$ :

$$\begin{aligned} (n+1)! &= n!(n+1) \\ &\leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1) \quad (\text{nach Induktionsvoraussetzung}) \\ &= 2 \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (n+1) \\ &= 2 \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} (n+1) \\ &\leq 2 \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \frac{1}{2} (n+1) \\ &= 2 \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

**Lemma 1.5.5** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

**Beweis.** Für  $k = 1, \dots, n$  ist

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{n-l}{n} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Also

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 3. \end{aligned}$$

**Satz 1.5.6** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$3 \left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n!$$

**Beweis.**

$n = 1$ : klar.

$n \Rightarrow n + 1$ : Die Ungleichung gelte für ein  $n$ , dann folgt:

$$\begin{aligned} (n+1)! = (n+1)n! &\geq (n+1)3 \left(\frac{n}{3}\right)^n \\ &\geq (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{n}{3}\right)^n \\ &= 3 \frac{n+1}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n}{3}\right)^n \\ &= 3 \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

## 1.5.2 Approximation der Eulerschen Zahl

### Diskrete Simulation eines Wachstumsprozesses.

Man hat die folgende Beobachtung eines **realen Prozesses**:

1. Für hinreichend kleine Zeitintervalle  $[t_1, t_2]$  ist die zeitliche Entwicklung  $a(t)$  eine lineare Funktion der Zeit:

$$a(t) \approx a(t_1)(1 + \alpha(t - t_1)) \quad \text{für } t \in [t_1, t_2]. \quad (*)$$

2. Die relative Änderung

$$\alpha \approx \frac{1}{a(t_1)} \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ist für alle hinreichend kleinen Zeitintervalle  $[t_1, t_2]$  dieselbe. Die relative Änderung  $\alpha$  ist also zeitlich konstant.

3. Für größere Zeitintervalle ist dagegen die beobachtete zeitliche Entwicklung nicht-linear.

**Aufstellung eines diskreten mathematischen Modells** zur Berechnung der zeitlichen Entwicklung für einen größeren Zeitraum  $[t_0, t]$ . Der Wert  $a(t_0)$  sei bekannt.

Man wähle eine  $n \in \mathbb{N}$  und teile das Intervall  $[t_0, t]$  in  $n$  gleiche Teile. Für die Teilpunkte  $t_k := t_0 + \frac{k(t-t_0)}{n}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , ergibt das Modell die Werte  $a_k$ . Zur Berechnung der  $a_k$  wende man nacheinander auf die Teilintervalle die Näherungsformel  $(*)$  an.

Die  $a_k$  kann man rekursiv berechnen. Für  $k = 1, 2, \dots, n$  gilt:

$$\begin{aligned} \text{Anfangswert:} \quad a_0 &= a(t_0) \\ \text{Rekursion:} \quad a_k &:= a_{k-1} \left(1 + \frac{\alpha(t-t_0)}{n}\right) \end{aligned}$$

Also ist für  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ :

$$a_k = a_0 \left(1 + \frac{\alpha(t-t_0)}{n}\right)^k$$

Der Endwert  $a_n$  approximiert den realen Wert  $a(t)$ .

**Frage:** Wie groß soll man das  $n \in \mathbb{N}$  wählen und wie ändern sich die Endwerte  $a_0(1 + \frac{\alpha(t-t_0)}{n})^n$  mit  $n$ ? Zur Vereinfachung betrachten wir vorerst den Fall  $\alpha(t - t_0) = 1$ .

Wir untersuchen nun die Folge

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

die bei kontinuierlichen Wachstumsprozessen eine Rolle spielt. Hilfreich bei der Untersuchung ist die Folge  $e_n^* := e_n(1 + \frac{1}{n})$ . Es ist  $e_n < e_n^*$ .

**Satz 1.5.7**

1. Die Folge  $(1 + \frac{1}{n})^n$  ist streng monoton wachsend.
2. Die Folge  $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  ist streng monoton fallend.

**Bemerkung 1.5.8 ( Intervallschachtelung  $[(1 + \frac{1}{n})^n, (1 + \frac{1}{n})^{n+1}]$  )** Es gilt nun

$$\begin{aligned} 2 &= (1 + \frac{1}{1})^1 \leq \dots \leq (1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \leq \dots \\ &\dots \leq (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2} \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \leq \dots \leq (1 + \frac{1}{1})^{1+1} = 4 \end{aligned}$$

Wir haben also die folgenden Inklusionen von Intervallen:

$$\begin{aligned} [(1 + \frac{1}{1})^1, (1 + \frac{1}{1})^{1+1}] \supseteq [(1 + \frac{1}{2})^2, (1 + \frac{1}{2})^{2+1}] \supseteq \dots \\ \dots [(1 + \frac{1}{n})^n, (1 + \frac{1}{n})^{n+1}] \supseteq [(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}, (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}] \supseteq \dots \end{aligned}$$

Für die Länge der Intervalle gilt (vgl. Lemma 1.5.3 und 1.5.5):

$$\frac{2}{n} \leq |(1 + \frac{1}{n})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n})^n| < \frac{3}{n}.$$

**Anmerkung: (Intervallschachtelung für  $e$ )**

Unsere Anschauung sagt uns, daß die Länge der Intervalle beliebig klein wird. Wenn man diesen Begriff „beliebig klein werden“ präzisiert, sieht man, daß man dies nicht beweisen kann, sondern als ein Axiom der reellen Zahlen (*siehe Archimedisches Axiom*) fordern muß.

Wenn wir nun bereits wissen, daß die Intervalle beliebig klein werden, dann sollten sie sich auf einen Punkt zusammenziehen. Wir werden zeigen, daß dieser Punkt keine rationale Zahl sein kann.

Die Existenz einer reellen Zahl, die in allen diesen Intervallen liegt, werden wir später aus einem weiteren Axiom der reellen Zahlen (*siehe Intervallschachtelungsprinzip*) folgern.

Diese Zahl, die durch die im Satz 1.5.7 angegebene Intervallschachtelung bestimmt wird, heißt die **Eulersche Zahl**  $e$ , nach Leonhard Euler (1707-1783)

**Feststellung 1.5.9** Die Folge

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

ist streng monoton wachsend. Die Folge

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ist streng monoton fallend.

Vergleichen wir diese mit den vorhergehenden Folgen:

**Satz 1.5.10**

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ \text{b) } \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} &< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned} e_n &:= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & E_n &:= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ e_n^* &:= e_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) & E_n^* &:= E_n + \frac{1}{n \cdot n!} \end{aligned}$$

Wir haben also eine Intervallschachtelung in der anderen:

$$e_n \leq E_n < E_n^* < e_n^*$$

**Beweis (Satz 1.5.10). (a)**

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{n-l}{n} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = E_n. \end{aligned}$$

(b) Für  $n = 1$  gilt  $e_1^* = 3 < 4 = E_1^*$ . Für  $n = 2, 3, \dots$  gilt:

$$\begin{aligned} e_n^* - E_n^* &= e_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) - E_n - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{1}{n} \left(e_n - \frac{1}{n!}\right) - \underbrace{(E_n - e_n)} \end{aligned}$$

Da (siehe nächste Folie)  $(E_n - e_n) \leq \frac{1}{n}(E_{n-1} - \frac{1}{2})$  ist, folgt:

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{n} \left( e_n - \frac{1}{n!} \right) - \frac{1}{n} \left( E_{n-1} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( e_n - E_{n-1} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( e_n - E_n + \frac{1}{2} \right) \\ &> \frac{1}{n} \left( e_2 - E_2^* + \frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

**Hilfsbehauptung**  $(E_n - e_n) \leq \frac{1}{n}(E_{n-1} - \frac{1}{2})$  für  $n = 2, 3, \dots$  :

$$E_n - e_n = \left( 2 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k!} \right) - \left( 2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2n} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k!} \left( 1 - \prod_{l=0}^{k-1} \left( 1 - \frac{l}{n} \right) \right) \quad (2)$$

$$\leq \frac{1}{2n} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k!} \left( 1 - \left( 1 - \frac{k-1}{n} \right)^k \right) \quad (3)$$

$$\leq \frac{1}{2n} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k!} \left( 1 - \left( 1 - \frac{k(k-1)}{n} \right) \right) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k!} \right) = \frac{1}{n} \left( E_{n-2} - \frac{1}{2} \right) \leq \frac{1}{n} \left( E_{n-1} - \frac{1}{2} \right)$$

Wir verwenden weiterhin die Abkürzungen:

$$E_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{und} \quad E_n^* := E_n + \frac{1}{n n!}.$$

**Satz 1.5.11** (*e nicht rational*)

Es gibt keine rationale Zahl, die in allen Intervallen  $[E_n, E_n^*]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , liegt.

Anmerkung: Der Beweis wird etwas mehr zeigen:

Wenn  $r = \frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , dann ist

$$r \notin [E_{q+1}, E_{q+1}^*].$$

**Beweis** (*e nicht rational*).

**Annahme:** es gibt ein  $r \in \mathbb{Q}$ , so daß gilt:

$$E_n < r < E_n + \frac{1}{n n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es sei  $r = \frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$q!r = (q-1)!p \in \mathbb{Z},$$

$$q!E_q = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N},$$

$$q!r - q!E_q \in \mathbb{Z}.$$

Andererseits ist nach Annahme:

$$q!E_q < q!r < q!E_q + \frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad 0 < q!r - q!E_q < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Widerspruch!

## 2 Konvergenz und Stetigkeit

### 2.1 Konvergenz von Folgen

Im vorigen Abschnitt haben wir eine Intervallschachtelung konstruiert, mit der wir die Eulersche Zahl  $e$  bestimmen. Das war etwas aufwendig, aber für diese Zahl lohnt sich die Mühe. Die Intervallschachtelung hat den Vorteil, daß sie die gesuchte Zahl **nach unten und oben** immer genauer **abschätzt**.

Vielfach hat man zur Bestimmung einer Zahl – z.B. der Lösung einer Gleichung – nur eine Folge von approximativen Wert  $a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) zur Verfügung.

Die Folge wird am Anfang vielleicht wild schwanken und sich **schließlich** mit **immer kleineren Abweichungen** einem festen Wert  $c$  **nähern**.

Man sagt, die Folge  $(a_n)_n$  konvergiert gegen den Grenzwert  $c$ .

Wir wollen dieses anschauliche Bild präziser definieren.

**Definition 2.1.1** Eine Folge  $(a_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  heißt **konvergent** gegen einen **Grenzwert**  $c \in \mathbb{R}$ , wenn folgendes gilt:

Zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  gibt es einen Index  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß aus  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , stets

$$|a_n - c| < \varepsilon.$$

folgt. Nicht konvergente Folgen heißen **divergent**.

**Bemerkung 2.1.2** 1. **Konvergiert** eine Folge nicht, so sagt man, sie **divergiert**.

2. Eine Folge, die gegen Null konvergiert, heißt **Nullfolge**.

3. Man sagt, eine Eigenschaft gilt für **fast alle**  $n \in \mathbb{N}$ , wenn es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  so gibt, daß die Eigenschaft für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , gilt.

---

**Feststellung 2.1.3 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)**

Eine Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}$  hat höchstens einen Grenzwert.

D.h., Wenn  $c$  und  $\tilde{c}$  Grenzwerte einer Folge  $(a_n)_n$  sind, dann ist  $c = \tilde{c}$ .

**Bezeichnung 2.1.4 (Grenzwert)**

1. Wenn die Folge  $(a_n)_n$  konvergent gegen den (eindeutigen) Grenzwert  $c$  ist, so bezeichnen wir den Grenzwert mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := c.$$

Das obige Symbol besagt, daß die Folge  $(a_n)_n$  konvergiert.

2. Eine andere praktische Kurzschreibweise ist:

$$a_n \rightarrow c \Leftrightarrow a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c.$$

3. Bindung:  $\dots = \text{Formel}_n \rightarrow c$  aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Formel}_n)$ .

---

Die beiden folgenden Konvergenzkriterien sind oftmals handlicher als die Definition 2.1.1. Der frei wählbare konstante Faktor  $C$  und „ $\leq$ “ statt des „ $<$ “ erleichtern das Abschätzen.

**Feststellung 2.1.5** Eine Folge  $(a_n)$  konvergiert genau dann gegen  $c \in \mathbb{R}$ , wenn es ein  $C > 0$  mit der folgenden Eigenschaft gibt:

Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß aus  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$  stets

$$|a_n - c| \leq C \cdot \varepsilon$$

folgt.

Die folgende Formulierung kommt ohne ganz „Epsilontik“ aus:

**Feststellung 2.1.6** Für eine Folge  $(a_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R}$  gilt:

$$a_n \rightarrow c \quad \Leftrightarrow \quad a_n - c \rightarrow 0.$$

### 2.1.1 Archimedisches Axiom

**Bemerkung.** Wir können leicht Beispiele von divergenten Folgen finden:  $(a_n)_n := 1, -1, 1, -1, \dots$  ist sicher divergent.

Konstante Folgen sind konvergent.

Wenn man interessante Beispiele sucht, stößt man auf ein Problem, daß wir am Beispiel der Folge  $(\frac{1}{n})_n$  aufzeigen wollen.

1. Wenn  $\varepsilon$  eine rationale Zahl  $\varepsilon = \frac{p}{q}$ , ( $p, q \in \mathbb{N}$ ), ist, so setze man  $n_0 := q$  und erhält:

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \leq \frac{p}{q} = \varepsilon.$$

2. Um die Konvergenz der Folge  $(\frac{1}{n})_n$  zu zeigen, muß man die Grenzwertdefinition **2.1.1** aber wir für beliebige  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , nachweisen.

Man vergleiche dazu aber die Folgerung **2.1.10** aus dem Archimedischen Axiom **(A)**.

---

**Anmerkung:** Die Definition des Grenzwertes **2.1.1** ist nicht nur für  $\mathbb{R}$ , sondern für jeden geordneten Körper (vgl. Def. **1.3.15**) anwendbar. Die Folge  $(a_n)_n$  und der Grenzwert  $c$  liegen dann in diesem geordnetem Körper.

Man beachte, daß man in diesem Fall auch die Vergleichswerte  $\varepsilon > 0$  aus diesem Körper wählen muß.

Das folgende Lemma gilt für jeden geordneten Körper.

**Lemma 2.1.7** Wenn die Folge  $(\frac{1}{n})_n$  konvergiert, dann ist der Grenzwert Null.

Beweisidee: Wenn  $\frac{1}{n} \rightarrow c$  dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = c \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = \frac{c}{2}.$$

Also ist  $c = \frac{c}{2}$  und somit  $c = 0$ .

Wir haben die eben benutzten Rechenregeln für Grenzwerte noch nicht bewiesen und zeigen diese Schlußweise direkt mit der Grenzwertdefinition.

---

**Beweis.** Es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = c$ .

Zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$\left| c - \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n > n_0.$$

Hieraus folgt einerseits, da  $2n > n$ ,

$$\left| c - \frac{1}{2n} \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n > n_0$$

und andererseits

$$\left| \frac{c}{2} - \frac{1}{2n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n > n_0.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt nun:

$$\begin{aligned} \left| \frac{c}{2} \right| &= \left| c - \frac{c}{2} \right| = \left| \left( c - \frac{1}{2n} \right) + \left( \frac{1}{2n} - \frac{c}{2} \right) \right| \\ &\leq \left| c - \frac{1}{2n} \right| + \left| \frac{1}{2n} - \frac{c}{2} \right| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > n_0$ . Also gilt

$$\left| c \right| < 3\varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

und somit  $c = 0$ .

---

**Anmerkung:**

1. Um die Konvergenz der Folge  $(\frac{1}{n})_n$  zu zeigen, muß man die Grenzwertdefinition **2.1.1** für beliebige  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , nachweisen. Dies gelingt aber mit Hilfe der bisherigen Axiomen **(K)** und **(O)** nicht. **(K)** und **(O)** besagen nur, daß  $\mathbb{R}$  ein geordneter Körper ist. Das reicht nicht aus!
2. Um zu zeigen, daß die Konvergenz der Folge  $(\frac{1}{n})_n$  nicht aus den Axiomen **(K)** und **(O)** folgt, muß man einen sogenannten **nicht-archimedisch** geordneten Körper vorzeigen - dies liegt aber außerhalb der Reichweite der Vorlesung Analysis I. In einem nicht-archimedischen Körper ist die Folge  $(\frac{1}{n})_n$  divergent.

**Satz 2.1.8** Die Folge  $(\frac{1}{n})_n$  ist genau dann konvergent, wenn  $\mathbb{N}$  unbeschränkt ist.

In diesem Fall ist nach Lemma **2.1.7**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Beweis.**

⇒ Es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} = 0$ .

Ist nun  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  so setze man  $\varepsilon := \frac{1}{a}$ . Nach der Definition des Grenzwertes gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  so daß

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Also ist

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon} = a.$$

⇐ Zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\frac{1}{\varepsilon} < n_0.$$

Dann ist

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n > n_0.$$

Wir lösen das Problem durch ein weiteres Axiom, das *Axiom des Archimedes*:

### Definition 2.1.9 (Archimedisches Axiom)

(A) In den reellen Zahlen ist die Teilmenge  $\mathbb{N}$  unbeschränkt.

Archimedes von Syrakus (312-287 v. Chr.)

## 2.1.2 Grenzwertregeln

**Feststellung 2.1.10** Im Körper  $\mathbb{R}$  reicht es, in der Grenzwertdefinition 2.1.1 als Vergleichswerte  $\varepsilon > 0$  nur rationale Zahlen zu wählen.

Inbesondere reicht es, die Grenzwertbedingung 2.1.1 nur für die Werte  $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ), nachzuprüfen.

Die letzte Feststellung ermöglicht induktive Beweise!

### Feststellung 2.1.11 (Rechenregeln für Nullfolgen)

Es seien  $(a_n)_n$  und  $(b_n)_n$  Folgen in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt:

1.  $a_n \rightarrow 0 \iff |a_n| \rightarrow 0$ .
2.  $|a_n| \leq |b_n|$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $b_n \rightarrow 0 \implies a_n \rightarrow 0$ .
3.  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $a_n \rightarrow 0 \implies \lambda a_n \rightarrow 0$ .
4.  $a_n \rightarrow 0$  und  $(b_n)_n$  beschränkt  $\implies a_n b_n \rightarrow 0$ .
5.  $a_n \rightarrow 0$  und  $b_n \rightarrow 0 \implies \max\{|a_n|, |b_n|\} \rightarrow 0$ .
6.  $a_n \rightarrow 0$  und  $b_n \rightarrow 0 \implies a_n + b_n \rightarrow 0$ .

**Bemerkung:** In 2. reicht es, daß  $|a_n| \leq |b_n|$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt (vgl. 2.1.2(3))

### Feststellung 2.1.12 Konvergente Folgen sind beschränkt.

### Beispiele 2.1.13

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .
- b) Betrachte die Folge  $(q^n)$  für  $q \in \mathbb{R}$ .  
Für  $q = 1$  gilt:  $q^n \rightarrow 1$ .  
Für  $q = -1$  ist  $(q^n)$  divergent.  
Für  $|q| > 1$  ist  $(q^n)$  unbeschränkt und somit divergent.  
Für  $|q| < 1$  gilt:  $q^n \rightarrow 0$ .
- c) Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und alle  $q \in (-1, 1)$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot q^n = 0$ .
- d) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .

**Beweis (c).**

$$|q| = \frac{1}{1+c} \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{|q|} - 1 > 0.$$

$$(1+c)^n \geq \binom{n}{k+1} c^{k+1} = \frac{c^{k+1}}{(k+1)!} \prod_{l=0}^k (n-l)$$



Für  $n \geq 2k$  ist jeder Faktor  $n - l \geq \frac{n}{2}$  und somit:

$$|q|^n = \frac{1}{(1+c)^n} \leq \frac{(k+1)!}{c^{k+1}} \left(\frac{2}{n}\right)^{k+1}.$$

Für  $n \geq 2k$  folgt:

$$n^k |q|^n \leq \frac{2^k (k+1)!}{c^{k+1}} \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

**Feststellung 2.1.14 (Einsperregel)** Es seien  $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$  Folgen in  $\mathbb{R}$ . Für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gelte

$$a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a,$$

so ist auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

**Beweis (Einsperregel).** Da  $|a_n - a| \rightarrow 0$  und  $|b_n - a| \rightarrow 0$ , gilt  $\max\{|a_n - a|, |b_n - a|\} \rightarrow 0$ . Für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$a_n - a \leq c_n - a \leq b_n - a$$

und folglich ist für fast alle  $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n - a| \leq \max\{|a_n - a|, |b_n - a|\}.$$

Also gilt nach 2.1.11  $|c_n - a| \rightarrow 0$ .

**Satz 2.1.15 (Rechenregeln für Grenzwerte)**

Es seien  $(a_n), (b_n)$  Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Dann ist

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ , speziell  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b) = a + b$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ , speziell  $\lim_{n \rightarrow \infty} (ab_n) = ab$ .
3. Wenn  $b \neq 0$  ist, dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $b_n \neq 0$  für  $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ . Für die Folge  $(\frac{a_n}{b_n})_{n=n_0}^\infty$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ .
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}$ .
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ .

**Anmerkung:** Für keine der Aussagen gilt die Umkehrung.

**Beweis (Rechenregeln für Grenzwerte).** Wir führen mit Hilfe von 2.1.6 die Behauptungen auf die Regeln 2.1.11 für Nullfolgen zurück:

1.  $(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b)$ .
2.  $a_n b_n - ab = (a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + (a_n - a)b$ .
3. Zu  $\varepsilon := \frac{|b|}{2}$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $|b - b_n| \leq \varepsilon$  für  $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ , gilt. Für  $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$  erhalten wir:

$$|b| - |b_n| \leq |b - b_n| \leq \frac{|b|}{2} \Rightarrow \frac{|b|}{2} \leq |b_n|$$

und

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \frac{1}{|b_n b|} |a_n b - ab_n| \leq \frac{2}{|b|^2} |(a_n - a)b + a(b - b_n)|.$$

4.  $|\max\{a_n, b_n\} - \max\{a, b\}| \leq \max\{|a_n - a|, |b_n - b|\}$ .
5.  $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ .

**Bemerkung 2.1.16** Für  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  gilt

1.  $\max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\} \leq \max\{a_1, b_1\} + \max\{a_2, b_2\}$ .
2.  $\max\{a_0, b_0\} - \max\{a_1, b_1\} \leq \max\{a_0 - a_1, b_0 - b_1\}$ .

$$3. |\max\{a_0, b_0\} - \max\{a_1, b_1\}| \leq \max\{|a_0 - a_1|, |b_0 - b_1|\}.$$

**Beweis.**

1. Offensichtlich.
2. Setzt man in 1.)  $a_2 := a_0 - a_1$  und  $b_2 := b_0 - b_1$  so folgt 2.).
3. Aus 2.) folgt

$$\max\{a_0, b_0\} - \max\{a_1, b_1\} \leq \max\{|a_0 - a_1|, |b_0 - b_1|\}.$$

und aus Symmetriegründen somit 3.).

### Beispiele 2.1.17

- a)  $\frac{2-n+3n^2}{4+7n^2} \rightarrow \frac{3}{7}$ .
- b)  $\frac{n^5 2^n - 4n^9 + 8}{2n - 3^n} \rightarrow 0$ .
- c)  $\frac{7^n + 2^n n!}{n^{n+1} + n^3} \rightarrow 0$ .
- d) Für  $|q| < 1$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1-q}$ .

**Feststellung 2.1.18 (Grenzwerte von Ungleichungen)** Es seien  $(a_n)_n, (b_n)_n$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$ . Es gebe ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $k \geq k_0$  gilt

$$a_k \leq b_k.$$

Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**Anmerkung:** Aus  $a_k < b_k$  folgt auch nur  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Feststellung 2.1.19** Sei  $(a_k)_k$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $a_k \geq 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ) die Folge ihrer Partialsummen. Dann gilt:

$$(s_n)_n \text{ beschränkt} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

### Anmerkung

1. Das Beispiel 1.4.11 der harmonischen Reihe zeigt, daß die Umkehrung nicht gilt.
2. Der Beweis wird durch Kontraposition geführt: Wenn  $(a_n)_n$  keine Nullfolge ist, dann ist die Folge  $(s_n)_n$  unbeschränkt.

Zur Vorbereitung des Beweises überlegen wir uns, was heißt es, daß eine Folge  $(a_n)_n$  keine Nullfolge ist:

**Bemerkung 2.1.20** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Folge  $(a_n)_n$  ist keine Nullfolge.
2. Es existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  mit folgender Eigenschaft: Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  gibt es eine natürliche Zahl  $N \geq n$  mit  $|a_N| > \varepsilon_0$ .
3. Es gibt eine  $\varepsilon_0 > 0$  und eine streng monoton wachsende Folge  $(N_n)_n$  in  $\mathbb{N}$ , so daß

$$|a_{N_n}| > \varepsilon_0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Beweis (von Feststellung 2.1.19).**

Annahme, die Folge  $(a_n)_n$  konvergiert nicht gegen 0. Dann gibt es ein  $\varepsilon_0 > 0$  und eine streng monoton wachsende Folge  $(N_n)_n$  in  $\mathbb{N}$ , so daß

$$|a_{N_n}| > \varepsilon_0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt, daß die Folge  $(s_n)_n$  unbeschränkt ist:

$$s_{N_n} = \sum_{l=1}^{N_n} a_l \geq \sum_{k=1}^n a_{N_k} > n\varepsilon_0 \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Das folgende Korollar werden wir im Abschnitt Cauchy-Folgen wesentlich verschärfen (vgl. 2.2.12). Dabei werden wir eine ähnliche Beweisidee verwenden.

**Korollar 2.1.21** Es sei  $(a_n)_n$  eine monotone, beschränkte Folge. Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ .

**Beweis.** Ohne Einschränkung sei  $(a_n)_n$  monoton wachsend und nach oben beschränkt. Man bilde die Folge  $d_n := a_{n+1} - a_n$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ) und die Partialsummen  $s_n = \sum_{k=1}^n d_k = a_{n+1} - a_1$ . Da die Folge  $(s_n)_n$  beschränkt ist, folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ .

### 2.1.3 Uneigentliche Konvergenz

**Definition 2.1.22 (Uneigentliche Konvergenz)**

1. Eine Folge  $(a_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  strebt gegen  $+\infty$ , falls es zu jedem  $K > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so daß für alle  $n \geq n_0$  gilt:

$$a_n > K.$$

Man schreibt  $a_n \rightarrow +\infty$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

2. Eine Folge  $(a_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  strebt gegen  $-\infty$ , falls es zu jedem  $K > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so daß für alle  $n \geq n_0$  gilt:

$$a_n < -K.$$

Man schreibt  $a_n \rightarrow -\infty$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

**Bemerkung.** 1.) Statt  $+\infty$  schreibt man auch  $\infty$ .

2.) Es sei  $C > 0$ . Statt  $a_n > K$  kann man auch  $a_n \geq CK$  fordern.

**Bemerkung 2.1.23** Die Symbole  $\pm\infty$  sind keine Zahlen. Man kann die Rechenregeln für Grenzwerte bequem formulieren, wenn man  $\overline{\mathbb{R}}$  zu der Menge

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

erweitert und die folgenden Regeln vereinbart:

$$\begin{aligned} -\infty < x < +\infty & \text{ für } x \in \mathbb{R}, \\ x \pm \infty = \pm\infty + x = \pm\infty, & \quad \frac{x}{\pm\infty} = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}, \\ x \cdot \pm\infty = \pm\infty \cdot x = \pm\infty & \text{ für } x > 0, \\ x \cdot \pm\infty = \pm\infty \cdot x = \mp\infty & \text{ für } x < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \\ \infty \cdot \infty = -\infty \cdot -\infty = \infty, \quad +\infty \cdot -\infty = -\infty \cdot +\infty = -\infty. \end{aligned}$$

$\overline{\mathbb{R}}$  ist total geordnet. Weitere Ausdrücke wie  $0 \cdot \pm\infty$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  und  $+\infty - \infty$  sind nicht definiert!

**Feststellung 2.1.24** Es seien  $(a_n)_n$  und  $(b_n)_n$ , Folgen in  $\mathbb{R}$ .

1. Es gilt  $a_n \rightarrow \pm\infty$  genau dann, wenn

$$a_n \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{1}{a_n} \rightarrow 0.$$

2. Es sei  $c > 0$ , so daß  $b_n \geq c$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wenn  $a_n \rightarrow \pm\infty$ , dann gilt  $a_n b_n \rightarrow \pm\infty$ .
3. Wenn  $a_n \leq b_n$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ), und  $a_n \rightarrow \infty$ , dann gilt  $b_n \rightarrow \infty$ .

**Feststellung 2.1.25** Es seien  $(a_n)_n$  und  $(b_n)_n$ , Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $a_n \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$  und  $b_n \rightarrow b \in \overline{\mathbb{R}}$ .

1. Wenn  $a \pm b$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  definiert ist, dann gilt  $a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$ .
2. Wenn  $a \cdot b$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  definiert ist, dann gilt  $a_n b_n \rightarrow a \cdot b$ .
3. Wenn  $\frac{a}{b}$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  definiert ist, dann gilt  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ .

**Bemerkung 2.1.26 (Wachstumsgeschwindigkeit)** Es ist für die Analysis sehr wichtig, die *Wachstumsgeschwindigkeit* von Folgen  $a_n \rightarrow +\infty$  zu erfassen.

Eine Folge  $(b_n)_n$  strebt **schneller** als  $(a_n)_n$  gegen  $+\infty$ , falls

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$$

gilt.

**Beispiel.** In der folgenden Liste strebt jede Folge schneller nach  $+\infty$  als die vorhergehende:

- a)  $(n^k)$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ); b)  $(q^n)$ , ( $q > 1$ ); c)  $(n!)$ ; d)  $(n^n)$ ; e)  $(2^{n^2})$ .

Zum Beweis siehe Beispiel 2.1.13, und Satz 1.5.4

## 2.2 Vollständigkeit der reellen Zahlen

### 2.2.1 Intervallschachtelungen

**Bezeichnung 2.2.1** Ein Intervall  $[a, b]$  mit Endpunkten  $a, b \in \mathbb{R}$  heiße kurz ein **kom-  
pakt**es Intervall.

Statt kompaktes Intervall sagt man auch **abgeschlossen**, **beschränktes** Intervall.

**Bezeichnung 2.2.2** Eine **Intervallschachtelung** ist eine Folge  $(I_n)_n$  kompakter In-  
tervallen mit den Eigenschaften:

1. Fur  $n \in \mathbb{N}$  ist  $I_{n+1} \subset I_n$ .
2. Die Längen  $|I_n|$  der Intervalle konvergieren gegen Null.

**Lemma 2.2.3** Es sei  $(I_n)_n$  eine Intervallschachtelung. Wenn  $x, \tilde{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ , dann ist  
 $x = \tilde{x}$ .

**Beispiel.** Im Abschnitt 1.5.8 haben wir die Intervallschachtelungen

$$[E_n, E_n^*] = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} \right] \quad \text{fur } n \in \mathbb{N}$$

konstruiert. Offensichtlich ist die Länge (vgl 1.5.6)

$$|[E_n, E_n^*]| = \frac{1}{n \cdot n!} < \frac{1}{9} \left( \frac{3}{n} \right)^{n+1}.$$

Z. B. fur  $n = 10$  ist die Länge kleiner als  $2 \cdot 10^{-7}$ .

In Satz 1.5.11 haben wir gesehen, daß es keine rationale Zahl gibt, die in allen Intervallen  
 $[E_n, E_n^*]$ ,  $(n \in \mathbb{N})$ , liegt.

Wir werden die Existenz einer Zahl  $e$ , die in allen Intervallen  $[E_n, E_n^*]$  liegt, aus einem  
weiteren Axiom (2.2.6) folgern.

**Bemerkung 2.2.4 (Wurzel aus 2 ist nicht rational)** —

Es gibt keine rationale Zahl  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $r^2 = 2$ .

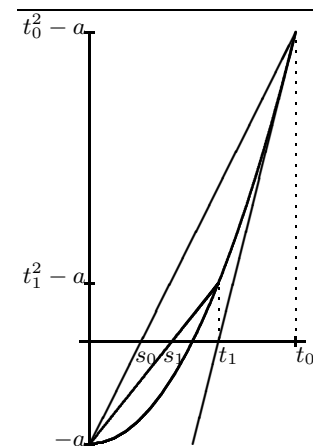
**Beweis.** Es sei  $r = \frac{p}{q} > 0$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ , so daß  $p$  und  $q$  **keinen gemeinsamen Teiler** haben.  
Aus

$$r^2 = \left( \frac{p}{q} \right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2.$$

Also ist  $p^2$  eine gerade Zahl und somit muß auch  $p$  gerade sein. Es gilt  $p = 2m$  mit einem  
 $m \in \mathbb{N}$ . Es folgt:

$$4m^2 = p^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 2m^2 = q^2.$$

Also ist auch  $q$  eine gerade Zahl und 2 ist ein gemeinsamer Teiler von  $p$  und  $q$ . **Widerspruch!**  
Wir konstruieren eine Intervallschachtelung zur Bestimmung der Wurzel:



**Approximation der Nullstelle der Parabel  $y = x^2 - a$ .**

Parabel ist konvex:

Tangente  $\leq$  Parabel  $\leq$  Sekante

$t_0$  Startpunkt mit  $a < t_0^2$   
 $s_0$  Nullstelle der Sekante durch  $(0, -a)$  und  $(t_0, t_0^2 - a)$   
 $t_1$  Nullstelle der Tangente in  $(t_0, t_0^2)$   
 $s_1$  Nullstelle der Sekante durch  $(0, -a)$  und  $(t_1, t_1^2 - a)$   
 Intervallschachtelung:  
 $s_0 < s_1 < \dots < \sqrt{a} < \dots < t_1 < t_0$ .

**Beispiele 2.2.5 (Intervallschachtelung: Wurzel)**

Es sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Wir definieren rekursiv eine Folge  $(t_n)_n$ :

Anfangswert:  $t_0 \in (0, \infty)$  beliebig  
 Rekursion:  $t_{n+1} := \frac{1}{2}(t_n + \frac{a}{t_n})$  für  $n = 1, 2, \dots$

Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $t_n > 0$  und

$$t_n^2 - a = \frac{1}{4}(t_{n-1} - \frac{a}{t_{n-1}})^2 \geq 0. \quad (*)$$

Die Folge  $(t_n)_{n=1}^\infty$  ist monoton fallend:

$$t_n - t_{n+1} = \frac{1}{2t_n}(t_n^2 - a) \geq 0 \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Da die Folge  $(t_n)_n$  monoton und beschränkt ist, folgt nach Korollar 2.1.21  $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n - t_{n+1}) = 0$ .

Wir bilden eine zweite, monoton wachsende Folge  $s_n := \frac{a}{t_n}$ ,  $(n \in \mathbb{N})$ . Aus

$$t_n - s_n = 2(t_n - t_{n+1}) \geq 0$$

folgt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$s_n \leq t_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n - s_n) = 0.$$

Wir haben also eine Intervallschachtelung  $[s_n, t_n]$ ,  $(n \in \mathbb{N})$ .

Diese Intervallschachtelung definiert die positive Wurzel aus  $a$ , denn es gilt:

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [s_n, t_n] \iff x^2 = a.$$

$\Rightarrow$ : Für  $n \in \mathbb{N}$  folgt aus  $s_n \leq x \leq t_n$ , daß:

$$s_n = \frac{1}{2}(s_n + \frac{a}{t_n}) \leq \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \leq \frac{1}{2}(t_n + \frac{a}{s_n}) = t_n.$$

Nach Lemma 2.2.3 ist

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \iff x^2 = a.$$

$\Leftarrow$ : Es sei  $0 \leq x$  und  $x^2 = a$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  folgt aus (\*):

$$0 \leq t_n^2 - a = t_n^2 - x^2 \implies x \leq t_n.$$

$$0 \leq \frac{a}{t_n^2}(t_n^2 - a) = a - s_n^2 = x^2 - s_n^2 \implies s_n \leq x.$$

**2.2.2 Vollständig geordneter Körper**

Um in den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  die Existenz der Zahl  $e$ , oder die Existenz der Wurzel aus einer positiven Zahl zu sichern, brauchen wir ein weiteres Axiom für  $\mathbb{R}$ , daß die **Vollständigkeit** von  $\mathbb{R}$  sichert:

**Definition 2.2.6 (Intervallschachtelungsprinzip)**

(I) Es sei  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Intervallschachtelung in  $\mathbb{R}$ . Dann existiert ein

$$c \in \bigcap_{n=1}^\infty I_n.$$

**Bemerkung.** Nach Lemma 2.2.3 gibt es genau ein  $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ .

---

**Anmerkung.**

1. Ein geordneter Körper, der die Axiome A und I erfüllt, heißt **vollständig geordneter Körper**.
2. Man kann zeigen, daß es - bis auf Isomorphie - genau einen vollständig geordneten Körper gibt. Das sind die reellen Zahlen.
3. Der **Beweis der Existenz und Eindeutigkeit** der reellen Zahlen überfordert den Anfänger und ist für das weitere Vorgehen erstmal entbehrlich. Wir werden am Ende Semesters darauf eingehen.
4. Die Vorlesung Analysis I handelt davon, welche **Folgerungen** man **aus den Axiomen** eines vollständig geordneten Körpers ziehen kann.

- 
5. Es gibt eine Reihe von äquivalenten Forderungen, um die Vollständigkeit eines geordneten Körpers zu beschreiben. Die Lehrbücher unterscheiden sich darin, welche der Forderungen sie als Axiom und welche als Folgerung wählen.
  6. Andere übliche äquivalente Forderungen sind u.a.
    - (a) Cauchysches Konvergenzkriterium
    - (b) Supremums-Eigenschaft
    - (c) Dedekindsches Schnittaxiom
  7. Wir werden das Cauchysche Konvergenzkriterium und die Supremumseigenschaft untersuchen.

---

## 2.2.3 Cauchysches Konvergenzkriterium

Bei der Definition der Konvergenz muß man den Grenzwert bereits kennen, um die Konvergenzbedingung nachzuprüfen. Das Cauchysche Konvergenzkriterium ermöglicht, die Konvergenz einer Folge zu testen, deren Grenzwert noch nicht bekannt ist.

**Definition 2.2.7** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

**Bemerkung 2.2.8** Die Feststellungen 2.1.5 und 2.1.10 gelten sinngemäß auch für die Definition von Cauchy-Folgen.

---

**Beispiel.** Eine konvergente Folge  $(a_n)_n$  ist eine Cauchy-Folge:

Es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ . Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - c| + |c - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für } m, n \geq N_0.$$

---

**Satz 2.2.9 (Cauchysches Konvergenzkriterium)** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

---

**Beweis.**

$\Rightarrow$ : Diese Beweisrichtung haben wir im obigen Beispiel gezeigt.

$\Leftarrow$ : Es sei  $(a_n)_n$  eine Cauchy-Folge. Wir wählen zu den Vergleichswerten  $\varepsilon_k := \frac{1}{2^k}$  induktiv passende  $n_k \in \mathbb{N}$ , so daß die Folge  $(n_k)_k$  streng monoton wachsend ist und

$$|a_m - a_n| < \varepsilon_k \quad \text{für alle } m, n \geq n_k. \quad (*)$$

$k = 1$ : Wähle zu  $\varepsilon_1$  ein passendes  $n_1$ .

$k \Rightarrow k + 1$ : Es seien zu  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  bereits passende  $n_k$  gefunden, so daß  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  und  $(*)$  für  $k = 1, 2, \dots, n$  erfüllt ist.

Dann gibt es nach Voraussetzung zu  $\varepsilon_{k+1}$  ein  $n_{k+1}$ , so daß  $n_{k+1} > n_k$  und  $(*)$  für  $k + 1$  gilt.

Man setze nun

$$I_k := [a_{n_k} - 2\varepsilon_k, a_{n_k} + 2\varepsilon_k].$$

Nach Konstruktion ist  $a_n \in I_{n_k}$  für  $n \geq n_k$ .

Es ist  $I_{k+1} \subset I_k$  da (Zeichnung):

$$\begin{aligned} a_{n_{k+1}} + 2\varepsilon_{k+1} &< a_{n_k} + \varepsilon_k + 2\varepsilon_{k+1} = a_{n_k} + 2\varepsilon_k \\ a_{n_{k+1}} - 2\varepsilon_{k+1} &> a_{n_k} - \varepsilon_k - 2\varepsilon_{k+1} = a_{n_k} - 2\varepsilon_k. \end{aligned}$$

und folglich

$$[a_{n_{k+1}} - 2\varepsilon_{k+1}, a_{n_{k+1}} + 2\varepsilon_{k+1}] \subset [a_{n_k} - 2\varepsilon_k, a_{n_k} + 2\varepsilon_k].$$

Für die Längen der Intervalle gilt:  $|I_k| = 4\varepsilon_k = 4\frac{1}{2^k} \rightarrow 0$ . Nach dem Intervallschachtelungsprinzip 2.2.6 gibt es ein

$$c \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Wenn  $n \geq n_k$  so sind  $a_n, c \in I_{n_k}$  und folglich:

$$|a_n - c| \leq |I_k| = 4\varepsilon_k.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c.$$

**Bemerkung.** Für die Konvergenz einer Folge reicht es nicht, daß die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder eine Nullfolge bilden:

1. Für die harmonische Reihe  $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ) gilt  $h_{n+1} - h_n = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$  aber  $h_n \rightarrow \infty$ .
2. Die Folge  $\sqrt{n} \rightarrow \infty$  aber  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightarrow 0$ .
3. Für die beschränkte Folge

$$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \dots$$

bilden die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder eine Nullfolge. Die Folge ist aber nicht konvergent.

Wenn die die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder einer Folge kleiner sind als die Summanden einer konvergenten Reihe, so ist die Folge eine Cauchyfolge.

Meistens vergleicht man mit der geometrischen Reihe:

### Satz 2.2.10 (Vergleich mit geometrischer Reihe)

Wenn eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die folgende Bedingung erfüllt

$$\exists 0 \leq q < 1, C > 0, n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_{n+1} - a_n| \leq Cq^n,$$

dann ist sie konvergent.

**Beweis.** Die Folge ist eine Cauchyfolge. Für  $m > n$  gilt

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \\ &\leq C \sum_{k=n}^{m-1} q^k = C \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} q^n \leq \frac{C}{1 - q} q^n. \end{aligned}$$

## 2.2.4 Monotone Folgen

Jedem Satz über monotone Folgen entspricht ein Satz über Reihen mit nichtnegativen Summanden und umgekehrt.

**Satz 2.2.11 (Reihen mit nichtnegativen Summanden)** Es sei  $(a_n)_n$  eine Folge mit nichtnegativen Gliedern. Wenn die Folge der Partialsummen  $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$  nach oben beschränkt ist, dann existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

**Beweis.** Wir zeigen, daß die Folge  $(s_n)_n$  eine Cauchy-Folge ist.

**Annahme:**  $(s_n)_n$  ist keine Cauchy-Folge. Dann gibt es ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so daß es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  zwei Indices  $l, m \geq n$  gibt mit

$$|s_m - s_l| \geq \varepsilon_0.$$

Es sei etwa  $m \geq l \geq n$ . Da die Summanden  $a_k \geq 0$  sind, folgt:

$$\sum_{k=n}^m a_k \geq \sum_{k=l}^m a_k \geq \varepsilon_0.$$

Man kann nun rekursiv eine streng monoton wachsende Folge  $N_n, (N \in \mathbb{N}_0)$ , natürlicher Zahlen mit Startwert  $N_0 = 0$  angeben, so daß

$$\sum_{k=N_{n-1}+1}^{N_n} a_k \geq \varepsilon_0 \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Dann ist aber die Folge  $(s_{N_n}), (n \in \mathbb{N})$ , unbeschränkt:

$$s_{N_n} = \sum_{k=1}^{N_n} a_k = \sum_{l=1}^n \sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k \geq n\varepsilon_0.$$

Widerspruch. Die Folge  $(s_n)_n$  ist also eine Cauchy-Folge.

**Satz 2.2.12** *Monotone beschränkte Folgen in  $\mathbb{R}$  sind konvergent.*

**Beweis.** Die Folge  $(a_n)_n$  sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Die Folge  $a_{n+1} - a_n, (n \in \mathbb{N})$ , ist nichtnegativ und folglich ist nach Satz 2.2.11 die Folge der Partialsummen  $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k)$  konvergent.

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k).$$

Für monoton fallende, nach unten beschränkte Folgen  $(a_n)_n$  existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n)$  und folglich nach den Rechenregeln 2.1.15 auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = - \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n).$$

## 2.2.5 n-te Wurzeln

**Feststellung 2.2.13 (Approximation der n-ten Wurzel)** *Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $x > 0$ . Wir erhalten eine monoton fallende Folge  $(y_k)_k$  positiver Zahlen durch die Vorschrift:*

Startwert:  $y_0$  mit  $y_0^n \geq x$ ,

Rekursion:  $y_{k+1} := y_k \left(1 - \frac{y_k^n - x}{n y_k^n}\right)$

mit folgenden Eigenschaften:

$y_k^n \geq x, y_k > 0$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ , und  $y_{k-1} \geq y_k$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

Für den Grenzwert  $y := \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$  gilt  $y^n = x$ .

**Bemerkung:** Als Startwert kann man z.B.  $y_0 = 1 + \frac{x-1}{n}$  wählen. Dann ist  $y_0^n = \left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{x-1}{n} = x$ .

**Beweis.** Die Abschätzungen folgen durch Induktion nach  $k$ .

**$k = 0$ :** Die beiden ersten Aussagen sind klar nach Definition.

**$k \Rightarrow k + 1$ :** Da  $\frac{y_k^n - x}{n y_k^n} \leq 1$  folgt nach Bernoulli (1.5.1):

$$\Rightarrow y_{k+1}^n = y_k^n \left(1 - \frac{y_k^n - x}{n y_k^n}\right)^n \geq y_k^n \left(1 - \frac{y_k^n - x}{y_k^n}\right) = x.$$

$$y_{k+1} = y_k \frac{(n-1)y_k^n + x}{n y_k^n} > 0.$$

$$0 \leq y_k^n - x \Rightarrow y_{k+1} = y_k \left(1 - \frac{y_k^n - x}{n y_k^n}\right) \leq y_k.$$

Also existiert  $y := \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$ . Aus der Rekursionsformel folgt:

$$n y^n = \lim_{k \rightarrow \infty} (n y_k^{n-1} y_{k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (n-1) y_k^n + x = (n-1) y^n + x.$$

Folglich ist  $y^n = x$ .



**Satz 2.2.14** Zu  $x > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl  $y > 0$  mit  $y^n = x$ .

**Bezeichnung.** Die eindeutig bestimmte Zahl  $y$  aus vorigem Satz heißt die  $n$ -te Wurzel aus  $x$ . Bezeichnung:  $y = \sqrt[n]{x}$  Man setzt  $\sqrt[n]{0} := 0$ .

**Korollar 2.2.15** Die Funktion  $(0, \infty) \ni x \mapsto \sqrt[n]{x}$  ist **streng monoton wachsend**.

**Beweis.**

**Eindeutigkeit:** Es seien  $y, \tilde{y} > 0$ . Wenn  $y < \tilde{y}$ , dann ist  $y^n < \tilde{y}^n$ . Aus  $y^n = x = \tilde{y}^n$  folgt also  $y = \tilde{y}$ .

**Existenz:** Die Existenz der  $n$ -ten Wurzel folgt aus der Feststellung 2.2.13.

**Bemerkung und Bezeichnung 2.2.16** Wir vereinbaren die übliche Exponenten Schreibweise für Wurzeln.

Aus der Eindeutigkeit der Wurzel folgt für  $x > 0, x \in \mathbb{R}$ :

1. Für  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$  ist

$$\sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p.$$

2. Es seien  $p, \tilde{p} \in \mathbb{Z}, q, \tilde{q} \in \mathbb{N}$ . Wenn  $\frac{p}{q} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ , dann ist

$$\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[\tilde{q}]{x^{\tilde{p}}}.$$

3. Für  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$  definiert man:

$$x^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{x^p}.$$

**Satz 2.2.17 (Bernoullische Ungleichung für die Wurzel)**

Für  $x > -1, x \in \mathbb{R}$ , und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$1 + \frac{x}{n(1+x)} \leq \sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{n}.$$

**Beweis.** Wir setzen

$$\sqrt[n]{1+x} = 1+a.$$

Dann ist  $a > -1$ . Nach Bernoulli (1.5.1) folgt

$$1+x = (1+a)^n \geq 1+na = 1-n+n\sqrt[n]{1+x}$$

$$\sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{n}$$

Wenden wir die soeben gezeigt Ungleichung an, so folgt:

$$\sqrt[n]{1+x} = \frac{1}{\sqrt[n]{1-\frac{x}{1+x}}} \geq \frac{1}{1-\frac{x}{n(1+x)}} \geq 1 + \frac{x}{n(1+x)}.$$

**Feststellung 2.2.18 (Stetigkeit der  $n$ -ten Wurzel)**

Es sei  $(a_k)_k$  eine Folge,  $a_k \geq 0$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a}$$

**Beweis.** Der Fall  $a_k \rightarrow 0$  ist klar. Wenn der Grenzwert  $a \neq 0$ , so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  so daß

$$a_k > \frac{a}{2} \quad \text{für } n \geq n_0.$$

$$\frac{a_k - a}{a} > -1 \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Bernoullischen Ungleichung:

$$\sqrt[n]{a} \left(1 + \frac{a_k - a}{ka_k}\right) \leq \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{1 + \frac{a_k - a}{a}} \leq \sqrt[n]{a} \left(1 + \frac{a_k - a}{ka}\right).$$

**Feststellung 2.2.19** Es sei  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q > 0$ . Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = 1.$$

Die Folge

$$(\sqrt[n]{q})_n \text{ ist } \begin{cases} \text{streng monoton fallend} & \text{für } q > 1, \\ \text{streng monoton wachsend} & \text{für } 0 < q < 1. \end{cases}$$

**Bemerkung:** Die Konvergenz  $\sqrt[n]{q} \rightarrow 1$  folgt aus der Bernoullischen Ungleichung: Für  $q > 0$  gilt:

$$1 + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \leq \sqrt[n]{q} \leq 1 + \frac{1}{n}(q - 1).$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} 1.05 &\leq \sqrt[10]{2} \approx 1.0718 \leq 1.1, \\ 1.000999 &\leq \sqrt[1000]{1000} \approx 1.0069 \leq 1.999. \end{aligned}$$

**Beweis.** Für  $q > 0$  setze man

$$q = 1 + x \quad \text{mit } x > -1$$

und wende die Bernoullische Ungleichung 2.2.17 an:

$$1 + \frac{x}{n(1+x)} \leq \sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{n}.$$

Also ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x} = 1$ .

Im Falle  $1 < q$  ist  $\sqrt[n]{q} > 1$  und aus

$$q < q \sqrt[n]{q} = (\sqrt[n]{q})^{n+1}$$

folgt die strenge Monotonie der Folge:  $\sqrt[n+1]{q} < \sqrt[n]{q}$ .

Im Falle  $0 < q < 1$  sind die Kehrwerte  $\sqrt[n]{\frac{1}{q}}$  streng monoton fallend.

**Feststellung 2.2.20** Die Folge  $\sqrt[n]{n}$ , ( $n = 3, 4, \dots$ ), ist streng monoton fallend und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

**Bemerkung.** Die Behauptungen folgen aus der Abschätzung

$$1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad \text{für } n = 3, 4, \dots$$

**Beweis.** Nach Lemma 1.5.5 gilt

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3 \leq n \quad \text{für } n = 3, 4, \dots$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n]{n}$$

$$\Rightarrow n + 1 \leq n \sqrt[n]{n} = (\sqrt[n]{n})^{n+1} \quad \text{für } n = 3, 4, \dots$$

Wir setzen  $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$ .

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Also ist

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

## 2.3 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

### 2.3.1 Grenzwerte von Funktionen

**Beispiele 2.3.1** Die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

ist im Punkt 2 nicht definiert. Da

$$f(x) = x + 2 \quad \text{für } x \neq 2,$$

liegen die Funktionswerte nahe an 4, wenn  $x$  nahe an 2 liegt.

Genauer gilt für jede Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ :

$$\text{Aus } x_n \rightarrow 2 \text{ folgt } f(x_n) \rightarrow 4.$$

Somit sollte 4 der „Grenzwert“ von  $f$  bei der Annäherung an 2 sein.

Bei der Definition des Grenzwertes einer Funktion  $f$  in einem Punkt  $a$  untersuchen wir zunächst den wichtigen Spezialfall, daß der Punkt  $a$  **nicht** zum Definitionsbereich von  $f$  gehört:

**Definition 2.3.2 (Spezialfall  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ )**

Gegeben sei ein offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a \in I$  und eine Funktion  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Eine Zahl  $\ell \in \mathbb{R}$  heißt **Grenzwert** der Funktion  $f$  im Punkte  $a$ , falls für **jede** Folge  $(x_n)_n$  in  $I \setminus \{a\}$  aus  $x_n \rightarrow a$  stets  $f(x_n) \rightarrow \ell$  folgt.

**Bezeichnung.** Man schreibt  $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  oder  $f(x) \rightarrow \ell$  für  $x \rightarrow a$ .

**Bemerkung**

1. Wir werden später die Definition auf beliebige Definitionsbereiche ausdehnen.
2. In der obigen Definition ist die Funktion im Punkte  $a$  **nicht definiert**. Irgendein andersweitig erklärter Funktionswert im Punkte  $a$  spielt für die Bestimmung des Grenzwertes also keine Rolle.
3. Um auf jedenfall klarzustellen, daß wir die Funktion  $f$  auf dem Definitionsbereich  $I \setminus \{a\}$  meinen, schreiben wir

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x).$$

4. Diese Vorsichtsmaßnahme ist angebracht, da man in der Literatur zwei Definitionen des Grenzwertes findet. Für den **traditionellen** Grenzwertbegriff von Weierstraß vergleiche man das Schulbuch, [KABALLO, Band II] oder [KÖNIGSBERGER], für den **moderneren**, flexibleren Begriff siehe [DIEUDONNÉ], [FORSTER] oder [BRÖCKER]. Wir beschränken uns vorerst auf die Fälle, in denen der Unterschied sich nicht bemerkbar macht.

**Feststellung 2.3.3**

1. Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.
2. Ist  $J \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $a \in J$ , so gilt für die Einschränkung  $g := f|_{I \cap J \setminus \{a\}}$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell.$$

**Bemerkung** Teil 2.) der Feststellung besagt, daß der Grenzwert nur vom Verhalten der Funktion in einer kleinen Umgebung  $J$  des Punktes  $a$  abhängt.  $I \cap J$  ist ein offenes Intervall.

Wir schreiben

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I \cap J}} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell.$$

**Beispiele 2.3.4**

1. Es gilt also  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ .

Setzen wir diese Funktion in  $x = 2$  durch ein beliebiges  $c \in \mathbb{R}$  zu einer auf ganz  $\mathbb{R}$  definierten Funktion fort:

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ c & \text{für } x = 2 \end{cases},$$

so gilt in allen Fällen  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ .

2. Allgemeiner gilt  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} (x+a) = 2a$ .
3. Für  $a > 0$  gilt  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ .

Für die auf  $(0, \infty) \setminus \{a\}$  erklärte Funktion erhält man:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Die folgende Feststellung liefert eine äquivalente Formulierung der Grenzwertdefinition.

**Feststellung 2.3.5 ( $\varepsilon$ - $\delta$  Definition des Grenzwertes)**

Gegeben sei ein offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a \in I$  und eine Funktion  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Für  $\ell \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,
2. Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für  $x \in I \setminus \{a\}$  aus  $|x - a| < \delta$  stets  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  folgt.

**Bild.** Das heißt, zu jedem  $2\varepsilon$ -Intervall  $I_\varepsilon(\ell) = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$  mit Mittelpunkt  $\ell$  gibt es ein  $2\delta$ -Intervall  $I_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$  mit Mittelpunkt  $a$ , so daß

$$f(I_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq I_\varepsilon(\ell).$$

**Feststellung 2.3.6 (Rechenregeln für Grenzwerte)**

Gegeben sei ein offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a \in I$  und Funktionen  $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_f$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_g$

Dann folgt

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .
3. Wenn  $\ell_g \neq 0$ , so gibt es ein offenes Intervall  $J \subset I$  mit  $a \in J$ , so daß  $g(x) \neq 0$  für  $x \in J \setminus \{a\}$ .

Auf  $J \setminus \{a\}$  gilt dann:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in J \setminus \{a\}}} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

**Bezeichnung** Im allgemeinen geben wir in der Aussage 3.) das Intervall  $J$  nicht an und schreiben:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_f}{\ell_g}.$$

**Bemerkung 2.3.7** Weitere Regeln sind:

1. **Einsperregel:** Es sei  $h : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f \leq h \leq g$ .  
Wenn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ , dann ist  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ .  
Wenn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $h$  beschränkt, dann  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot h)(x) = 0$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow a} \max(f, g)(x) = \max\{\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)\}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)|$ .
4. Es sei  $p \in \mathbb{N}$ . Wenn  $f \geq 0$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}.$$

**Beweis (von Feststellung 2.3.6).**

1. und 2. Dies folgt sofort aus den entsprechenden Regeln 2.1.15 für Grenzwerte von Folgen.
3. Wir müssen ein offenes Intervall  $J$  angeben, das  $a$  enthält und auf dem  $g(x) \neq 0$  ist:

Nach Feststellung 2.3.5 gibt es zu  $\varepsilon := \frac{|\ell_g|}{2} > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß für  $x \in D_f$  und  $|x - a| < \delta$  folgendes gilt:

$$\begin{aligned} |\ell_g - g(x)| < \varepsilon &= \frac{|\ell_g|}{2} \\ \Rightarrow |\ell_g| - |g(x)| < \frac{|\ell_g|}{2} &\Rightarrow 0 < \frac{|\ell_g|}{2} < |g(x)|. \end{aligned}$$

Die restliche Behauptung folgt nun aus der entsprechenden Regel 2.1.15(3) für Quotienten von Folgen.

---

**Beispiel.**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}} = 1$$

Die Funktion ist für  $x > 0$  erklärt, da:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} > 0 \quad \text{für } x > 0.$$

Es sei  $(x_n)_n$  eine Folge mit  $x_n \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{x_n} &\rightarrow 1, \\ \sqrt{x_n - \sqrt{x_n}} &\rightarrow 0, \\ \sqrt{x_n + \sqrt{x_n}} &\rightarrow \sqrt{2}, \\ \sqrt{x_n^2 + 1} &\rightarrow \sqrt{2}. \end{aligned}$$

---

**Beispiele 2.3.8** Die **Heaviside-Funktion** wird auf  $\mathbb{R}$  definiert durch

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Die Heaviside Funktion beschreibt einen Einschaltvorgang, ein Signal springt von 0 auf 1.

Der Grenzwert  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} H(x)$  existiert offenbar nicht.

Für Folgen  $(x_n)$  in  $(0, \infty)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  gilt  $H(x_n) \rightarrow 1$ , für Folgen  $(x_n)$  in  $(-\infty, 0)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  gilt  $H(x_n) \rightarrow 0$ .

Man kann daher 1 als **rechtsseitigen Grenzwert** und 0 als **linksseitigen Grenzwert** von  $H$  in Punkte 0 auffassen.

---

### Definition 2.3.9 (rechtsseitiger Grenzwert)

Gegeben sei ein nichtleeres, offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , mit **linkem** Endpunkt  $a \in \mathbb{R}$  und eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Eine Zahl  $\ell \in \mathbb{R}$  heißt **rechtsseitiger Grenzwert** der Funktion  $f$  im Punkte  $a$ , falls für **jede** Folge  $(x_n)_n$  in  $I$  aus  $x_n \rightarrow a$  stets  $f(x_n) \rightarrow \ell$  folgt.

### Bezeichnung und Bemerkung 2.3.10

1. Man schreibt

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+) := \ell$$

oder  $f(x) \rightarrow \ell$  für  $x \downarrow a$ .

2. Der rechtsseitige Grenzwert ist ein Spezialfall des Grenzwertbegriffes 2.3.12. Man kann also auch  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  schreiben.
3. Analog definiert man für ein nichtleeres, offenes Intervall  $I$  mit rechtem Endpunkt  $b \in \mathbb{R}$  den **linksseitigen Grenzwert**

$$\lim_{x \uparrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b^-) := \ell$$

und schreibt  $f(x) \rightarrow \ell$  für  $x \uparrow a$ .

4. Es sei  $I$  ein offenes Intervall,  $a \in I$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir vereinbaren:

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) := \lim_{\substack{x \downarrow a \\ x \in (a, \infty)}} f(x), \quad \lim_{x \uparrow a} f(x) := \lim_{\substack{x \uparrow a \\ x \in (-\infty, a)}} f(x).$$

5. Für innere Punkte  $a \in I$  gilt also:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \downarrow a} f(x) = \ell \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow a} f(x) = \ell.$$

---

### 2.3.2 Uneigentliche Grenzwerte

**Beispiele 2.3.11** Wir betrachten die auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  definierte Inversion  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

1. Für die Inversion  $x \mapsto \frac{1}{x}$  existiert der Grenzwert im Punkte 0 nicht.

2. Für Folgen  $(x_n)$  in  $(0, \infty)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  gilt  $\frac{1}{x_n} \rightarrow \infty$ .
3. Für Folgen  $(x_n) \subseteq (-\infty, 0)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  gilt  $\frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty$ .
4. Strebt  $x$  gegen  $-\infty$  oder  $\infty$  so strebt  $\frac{1}{x}$  gegen 0.

D.h. für jede Folge  $(x_n)_n$  mit  $x_n \rightarrow \infty$  oder  $x_n \rightarrow -\infty$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ .

Wir wollen also noch Grenzwerte für  $x \rightarrow \pm\infty$  einführen und den Fall  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  betrachten.

Wir geben eine Definition des Grenzwertes auf **offenen Intervallen**, die diese Fälle und die vorangehenden umfaßt:

### Definition 2.3.12 (Grenzwert einer Funktion)

Gegeben seien:

ein nichtleeres, offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  und ein  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , so daß es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $I \setminus \{a\}$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert,

eine Funktion  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  und ein  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Die Funktion  $f$  strebt gegen  $\ell$  für  $x \rightarrow a$ , falls für jede Folge  $(x_n)_n$  in  $I \setminus \{a\}$  aus  $x_n \rightarrow a$  stets  $f(x_n) \rightarrow \ell$  folgt.

**Bezeichnung.** Wir schreiben für obige Definition:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  oder  $f(x) \rightarrow \ell$  für  $x \rightarrow a$ .

**Bemerkung.** Diese Definition umfaßt die folgenden fünf Fälle

1.  $a = -\infty$  und  $I = (-\infty, b)$ : Wir schreiben  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) := \ell$
2.  $a = \infty$  und  $I = (b, \infty)$ : Wir schreiben  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) := \ell$ .
3.  $a \in \mathbb{R}$  und  $I = (a, b)$ : Wir schreiben  $\lim_{x \downarrow a} f(x) := \ell$  und nennen  $\ell$  den **rechtsseitigen Grenzwert**.
4.  $a \in \mathbb{R}$  und  $I = (b, a)$ : Wir schreiben  $\lim_{x \uparrow a} f(x) := \ell$  und nennen  $\ell$  den **linksseitigen Grenzwert**.

5.  $c < a < b$ ,  $I = (c, b)$  und  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ : Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) := \ell.$$

**Beispiele 2.3.13** 1. Für die Heaviside-Funktion ist  $H(0^+) = 1$  und  $H(0^-) = 0$ .

2. Für die auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  definierte Inversion gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &\rightarrow 0 && \text{für } x \rightarrow \pm\infty, \\ \frac{1}{x} &\rightarrow \infty && \text{für } x \downarrow 0, \\ \frac{1}{x} &\rightarrow -\infty && \text{für } x \uparrow 0. \end{aligned}$$

3. Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $x^n \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ .
4. Für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  gerade, gilt  $x^n \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow -\infty$ .
5. Für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  ungerade, gilt  $x^n \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow -\infty$ .
6.  $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty$  für  $x \downarrow 0$ .

### Feststellung 2.3.14 ( $K$ - $\delta$ Definition für $f(x) \rightarrow \infty$ )

Gegeben seien:

ein nichtleeres, offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , ein  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , so daß es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $I \setminus \{a\}$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert, und eine Funktion  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Also  $D_f = I \setminus \{a\}$ .

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Funktion  $f$  strebt gegen  $\infty$  für  $x \rightarrow a$ .
2. **Fall**  $a \in \mathbb{R}$ :  
 $\forall K > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$ .
- Fall**  $a = \infty$ :  
 $\forall K > 0 \exists L > 0 \forall x \in D_f : x > L \Rightarrow f(x) > K$ .

**Fall  $a = -\infty$ :**

$$\forall K > 0 \exists L > 0 \forall x \in D_f : x < -L \Rightarrow f(x) > K.$$

---

**Beweis.** 1. $\Rightarrow$ 2. Wir führen einen Widerspruchsbeweis.

**Annahme:** Es gilt  $f(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow a$  und 2.) gelte nicht.

**Fall  $a \in \mathbb{R}$ :** Gilt 2.) nicht, so gibt es ein  $K_0$ , so daß zu  $\delta_n = \frac{1}{n}$  ein  $x_n \in D_f$  existiert mit  $|x_n - a| < \delta_n$  und  $f(x_n) \leq K_0$ .

Die Folge  $(x_n)_n$  konvergiert gegen  $a$  und die Folge  $(f(x_n))_n$  ist beschränkt.

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .

**Fall  $a = \infty$ :** Gilt 2.) nicht, so gibt es ein  $K_0$ , so daß zu  $L_n = n$  ein  $x_n \in D_f$  existiert mit  $x_n \geq L_n$  und  $f(x_n) \leq K_0$ .

Die Folge  $x_n \rightarrow \infty$  und die Folge  $(f(x_n))_n$  ist beschränkt.

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .

**Fall  $a = -\infty$ :** der Widerspruch folgt analog.

---

2. $\Rightarrow$ 1. Es sei  $(x_n)_n$  eine Folge in  $D_f$  mit  $x_n \rightarrow a$ .

**Fall  $a \in \mathbb{R}$ :** zu  $K > 0$  wähle ein  $\delta > 0$  gemäß 2.). Es gibt ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - a| < \delta$  für alle  $n \geq n_0$ . Für diese  $n$  folgt dann  $f(x_n) > K$ . Also gilt  $f(x_n) \rightarrow \infty$ .

**Fall  $a = \infty$ :** zu  $K > 0$  wähle ein  $L > 0$  gemäß 2.). Es gibt ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_n > L$  für alle  $n \geq n_0$ . Für diese  $n$  folgt dann  $f(x_n) > K$ . Also gilt  $f(x_n) \rightarrow \infty$ .

**Fall  $a = -\infty$ :** Analog folgt  $f(x_n) \rightarrow -\infty$ .

---

Die Feststellungen 2.1.25 gelten sinngemäß für die obigen Situationen.

### Feststellung 2.3.15 (Uneigentliche Grenzwerte)

Gegeben seien:

ein nichtleeres, offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , ein  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , so daß es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $I \setminus \{a\}$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert, und Funktionen  $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Grenzwerten  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_f \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_g \in \overline{\mathbb{R}}$ .

1. Wenn  $\ell_f \pm \ell_g$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  definiert ist, dann gilt

$$(f \pm g)(x) \rightarrow \ell_f \pm \ell_g$$

2. Wenn  $\ell_f \cdot \ell_g$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  definiert ist, dann gilt  $(f \cdot g)(x) \rightarrow \ell_f \cdot \ell_g$

3. Wenn  $\frac{\ell_f}{\ell_g}$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  definiert ist, dann gilt  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \rightarrow \frac{\ell_f}{\ell_g}$ .

### 2.3.3 Cauchy Kriterium

Aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen erhält man das entsprechende Kriterium für Grenzwerte von Funktionen:

#### Satz 2.3.16 (Cauchysches Konvergenzkriterium)

Gegeben sei ein nichtleeres, offenes Intervall  $I$  mit rechtem Endpunkt  $a \in \mathbb{R}$  und eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Es existiert Grenzwert  $f(a^-) = \lim_{x \uparrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ .

2. Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $x, y \in (a - \delta, a) \cap I$  stets  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  gilt.

In Quantoren:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in (a - \delta, a) \cap I : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

#### Bemerkung.

1. Ein entsprechende Kriterien gilt für Grenzwerte in einem inneren Punkt  $a \in I$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I \setminus \{a\} :$$

$$|x - a| < \delta \text{ und } |y - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

2. Im Fall  $x \rightarrow \infty$  lautet das Cauchy-Kriterium:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L > 0 \forall x, y > L : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

---

**Beweis.**

**1  $\Rightarrow$  2:** Es sei  $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \ell$ . Nach Satz 2.3.5 gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß aus  $x \in I \setminus \{a\}$ ,  $|x - a| < \delta$  stets  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  folgt. Also gilt für  $x, y \in I \setminus \{a\}$  mit  $|x - a| < \delta$ ,  $|y - a| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| < |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < 2\varepsilon.$$

**2  $\Rightarrow$  1:** Aus 2.) folgt, daß für jede Folge  $(x_n)_n$  in  $I$  mit Grenzwert  $a$  die Folge  $(f(x_n))_n$  eine Cauchy-Folge ist und folglich konvergiert. Nach dem Reißverschlußprinzip 2.3.17 haben alle diese Folgen den gleichen Grenzwert. Also existiert  $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ .

### Bemerkung 2.3.17 (Reißverschlußprinzip)

Wenn  $x_n \rightarrow a$  und  $y_n \rightarrow a$ , dann konvergiert auch die Folge  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$  gegen  $a$ . Wenn  $(f(x_n))_n$  und  $(f(y_n))_n$  konvergieren, so konvergiert auch die Folge

$$f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \dots$$

Somit haben die Folgen  $(f(x_n))_n$  und  $(f(y_n))_n$  den gleichen Grenzwert.

**Satz 2.3.18** Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein nichtleeres, offenes Intervall mit rechtem Endpunkt  $b$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend und beschränkt. Dann existiert  $f(b^-) = \lim_{x \uparrow b} f(x)$  in  $\mathbb{R}$ .

**Beweis. Annahme:** die Cauchy-Bedingung ist nicht erfüllt.

Dann gibt es ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so daß es zu jedem  $\delta > 0$  zwei Punkte  $x, y \in I$  gibt mit  $x, y \in (b - \delta, b)$  und  $|f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$ .

Zu den Werten  $\delta_n = \frac{1}{n}$  bilde man induktiv zwei Folgen  $(x_n)_n, (y_n)_n$ , so daß  $x_n < y_n < x_{n+1} < y_{n+1}$  und

$$0 < \varepsilon_0 \leq f(y_n - f(x_n)) \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Dann folgt  $f(y_{n+1}) - f(y_1)$

$$= \sum_{k=1}^n (f(y_{k+1}) - f(x_{k+1}) + f(x_{k+1}) - f(y_k)) \geq n\varepsilon_0.$$

Die Folge  $(f(y_n))_n$  ist also unbeschränkt. Widerspruch.

**Korollar 2.3.19** Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monoton.

1. Dann existieren die einseitigen Grenzwerte  $f(c^-), f(c^+) \in \mathbb{R}$  für alle  $c \in I$ .
2. Wenn  $I = (a, b)$ ,  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ , dann existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow b} f(x) \quad \text{in } \overline{\mathbb{R}}.$$

**Bemerkung** Wenn  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend ist, so gilt:

$$f \text{ nach oben unbeschränkt} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \uparrow b} f(x) = \infty.$$

## 2.3.4 Komposition von Grenzwerten

**Lemma 2.3.20 (Komposition von Grenzwerten)**

Gegeben seien:

- (i) nichtleere, offene Intervalle  $I, J \subseteq \mathbb{R}$ ,
- (ii) ein  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , so daß es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $I \setminus \{a\}$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert,
- (iii) eine Funktion  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow J \setminus \{\ell_f\}$  mit Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_f \in \overline{\mathbb{R}}$
- (iv) eine Funktion  $g : J \setminus \{\ell_f\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Grenzwert  $\lim_{y \rightarrow \ell_f} g(y) = \ell_g \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell_g$ .

Der Beweis des Lemmas ist offensichtlich.

Wenn  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow J$ , so muß man eine stärkere Forderung an die Funktion  $g$  stellen: (Man zeichne ein Bild!)

**Lemma 2.3.21 ( $g(\lim f) = \lim(g \circ f)$ )**

Gegeben seien:

- (i) nichtleere, offene Intervalle  $I, J \subseteq \mathbb{R}$ ,
- (ii) ein  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , so daß es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $I \setminus \{a\}$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert,



(iii) eine Funktion  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow J$  mit Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_f \in \mathbb{R}$

(iv) eine Funktion  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  mit Grenzwert  $\lim_{\substack{y \rightarrow \ell_f \\ y \neq \ell_f}} g(y) = g(\ell_f)$ .

Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(\ell_f)$ .

**Beweis.** Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $y \in J \setminus \{\ell_f\}$  gilt:

$$|y - \ell_f| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(y) - g(\ell_f)| < \varepsilon.$$

Für  $y = \ell_f$  gilt offensichtlich  $|g(y) - g(\ell_f)| < \varepsilon$ .

Also gilt für jede Folge  $(y_n)_n$  in  $J$ :

$$y_n \rightarrow \ell_f \quad \Rightarrow \quad g(y_n) \rightarrow g(\ell_f)$$

Dann gilt aber für jede Folge  $(x_n)_n$  in  $I \setminus \{a\}$ :

$$x_n \rightarrow a \quad \Rightarrow \quad g(f(x_n)) \rightarrow g(\ell_f).$$

D.h.

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(\ell_f).$$

**Bemerkung.** Eine Funktion, die die Bedingung (iv) des Lemmas erfüllt, wird **stetig** im Punkte  $\ell_f$  genannt.

---

## 2.3.5 Stetige Funktionen

Funktionen deren Grenzwerte in einem Punkt stets mit den Funktionswerten in diesem Punkt übereinstimmen, sind in der Analysis von besonderer Bedeutung.

**Definition 2.3.22** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall.

1. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stetig in einem Punkt**  $a \in I$ , falls  $f(a)$  der Limes von  $f$  in  $a$  bezüglich  $I$  ist.
2. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stetig (auf  $I$ )**, falls  $f$  in jedem Punkt von  $I$  stetig ist.

---

### Bemerkung.

1. Für ein offenes Intervall  $I$  heißt  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

**rechtsseitig stetig** in  $a \in I$ , falls  $f(a^+) = f(a)$  gilt.

**linksseitig stetig** in  $a \in I$ , falls  $f(a^-) = f(a)$  gilt.

2. Die Stetigkeit einer Funktion kann von der Wahl des Definitionsbereichs abhängen. So gilt für die Einschränkungen Heaviside-Funktion

(a)  $H : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $H : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig.

(b)  $H : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht stetig.

(c)  $H : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  ist in 0 rechtsseitig stetig.

3. Für Intervalle  $J \subseteq I$  nennt man eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  **stetig auf  $J$** , wenn ihre Einschränkung  $f|_J : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist. In diesem Sinne ist die Heaviside-Funktion  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $J = [0, 1]$ .

---

**Feststellung 2.3.23** Gegeben seien ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , ein Punkt  $a \in I$  und eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. Die Funktion  $f$  ist stetig im Punkt  $a$ .
2. Für jede Folge  $(x_n)$  in  $I$  gilt: Aus  $x_n \rightarrow a$  folgt  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .
3. Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $x \in I$  aus  $|x - a| < \delta$  stets  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  folgt.

In Quantoren:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

**Bemerkung.** Damit kann für in  $a$  stetige Funktionen der Funktionswert  $f(a)$  mit Hilfe von Werten  $f(x)$ , mit  $x$  nahe an  $a$ , angenähert werden. Die  $\varepsilon$ - $\delta$  Beziehung gibt Auskunft über die Güte dieser Approximation.

---

### Feststellung 2.3.24 (Rechenregeln: stetige Funktionen)

Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a \in I$  stetig und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch die folgenden Funktionen in  $a$  stetig:

$$\max(f, g), \quad f + g, \quad \lambda f, \quad f \cdot g$$

und, wenn  $g(a) \neq 0$ ,

$$\frac{f}{g}.$$

**Bemerkung.** Der Quotient  $\frac{f}{g}$  ist stetig auf der Menge  $\{x \in I \mid g(x) \neq 0\}$ .

### Satz 2.3.25 (Komposition stetiger Funktionen)

Es seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle und  $f, g$  Funktionen mit:

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Wenn  $f$  stetig in  $a \in I$  und  $g$  stetig in  $f(a) \in J$ , dann ist  $g \circ f$  stetig in  $a$ .

### Beispiele 2.3.26

1. Für  $k \in \mathbb{N}$  ist  $p_k : x \mapsto x^k$  stetig auf  $\mathbb{R}$ .
2. Für  $q \in \mathbb{N}$  ist nach Feststellung 2.2.18  $\sqrt[q]{\phantom{x}} : x \mapsto \sqrt[q]{x}$  stetig auf  $[0, \infty)$ .
3. Für  $k, q \in \mathbb{N}$  ist  $x \mapsto x^{\frac{k}{q}}$  stetig auf  $[0, \infty)$ .

## 2.3.6 Allgemeine Grenzwertdefinition

Eng verwandt mit dem Begriff der Stetigkeit ist der Grenzwertbegriff für Funktionen auf allgemeinen Definitionsbereichen:

### Definition 2.3.27 (Grenzwert einer Funktion)

Gegeben seien:

eine nichtleere Menge  $D \subseteq \mathbb{R}$  und ein  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , so daß es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $D$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert,

eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und ein  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Die Funktion  $f$  konvergiert gegen  $\ell$  für  $x \rightarrow a$ , falls für jede Folge  $(x_n)_n$  in  $D$  aus  $x_n \rightarrow a$  stets  $f(x_n) \rightarrow \ell$  folgt.

**Bezeichnung.** Wir schreiben für obige Definition:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \text{ oder } f(x) \rightarrow \ell \text{ für } x \rightarrow a.$$

**Bemerkung 2.3.28** 1. Ist  $a \in D$  so existiert der Grenzwert für  $x \rightarrow a$  genau dann, wenn  $f$  stetig im Punkt  $a$  ist. Dann ist  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

2. Diese Definition des allgemeinen Grenzwertes unterscheidet sich von dem traditionellen Grenzwertbegriff von Weierstraß. Dieser lautet:

Gegeben seien:

eine nichtleere Menge  $D \subseteq \mathbb{R}$  und ein  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , so daß es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $D \setminus \{a\}$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert,

eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und ein  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Die Funktion  $f$  konvergiert gegen  $\ell$  für  $x \rightarrow a$ , falls für jede Folge  $(x_n)_n$  in  $D \setminus \{a\}$  aus  $x_n \rightarrow a$  stets  $f(x_n) \rightarrow \ell$  folgt.

Ist  $a \in D$ , so kann bei diesem Grenzwertbegriff sehrwohl der Grenzwert für  $x \rightarrow a$  existieren und  $f$  dennoch unstetig in  $a$  sein!

3. Für den traditionellen Grenzwertbegriff von Weierstraß vergleiche man das Schulbuch, [KABALLO, Band II] oder [KÖNIGSBERGER], für den moderneren, flexibleren Begriff siehe [DIEUDONNÉ], [FORSTER] oder [BRÖCKER].

4. Man kann den traditionellen Grenzwertbegriff durch Einschränkung der Funktion auf  $D \setminus \{a\}$  ausdrücken:

**Bezeichnung.** Wenn es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $D \setminus \{a\}$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert und der Grenzwert der Einschränkung  $f|_{D \setminus \{a\}}$  im Punkte  $a$  existiert, dann bezeichnet man diesen Grenzwert mit:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} f|_{D \setminus \{a\}}(x)$$

5. Der Grenzwertbegriff ist so gewählt, daß der äußerst praktische Satz über die Komposition von Grenzwerten sich leicht formulieren läßt.:

### Satz 2.3.29 (Komposition von Grenzwerten)

Gegeben seien:

nichtleere Teilmengen  $D, E \subseteq \mathbb{R}$ , und  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , so daß es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $D$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert,

eine Funktion  $f : D \rightarrow E$  mit Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_f \in \overline{\mathbb{R}}$  und eine Funktion  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit Grenzwert  $\lim_{y \rightarrow \ell_f} g(y) = \ell_g \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell_g$ .

Der Beweis des Satzes ist offensichtlich (vgl. Lemma 2.3.21)

---

## 2.3.7 Sprünge und Oszillationen

Wichtige Typen von Unstetigkeiten sind **Sprünge** und **Oszillationen**.

### Beispiele 2.3.30

1. Die **Heaviside-Funktion**  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat eine Sprungstelle bei 0, da  $H(0^-) \neq H(0^+)$ .
2. Im Falle monotoner Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  besteht die Menge der Unstetigkeitsstellen

$$\{x \in I \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$$

nur aus Sprungstellen.

3. Für die **Gauß-Klammer-Funktion**  $G : x \mapsto [x]$  ist die Menge der Unstetigkeitsstellen gleich  $\mathbb{Z}$ .
- 

4. Auf  $[-1, 1)$  definieren wir eine Funktion

$$Z : x \mapsto 1 - 2|x|$$

und setzen sie zu einer auf ganz  $\mathbb{R}$  definierten 2-periodischen **Zackenfunktion** fort:

$$Z(x) := Z(x - 2k) \text{ für } x \in [2k - 1, 2k + 1), k \in \mathbb{Z},$$

D. h. es gilt  $Z(x) = Z(x + 2)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Da  $Z(-1) = Z(1^-)$  gilt, ist  $Z$  auf  $\mathbb{R}$  stetig.

Da  $Z(2k) = 1$  und  $Z(2k + 1) = -1$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gilt, existieren die Grenzwerte von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  nicht.

Später werden wir statt der Zackenfunktion die  $2\pi$ -periodische Funktion  $\cos(x)$  betrachten.

---

5. Mit der Zackenfunktion  $Z$  können wir die **Wackelfunktion**  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bilden:

$$W(x) := \begin{cases} Z(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

$W$  ist stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Die Wackelfunktion **oszilliert** links und rechts von 0.

Die Grenzwerte von  $W(x)$  für  $x \uparrow 0$  und  $x \downarrow$  existieren nicht.

Auch durch Abänderung von  $W(0)$  kann  $W$  nicht zu einer in 0 (auch nur einseitig) stetigen Funktion gemacht werden.

---

6. Durch Dämpfung der Oszillation von  $W$ , z.B. durch Multiplikation mit  $x$ , entsteht eine stetige Funktion:

$$x \mapsto xW(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Da  $|W(x)| \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist, folgt aus  $x_n \rightarrow 0$  stets  $x_n W(x_n) \rightarrow 0$ .

7. Später werden wir statt der Zackenfunktion die periodischen Funktionen  $\cos(x)$  oder  $\sin(x)$  betrachten.

Die damit gebildeten Funktionen  $\cos(\frac{1}{x})$  und  $\sin(\frac{1}{x})$  verhalten sich wie die Wackelfunktion und sind ebenfalls nicht stetig in 0 fortsetzbar.

Die Funktionen  $x \cos(\frac{1}{x})$  und  $x \sin(\frac{1}{x})$  sind dagegen stetig in 0.

---

Es gibt auch Funktionen mit sehr vielen Unstetigkeitsstellen:

### Beispiele 2.3.31 (Dirichlet-Funktion)

1. Man definiert die Dirichlet-Funktion auf  $\mathbb{R}$  durch

$$D(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. Die Dirichlet-Funktion besitzt in keinem  $a$  aus  $\mathbb{R}$  einen Grenzwert. Insbesondere ist  $D$  in jedem Punkt unstetig.

DIRICHLET, Peter, Gustav, Lejeune, 1805-1859

---

#### Beweis.

1. Zu  $x \in \mathbb{Q}$  so bilde man die Folgen: (vgl. 2.2.4)

$$r_n := x + \frac{1}{n} \rightarrow x \quad \text{und} \quad x_n := x + \frac{\sqrt{2}}{n} \rightarrow x.$$

Es ist  $D(r_n) = 1$  und  $D(x_n) = 0$ .

Also hat die Funktion  $D$  in keinem **rationalen** Punkt einen Grenzwert.

2. Wenn  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , so ist auch  $x_n = (x + \frac{1}{n}) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Die Folge irrationaler Zahlen  $(x_n)_n$  konvergiert gegen  $x$ .

Nach der Bemerkung 2.3.32 gibt es eine Folge  $(r_n)_n$  in  $\mathbb{Q}$ , die gegen  $x$  konvergiert.

Also hat die Funktion  $D$  in keinem **irrationalen** Punkt einen Grenzwert.

---

### Satz 2.3.32 (Rationale Approximation)

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $x \in I$ . Dann gibt es eine Folge  $(r_n)_n$  rationaler Zahlen in  $I$  die von unten gegen  $x$  konvergiert:

$$r_n \in I \cap \mathbb{Q}, \quad r_n < x \quad \text{und} \quad r_n \rightarrow x.$$

---

**Beweis (Rationale Approximation).** Fall  $x > 0$ : Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$ , existiert ein  $p_n \in \mathbb{N}_0$ , so daß

$$\begin{aligned} p_n &< nx \leq p_n + 1 \\ \Rightarrow \quad x - \frac{1}{n} &\leq \frac{p_n}{n} < x. \end{aligned}$$

Die Folge  $r_n := (\frac{p_n}{n})_{n=1}^\infty$  konvergiert gegen  $x$ .

Zu  $c < x$ ,  $c \in I$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$c < r_n < x \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Die Folge  $(r_n)_{n=n_0}^\infty$  leistet das Gewünschte.

Analog gibt es zu  $x \geq 0$  eine Folge in  $I \cap \mathbb{Q}$ , die von oben gegen  $x$  konvergiert. Im Fall  $x \leq 0$  betrachte man  $-x$ .

---

### Beispiele 2.3.33 (Stammbrüche)

Auf  $I = (0, 1)$  definieren wir den Stammbruch:

$$B(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad \text{ggT}(p, q) = 1, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Es gilt  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} B(x) = 0$  für alle  $a \in I$ .

Somit ist  $B$  in den rationalen Punkten unstetig und in den irrationalen stetig.

---

**Beweis.** Es sei  $\varepsilon > 0$ . Es gibt nur endlich viele  $q \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{q} \geq \varepsilon$ . Zu diesen  $q$  gibt es nur jeweils endlich viele  $p \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{p}{q} \in I$ . Also gibt es nur endlich viele Punkte  $\{r_1, \dots, r_n\} \subset I$ , in denen  $B(r_k) \geq \varepsilon$  ist.

Es ist

$$\delta := \min\{|r_k - a| \mid k = 1, \dots, n\} > 0.$$

Für  $x \in I \setminus \{a\}$  folgt aus  $|x - a| < \delta$  stets  $B(x) < \varepsilon$ .

---

## 2.4 Konvexe Funktionen

### 2.4.1 Lipschitz-stetige Funktionen

Wir wollen eine Klasse von stetigen Funktionen untersuchen, für die man die  $\varepsilon$ - $\delta$ -Relation sehr gut im Griff hat:

#### Definition 2.4.1 (Lipschitz-stetige Funktionen)

Es sei  $I$  ein Intervall. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Lipschitz-stetig**, wenn es eine Konstante  $L \geq 0$ ,  $L \in \mathbb{R}$ , so gibt, daß

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für } x, y \in I.$$

$L$  heißt eine **Lipschitz-Konstante** von  $f$ .

LIPSCHITZ, Rudolf Otto Sigismund, 1832-1903.

---

#### Beispiele 2.4.2 (Lipschitz-stetige Funktionen)

1. Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $x \mapsto x^n$  Lipschitz-stetig auf jedem Intervall  $[-a, a]$ ,  $a > 0$ :

$$|x^n - y^n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \right| |x - y| \leq L|x - y|$$

mit  $L := na^{n-1}$ .

2. Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  Lipschitz-stetig auf jedem Intervall  $[a, \infty)$ ,  $a > 0$ :

$$\left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \right| = \frac{|x - y|}{\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{x}^k \sqrt[n]{y}^{n-1-k}} \leq L|x - y|$$

mit  $L := \frac{1}{na^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}a^{-\frac{n-1}{n}}$ .

3. Die Funktion  $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$  werden wir später mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung untersuchen (vgl. auch Korollar 2.4.25)
- 

**Bemerkung 2.4.3** Wenn  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig ist, so bildet  $f$  Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  ab.

**Beweis.** Klar

**Bemerkung.** Den Begriff **Lipschitz-stetig** kann man genauso für Funktionen  $f : I \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  erklären. Dies gibt uns eine Methode, Funktionen von den rationalen Zahlen auf die reellen Zahlen fortzusetzen:

#### Satz 2.4.4 (Fortsetzung Lipschitz-stetiger Functn.)

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Lipschitz-stetige Funktion  $f : I \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  hat genau eine stetige Fortsetzung  $\tilde{f} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Diese ist ebenfalls Lipschitz-stetig mit der gleichen Lipschitz-Konstante.

**Bezeichnung.**  $\bar{I}$  bezeichnet das  $I$  entsprechende abgeschlossene Intervall.

---

**Beweis.** Nach Bemerkung 2.3.32 gibt es zu  $x \in \bar{I}$  eine Folge  $(r_n)_n$  in  $I \cap \mathbb{Q}$ , die gegen  $x$  konvergiert. Dann ist  $(f(r_n))_n$  eine Cauchy-Folge und es existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \ell.$$

Nach dem Reißverschlußprinzip 2.3.17 gilt für jede Folge  $(s_n)_n$  in  $I \cap \mathbb{Q}$ :

$$s_n \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad f(s_n) \rightarrow \ell.$$

Offensichtlich ist  $f(x) = \ell$  für  $x \in I \cap \mathbb{Q}$ .

Wir definieren die Fortsetzung  $\tilde{f}$  durch  $\tilde{f}(x) := \ell$ .

Zu  $x, y \in \bar{I}$  wähle Folgen  $(r_n)_n, (s_n)_n$  in  $I \cap \mathbb{Q}$  mit  $r_n \rightarrow x$  und  $s_n \rightarrow y$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |f(r_n) - f(s_n)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} L|r_n - s_n| = L|x - y|. \end{aligned}$$

---

#### Satz 2.4.5 (Vererbung der Monotonie)

Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $I$ .

Wenn die Einschränkung  $f|_{I \cap \mathbb{Q}}$  (streng) monoton wachsend ist, so ist  $f$  (streng) monoton wachsend.

---

**Beweis.** Wir zeigen den Fall strenger Monotonie:

Es seien  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $x < y$ . Nach 2.3.32 gibt es  $s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$  mit  $x < s_1 < s_2 < y$  und Folgen  $(r_n)_n, (t_n)_n$  in  $\mathbb{Q}$ , so daß von unten  $r_n \rightarrow x$  und von oben  $t_n \rightarrow y$ . Dann gilt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) \leq f(s_1) < f(s_2) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(y).$$

---

## 2.4.2 Konvexe Funktionen

**Bemerkung.** In elementaren Büchern zum „Calculus“ findet man manchmal die Veranschaulichung der stetigen Funktionen als Funktionen, deren Graph man mit einem Stift ohne abzusetzen zeichnen kann.

Etwas besser entsprechen die stückweise konvexen oder konkaven Funktionen, die an den Anschlußstellen stetig zusammenpassen, dieser Vorstellung.

---

### Bezeichnung und Bemerkung 2.4.6 (Sekante)

1. Es seien  $I$  ein nichtausgeartetes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $a, b \in I, a \neq b$  nennt man die Gerade durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$  die **Sekante** durch diese Punkte auf dem Graphen von  $f$ .
2. Die Gleichung dieser Sekante lautet:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \text{für } x \in I.$$

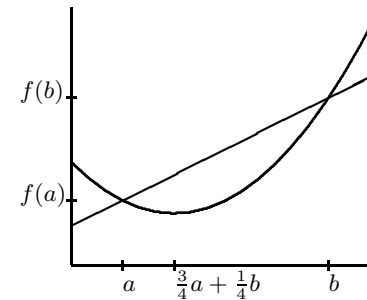
3. Der Differenzenquotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

heißt die **Steigung** der Sekante.

---

### Bemerkung.



Die Verbindungsstrecke der Punkte  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$  nennen wir die **Sehne** über dem Intervall  $[a, b]$ .

Die Sehne ist das Bild des Einheitsintervalls  $[0, 1]$  unter der affinen Abbildung

$$t \mapsto ((1 - t)a + tb, (1 - t)f(a) + t(f(b))) \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

---

Anschaulich heißt eine Funktion **konvex**, wenn ihr Graph immer unterhalb jeder Sehne verläuft.

### Definition 2.4.7 (konvexe Funktion)

1. Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein nichtausgeartetes Intervall. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **konvex**, wenn für alle offenen Teilintervalle  $(a, b) \subset I$  stets gilt:

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \text{für } x \in (a, b).$$

2.  $f$  heißt **streng konvex**, wenn

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \text{für } x \in (a, b).$$

3.  $f$  heißt **konkav** bzw. **streng konkav**, wenn  $-f$  konvex bzw. streng konvex ist.

---

Durch algebraische Umformung der Definition 2.4.7 erhält man:

**Bemerkung 2.4.8** 1. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist (streng) konvex, wenn für alle offenen Teilintervalle  $(a, b) \subset I$  und  $x \in (a, b)$  stets gilt:

$$f(x) \begin{array}{l} \leq \\ (<) \end{array} \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

2. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist (streng) konvex, wenn für alle offenen Teilintervalle  $(a, b) \subset I$  und  $t \in (0, 1)$  stets gilt:

$$f((1-t)a + tb) \begin{array}{l} \leq \\ (<) \end{array} (1-t)f(a) + tf(b).$$


---

**Bemerkung 2.4.9 (Komposition konvexer Funkt.)**

Gegeben seien Intervalle  $I, J$  und Funktionen  $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

1. Wenn  $f$  (streng) konvex und  $g$  konvex und (streng) monoton wachsend ist, dann ist  $g \circ f$  (streng) konvex.
  2. Wenn  $f$  (streng) konkav und  $g$  konvex und (streng) monoton fallend ist, dann ist  $g \circ f$  (streng) konvex.
- 

**Beweis.** Es seien  $a, b \in I$  und  $t \in (0, 1)$ :

1. Da  $f$  (streng) konvex und  $g$  konvex und (streng) monoton wachsend ist:

$$\begin{aligned} g(f((1-t)a + tb)) &\begin{array}{l} \leq \\ (<) \end{array} g((1-t)f(a) + tf(b)) \\ &\leq (1-t)g(f(a)) + tg(f(b)) \end{aligned}$$

2. Es ist  $f$  (streng) konkav:

$$f((1-t)a + tb) \begin{array}{l} \geq \\ (>) \end{array} (1-t)f(a) + tf(b).$$

Da  $g$  streng monoton fallend und konvex ist, folgt

$$\begin{aligned} g(f((1-t)a + tb)) &\begin{array}{l} \leq \\ (<) \end{array} g((1-t)f(a) + tf(b)) \\ &\leq (1-t)g(f(a)) + tg(f(b)). \end{aligned}$$


---

**Bemerkung 2.4.10 (Umkehrf. einer konvexen Funkt.)**

Es seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  Intervalle,  $f : I \rightarrow J$  bijektiv mit Umkehrfunktion  $g : J \rightarrow I$ . Dann gilt:

1.  $f$  ist genau dann streng monoton wachsend und **(streng) konvex**, wenn  $g$  streng monoton wachsend und **(streng) konkav** ist.
  2.  $f$  ist genau dann streng monoton fallend und **(streng) konvex**, wenn  $g$  streng monoton fallend und **(streng) konvex** ist.
  3.  $f$  ist genau dann streng monoton fallend und **(streng) konkav**, wenn  $g$  streng monoton fallend und **(streng) konkav** ist.
- 

**Beweis.** Die Monotonieeigenschaften der Umkehrfunktion wurden bereits in Satz 1.4.8 gezeigt. Wir zeigen jeweils den Fall strenger Konvexität bzw. strenger Konkavität.

Es seien  $a, b \in I$ ,  $\alpha := f(a)$ ,  $\beta := f(b)$  und  $t \in (0, 1)$ .

1. Aus  $f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$  folgt

$$\begin{aligned} (1-t)g(\alpha) + tg(\beta) &= (1-t)a + tb = g(f((1-t)a + tb)) \\ &< g((1-t)f(a) + tf(b)) = g((1-t)\alpha + t\beta). \end{aligned}$$

Also ist  $g$  konkav.

2. Aus  $f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$  folgt

$$\begin{aligned} (1-t)g(\alpha) + tg(\beta) &= (1-t)a + tb = g(f((1-t)a + tb)) \\ &> g((1-t)f(a) + tf(b)) = g((1-t)\alpha + t\beta). \end{aligned}$$

Also ist  $g$  konvex.

3. Behauptung (3.) folgt analog zu (2.).

---

**Lemma 2.4.11 (Steigung konvexer Funktionen)** Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein nichtausgearbeitetes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Funktion  $f$  ist (streng) konvex.
2. Für jedes  $a \in I$  ist die Steigung

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{für } x \in I, a < x,$$

(streng) monoton wachsend.

3. Für jedes  $a \in I$  ist die Steigung

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{für } x \in I, x < a,$$

(streng) monoton wachsend.

4. Für jedes  $a \in I$  und für  $x, y \in I, x < a < y$  ist

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

**Korollar 2.4.12** Wenn  $f$  (streng) konvex ist, so ist die Steigung

$$(x, y) \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{für } x, y \in I, x \neq y,$$

in beiden Variablen  $(x, y)$  (streng) monoton wachsend.

---

**Beweis.**

$$\boxed{a < x < y :} \quad f(x) \leq f(a) + \frac{f(y) - f(a)}{y - a}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

$$\boxed{x < y < a :} \quad \text{Analog.}$$

$\boxed{x < a < y :}$  Da  $\frac{y-a}{y-x} + \frac{a-x}{y-x} = 1$  gilt:

$$f(a) \leq f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(a - x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-a}{y-x}f(a) + \frac{a-x}{y-x}f(a) \leq \frac{y-a}{y-x}f(x) + \frac{a-x}{y-x}f(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-a}{y-x}(f(a) - f(x)) \leq \frac{a-x}{y-x}(f(y) - f(a))$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}.$$


---

**Beispiele 2.4.13 (Konvexität der Potenzfkt.)**

1. Für  $n = 2, 3, \dots$  ist die Potenzfunktion

$$p_n : (0, \infty) \ni x \mapsto x^n$$

streng monoton wachsend und streng konvex:

2. Für  $n = 2, 3, \dots$  ist die Wurzelfunktion

$$p_{\frac{1}{n}} : (0, \infty) \ni x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$$

streng monoton wachsend und streng konkav.

3. Die Inversion  $p_{-1} : (0, \infty) \ni x \mapsto x^{-1}$  ist streng monoton fallend und streng konvex.

4. Für  $m, n \in \mathbb{N}$  ist die Potenzfunktion

$$p_{-\frac{m}{n}} : (0, \infty) \ni x \mapsto x^{-\frac{m}{n}}$$

streng monoton fallend und streng konvex.

---

**Beweis.**

1. Für  $0 < a < x < y$  gilt für die Steigungen:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k} < \sum_{k=0}^{n-1} y^k a^{n-1-k} = \frac{y^n - a^n}{y - a}$$



2. Nach Bemerkung 2.4.10 ist die Umkehrfunktion streng monoton wachsend und streng konkav.
3. Für  $0 < a < x < y$  gilt für die Steigungen:

$$\frac{x^{-1} - a^{-1}}{x - a} = -\frac{1}{ax} < -\frac{1}{ay} = \frac{y^{-1} - a^{-1}}{y - a}.$$

4. Es seien  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Da  $p_{\frac{1}{n}}$  streng monoton wachsend und konkav ist und  $p_{-1}$  streng monoton fallend und konvex ist, ist nach Bemerkung 2.4.9 (2.) die Komposition  $p_{-\frac{1}{n}}$  streng monoton fallend und streng konvex.

Da  $p_m$  streng monoton wachsend und streng konvex ist, ist nach Bemerkung 2.4.9 (1) die Komposition  $p_{-\frac{m}{n}}$  streng monoton fallend und streng konvex.

#### Feststellung 2.4.14 (Lipschitz-Stet. konvexer Fktn.)

Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Für jedes kompakte Teilintervall  $J = [a, b] \subset I$  ist die Einschränkung  $f|_J$  Lipschitz-stetig.

Wenn  $c, d \in I$  mit  $c < a < b < d$ , dann ist

$$L := \max\left\{\left|\frac{f(a) - f(c)}{a - c}\right|, \left|\frac{f(d) - f(b)}{d - b}\right|\right\} =$$

eine Lipschitz-Konstante für  $f|_J$ .

**Beweis.** Es seien  $c, d \in I$  mit  $c < a < b < d$ . Nach Korollar 2.4.12 gilt für  $a \leq x < y \leq b$

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(d) - f(b)}{d - b}$$

und somit

$$|f(y) - f(x)| \leq \max\left\{\left|\frac{f(a) - f(c)}{a - c}\right|, \left|\frac{f(d) - f(b)}{d - b}\right|\right\} |y - x|.$$

**Bemerkung.** Die Definition der Konvexität 2.4.7 und die Feststellung 2.4.14 gelten entsprechend für konvexe Funktionen  $f : I \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Korollar 2.4.15** Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Eine (streng) konvexe Funktion  $f : I \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  hat eine eindeutige stetige Fortsetzung  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\tilde{f}$  ist auch (streng) konvex.

**Beweis.** Für alle  $J = [a, b] \subset I$  mit rationalen Endpunkten  $a, b \in I \cap \mathbb{Q}$ ,  $a < b$ , ist die Einschränkung  $f|_{J \cap \mathbb{Q}}$  Lipschitz-stetig und hat nach Satz 2.4.4 eine eindeutige stetige Fortsetzung auf  $[a, b]$ .

Wenn zwei derartige Intervalle  $[a_1, b_1]$  und  $[a_2, b_2]$  einen nichtleeren Durchschnitt haben, so ist der Durchschnitt ein rationaler Punkt oder ein nichtausgeartetes Intervall mit rationalen Endpunkten.

In beiden Fällen stimmen die jeweiligen Fortsetzungen auf dem Durchschnitt überein.

Nach Bemerkung 2.3.32 gibt es zu  $x \in I$  rationale  $a, b \in I \cap \mathbb{Q}$  mit  $a < x < b$ .

Also hat  $f$  eine eindeutige stetige Fortsetzung  $\tilde{f}$  auf ganz  $I$ .

Nach Lemma 2.4.11 und Beispiel 2.4.5 ist  $\tilde{f}$  wieder (streng) konvex.

### 2.4.3 Reelle Potenzen

Wir zeigen, daß die Exponentialfunktion zur Basis  $a > 1$  mit rationalen Exponenten:

$$\mathbb{Q} \ni \frac{p}{q} \mapsto a^{\frac{p}{q}} \in \mathbb{R}$$

streng konvex ist. Nach Korollar 2.4.15 hat diese Funktion eine eindeutige stetige Fortsetzung auf  $\mathbb{R}$ .

Diese Fortsetzung heißt **Exponentialfunktion zur Basis  $a$** .

Hiermit definieren wir dann die Potenzfunktion für reelle Exponenten.

**Lemma 2.4.16** Es seien  $a > 1$ ,  $b > 1$  in  $\mathbb{R}$ .

1. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\frac{b^n - 1}{n} < \frac{b^{n+1} - 1}{n+1}.$$

2. Für alle  $r, s \in \mathbb{Q}$  folgt aus  $0 < r < s$ , daß

$$\frac{a^r - 1}{r} < \frac{a^s - 1}{s}.$$

3. Für alle  $r, s, t \in \mathbb{Q}$  folgt aus  $r < s < t$ , daß

$$\frac{a^s - a^r}{s - r} < \frac{a^t - a^r}{t - r}.$$

4. Die Funktion  $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r$  ist streng konvex.

**Beweis.**

1. Da  $b > 1$  ist  $nb^n > \sum_{k=0}^{n-1} b^k$  und folglich

$$(n+1) \sum_{k=0}^{n-1} b^k < n \sum_{k=0}^n b^k \Rightarrow \frac{b^n - 1}{n} < \frac{b^{n+1} - 1}{n+1}.$$

2. Es seien  $r = \frac{m}{q}$ ,  $s = \frac{n}{q}$  mit  $m, n, q \in \mathbb{N}$  und  $b := a^{\frac{1}{q}}$ . Es ist  $b > 1$ . Aus  $r < s$  folgt  $m < n$  und mit (1.)

$$\frac{a^r - 1}{r} = q \frac{b^m - 1}{m} < q \frac{b^n - 1}{n} = \frac{a^s - 1}{s}.$$

3. Für  $r, s, t \in \mathbb{Q}$  folgt aus  $r < s < t$  mit (2.)

$$\frac{a^s - a^r}{s - r} = a^r \frac{a^{s-r} - 1}{s - r} < a^r \frac{a^{t-r} - 1}{t - r} = \frac{a^t - a^r}{t - r}.$$

4. Aus (3.) und Lemma 2.4.11 (2.) folgt, daß die Funktion  $r \mapsto a^r$  streng konvex ist.

Es sei  $a > 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Nach Korollar 2.4.15 hat die streng konvexe Funktion  $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r$  eine eindeutige stetige Fortsetzung auf  $\mathbb{R}$ .

**Bezeichnung 2.4.17 (Exponentialfunktion)**

1. Für  $a > 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$  heißt die stetige Fortsetzung der Funktion  $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r$  **Exponentialfunktion zur Basis  $a$**  und wird mit

$$x \mapsto a^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

bezeichnet.

2. Für  $0 < a < 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$  setzt man  $a^x := \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ .

3. Die Exponentialfunktion zur Basis  $e$  wird mit  $\exp(x) := e^x$  bezeichnet und heißt die **Exponentialfunktion**.

**Feststellung 2.4.18 (Regeln: Exponentialfunktion)**

Es sei  $a > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

1. Es gilt die Funktionalgleichung

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Es ist  $a^0 = 1$ ,

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \text{und} \quad a^x > 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

3. Für  $a > 1$  ist die Exponentialfunktion zur Basis  $a$  streng monoton wachsend und streng konvex.

4. Für  $a > 1$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty.$$

**Beweis.**

1. Wähle Folgen  $(r_n)_n$  und  $(s_n)_n$  in  $\mathbb{Q}$  mit  $r_n \rightarrow x$  und  $s_n \rightarrow y$ . Da die Exponentialfunktion stetig ist, folgt:

$$a^x \cdot a^y = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^r \cdot a_n^s = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{r+s_n} = a^{x+y}$$

2. Da  $a^0 = 1$  folgt  $a^x \cdot a^{-x} = a^0 = 1$  und  $a^x = (a^{\frac{x}{2}})^2 \geq 0$ .

3. Da die Exponentialfunktion für rationale Exponenten streng monoton ist, folgt die strenge Monotonie der stetigen Fortsetzung wie in Beispiel 2.4.5. Analog folgt die strenge Konvexität.
4. Da  $a > 1$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ . Da die Exponentialfunktion monoton wachsend ist, folgt hieraus  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ .  
Es ist  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a^x} = 0$ .

Da  $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$  ist erhalten wir:

**Korollar 2.4.19** Für  $0 < a < 1$  ist die Exponentialfunktion  $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$  streng monoton fallend und streng konvex.

**Bemerkung.** Für  $a > 0$  und  $s = \frac{m}{n}, t = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  gilt bekanntlich

$$\begin{aligned} (a^s)^t &= \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mp}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{mp} = \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mp} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{st}. \end{aligned}$$

**Feststellung 2.4.20 (Potenzgesetz)**

Es sei  $a > 0, a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Beweis.** Wir wählen zunächst  $t \in \mathbb{Q}$  und zeigen  $(a^x)^t = a^{xt}$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

Dazu wähle man eine Folge  $(s_k)_k$  in  $\mathbb{Q}$  mit  $s_k \rightarrow x$ .

Da die Potenzfunktion  $(0, \infty) \ni z \mapsto z^t$  für rationale Exponenten  $t$  stetig ist (vgl. Beispiel 2.3.26), erhalten wir

$$(a^x)^t = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{s_k})^t = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_k t} = a^{xt}.$$

Nun wählen wir eine Folge  $(t_n)_n$  in  $\mathbb{Q}$  mit  $t_n \rightarrow y$  und erhalten

$$(a^x)^y = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^x)^{t_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x t_n} = a^{xy}.$$

**Anmerkung.** Vertauschen wir die Reihenfolge der Grenzprozesse  $s_k \rightarrow x$  und  $t_n \rightarrow y$ , stoßen wir auf ein Problem, da wir noch zeigen müssen, daß die Potenzfunktion für irrationale Exponenten stetig ist.

**Bezeichnung 2.4.21 (Reelle Potenzen)**

Für  $a \in \mathbb{R}$  definiert man die **Potenzfunktion** zur Potenz  $a$  durch:

$$p_a : x \mapsto x^a \quad \text{für } x \in (0, \infty).$$

**Bemerkung 2.4.22 (Rechenregeln: Potenzfunktion)**

1. Für jede Folge  $(r_n)_n$  in  $\mathbb{Q}$  mit Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  ist:

$$x^a = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}.$$

2. Es gilt die Funktionalgleichung:

$$x^a y^a = (xy)^a \quad \text{für } x, y \in (0, \infty).$$

3. Nach Feststellung 2.4.20 ist  $p_{\frac{1}{a}}$  die Umkehrfunktion zu  $p_a$ :

$$(x^a)^{\frac{1}{a}} = x^{a \frac{1}{a}} = x^1 = x.$$

4. Es sei  $a > 0$ : Da die Potenzfunktion  $p_r$  für rationale  $r > 0$  streng monoton wachsend ist, ist  $p_a$  monoton wachsend. Da  $p_a$  injektiv ist, ist  $p_a$  streng monoton wachsend.
5. Für  $a > 0$  gilt:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} x^a = 0$ .
6. Für  $a > 0$  setzt man  $0^a := 0$ .

**Lemma 2.4.23 (Zur Konvexität der Potenzfkt.)**

Es seien  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $1 < x < y$ .

1. Für  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m < n$  gilt:

$$\frac{y^m - 1}{x^m - 1} < \frac{y^n - 1}{x^n - 1}.$$

2. Für  $r, s \in \mathbb{Q}$  mit  $0 < r < s$  gilt

$$\frac{y^r - 1}{x^r - 1} < \frac{y^s - 1}{x^s - 1}.$$

3. Es sei  $a \in \mathbb{R}$ . Für  $a > 1$  gilt

$$\frac{x^a - 1}{x - 1} < \frac{y^a - 1}{y - 1}.$$

**Beweis.**

1. Für  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $k < l$  und  $0 < x < y$  gilt  $y^k x^l < x^k y^l$ .

Für  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m < n$  folgt daraus

$$\sum_{k=0}^{m-1} y^k \sum_{l=0}^{n-1} x^l < \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{l=0}^{n-1} y^l.$$

Wenn  $1 < x < y$  oder  $0 < x < y < 1$  ist, so ist  $(x-1)(y-1) > 0$  und folglich (geometrische Reihe)

$$(y^m - 1)(x^n - 1) < (x^m - 1)(y^n - 1).$$

Hieraus folgt nun die Behauptung (1.).

2. Es seien  $r = \frac{m}{q}$ ,  $s = \frac{n}{q}$  mit  $m, n, q \in \mathbb{N}$ . Da die  $q$ -te Wurzel streng monoton ist, gilt nach Voraussetzung  $1 < x^{\frac{1}{q}} < y^{\frac{1}{q}}$  bzw.  $0 < x^{\frac{1}{q}} < y^{\frac{1}{q}} < 1$ . Aus (1.) folgt nun

$$\frac{y^r - 1}{x^r - 1} = \frac{(y^{\frac{1}{q}})^m - 1}{(x^{\frac{1}{q}})^m - 1} < \frac{(y^{\frac{1}{q}})^n - 1}{(x^{\frac{1}{q}})^n - 1} = \frac{y^s - 1}{x^s - 1}$$

Die Funktion  $(0, \infty) \cap \mathbb{Q} \ni r \mapsto \frac{y^r - 1}{x^r - 1}$  ist streng monoton wachsend und hat eine stetige Fortsetzung auf  $(0, \infty)$ . Nach Satz 2.4.5 ist die Fortsetzung streng monoton.

Für  $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \rho < \sigma$  gilt also

$$\frac{y^\rho - 1}{x^\rho - 1} < \frac{y^\sigma - 1}{x^\sigma - 1}. \quad (\star)$$

3. Im Fall  $1 < a$  setze man in  $(\star)$   $\rho = 1$  und  $\sigma = a$ .

### Feststellung 2.4.24 (Konvexität der Potenzfkt.)

Es sei  $a \in \mathbb{R}$ . Die Potenzfunktion

$$p_a : (0, \infty) \ni x \mapsto x^a$$

1. ist streng monoton wachsend und streng konvex für  $1 < a$ .
2. ist streng monoton wachsend und streng konkav für  $0 < a < 1$ .
3. ist streng monoton fallend und streng konvex für  $a < 0$ .

Mit der Feststellung 2.4.14 erhält man:

**Korollar 2.4.25** Die Potenzfunktion  $(0, \infty) \ni x \mapsto x^a$  ist für jeden Exponenten  $a \in \mathbb{R}$  stetig.

Auf jedem kompakten Teilintervall  $[c, d] \subset (0, \infty)$  ist die Potenzfunktion Lipschitz-stetig.

**Beweis.**

1. Es sei  $1 < a$ : Die die Potenzfunktion  $p_a$  ist monoton wachsend und bijektiv, also ist sie streng monoton wachsend.

Für  $0 < u < x < y$  gilt nach Lemma 2.4.23 (3.)

$$\frac{x^a - u^a}{x - u} = \left(\frac{u^a}{x}\right) \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^a - 1}{\frac{x}{u} - 1} < \left(\frac{u^a}{x}\right) \frac{\left(\frac{y}{u}\right)^a - 1}{\frac{y}{u} - 1} = \frac{y^a - u^a}{y - u}$$

Aus Lemma 2.4.11(2.) folgt nun, daß Potenzfunktion für  $1 < a$  streng konvex ist.

2. Es sei  $0 < a < 1$ .  $p_a$  ist die Umkehrfunktion zu  $p_{\frac{1}{a}}$ . Nach (1.) ist  $p_{\frac{1}{a}}$  streng monoton wachsend und streng konvex. Nach Bemerkung 2.4.10 ist die Umkehrfunktion streng monoton wachsend und streng konkav.

3. Wir untersuchen  $p_{-a}$  und unterscheiden drei Fälle:

**$a = 1$ :** Nach Beispiel 2.4.13 (3.) ist  $p_{-1}(0, \infty) \ni x \mapsto x^{-1}$  streng monoton fallend und streng konvex.

$a > 1$ : Da  $p_{-1} : (0, \infty) \ni x \mapsto x^{-1}$  streng monoton fallend und streng konvex ist und  $p_a : (0, \infty) \ni y \mapsto y^a$  streng monoton wachsend und streng konvex ist, ist die Komposition  $p_{-a} : (0, \infty) \ni x \mapsto x^{-a}$  streng monoton fallend und streng konvex (vgl. Bemerkung 2.4.9 (1.)).

$0 < a < 1$ : Da  $p_a : (0, \infty) \ni x \mapsto x^a$  streng monoton wachsend und streng konkav ist und  $p_{-1} : (0, \infty) \ni y \mapsto y^{-1}$  streng monoton fallend und streng konvex ist, ist die Komposition  $p_{-a} : (0, \infty) \ni x \mapsto x^{-a}$  streng monoton fallend und streng konvex. (vgl. Bemerkung 2.4.9 (2.)).

Insgesamt folgt also die Behauptung (3.).

## 2.5 Supremum und Zwischenwertsatz

### 2.5.1 Supremum

Wir leiten ein weiteres Konstruktionsprinzip für reelle Zahlen her. Nicht jede beschränkte Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  hat Maximum und Minimum. Wir suchen für diesen Fall einen nützlichen Ersatz.

Ein Beispiel hierfür ist das offene Intervall  $I = (0, \sqrt{2}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^2 < 2\}$ . Die Intervallenden 0 und  $\sqrt{2}$  sind ausgezeichnet:

- Die reelle Zahl  $\sqrt{2}$  ist die kleinste Zahl, die oberhalb von allen Punkten aus  $I$  liegt, d. h.  $\sqrt{2}$  ist die **kleinste obere Schranke** von  $I$ . Diese existiert aber nur in  $\mathbb{R}$ , nicht in  $\mathbb{Q}$ .
- Die Zahl 0 ist die **größte untere Schranke** von  $I$ .

Wir führen für den gesuchten Begriff **kleinste obere Schranke** eine Bezeichnung ein:

#### Definition 2.5.1 (Supremum)

Es sei  $M \subset \mathbb{R}$  nicht leer und nach oben beschränkt. Hat die Menge

$$S_M := \{a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in M : x \leq a\}$$

der oberen Schranken von  $M$  ein Minimum  $s$ , so heißt  $s$  kleinste obere Schranke oder **Supremum** von  $M$  und wird mit

$$s = \sup M$$

bezeichnet.

**Beispiel.** Für das Intervall  $I = (0, \sqrt{2})$  gilt  $S_I = [\sqrt{2}, \infty)$  und  $\sup I = \min[\sqrt{2}, \infty) = \sqrt{2}$ .

**Bemerkung 2.5.2** 1. Das Supremum einer Menge ist eindeutig bestimmt, da die Anordnung von  $\mathbb{R}$  total ist (vgl. Feststellung 1.1.8 und Bem. 1.1.12).

2. Falls eine Menge ein Maximum besitzt, so stimmt dieses mit dem Supremum überein:

$$\sup M = \max M.$$

#### Bezeichnung 2.5.3 (Infimum)

Analog zur kleinsten oberen Schranke definiert man für eine nichtleere, nach unten beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}$  die **größte untere Schranke**.

Diese heißt **Infimum** von  $M$  und wir mit

$$\inf M$$

bezeichnet.

**Feststellung 2.5.4** Es sei  $M \subset \mathbb{R}$  nicht leer und nach unten beschränkt. Bezeichnet  $-M := \{-x \mid x \in M\}$ , so gilt

$$\inf M = -\sup(-M).$$

#### Feststellung 2.5.5 (Charakterisierung des Supremums)

Es sei  $M \subset \mathbb{R}$  nicht leer und nach oben beschränkt. Es ist genau dann  $s = \sup M$ , wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:

1.  $x \leq s$  für alle  $x \in M$
2. Es gibt eine Folge  $(x_n)$  in  $M$ , so daß  $x_n \rightarrow s$ .

**Korollar 2.5.6** Die Folge in (2.) kann monoton wachsend gewählt werden.

---

**Beweis Satz 2.5.5 .**

$\Rightarrow$ : Es sei  $s = \sup M$ . (1.) Dann ist  $s$  eine obere Schranke.

(2.) Da  $s$  kleinste obere Schranke ist, ist  $s - \frac{1}{n}$  keine obere Schranke von  $M$  und es gibt ein

$$x_n \in M \quad \text{mit} \quad s - \frac{1}{n} < x_n.$$

Da  $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s$  ist, konvergiert die Folge  $(x_n)_n$  gegen  $s$ .

$\Leftarrow$ : Nach (1.) ist  $s$  eine obere Schranke. Sei gemäß (2.)

$$(x_n)_n \text{ in } M \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s.$$

Dann gibt es zu jedem  $t < s$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für  $n \geq n_0$ :

$$|s - x_n| < s - t, \quad \text{folglich} \quad t < x_n.$$

Also ist  $t$  keine obere Schranke von  $M$ , d. h.  $s$  ist die kleinste obere Schranke von  $M$ .

---

**Beweis Korollar 2.5.6.**

Man setze (vgl. Feststellung 1.3.21)

$$y_n := \max\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Die Folge  $(y_n)_n$  liegt in  $M$ , ist monoton wachsend und konvergiert ebenfalls gegen  $s$ .

---

Aus der Grenzwertregel 2.1.18 für Folgen ergibt sich die Bemerkung:

**Bemerkung 2.5.7 (Grenzwert oberer Schranken)**

Es sei  $M \subset \mathbb{R}$  nicht leer. Wenn  $(s_n)_n$  eine konvergente Folge von oberen Schranken von  $M$  ist, so ist auch der Grenzwert eine obere Schranke von  $M$ .

---

Aus den Axiomen

**(A) Archimedisches Axiom 2.1.9**

**(I) Intervallschachtelungsprinzip 2.2.6**

ergibt sich nun die **Supremums-Eigenschaft (S)**:

**Satz 2.5.8 (Supremumseigenschaft von  $\mathbb{R}$ )**

*Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  hat eine kleinste obere Schranke  $\sup M \in \mathbb{R}$ .*

**Anmerkung.** 1. Umgekehrt folgen aus der Supremums-Eigenschaft das Archimedische Axiom und das Intervallschachtelungsprinzip.

2. Zum Beweis konstruieren wir induktiv mit der Methode der Intervall-Halbierung eine Intervallschachtelung.

---

**Beweis.** Wir konstruieren induktiv zwei monotone Folgen  $(x_n)_n$  in  $M$  und  $(s_n)_n$  in  $S_M$ , so daß für  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$s_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{2}(s_n - x_n) \quad (\star)$$

**Startwerte:** Wähle  $x_0 \in M$  und  $s_0 \in S_M$ .

**Iteration:** Es seien bereits  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  in  $M$  und  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$  in  $S_M$  gewählt, so daß  $(\star)$  gilt.

Dann setze man  $y_n := \frac{1}{2}(x_n + s_n)$ . Es gibt zwei Fälle

$y_n \in S_M$ : Setze  $x_{n+1} := x_n$ ,  $s_{n+1} := y_n$ .

Dann ist  $s_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n - x_n)$ .

$y_n \notin S_M$ : Wähle  $x_{n+1} \in M$  mit  $y_n < x_{n+1}$  und  $s_{n+1} := y_n$ .

Dann ist  $s_{n+1} - x_{n+1} \leq s_n - y_n = \frac{1}{2}(s_n - x_n)$ .

Die beiden Folgen  $(x_n)_n$  und  $(s_n)_n$  bilden wegen  $(\star)$  eine Intervallschachtelung und konvergieren gegen den gleichen Wert  $s \in S_M$ . Nach Feststellung 2.5.5 ist  $s = \sup M$ .

---

## 2.5.2 Uneigentliche Suprema

Für nach oben unbeschränkte Mengen führen wir ein **uneigentliches Supremum** in  $\overline{\mathbb{R}}$  ein.

Man kann dann gewisse Sachverhalte statt in Worten kurz in Formeln ausdrücken und kann mit diesen uneigentlichen Suprema auch rechnen (vgl. 2.1.23).

### Bezeichnung 2.5.9 ( $\sup M = \infty$ )

Es sei  $M \subset \mathbb{R}$  nicht leer.

1. Wenn  $M$  **nach oben unbeschränkt** ist, setzen wir

$$\sup M := \infty.$$

2. Wenn  $M$  **nach unten unbeschränkt** ist, setzen wir

$$\inf M := -\infty.$$

---

### Beispiele 2.5.10 ( $\sup M \in \overline{\mathbb{R}}$ )

Es sei  $M \subset \mathbb{R}$  nicht leer. Dann gilt:

1.  $M$  nach oben beschränkt  $\Leftrightarrow \sup M < \infty$
2. Mit der Bezeichnung  $|M| := \{|x| \mid x \in M\}$  gilt:

$$M \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \sup |M| < \infty.$$

### Beispiele 2.5.11 (Supremum monotoner Folgen)

Es sei  $(a_n)_n$  eine monoton wachsende Folge. Dann gilt:

1.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
2.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n < \infty \Leftrightarrow (a_n)_n$  beschränkt.

---

Folgerung aus der Existenz von Suprema und Infima:

## Satz 2.5.12 (Charakterisierung von Intervallen)

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  nicht leer. Dann sind äquivalent:

- (1)  $I$  ist ein Intervall.
- (2)  $I$  enthält mit je zwei Punkten die Verbindungsstrecke. D. h. für alle  $x, y \in I$  und alle  $\xi \in \mathbb{R}$  gilt:

$$x < \xi < y \Rightarrow \xi \in I.$$

---

### Beweis.

**1 $\Rightarrow$ 2** Für Intervalle gilt offensichtlich (2.)

**2 $\Rightarrow$ 1** Setze  $a := \inf M \in \overline{\mathbb{R}}$  und  $b := \sup M \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Wir zeigen zunächst, daß  $I \setminus \{a, b\} = (a, b)$  ist:

$$\begin{aligned} z \in (a, b) &\Leftrightarrow \inf I < z < \sup I \\ &\Leftrightarrow \text{es existieren } x, y \in I \text{ mit } x < z \text{ und } z < y \\ &\Leftrightarrow z \in I \setminus \{a, b\}. \end{aligned}$$

Es gibt nun vier Fälle, je nachdem ob  $a$  oder  $b$  in  $I$  oder nicht in  $I$  liegen:

- (i)  $a \in I, b \in I \Rightarrow I = [a, b]$ .
- (ii)  $a \in I, b \notin I \Rightarrow I = [a, b)$ .
- (iii)  $a \notin I, b \in I \Rightarrow I = (a, b]$ .
- (iv)  $a \notin I, b \notin I \Rightarrow I = (a, b)$ .

---

## 2.5.3 Zwischenwertsatz

Das Supremum ist ein geeignetes Hilfsmittel bei der Suche nach dem Maximum einer beschränkten Menge. Man muß nur nachprüfen, ob das Supremum der Menge ein Element der Menge ist.

### Lemma 2.5.13

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $c \in \mathbb{R}$ .

Wenn die Menge

$$M := \{x \mid x \in [a, b], f(x) \leq c\} \neq \emptyset,$$

dann existiert  $\max M$ .

**Bemerkung** Auf den linken Endpunkt  $a$  kommt es nicht an. Das Lemma gilt genauso für Intervalle der Form  $(a, b]$  und  $(-\infty, b]$ .

---

**Beweis.** Da  $M$  nach oben beschränkt ist, existiert

$$s := \sup M \in \mathbb{R}.$$

Nach Feststellung 2.5.5 gibt es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $M$ , die gegen  $s$  konvergiert. Da  $f$  stetig ist, folgt

$$f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq c$$

und somit  $s \in M$ .

---

### Satz 2.5.14 (Zwischenwertsatz)

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Wir betrachten den Fall  $f(a) < f(b)$ .

Zu jedem  $c \in \mathbb{R}$  mit  $f(a) < c < f(b)$ , gibt es mindestens ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f(\xi) = c$ .

### Bemerkung.

1. Der Zwischenwertsatz gilt analog im Fall  $f(b) < c < f(a)$ .

2. Man kann alle Fälle zusammenfassen:

**Zwischenwertsatz.** Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein nichtleeres Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $a, b \in I$ .

Wenn  $f(a) \neq f(b)$  ist, so gibt es zu jedem  $c \in \mathbb{R}$ , das **zwischen**  $f(a)$  und  $f(b)$  liegt, mindestens ein  $\xi$  **zwischen**  $a$  und  $b$  mit  $f(\xi) = c$ .

---

**Beweis (Zwischenwertsatz).** Wir suchen das größte  $s \in [a, b]$ , für das  $f(s) = c$  ist.

Da  $f(a) < c$  ist, ist

$$M := \{x \mid x \in [a, b], f(x) \leq c\} \neq \emptyset,$$

und nach Lemma 2.5.13 existiert  $s := \max M$ . Da  $f(s) \leq c < f(b)$ , ist  $s \neq b$  und somit  $s < b$ .

Da  $s = \max M$ , sind für  $x \in (s, b]$  die Funktionswerte

$$f(x) > c.$$

Da  $f$  stetig ist, folgt

$$f(s) = \lim_{x \downarrow s} f(x) \geq c.$$

Also ist  $f(s) = c$ .

---

Mit Satz 2.5.12 ergibt sich das Korollar:

### Korollar 2.5.15 (Stetiges Bild eines Intervalls)

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist  $f(I)$  ein Intervall.

---

Als einfache Anwendung zeigen wir noch einmal die Existenz von Wurzeln. Wir hatten in Feststellung 2.2.13 bereits ein Iterationsverfahren angegeben, das gegen die  $n$ -te Wurzel konvergiert.

**Beispiele 2.5.16** Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $c > 0$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl  $x > 0$ , so daß  $x^n = c$ .

**Bemerkung.** Der Zwischenwertsatz liefert die Wurzel als Supremum der Menge  $\{x \mid x \in [0, 1 + \frac{c-1}{n}], P(x) \leq 0\}$ . Dieses Supremum wird im Satz 2.5.8 mit dem Intervall-Halbierungsverfahren bestimmt.

Das Intervall-Halbierungsverfahren ist ein Allzweckverfahren, das zwar immer konvergiert, aber nicht die besondere Struktur der Gleichung berücksichtigt.



Das Iterationsverfahren 2.2.13 konvergiert dagegen wesentlich schneller (Stichwort: quadratische Konvergenz).

**Beweis.** Die Funktion

$$P(x) := x^n - c \quad \text{für } x \in [0, \infty)$$

erfüllt  $P(0) = -c < 0$ .

Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt  $P(1 + \frac{c-1}{n}) \geq 0$ .

Nach dem Zwischenwertsatz 2.5.14 hat  $P$  eine Nullstelle im Intervall  $(0, 1 + \frac{c-1}{n}]$ .

## 2.5.4 Stetigkeit der Umkehrfunktion

### Satz 2.5.17 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

Es seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  nichtausgeartete Intervalle und  $f : I \rightarrow J$  eine streng monoton wachsende Funktion mit Umkehrfunktion  $g : J \rightarrow I$ .

Dann sind  $f$  und  $g$  stetig.

#### Anmerkung

- Der Satz gilt analog für streng monoton fallende Funktionen.
- Wie die folgenden beiden Beispiele zeigen, benötigt man beide Voraussetzungen:
  - $f$  ist streng monoton wachsend oder fallend.
  - Das Bild von  $f$  ist ein Intervall.

#### Beispiele

- Man setze  $g = f : [-1, 1) \rightarrow [-1, 1)$  mit:

$$g(x) = f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{wenn } -1 \leq x < 0, \\ x - 1 & \text{wenn } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Es ist  $g = f^{-1}$  aber unstetig in  $x_0 = 0$ .

- Man definiere  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 0) \cup [1, 2]$  mit Umkehrfunktion  $g : [-1, 0) \cup [1, 2] \rightarrow [-1, 1]$  durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{wenn } -1 \leq x < 0, \\ x + 1 & \text{wenn } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$g(y) := \begin{cases} y & \text{wenn } -1 \leq y < 0, \\ y - 1 & \text{wenn } 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Die streng monotone Funktion  $f$  hat eine Sprungstelle in  $x_0 = 0$ .

### Beweis (Stetigkeit der Umkehrfunktion).

Wir zeigen die Stetigkeit der Umkehrfunktion  $g$  (vgl. Satz 1.4.8).

Es seien  $x_0 \in I$ ,  $y_0 = f(x_0) \in J$  und  $\varepsilon > 0$ . Es sei  $a \in \overline{I}$  der linke Endpunkt von  $I$  und  $b \in \overline{J}$  der rechte Endpunkt. Man setze

$$\alpha := \begin{cases} x_0 - \varepsilon & \text{falls } x_0 - \varepsilon \in I, \\ \frac{1}{2}(a + x_0) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\beta := \begin{cases} x_0 + \varepsilon & \text{falls } x_0 + \varepsilon \in I, \\ \frac{1}{2}(x_0 + b) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\delta := \begin{cases} \min\{y_0 - f(\alpha), f(\beta) - y_0\} & \text{wenn } \alpha < x_0 < \beta, \\ f(\beta) - y_0 & \text{wenn } a = \alpha = x_0, \\ y_0 - \alpha & \text{wenn } x_0 = \beta = b. \end{cases}$$

Es ist  $\delta > 0$ . Für  $y \in J$  gilt

$$|y - y_0| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad f(\alpha) \leq y \leq f(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq g(y) \leq \beta.$$

und somit  $|g(y_0) - g(y)| = |x_0 - g(y)| \leq \varepsilon$ .

Aus Satz 2.5.17 und Korollar 2.5.15 folgt nun:

### Korollar 2.5.18 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und streng monotone Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, wobei  $J := f(I)$ .

---

**Satz 2.5.19** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht ausgeartetes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und injektive Funktion. Dann ist  $f$  streng monoton.

---

Wir betrachten zunächst den Fall  $I = [a, b]$ .

**Lemma 2.5.20** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv und stetig. Wenn  $f(a) < f(b)$ , so ist  $f$  streng monoton wachsend.

---

**Beweis.** Annahme:  $f$  ist nicht strikt monoton wachsend:

Dann gibt es Punkte  $x, y \in [a, b]$  mit  $x < y$  und  $f(x) \geq f(y)$ . Da  $f$  injektiv, ist  $f(x) > f(y)$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

$f(a) \leq f(y)$ : Zu einem  $c$  mit  $f(y) < c < f(x)$  gibt es nach dem Zwischenwertsatz 2.5.14

$$\xi \in (a, x) \quad \text{und} \quad \eta \in (x, y)$$

mit  $f(\xi) = f(c) = f(\eta)$ .

Da  $\xi \neq \eta$ , widerspricht das der Injektivität von  $f$ .

$f(y) < f(a)$ : Zu einem  $c$  mit  $f(y) < c < f(a)$  gibt es nach dem Zwischenwertsatz 2.5.14

$$\xi \in (a, y) \quad \text{und} \quad \eta \in (y, b)$$

mit  $f(\xi) = c = f(\eta)$ .

Da  $\xi \neq \eta$ , widerspricht das der Injektivität von  $f$ .

---

**Beweis.** Wähle  $a, b \in I$  mit  $a < b$ .

Wir zeigen, wenn  $f(a) < f(b)$ , dann ist  $f$  streng monoton wachsend:

Seien  $x, y \in I$  mit  $x < y$ . Man setze

$$c := \min\{x, a\} \quad \text{und} \quad d := \max\{y, b\}.$$

Nach dem vorangehenden Lemma ist die Einschränkung  $f|_{[c,d]}$  entweder streng monoton wachsend oder fallend, je nachdem ob  $f(c) < f(d)$  oder  $f(c) > f(d)$  ist.

Da  $a, b \in [c, d]$  und  $f(a) < f(b)$  ist, muß die Einschränkung  $f|_{[c,d]}$  streng monoton wachsend sein.

Da  $x, y \in [c, d]$  ist, folgt  $f(x) < f(y)$ .

Wenn  $f(a) > f(b)$  ist, folgt analog, daß  $f$  streng monoton fallend ist.

---

**Beispiel (Logarithmus).**

Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$  ist die Exponentialfunktion zur Basis  $a$ :

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in (0, \infty)$$

stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a < 1$  ist die Exponentialfunktion zur Basis  $a$ :

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in (0, \infty)$$

stetig, streng monoton fallend und bijektiv.

**Definition 2.5.21 (Logarithmus zur Basis  $a$ )**

Es sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a$ . Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis  $a$  heißt **Logarithmus zur Basis  $a$** :

$$(0, \infty) \ni x \mapsto \log_a(x) \in \mathbb{R}.$$

---

**Bezeichnung 2.5.22 (Der natürliche Logarithmus)**

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $\exp : x \mapsto e^x$  heißt natürlicher Logarithmus oder kurz **der Logarithmus** und wird mit

$$\log x \quad \text{oder} \quad \ln x$$

bezeichnet.

Mathematiker schreiben meistens  $\log x$ , Physiker und Ingenieure  $\ln x$ .

---

**Bemerkung 2.5.23** 1. Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  gilt

$$a^x = e^{x \log a} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

2. Die Logarithmen zu verschiedenen Basen unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \quad \text{für } 0 < a, a \neq 1.$$

Daher reicht es, den natürlichen Logarithmus zu untersuchen.

---

**Feststellung 2.5.24 (Regeln: Logarithmus)**

1. Der Logarithmus  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, streng monoton wachsend und streng konkav.
2. Es gilt die Funktionalgleichung

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad \text{für } x, y \in (0, \infty).$$

3. Es gilt

$$\lim_{x \downarrow 0} \log x = -\infty, \quad \log 1 = 0, \quad \log e = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty.$$

**Anmerkung.** Wir werden noch weitere wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion und des Logarithmus in den folgenden Kapiteln kennenlernen.

---

## 2.6 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

### 2.6.1 Satz vom Maximum

**Bemerkung 2.6.1**

- Die beiden Sätze dieses Abschnittes gelten allgemeiner für stetige reelle Funktionen auf kompakten Teilmengen der reellen Zahlen. Die Intervalleigenschaft ist unwichtig. Auch die Beweise kann man sinngemäß übernehmen.
- Die Sätze gelten sogar für beliebige kompakte Mengen. Man führt dann sehr ähnliche Beweise, in denen man statt des Supremumsprinzips den Satz von Bolzano-Weierstraß verwendet (vgl. Abschnitt 2.7.1)
- Wir konstruieren im Beweis des Satzes vom Maximum den größten Punkt, in dem die Funktion ihr Maximum annimmt. Verwendet man stattdessen den Satz von Bolzano-Weierstraß, so findet man nur irgendein Maximum.

---

**Lemma 2.6.2 (Beschränktheits-Lemma)**

Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall. Dann ist jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.

**Bemerkung.** Der Satz wird mit einem Widerspruchsbeweis gezeigt.

---

**Beweis (Beschränktheits-Lemma).**

**Annahme:**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist nach oben unbeschränkt.

Man bilde zu  $N \in \mathbb{N}$  die nichtleere Menge  $A_n$ :

$$A_n := \{x \mid x \in [a, b], f(x) \geq n\}.$$

Nach Lemma 2.5.13 existiert

$$s_n := \max A_n.$$

Da  $A_n \supset A_{n+1}$ , ist die Folge  $(s_n)_n$  monoton fallend. Es existiert

$$[a, b] \ni c = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Da  $f$  stetig ist, folgt ein Widerspruch:

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = \infty.$$

---

### Satz 2.6.3 (Satz vom Maximum)

Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein nichtleeres, kompaktes Intervall. Dann nimmt jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ein Maximum an.

D.h., es gibt mindestens ein  $\xi \in [a, b]$  so, daß für alle  $x \in [a, b]$  gilt:

$$f(x) \leq f(\xi).$$

KARL WEIERSTRASS (1815-1897)

**Bemerkung.** Analog gilt, daß jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ein Minimum hat.

---

Die Kompaktheit des Intervalls ist eine unverzichtbare Voraussetzung für den Satz vom Maximum:

**Beispiele 2.6.4** Mit der Wackelfunktion 2.3.30(5) bilde man die Funktion

$$V : (0, 1] \ni x \mapsto (1 - x)W(x).$$

$V$  ist auf  $(0, 1)$  stetig und beschränkt und hat auf  $(0, 1]$  weder ein Maximum noch ein Minimum. Es gilt

$$\begin{aligned} -1 < V(x) < 1 \quad \text{für } x \in (0, 1], \\ \sup_{x \in (0, 1]} V(x) = 1 \quad \text{und} \quad \inf_{x \in (0, 1]} V(x) = -1. \end{aligned}$$

Man kann  $V$  nicht stetig in  $x = 0$  fortsetzen und auch keinen Funktionswert bei 0 so festsetzen, daß  $V$  Maximum **und** Minimum hat.

---

Mit Korollar 2.5.15 ergibt sich das Korollar:

### Korollar 2.6.5 (Stetiges Bild eines kompakten Intervalls)

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist  $f(I)$  ein kompaktes Intervall.

---

### Beweis (Satz vom Maximum).

Nach Lemma 2.6.2 ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nach oben beschränkt:

$$s := \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \in \mathbb{R}.$$

Man bilde zu  $N \in \mathbb{N}$  die nichtleere Menge  $A_n$ :

$$A_n := \{x \mid x \in [a, b], f(x) \geq s - \frac{1}{n}\}.$$

Nach Lemma 2.5.13 existiert

$$s_n := \max A_n.$$

Da  $A_n \supset A_{n+1}$ , ist die Folge  $(s_n)_n$  monoton fallend. Es existiert

$$[a, b] \ni c = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Da  $f$  stetig ist, folgt

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = s = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

---

## 2.6.2 Gleichmäßige Stetigkeit

### Definition 2.6.6 (Gleichmäßige Stetigkeit)

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **gleichmäßig stetig** wenn folgende gilt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $x, y \in I$  aus  $|x - y| < \delta$  stets  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  folgt.

In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**Bemerkung.** Die Feststellungen 2.1.5 und 2.1.10 gelten sinngemäß auch für die Definition der Gleichmäßigen Stetigkeit.

Was heißt es, daß eine Funktion nicht gleichmäßig stetig ist?

**Bemerkung 2.6.7**

1. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist **nicht gleichmäßig stetig**, wenn folgendes gilt:  
Es gibt ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so daß es zu jedem  $\delta > 0$  zwei Punkte  $x, y \in I$  gibt mit  $|x - y| < \delta$  und  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$ .  
In Zeichen:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in I : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

2. Es reicht die Werte  $\delta = \frac{1}{n}$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ), zu testen:  
Die Funktion  $f$  ist nicht gleichmäßig stetig, wenn es ein  $\varepsilon_0 > 0$  und zwei Folgen  $(x_n)_n, (y_n)_n$  in  $I$  so gibt, daß

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

**Beispiele 2.6.8 (zur gleichmäßigen Stetigkeit)**

1. Für  $0 < a < 1$  und  $x, y \in [0, \infty)$  gilt die folgende Abschätzung:

$$|y^a - x^a| < |y - x|^a \quad (\star).$$

Folglich ist für  $0 < a < 1$  die Potenzfunktion (Wurzelfunktion)  $p_a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig stetig.

2. Für die Inversion  $p_{-1} : x \mapsto x^{-1}$  und  $c > 0$  gilt:

$p_{-1}$  ist gleichmäßig stetig auf  $[c, \infty)$ .

$p_{-1}$  ist nicht gleichmäßig stetig auf  $(0, c]$ .

3. Für die Quadratfunktion  $p^2 : x \mapsto x^2$  gilt:

- $p^2$  ist gleichmäßig stetig auf jedem kompakten Intervall.

- $p^2$  ist nicht gleichmäßig stetig auf  $\mathbb{R}$ .

**Beweis.**

1. Für  $0 < a < 1$  ist die Potenzfunktion  $p_a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  nach Feststellung 2.4.24 (2) und Bemerkung 2.4.22 (6) streng konkav. Die Steigung ist also streng monoton fallend.

Für  $0 < x < y$  ist  $0 < x$  und  $0 < y - x < y$ . Folglich gilt:

$$\frac{y^a - x^a}{y - x} < \frac{(y - x)^a - 0^a}{(y - x) - 0} = \frac{(y - x)^a}{y - x}.$$

Hieraus folgt die Ungleichung  $(\star)$ .

2.  $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{|x - y|}{a^2}$  für  $x, y \in [a, \infty)$ .

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x + \delta} \geq \frac{\delta}{(a + \delta)x} \quad \text{für } 0 < x \leq a \text{ und } 0 < \delta.$$

3. Klar da  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ .

**Satz 2.6.9 (Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit)**

Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall. Dann ist jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig stetig.

**Bemerkung.** Der Satz wird mit einem Widerspruchsbeweis gezeigt.

EDUARD HEINE (1821-1861)

**Beweis. Annahme:**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht gleichmäßig stetig.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x, y \in I : |x - y| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Wir bilden zu  $n \in \mathbb{N}$  die Menge  $A_n \neq \emptyset$  und die Punkte:

$$A_n := \{x \mid x \in I, \exists y \in I : |x - y| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0\},$$

$$s_n := \sup A_n,$$

$$x_n \in A_n \quad \text{mit} \quad s_n - \frac{1}{n} < x_n \leq s_n,$$

$$y_n \in I \quad \text{mit} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Da  $A_n \supset A_{n+1}$ , ist die Folge  $(s_n)_n$  monoton fallend. Es existiert

$$[a, b] \ni c = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Da  $f$  stetig ist, folgt ein Widerspruch:

$$0 = |f(c) - f(c)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 > 0.$$

### Übung. (Gleichmäßige Stetigkeit)

1. Man modifiziere den Beweis von Satz 2.6.9 oder den alternativen Beweis im Beispiel 2.7.7 und zeige die folgende Charakterisierung der gleichmäßigen Stetigkeit:

Es seien  $I$  ein beschränktes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1.  $f$  ist gleichmäßig stetig.
2. Wenn  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge in  $I$  ist, so ist  $(f(x_n))_n$  eine Cauchy-Folge.

2. Man zeige, daß die Äquivalenz (1.) sinngemäß auch für Funktionen  $f : I \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt.

3. Man zeige, daß der Fortsetzungssatz 2.4.4 sinngemäß für gleichmäßig stetige Funktionen  $f : I \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt.

## 2.7 Konvergente Teilfolgen

### 2.7.1 Konvergente Teilfolgen

#### Definition 2.7.1 (Teilfolge)

Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton wachsende Folge in  $\mathbb{N}$ . Die durch

$$\mathbb{N} \ni k \mapsto a_{n_k}$$

definierte Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  heißt **Teilfolge** der Folge  $(a_n)_n$ .

**Bemerkung** Der Begriff Teilfolge ist ein Spezialfall des Begriffs Komposition von Funktionen:

Nach Definition 1.4.10 ist eine Folge eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ist  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strikt monoton wachsend, dann heißt die Komposition  $a \circ \phi = (a_{\phi(k)})_k$  eine Teilfolge der Folge  $(a_n)_n$ .

Man schreibt kurz  $n_k := \phi(k)$  und  $(a_{n_k})_k := a \circ \phi$ .

#### Beispiele 2.7.2 (Teilfolgen)

1. Teilfolgen der Folge  $(a_n)_n$  sind

$$(a_{2k})_k = a_2, a_4, a_6, \dots,$$

$$(a_{2k-1})_k = a_1, a_3, a_5, \dots$$

2. Zu zwei Folgen  $(a_k)_k$  und  $(b_k)_k$  bilde man die Reißverschlußfolge (vgl. 2.3.17)

$$c_n := \begin{cases} a_k & \text{für } n = 2k, \\ b_k & \text{für } n = 2k - 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann sind  $(a_k)_k$  und  $(b_k)_k$  Teilfolgen von  $(c_n)_n$ :

$$(a_k)_k = (c_{2k})_k \quad \text{und} \quad (b_k)_k = (c_{2k-1})_k.$$

3. Die divergente Folge  $a_n := (-1)^n$ ,  $(n \in \mathbb{N})$  hat konvergente Teilfolgen  $(a_{2k})_k$  und  $(a_{2k-1})_k$ .

---

Als Spezialfall von Satz 2.3.29 erhalten wir unmittelbar:

**Bemerkung 2.7.3 (Teilfolgen konvergenter Folgen)**

Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert.

---

**Beispiele 2.7.4** Gegeben sei die Folge

$$(a_n)_{n=0}^\infty := 0, \underbrace{0, \frac{1}{2}}_1, \underbrace{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}}_2, \underbrace{0, \frac{1}{8}, \dots, \frac{7}{8}}_3, 0, \frac{1}{16}, \dots$$

Zu jeder reellen Zahl  $x \in [0, 1]$  gibt es eine monoton wachsende Teilfolge  $(a_{n_k})_k$ , die gegen  $x$  konvergiert.

**Beweis.** Für  $k \in \mathbb{N}_0$  setze man:

$$l_k = \max\{l \mid l \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}, \frac{l}{2^k} \leq x\},$$

dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2^k + l_k} = x.$$

---

**Satz 2.7.5 (von Bolzano-Weierstraß)**

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.

BOLZANO, Bernard, (1781-1848), Buch: Paradoxien des Unendlichen (1851).

WEIERSTRASS, Karl (1815-1897).

Zum Beweis zeigen wir ein Lemma:

**Lemma 2.7.6 (Existenz monotoner Teilfolgen)**

Jede Folge in  $\mathbb{R}$  hat eine monotone Teilfolge.

---

**Beweis des Lemmas.** Für diesen Beweis verwenden wir die folgende Bezeichnung:

Eine  $m \in \mathbb{N}$  heiße eine **Spitze** der Folge  $(a_n)_n$ , wenn für alle  $n > m$  das Glied  $a_m > a_n$  ist.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

**Es gibt nur endlich viele Spitzen:** Es sei  $m \in \mathbb{N}$  die größte Spitze. Wir konstruieren rekursiv eine monoton wachsende Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ :

**Startwert:**  $n_1 = m + 1$ .

**Rekursion:** Es seien  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  bereits konstruiert, so daß  $a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \dots \leq a_{n_k}$  ist. Da  $n_k$  keine Spitze ist, gibt es ein  $l > n_k$  mit  $a_l \geq a_{n_k}$ . Man setze (vgl. Satz 1.2.20)

$$n_{k+1} := \min\{l \mid l \in \mathbb{N}, l > n_k, a_l \geq a_{n_k}\}.$$

**Es gibt unendlich viele Spitzen:** Wir numerieren die Spitzen durch und erhalten eine streng monoton fallende Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ :

**Startwert:**  $n_1 := \min\{l \mid l \in \mathbb{N}, l \text{ Spitze}\}$ .

**Rekursion:** Es seien  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  bereits konstruiert, so daß  $a_{n_1} > a_{n_2} > \dots > a_{n_k}$  ist. Dann gibt es eine Spitze  $l \in \mathbb{N}$  mit  $l > n_k$ . Man setze (vgl. Satz 1.2.20)

$$n_{k+1} := \min\{l \mid l \in \mathbb{N}, l > n_k, l \text{ Spitze}\}.$$

Da alle  $n_k$  Spitzen sind ist  $a_{n_1} > a_{n_2} > \dots$

---

**Beweis (Satz von Bolzano-Weierstraß).**

Da nach Satz 2.2.12 jede beschränkte monotone Folge in  $\mathbb{R}$  konvergent ist, folgt der Satz unmittelbar aus Lemma 2.7.6.

---

Man kann die großen Sätze des Abschnittes 2.6 über stetige Funktionen auf kompakten Intervallen auch mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß beweisen.

**Beispiele 2.7.7** Wir führen dies am Satz 2.6.9 (Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit) vor:

---

### Beweis (Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit).

Wenn  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  nicht gleichmäßig stetig ist, gibt es ein  $\varepsilon_0 > 0$  und Folgen  $(x_n)_n, (y_n)_n$  in  $I$  so, daß

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Es existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_k$ . Da  $I$  kompakt ist, liegt  $c := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$  in  $I$ .

Da  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} = 0$  ist, gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$$

Da  $f$  stetig ist, folgt ein Widerspruch:

$$0 = |f(c) - f(c)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0.$$

---

## 2.7.2 Häufungswerte von Folgen

**Definition 2.7.8** *Es sei  $(a_n)_n$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Eine Zahl  $h \in \mathbb{R}$  heißt ein Häufungswert der Folge  $(a_n)_n$ , wenn es eine Teilfolge von  $(a_n)_n$  gibt, die gegen  $h$  konvergiert.*

### Beispiel.

1. Die Folge  $((-1)^n)_n$  hat die Häufungswerte 1 und  $-1$ .
2. Für die Folge im Beispiel 2.7.4 ist die Menge der Häufungswerte das Intervall  $[0, 1]$ .

### Bemerkung 2.7.9 (Existenz von Häufungswerten)

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat jede beschränkte Folge mindestens einen Häufungswert.

---

**Bemerkung.** Für eine konvergente Folge ist der Grenzwert der einzige Häufungswert. Es gilt auch die Umkehrung:

**Satz 2.7.10** *Eine beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nur einen Häufungswert hat.*

**Korollar 2.7.11** *Eine beschränkte Folge konvergiert genau dann gegen einen  $c \in \mathbb{R}$ , wenn jede ihrer Teilfolgen eine Teilfolge hat, die gegen  $c$  konvergiert.*

---

### Beweis des Satzes 2.7.10.

$\Rightarrow$ : Klar.

$\Leftarrow$ : Die Folge  $(a_n)_n$  sei beschränkt und habe genau einen Häufungswert  $c \in \mathbb{R}$ .

**Annahme:** Die Folge konvergiert nicht gegen  $c$ . Es gibt also ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so daß es zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > N$ , existiert, für das  $|a_n - c| \geq \varepsilon_0$  ist.

Es gibt eine Teilfolge  $(a_{n_k})_k$ , so daß (vgl. 2.1.20 (3.))

$$|a_{n_k} - c| \geq \varepsilon_0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Da die Folge  $(a_{n_k})_k$  beschränkt ist, hat sie eine konvergente Teilfolge, die einen anderen Grenzwert als  $c$  hat.

### Beweis des Korollars 2.7.11.

Aus der Voraussetzung des Korollars erhält man, daß jede konvergente Teilfolge der gegebenen Folge gegen  $c$  konvergiert.

---

## 2.7.3 Limes superior

**Bemerkung.** Zu jeder Folge reeller Zahlen kann man den **Limes superior** oder oberen Grenzwert und den **Limes inferior** oder unteren Grenzwert in  $\mathbb{R}$  bilden.

Diese beiden Begriffe bilden ein mächtiges Hilfsmittel, um viele Konvergenzaussagen kurz und knapp zu formulieren und auch zu beweisen. Es erfordert aber einige Übung, bis man mit diesem Werkzeug umgehen kann.

In der Lehrbuchliteratur wird der Limes superior bzw. inferior unterschiedlich eingeführt. Diese Definitionen sind alle äquivalent.

Wir wählen eine eher technische, dafür aber leicht anwendbare Definition, und leiten dann die dazu äquivalenten, anschaulicheren Eigenschaften her. 2.7.13(2), 2.7.16 und 2.7.21.

---

Zu einer nach oben beschränkten Folge  $(a_n)_n$  bilde man zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  die Zahl  $s_n := \sup_{k \geq n} a_k$ . Die Folge  $(s_n)_n$  ist monoton fallend.



**Definition 2.7.12 (Limes superior)**

Es sei  $(a_n)$  eine nach oben beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ . Man bilde die monoton fallende Folge  $(s_n)_n$  durch die Vorschrift:

$$s_n := \sup_{k \geq n} a_k.$$

Der in  $\overline{\mathbb{R}}$  gebildete Grenzwert (vgl. Satz 2.2.12 und Def. 2.1.22)

$$s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

heißt **Limes superior** der Folge  $(a_n)_n$  und wird mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := s$$

bezeichnet.

**Bemerkung und Bezeichnung 2.7.13**

1. Eine andere übliche Bezeichnung ist

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

2. Für  $n \in \mathbb{N}$  nennen wir die Teilfolge  $(a_k)_{k=n}^\infty$  ein Endstück der Folge  $(a_n)_n$ . Der Limes superior ist also das Infimum der Suprema der Endstücke:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{c \in \mathbb{R}, c \geq a_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$$

3. Man kann sich überlegen, daß die Folge  $(s_n)_n$  die kleinste monoton fallende Folge oberhalb der gegebenen Folge  $(a_n)_n$  ist. Wir beweisen dies nicht explizit, diese Idee steckt hinter vielen Beweisen zu den Eigenschaften des Limes superior.

**Bemerkung.** Analog bildet man den Grenzwert der Infima der Endstücke und nennt ihn den Limes inferior der Folge.

**Definition 2.7.14 (Limes inferior)**

Es sei  $(a_n)$  eine nach unten beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ . Man bilde die monoton wachsende Folge

$$u_n := \inf\{a_k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq n\}.$$

Der in  $\overline{\mathbb{R}}$  gebildete Grenzwert (vgl. Satz 2.2.12 und Def. 2.1.22)

$$u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

heißt **Limes inferior** der Folge  $(a_n)_n$  und wird mit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := u$$

bezeichnet.

**Bemerkung 2.7.15** Es gilt  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\limsup_{n \rightarrow \infty}(-a_n)$

Für den Limes superior gibt es das folgende  $\varepsilon$ -Kriterium:

**Feststellung 2.7.16** Es seien  $(a_n)$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  und  $s \in \mathbb{R}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1.  $s = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
2. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $m \in \mathbb{N}$  aus  $m \geq n$  stets folgt:
  - (i)  $a_m < s + \varepsilon$
  - (ii) Es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq m$ , mit  $a_k > s - \varepsilon$ .

**Bemerkung** Verschärft man 2.(ii) zu

$$a_m > s - \varepsilon \quad \text{für alle } m > n,$$

so erhält man die übliche Definition des Grenzwertes einer Folge  $(a_n)_n$ .

**Beweis.**

**1 $\Rightarrow$ 2:** Es ist  $s_n := \sup_{k \geq n} a_k$  und  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $s \leq s_l < s + \varepsilon$  für alle  $l \geq n$ . Für  $m \geq n$  folgt

$$a_m \leq s_n < s + \varepsilon.$$

Da  $s \leq s_m := \sup_{k \geq m} a_k$  ist, gibt es ein  $k \geq m$  so, daß  $s - \varepsilon < a_k$  ist.

**2 $\Rightarrow$ 1:** Aus (i) folgt:

$$\sup_{k \geq m} a_k \leq s + \varepsilon \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq s + \varepsilon.$$

Aus (ii) folgt:

$$\sup_{k \geq m} a_k \geq s - \varepsilon \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq s - \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, folgt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ .

**Bemerkung** Für beschränkte Folge reeller Zahlen liegen der Limes superior und der Limes inferior in  $\mathbb{R}$ . Man kann mit ihrer Hilfe Aussagen über beliebige beschränkte Folgen formulieren:

**Satz 2.7.17** Es sei  $(a_n)_n$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt

1.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$
2.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existiert.

Im Fall der Gleichheit (2.) ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

**Beweis.**

1. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $u_n := \inf_{k \geq n} a_k \leq \sup_{k \geq n} a_n =: s_n$  und folglich

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \limsup_{k \rightarrow \infty} a_n$$

2.  **$\Rightarrow$ :** Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $u_n := \inf_{k \geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k \geq n} a_n =: s_n$ . Daher gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

- $\Leftarrow$ :** Es gelte  $a_n \rightarrow c \in \mathbb{R}$ . Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , so daß

$$c - \varepsilon < a_m < c + \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq n, m \in \mathbb{N}.$$

Dann ist  $c - \varepsilon \leq u_m \leq s_m \leq c + \varepsilon$  für alle  $m \geq n$  und folglich ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c$ .

### Bezeichnung 2.7.18

Für eine nach **oben unbeschränkte** Folge setzt man

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \infty.$$

Für eine nach **unten unbeschränkte** Folge setzt man

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := -\infty.$$

**Bemerkung.** Für jede Folge  $(a_n)_n$  gilt also

1.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$
2.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| := \infty \Leftrightarrow (a_n)_n$  ist unbeschränkt.

**Bemerkung 2.7.19** Es sei  $(a_n)$  eine nach oben beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Dann gilt auch  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

Aus Satz 2.7.17 und Bemerkung 2.7.19 folgt:

**Feststellung 2.7.20** Für jede Folge  $(a_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  gilt:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}} \text{ existiert.}$$

Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Beweis der Bemerkung 2.7.19.**

$\Rightarrow$ : Da

$$a_n \leq \sup_{k \geq n} a_k = s_n$$

ist, folgt aus  $s_n \rightarrow -\infty$ , daß  $a_n \rightarrow -\infty$ .

$\Leftarrow$ : Wenn  $a_n \rightarrow -\infty$ , dann gibt es zu jedem  $K > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $m \in \mathbb{N}$  aus  $m \geq n$  stets

$$a_m < -K$$

folgt. Also ist für  $m \geq n$  stets

$$s_m := \sup_{k \geq m} a_k \leq -K$$

und folglich  $s_n \rightarrow -\infty$ .

**Satz 2.7.21 (Obere Häufungswert)**

Es sei  $(a_n)$  eine nach oben beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ .

Wenn  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n > -\infty$  ist, dann ist  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  der größte Häufungswert der Folge  $(a_n)_n$ .

**Bemerkung.** Dieser Satz wird in vielen Lehrbüchern als Definition des Limes Superior verwendet:

1. Wenn eine nach oben beschränkte Folge  $(a_n)_n$  einen Häufungswert hat, dann hat sie einen größten Häufungswert und dieser ist gleich  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

2. Der obige Satz gibt eine Verschärfung des Satzes von Bolzano-Weierstraß: Eine nach **oben** beschränkte Folge  $(a_n)_n$  strebt entweder gegen  $-\infty$  oder sie enthält eine Teilfolge, die gegen den größten Häufungswert der Folge  $(a_n)_n$  konvergiert.

**Beweis. 1.** Man setze  $s_n := \sup_{k \geq n} \{a_k\}$ . Es sei  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n > -\infty$ . Wir bilden rekursiv eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit folgender Eigenschaft:

$$s_{n_{k+1}} - \frac{1}{n_k + 1} < a_{n_{k+1}} \leq s_{n_{k+1}} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0. \quad (*)$$

**Startwert:** Es sei  $n_0 = 0$ .

**Rekursion:** Es seien bereits  $n_0 < n_1 < \dots < n_k$  in  $\mathbb{N}$  so konstruiert, daß  $(*)$  für  $k = 0, \dots, k-1$  gilt. Nach Definition von  $s_{n_k}$  gibt es ein kleinste natürliche Zahl  $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ ,  $n_{k+1} \geq n_k + 1$ , so daß  $(*)$  für  $k$  gilt.

Da  $\frac{1}{n_k} \rightarrow 0$ , konvergiert die Teilfolge  $(a_{n_k})_k$  gegen  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

2. Wenn  $(a_{n_k})_k$  eine konvergente Teilfolge ist, so gilt

$$a_{n_k} \leq \sup_{m > n_k} a_m = s_{n_k}.$$

**Feststellung 2.7.22 ( Limes superior ist subadditiv)**

Es seien  $(a_n)_n$  und  $(b_n)_n$  nach oben beschränkte Folgen in  $\mathbb{R}$  und  $c > 0$ . Dann gilt:

1.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
2.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

## 2.8 Gleichmäßige Konvergenz

### 2.8.1 Funktionenfolgen

#### Bezeichnung 2.8.1 (Menge von Funktionen)

Für eine Menge  $M$  bezeichne  $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$  die Menge aller Funktionen von  $M$  nach  $\mathbb{R}$ .

#### Definition 2.8.2 (Folge von Funktionen)

Eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

heißt **Folge von Funktionen** oder *Funktionenfolge*.

Die Abbildungswerte  $f_n := f(n)$  heißen *Folgliedern*, und man schreibt

$$(f_n)_n = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} := f.$$

---

**Bemerkung.** Wenn  $(f_n)_n$  eine Folge von Funktionen in  $\mathcal{F}(M)$  ist, so bilden für jedes  $x \in M$  die Funktionswerte eine Folge  $(f_n(x))_n$  reeller Zahlen.

#### Definition 2.8.3 (Punktweise Konvergenz)

Eine Funktionenfolge  $(f_n)$  in  $\mathcal{F}(M)$  **konvergiert punktweise** auf  $M$  gegen  $f \in \mathcal{F}(M)$ , falls für alle  $x \in M$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Das heißt:

$$\forall x \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Bemerkung.** Wenn eine Funktionenfolge  $(f_n)_n$  für alle  $x \in M$  einen Grenzwert in  $\mathbb{R}$  hat, so definiert dies eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Die Folge  $(f_n)_n$  konvergiert punktweise gegen  $f$ .

---

**Beispiele 2.8.4** Man zeichne die Graphen der folgenden Funktionen:

1. Für die Folge  $(f_n)_n$  von Funktionen auf dem Intervall  $[0, 1]$  mit  $f_n(x) := x^n$ ,  $x \in [0, 1]$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

2. Für die Folge  $(g_n)_n$  mit  $g_n(x) := \frac{nx}{1+n|x|}$ , ( $x \in \mathbb{R}$ ), gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

3.  $h_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 2 - nx & \text{für } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{für } x \in (\frac{2}{n}, 1]. \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 0.$

**Bemerkung.** Es stellt sich die Frage, welche Eigenschaften der Glieder einer konvergenten Funktionenfolge sich auf die Grenzfunktion übertragen.

Die Beispiele (1.) und (2.) zeigen, daß bei punktweiser Konvergenz die Stetigkeit sich nicht auf die Grenzfunktion vererbt.

Wir müssen den Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen verschärfen, um aus Eigenschaften der Folgliedern auf entsprechende Eigenschaften der Grenzfunktion schließen zu können.

Im Beispiel (3.) konvergiert die Folge  $(h_n)_n$  zwar punktweise gegen die konstante Funktion 0, aber die  $h_n$  sind offensichtlich keine gute Approximation der Grenzfunktion.

Noch krasser ist das Beispiel  $d_n(x) := n h_n(x)$ .

---

#### Definition 2.8.5 (Gleichmäßige Konvergenz)

Eine Funktionenfolge  $(f_n)$  in  $\mathcal{F}(M)$  **konvergiert gleichmäßig** auf  $M$  gegen eine Grenzfunktion  $f \in \mathcal{F}(M)$ , falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $x \in M$  aus  $n \geq n_0$  stets

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

folgt. In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Bemerkung** Man vergleiche dies mit der punktweisen Konvergenz:

$$\forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

---

### Satz 2.8.6 (Stetigkeit der Grenzfunktion)

Für ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  konvergiere die Funktionenfolge  $(f_n)$  in  $\mathcal{F}(I)$  gleichmäßig auf  $I$  gegen  $f \in \mathcal{F}(I)$ . Sind alle  $f_n$  in einem Punkt  $a \in I$  stetig, so gilt dies auch für die Grenzfunktion  $f$ .

**Bemerkung.** Der Satz gilt entsprechend auch für die rechts- bzw. linksseitige Stetigkeit in  $x_0$ .

---

### Beweis (Stetigkeit der Grenzfunktion).

Es sei  $\varepsilon > 0$ . Da die Folge  $(f_n)_n$  gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $f$  konvergiert, gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n \geq n_0$  und für alle  $x \in M$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ist. Da  $f_{n_0}$  in  $x_0$  stetig ist, gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x \in M$  aus  $|x - x_0| < \delta$  stets

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$$

folgt. Dann gilt für  $x \in M$  mit  $|x - x_0| < \delta$ :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

**Bezeichnung 2.8.7** Die Menge der beschränkten Funktionen auf einer Menge  $M$  wird mit

$$\mathcal{B}(M) := \{f \in \mathcal{F}(M) \mid f \text{ beschränkt}\}$$

bezeichnet

### Definition 2.8.8 (Norm einer Funktion)

Es sei  $M$  eine Menge. Die **Norm** einer beschränkten Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  wird definiert durch

$$\|f\| := \sup_{x \in M} |f(x)| := \sup\{|f(x)| \mid x \in M\}.$$

---

### Feststellung 2.8.9 Die Norm

$$\|\cdot\| : \mathcal{B}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

hat die folgenden Eigenschaften:

Für  $f, g \in \mathcal{B}(M)$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:

1.  $\|f\| \geq 0$ , und  $\|f\| = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$ ,
2.  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ ,
3.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ,
4.  $\|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ .

---

**Feststellung 2.8.10** Es sei  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Eine Funktionenfolge  $(f_n)$  in  $\mathcal{F}(M)$  konvergiert genau dann gleichmäßig gegen  $f$ , wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

---

**Beweis.**

⇒: Die Folge  $(f_n)_n$  konvergiere gleichmäßig gegen  $f$ . Es gibt also zu  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Nach Definition der Norm folgt für alle  $n \geq n_0$ :

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

⇐: Es gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß aus  $n \geq n_0$  stets  $\|f_n - f\| < \varepsilon$  folgt. Also gilt für  $n \geq n_0$  und alle  $x \in M$ :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

### Satz 2.8.11 (Cauchy Kriterium)

Eine Funktionenfolge  $(f_n)$  in  $\mathcal{F}(M)$  konvergiert genau dann gleichmäßig auf  $M$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

**Bemerkung.** Aus dem Cauchy Kriterium folgt das **Majorantenkriterium 3.2.25** für gleichmäßige Konvergenz von Reihen von Funktionen.

**Beweis.**

⇒: Die Folge  $(f_n)_n$  konvergiere gleichmäßig gegen  $f$ . Es gibt also zu  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Nach Definition der Norm folgt für alle  $n, m \geq n_0$ :

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

$$\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\| \leq 2\varepsilon.$$

⇐: Wenn  $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$  für alle  $m, n \geq n_0$  ist, dann folgt für alle  $x \in M$ :

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Daher ist  $(f_n(x))_n$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  und es gibt eine Grenzfunktion  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Nun folgt für  $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

## 2.8.2 Regelfunktionen

Wir stellen für die Integrationstheorie eine Klasse von reellen Funktionen bereit, die sogenannten **Regelfunktionen**.

Zu den Regelfunktionen gehören die *Treppenfunktionen* und die *stückweise stetigen Funktionen*:

### Definition 2.8.12 (Treppenfunktion)

Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall. Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine **Treppenfunktion**, wenn es endlich viele Punkte  $a = c_0 < c_1, \dots < c_k = b$  so gibt, daß für  $\kappa = 1, \dots, k$  die Einschränkung  $f|_{(c_{\kappa-1}, c_\kappa)}$  konstant ist.

**Bemerkung.** Die Treppenfunktion  $f$  ist also auf den offenen Intervallen  $(c_{\kappa-1}, c_\kappa)$  konstant. Die Werte in den Teilpunkten  $c_\kappa$  unterliegen keiner Beschränkung.

### Definition 2.8.13 (Stückweise stetige Funktion)

Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall. Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stückweise stetig**, wenn es endlich viele Punkte  $a = c_0 < c_1, \dots < c_k = b$  so gibt, daß für  $\kappa = 1, \dots, k$  die Einschränkung  $f|_{(c_{\kappa-1}, c_\kappa)}$  stetig ist und in den Endpunkten einseitige Grenzwerte in  $\mathbb{R}$ :

$$f(c_{\kappa-1}^+) = \lim_{x \downarrow c_{\kappa-1}} f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(c_\kappa^-) = \lim_{x \uparrow c_\kappa} f(x)$$

hat.

**Bemerkung.** Die stückweise stetige Funktion  $f$  ist also auf den offenen Intervallen  $(c_{\kappa-1}, c_{\kappa})$  stetig und hat eine stetige Fortsetzung auf die abgeschlossenen Intervalle  $[c_{\kappa-1}, c_{\kappa}]$ .

Es gibt keine Vorschrift für die Werte in den Teilpunkten  $c_{\kappa}$ .

Eine stückweise stetige Funktion ist beschränkt.

### Definition 2.8.14 (Regelfunktion)

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall mit Anfangspunkt  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  und Endpunkt  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine **Regelfunktion**, wenn folgendes gilt:

1. Für jeden inneren Punkt  $x \in (a, b)$  existieren in  $\mathbb{R}$  der linksseitige Grenzwert  $f(x^+)$  und der rechtsseitige Grenzwert  $f(x^-)$ .
2. Wenn der Anfangspunkt  $a \in I$  liegt, so existiert der rechtsseitige Grenzwert  $f(a^+) \in \mathbb{R}$ .
3. Wenn der Endpunkt  $b \in I$  liegt, so existiert der linksseitige Grenzwert  $f(b^-) \in \mathbb{R}$ .

Die Menge der Regelfunktionen auf  $I$  wird mit  $\mathcal{R}(I) = \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$  bezeichnet.

**Bemerkung** Die Definition der Regelfunktion macht keine Vorschrift über die Lage von  $f(x)$  zu den einseitigen Grenzwerten  $f(x^+)$  und  $f(x^-)$  im selben Punkt.

### Beispiele 2.8.15 (Regelfunktionen)

Beispiele von Regelfunktionen sind:

1. Treppenfunktionen (vgl. Definition 2.8.12),
2. stückweise stetige Funktionen (vgl. Definition 2.8.13),
3. monotone Funktionen (vgl. Beispiel 2.3.30 (3.)),
4. Maximum, Summe, Produkt, und Quotient von Regelfunktionen:  
Die Rechenregeln 2.3.24 für stetige Funktionen gelten sinngemäß für Regelfunktionen.

5. die Stammbrüche-Funktion (vgl. Beispiel 2.3.33)

Dagegen ist die Wackelfunktion (vgl. Beispiel 2.3.30 (5.)) keine Regelfunktion, da für die Wackelfunktion in  $x = 0$  die einseitigen Grenzwerte nicht existieren.

**Feststellung 2.8.16 (Grenzwert von Regelfunktionen)** Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $(f_n)_n$  eine Folge von Regelfunktionen auf  $I$ , die gleichmäßig auf  $I$  gegen eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert.

Dann ist die Grenzfunktion  $f$  eine Regelfunktion.

**Beweis.** Die Feststellung folgt unmittelbar aus Satz 2.8.6

### Satz 2.8.17 (Approximation für Regelfunktionen)

Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall. Für eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist eine Regelfunktion.
2. Es gibt eine Folge von Treppenfunktionen  $t_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert:

$$\|t_n - f\| \rightarrow 0.$$

**Korollar 2.8.18 (Beschränktheit von Regelfunktionen)** Eine Regelfunktion auf einem kompakten Intervall ist beschränkt.

**Übungsaufgabe.** Man beweise die Aussage des des Korollars unabhängig, indem man die Beweismethode des Lemmas 2.6.2 anpaßt. Man vgl. dazu auch den Beweis von Satz 2.6.9.

**Beweis.** 2 $\Rightarrow$ 1: Klar nach Feststellung 2.8.16

1 $\Rightarrow$ 2: Zu  $n \in \mathbb{N}$  bilde man die Menge

$$A_n := \{c \in [a, b] \mid \text{ex. Treppenfunktion } t : [a, c] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } |t(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \text{ für } x \in [a, c]\}.$$

**Behauptung:**  $a \in A_n$  und  $x_0 := \sup A_n \in A_n$ .

Es ist  $a \in A_n$ . Sei also  $a < x_0$ . Da  $f$  Regelfunktion und  $x_0 = \sup A_n$  ist, gibt es  $c \in A_n$  mit  $a \leq c < x_0$ , so daß

$$|f(x) - f(x_0^-)| < \frac{1}{n} \quad \text{für } c < x < x_0.$$

Man wähle eine Treppenfunktion  $t : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  und setze  $t$  zu einer Treppenfunktion  $\tilde{t} : [a, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$  fort:

$$\tilde{t}(x) := \begin{cases} t(x) & \text{für } x \in [a, c], \\ f(x_0^-) & \text{für } x \in (c, x_0), \\ f(x_0) & \text{für } x = x_0, \end{cases}$$

Dann gilt  $|t(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$  für  $x \in [a, x_0]$ . Also  $x_0 \in A_n$ .

**Annahme:**  $x_0 := \max A_n < b$ .

Da  $f$  Regelfunktion ist, gibt es  $d \in [a, b]$  mit  $x_0 < d$  so, daß

$$|f(x) - f(x_0^+)| < \frac{1}{n} \quad \text{für } x \in (x_0, d].$$

Man wähle eine Treppenfunktion  $t : [a, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$  und setze  $t$  auf  $[a, d]$  fort:

$$\tilde{t}(x) := \begin{cases} t(x) & \text{für } x \in [a, x_0], \\ f(x_0^+) & \text{für } x \in (x_0, d]. \end{cases}$$

Dann gilt  $|t(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$  für  $x \in [a, d]$ . Also ist  $d \in A_n$  im Widerspruch zur Annahme.

Also ist  $A_n = [a, b]$  und es gibt eine Treppenfunktion  $t_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $|t_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$  für  $x \in [a, b]$ .

Die Folge  $(t_n)_n$  konvergiert gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $f$ .

**Bemerkung 2.8.19 (zur Beweismethode von Satz 2.8.17)** Die Beweismethode des Approximationssatzes wird häufiger verwendet. Man spricht von einem **Zusammenhangs-Schluß**:

Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und  $E$  eine Eigenschaft, die ein Teilintervall  $[c, d] \subset [a, b]$  haben kann. Es gelte:

Aus  $[c, d]$  und  $(d, e]$  haben  $E$ , folgt  $[c, e]$  hat  $E$ .

Man bilde dann  $A := \{c \mid c \in [a, b], [a, c] \text{ hat Eigenschaft } E\}$ . und zeige:

1.  $a \in A$ .
2.  $\sup A \in A$ , d.h.  $\max A$  existiert.
3. Wenn  $c \in A$  und  $c \neq b$ , so gibt es ein  $d \in (c, b]$  mit  $d \in A$ .

Dann hat  $[a, b]$  die Eigenschaft  $E$ .

### Korollar 2.8.20 (Monotone Approximation)

Es seien  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall. und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Regelfunktion.

1. Es gibt eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $f$  konvergiert.
2. Wenn  $f \geq 0$  ist, gibt es eine monoton wachsende Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen, die gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $f$  konvergiert.

**Bemerkung** Analog zu 2.8.20 (1.) gibt es eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

### Beweis.

1. Es sei  $(t_n)_n$  eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Man bilde zunächst die Treppenfunktion

$$u_n := t_n - \|t_n - f\|.$$

Dann gilt  $u_n \leq f$  und  $\|u_n - f\| \leq 2\|t_n - f\| \rightarrow 0$ .

Für die Treppenfunktionen

$$v_n := \max(u_1, \dots, u_n)$$

gilt dann

$$u_n \leq v_n \leq f \quad \text{und} \quad \|v_n - f\| \leq \|u_n - f\| \rightarrow 0.$$

2. Wenn  $f \geq 0$  so bilde man zunächst die Folge  $(v_n)_n$  wie in (1.). Dann leistet  $w_n := \max(v_n, 0)$  das Gewünschte.



**Bemerkung 2.8.21** Es seien  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Regelfunktion. Zu  $n \in \mathbb{N}$  gibt es höchstens endlich viele Punkte  $\{x_1, \dots, x_{k_n}\}$  in denen

$$|f(x_{\kappa}^-) - f(x_{\kappa}^+)| \geq \frac{1}{n}$$

ist.

**Feststellung 2.8.22** Eine Regelfunktion hat also höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

**Beweis.** Es gibt eine Treppenfunktion  $t_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$|t_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2n} \quad \text{für } x \in [a, b].$$

In allen Stetigkeitsstellen  $x$  von  $t_n$  ist dann

$$|f(x^-) - f(x^+)| \leq |f(x^-) - t(x)| + |t(x) - f(x^+)| < \frac{1}{n}.$$

## 3 Integral und Ableitung

### 3.1 Integral von Regelfunktionen

#### 3.1.1 Definition eines Integrals

**Bemerkung.**

Mit dem Integral einer Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$  wird die **Fläche** angegeben, die durch das Intervall  $I$  auf der Koordinatenachse und den Graphen von  $f$  begrenzt wird.

Dabei zählen Flächen oberhalb der Koordinatenachse positiv und Flächen unterhalb der Koordinatenachse negativ.

Für kompakte Intervalle  $I$  kann man den Quotienten aus der obigen Fläche und der Länge  $|I|$  des Intervalls als **Mittelwert** der Funktion  $f$  auf dem Intervall  $I$  ansehen.

**Beispiel aus der Physik:**

- Ein Fahrzeug bewegt sich auf einer Geraden während des Zeitintervalls  $[t_0, t_1]$  mit der Geschwindigkeit

$$v : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wenn das Fahrzeug vorwärts fährt, ist  $v(t) > 0$ .

Wenn das Fahrzeug rückwärts fährt ist  $v(t) < 0$ .

- Zur Anfangszeit  $t_0$  befinde sich das Fahrzeug auf der Geraden im Ursprung  $t_0 = 0$ . Zur Zeit  $t \in [t_0, t_1]$  sei das Fahrzeug im Punkte  $x(t)$ .
- Das Integral der Funktion  $v$  über das Intervall  $[t_0, t_1]$  ergibt den Standpunkt  $x(t_1)$  des Fahrzeugs zur Zeit  $t_1$ .
- der Quotient aus dem Integral und der Zeitdifferenz  $t_1 - t_0$  ergibt die mittlere Geschwindigkeit auf  $[t_0, t_1]$ .

**Bemerkung.**

In den Lehrbüchern findet man unterschiedliche Zugänge zum Integral, die sich, abgesehen von den verschiedenen Konstruktionen, darin unterscheiden, wie umfangreich die Funktionenklassen sind, für die ein Integral erklärt wird.

Mit wachsender Allgemeinheit aufgezählt sind dies

**stetige** Funktionen und ihre Stammfunktionen,  
**stückweise stetige** Funktionen und ihr Integral,  
**Regelfunktionen** und das Regelintegral,  
**Riemann-integrierbare** Funktionen und das Riemann-Integral (für mehrere Variable in Anlysis II),  
**Lebesgue-integrierbare** Funktionen und das Lebesgue-Integral (Anlysis III).

Diese Integralbegriffe ergeben auf den jeweils kleineren Funktionenklassen dasselbe Ergebnis.

---

**Bemerkung.** Das Ziel der Integraltheorien ist weniger, für möglichst *wilde* Funktionen ein Integral zu erklären, sondern zu zeigen, wie sich das Integral mit unterschiedlichen Konvergenzbegriffen für Funktionenfolgen verträgt.

Eine Folge von Funktionen kann z. B. beschränkt oder monoton sein und sie kann punktweise oder gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren.

Die folgenden Regeln sollten so allgemein wie *möglich* gelten:

1. Der Grenzwert  $f$  einer Folge  $(f_n)_n$  integrierbarer Funktionen ist wieder eine integrierbare Funktion.
2. Der Grenzwert der Integrale der  $f_n$  ist das Integral des Grenzwertes  $f$ .

Ganz allgemein geht das nicht, aber je weniger restriktiv der Integralbegriff ist, um so leichter kann man Grenzübergänge vollziehen und Integrale berechnen.

---

**Bemerkung (Zur Wahl der Integrationstheorie).**

In der Analysis I beschränken wir uns vorerst auf:

**kompakte Intervalle** als Integrationsbereich.

**gleichmäßige Konvergenz** als Grenzwertbegriff.

**beschränkte Funktionen** als Integranden, genauer eine handliche Teilmenge der beschränkten Funktionen, die auch die **Grenzwerte** gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen enthält:

- Stetige Funktionen reichen für viele Anwendungen aus, aber nur stetige Funktionen ist zu eng.

- Wir wählen die **Regelfunktionen**.
- Die Vorteile des Riemann-Integral zeigen sich erst in der Integrationstheorie mehrerer Variabler.

---

**Bemerkung** Wir charakterisieren das Integral der Regelfunktionen durch Axiome, die durch die anschauliche Deutung des Integrals als Fläche nahegelegt werden:

**Definition 3.1.1 (Axiome des Regel-Integrals)**

Das **Regel-Integral** ist eine Familie von Abbildungen von den Regelfunktionen in die reellen Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

1. Zu jedem nichtleeren, kompakten Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , gibt es eine Abbildung, die man **Integral über  $[a, b]$**  nennt:

$$\int_{[a,b]} : \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Jeder Funktion  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  wird also eine reelle Zahl zugeordnet, die man das **Integral von  $f$**  über  $[a, b]$  nennt:

$$f \mapsto \int_{[a,b]} f.$$

2. Dabei sollen die folgenden Regeln gelten:

**Intervall-Additivität:** Für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a < b < c$  und  $f \in \mathcal{R}([a, c])$  gilt:

$$\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f = \int_{[a,c]} f.$$

Auf der linken Seite wird die jeweilige Einschränkung  $f|_{[a,b]}$  bzw.  $f|_{[b,c]}$  integriert.

**Monotonie:** Für  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$  gilt:

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$$

**Eichung:** Es sei  $c \in \mathbb{R}$ . Für die konstante Funktion  $c \in \mathcal{R}([a, b])$  gilt:

$$\int_{[a,b]} c = c \cdot (b - a).$$

Sehr suggestiv ist die von von Leibniz eingeführte Bezeichnung des Integrals mit einer formalen Variablen  $x$  und einem **Differential**  $dx$ . Vorerst ist das Differential nur ein Symbol.

### Bezeichnung 3.1.2 (Differentialschreibweise)

Es seien  $[a, b]$  ein nichtleeres Intervall und  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . In Differentialschreibweise bezeichnet man das Integral mit:

$$\int_a^b f(x) dx := \int_{[a,b]} f.$$

$a$  heißt **untere Grenze** und  $b$  **obere Grenze** des Integrals.

**Bemerkung.** In dieser Bezeichnung wirken das Integralzeichen  $\int_a^b$  und das Differential  $dx$  wie eine öffnende und eine schließende Klammer.

Wie bei einem Summationsindex ist die Bezeichnung der Variablen unwesentlich:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$ .

### Bemerkung und Bezeichnung 3.1.3

1. Es seien  $c < d$  in  $I = [a, b]$ . Wir vereinbaren die Bezeichnung:

$$\int_d^c f(x) dx := - \int_c^d f(x) dx.$$

2. Da  $\int_a^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx + \int_a^a f(x) dx$  ist, folgt

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

**Bemerkung.** Mit Bezeichnung (1.) gilt für  $a < c < b$ :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Diese Formel hat eine anschauliche Deutung:

*Integriert man entlang des Weges von  $a$  nach  $b$  und dann zurück von  $b$  nach  $c$ , so erhält man das Integral entlang der Wegstrecke von  $a$  nach  $c$ .*

### Definition 3.1.4 (Stammfunktion)

Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall  $f \in \mathcal{R}(I)$  und  $x_0 \in I$ . Die Funktion

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \ni x_0 \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$$

heißt eine **Stammfunktion** der Regelfunktion  $f$ .

### Bemerkung.

1. Das Integral ist durch eine Stammfunktion eindeutig festgelegt. Für  $x, y \in [a, b]$  gilt

$$F(y) - F(x) = \int_{x_0}^y f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_x^y f(t) dt.$$

2. Wir werden später sehen, daß eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  in allen Stetigkeitspunkten  $x$  von  $f$  differenzierbar ist und dort  $F'(x) = f(x)$  gilt (vgl. Feststellung 3.2.12). Zu den Stetigkeitspunkten vergleiche Feststellung 2.8.22.

**Feststellung 3.1.5 (Lipschitz-Stetigkeit d. Stammfkt.)** Eine Stammfunktion  $F$  einer Regelfunktion  $f \in \mathcal{R}(I)$  ist auf jedem kompakten Teilintervall  $[a, b] \subset I$  Lipschitzstetig.

Eine Lipschitzkonstante von  $F$  ist  $M := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| |b - a|.$$

**Beweis.** Für  $x, y \in [a, b]$  gilt

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t) dt.$$

Es sei etwa  $x < y$ . Aus  $-M \leq f \leq M$ , der Monotonie des Integrals und der Eichungsvorschrift folgen:

$$F(y) - F(x) = \int_{[x,y]} f \leq M(y - x) = M|y - x|.$$

$$F(y) - F(x) = \int_{[x,y]} f \geq -M(y - x) = -M|y - x|$$

und somit

$$|F(y) - F(x)| \leq M|y - x|.$$

Da die letzte Ungleichung symmetrisch in  $x$  und  $y$  ist, gilt sie auch im Fall  $y < x$ .

### 3.1.2 Integral von Treppenfunktionen

**Bemerkung.** Wir haben in Definition 3.1.1 axiomatisch festgelegt, welche Eigenschaften ein Integral hat und einige Folgerungen aus den Axiomen gezogen. Es ist aber noch unklar, ob es überhaupt ein Integral für Regelfunktionen gibt und, falls ja, ob es eindeutig bestimmt ist.

Wir zeigen zunächst, daß das Integral auf den Treppenfunktionen existiert und eindeutig erklärt ist.

**Bemerkung.** Bei der Berechnung des Integral von Treppenfunktionen hilft die folgende Verschärfung der Eichungsvorschrift:

#### Lemma 3.1.6 (Eichung des Integrals)

Es sei  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  und  $f|_{(a, b)} = c$  konstant. Dann gilt

$$\int_{[a, b]} f = c(b - a)$$

**Beweis.** Man fixiere ein  $x_0 \in (a, b)$ . Die Stammfunktion

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \text{für } x \in [a, b].$$

ist Lipschitz-stetig. Also gilt

$$\begin{aligned} F(a^+) &= \lim_{x \downarrow a} F(x) = \lim_{x \downarrow a} \int_x^{x_0} f(t) dt = \lim_{x \downarrow a} c(x_0 - x) \\ &= c(x_0 - a) \end{aligned}$$

Analog folgt  $F(b^-) = c(b - x_0)$ .

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= F(b) - F(a) = F(b^-) - F(a^+) \\ &= c(b - x_0) - c(x_0 - a) = c(b - a). \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Wir folgern aus den Axiomen 3.1.1 für das Integral eine Formel (\*) für das Integral einer Treppenfunktion und zeigen anschließend, daß das Integral durch diese Formel wohldefiniert und damit eindeutig bestimmt ist.

Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall, mit Teilpunkten  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , und  $t : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion, die auf den Teilintervallen  $(x_{k-1}, x_k)$  konstant ist:

$$t|_{(x_{k-1}, x_k)} = c_k \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Nach Korollar 3.1.6 muß dann gelten:

$$\int_{[x_{k-1}, x_k]} t = c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Aus der Intervall-Additivität des Integrals folgt dann

$$\int_{[a, b]} t = \sum_{k=1}^n \int_{[x_{k-1}, x_k]} t = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) \quad (*).$$

**Bemerkung.** Die Darstellung einer Treppenfunktion  $t : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch Angabe von Teilpunkten  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  und der Werte

$$\begin{aligned} f|_{(x_{k-1}, x_k)} &= c_k \quad \text{für } k = 1, \dots, n, \\ t(x_k) & \quad \quad \quad \text{für } k = 0, \dots, n \end{aligned}$$

ist nicht eindeutig. Man kann z. B. das Intervall durch weitere Teilpunkte unterteilen und erhält eine andere Darstellung der Treppenfunktion  $t$ .

Wir wollen zeigen, daß sich das Ergebnis der Formel (\*) von der Darstellung der Treppenfunktion unabhängig ist. D.h. das Integral ist durch die Formel (\*) wohldefiniert.

### Bezeichnung 3.1.7 (Zerlegungssumme)

Es sei  $t : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion. Wir nennen eine Menge  $Z$  von Punkten  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine für  $t$  **zulässige Zerlegung** des Intervalls  $[a, b]$ , wenn

$$t|(x_{k-1}, x_k) = c_k \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

konstant ist und bezeichnen das Ergebnis der Formel  $(\star)$  mit

$$I(Z) = I(Z, t) := \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) \quad (\star\star).$$

$I(Z) = I(Z, t)$  heißt die **Zerlegungssumme** von  $t$  zur Zerlegung  $Z$ .

**Bemerkung.** Wir zeigen schreiben später  $\int_{[a,b]} t$  statt  $I(Z)$ .

---

**Lemma 3.1.8** *Es sei  $t : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion. Für alle für  $t$  zulässigen Zerlegungen  $Z$  und  $\tilde{Z}$  geben die Zerlegungssummen das gleiche Ergebnis:*

$$I(Z) = I(\tilde{Z}).$$

**Bemerkung.** Wenn  $Z$  und  $\tilde{Z}$  zulässige Zerlegungen sind, so bilde man die Zerlegung  $Z \cup \tilde{Z}$ , die gerade aus allen Teilpunkten von  $Z$  und den Teilpunkten von  $\tilde{Z}$  besteht, und zeige

$$I(Z) = I(Z \cup \tilde{Z}) = I(\tilde{Z}).$$

Die Zerlegung  $Z \cup \tilde{Z}$  entsteht aus  $Z$ , indem man nacheinander die Teilpunkte aus  $\tilde{Z} \setminus Z$  zu  $Z$  hinzufügt.

Es reicht also zu zeigen, daß beim Hinzufügen eines weiteren Teilpunktes sich das Ergebnis der Formel  $(\star\star)$  nicht ändert.

Dann folgt induktiv  $I(Z) = I(Z \cup \tilde{Z})$  und analog  $I(\tilde{Z}) = I(Z \cup \tilde{Z})$ .

---

**Beweis.** Es reicht zu zeigen, daß sich die Zerlegungssumme beim Hinzufügen eines weiteren Teilpunktes nicht ändert.

Es sei  $Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  eine für  $t$  zulässige Zerlegungen von  $[a, b]$  mit

$$t|(x_{k-1}, x_k) = c_k.$$

Zu einem  $x^* \in [a, b]$  mit  $x^* \notin Z$  bilde man  $Z^* := Z \cup \{x^*\}$ .

Es gibt ein  $l \in \{1, \dots, n\}$ , so daß  $x_{l-1} < x^* < x_l$  ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} I(Z) &= \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{l-1} c_k(x_k - x_{k-1}) + c_l(x^* - x_{l-1}) + c_l(x_l - x^*) \\ &\quad + \sum_{k=l+1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) = I(Z^*) \end{aligned}$$

---

### Definition 3.1.9 (Integral von Treppenfunktionen)

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall. Das **Integral** einer Treppenfunktion  $t : I \rightarrow \mathbb{R}$  definiert man als Zerlegungssumme zu einer zulässigen Zerlegung  $Z$  von  $I$  (vgl. Bezeichnung 3.1.7):

$$\int_I t := I(Z, t).$$

### Satz 3.1.10 (Eigenschaften des Integrals)

Das Integral von Treppenfunktionen erfüllt die Regeln

**Intervall-Additivität,**

**Monotonie,**

**Eichung,**

die in den Axiomen 3.1.1 für ein Integral gefordert werden. Es ist durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

---

**Beweis.**

**Intervalladditivität:** Es seien  $a, b, c \in I$  mit  $a < b < c$  und  $t : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Regelfunktion. Man wähle eine für  $t$  zulässige Zerlegung  $Z$  von  $[a, c]$ , die den Punkt  $b$  enthält. Dann ist  $Z_1 = Z \cap [a, b]$  eine zulässige Zerlegung von  $[a, b]$  und  $Z_2 = Z \cap [b, c]$  eine zulässige Zerlegung von  $[b, c]$ . Aus der Formel 3.1.7(\*\*) folgt

$$\int_{[a,b]} t + \int_{[b,c]} t = I(Z_1, t) + I(Z_2, t) = I(Z, t) = \int_{[a,c]} t.$$

**Monotonie:** Zwei Treppenfunktionen haben eine gemeinsame zulässige Zerlegung des Intervalls. Die entsprechenden Zerlegungssummen haben die Monotonie-Eigenschaft.

**Eichung:** Klar nach Definition.

**Eindeutigkeit:** Folgt aus der Formel 3.1.7(\*\*) für  $I(Z, t)$ .

### Feststellung 3.1.11 (Linearität des Integrals)

Das Integral von Treppenfunktionen ist **linear**:

Für Treppenfunktionen  $t_1, t_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_I (\lambda t_1 + \mu t_2) = \lambda \int_I t_1 + \mu \int_I t_2.$$

**Beweis.** Zu zwei Treppenfunktionen  $t_1, t_2$  auf  $I$  gibt es eine gemeinsame zulässige Zerlegung des kompakten Intervalls  $I$ . Aus der Formel 3.1.7(\*\*) folgt

$$I(Z, \lambda t_1 + \mu t_2) = \lambda I(Z, t_1) + \mu I(Z, t_2).$$

Folglich gilt:

$$\int_I (\lambda t_1 + \mu t_2) = \lambda \int_I t_1 + \mu \int_I t_2.$$

**Bemerkung.** Aus der Abschätzung

$$-||t|| \leq t \leq ||t||$$

der Monotonie und der Eichung des Integrals erhält man die Abschätzung des Integrals durch die Norm des Integranden:

### Feststellung 3.1.12 (Beschränktheit des Integrals)

Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall. Für das Integral einer Treppenfunktion  $t : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$|\int_I t| \leq (b - a) ||t||.$$

**Bemerkung.** Aus der Normabschätzung des Integrals und der Linearität des Integrals erhält man für die Differenz der Integrale zwei Treppenfunktionen die folgende Abschätzung

### Korollar 3.1.13 (Beschränktheit des Integrals)

Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall. Für das Integral zweier Treppenfunktionen  $t_1, t_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$\left| \int_{[a,b]} t_1 - \int_{[a,b]} t_2 \right| \leq (b - a) ||t_1 - t_2||.$$

**Bemerkung.** Diese Ungleichung hat die Form einer Lipschitz-Bedingung und wird genau so benutzt, um die Konvergenz von Integralen zu zeigen.

## 3.1.3 Integral von Regelfunktionen

**Feststellung 3.1.14** Es seien  $I$  ein kompaktes Intervall und  $f \in \mathcal{R}(I)$ . Für jede Folge  $(t_n)_n$  von Treppenfunktionen auf  $I$ , die gleichmäßig auf  $I$  gegen  $f$  konvergiert, existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n.$$

Dieser Grenzwert hängt nicht von der Wahl der approximierenden Folge ab.

**Beweis.** Da die Folge  $(t_n)_n$  gleichmäßig auf  $I$  gegen  $f$  konvergiert, gilt das Cauchy-Kriterium 2.8.11

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : ||f_n - f_m|| < \varepsilon.$$

Nach Korollar 3.1.13 gilt

$$\left| \int_{[a,b]} t_n - \int_{[a,b]} t_m \right| \leq (b-a) \|t_n - t_m\|.$$

Also ist auch die Folge  $(\int_{[a,b]} t_n)_n$  der Integrale eine Cauchyfolge und somit konvergent.

Nach dem Reißverschlußprinzip konvergiert für jede andere Folge  $(\tilde{t}_n)_n$  von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, die Folge  $(\int_{[a,b]} \tilde{t}_n)_n$  der Integrale gegen den gleichen Grenzwert.

**Bemerkung.** Nach Satz 2.8.17 gibt es zu jeder Regelfunktion  $f$  auf einem kompakten Intervall eine Folge  $(t_n)_n$  von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

Nach Feststellung 3.1.14 konvergiert die Folge  $(\int_{[a,b]} t_n)_n$  der Integrale gegen einen Grenzwert, der unabhängig von der gewählten Folge von Treppenfunktionen ist.

Wir definieren diesen Grenzwert als Integral von  $f$ :

**Definition 3.1.15 (Integral für Regelfunktionen)**

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Regelfunktion. Man erklärt das **Integral** von  $f$  als Grenzwert der Integrale einer Folge  $(t_n)_n$  von Treppenfunktionen, die auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert:

$$\int_{[a,b]} f := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} t_n.$$

**Satz 3.1.16 (Eigenschaften des Regel-Integrals)**

1. Das Integral 3.1.15 erfüllt die Axiome 3.1.1

**Intervall-Additivität,**  
**Monotonie,**  
**Eichung.**

Es ist durch diese Axiome eindeutig bestimmt.

2. Das Integral ist **linear**: Für Regelfunktionen  $f, g$  auf einem kompakten Intervall  $I$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

3. Das Integral ist **beschränkt**: Für eine Regelfunktion  $f$  auf einem kompakten Intervall gilt:

$$\left| \int_I f \right| \leq (b-a) \|f\|.$$

**Beweis.**

1. **Inervall-Additivat:** überträgt sich von den Treppenfunktionen (vgl. Satz 3.1.10) unmittelbar auf die Grenzwerte.

**Monotonie:** Es seien  $f, g$  Regelfunktionen auf  $[a, b]$  und es gelte  $f \leq g$ . Nach Korollar 2.8.20 gibt es eine monoton wachsende Folge  $(s_n)_n$ , die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert und eine monoton fallende Folge  $(t_n)_n$  von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert.

Dann ist  $s_n \leq f \leq g \leq t_n$  und folglich

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} t_n = \int_{[a,b]} g.$$

**Eichung:** Die Eichung gilt für Treppenfunktionen.

**Eindeutigkeit:** Es gibt eine monoton wachsende Folge  $(s_n)_n$  und eine monoton fallende Folge  $(t_n)_n$  von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren. Aus der Monotonie des Integrals folgt nun die Eindeutigkeit.

2. Die Linearität des Integrals von Treppenfunktionen überträgt sich unmittelbar auf die Grenzwerte (vgl. 3.1.11)
3. Die Beschränktheit des Integrals von Treppenfunktionen überträgt sich unmittelbar auf die Grenzwerte. (vgl. 3.1.12)

**Korollar 3.1.17 (Beschränktheit des Integrals)**

1. Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall. Für das Integral zweier Regelfunktionen  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$  gilt:

$$\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} g \right| \leq (b-a) \|f - g\|.$$

2. Konvergiert eine Funktionenfolge  $(f_n)_n$  in  $\mathcal{R}([a, b])$  gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $f$ , dann ist  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  und es gilt

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n$$

### Bemerkung 3.1.18 (Endlich viele Punkte)

1. Eine Funktion  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die nur in endlich vielen Punkten einen Wert ungleich Null hat, ist eine Treppenfunktion mit  $\int_{[a,b]} \phi = 0$ .

2. Es sei  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Ändert man  $f$  in endlich vielen Punkten beliebig ab, so ändert sich der Wert des Integrals nicht:

$$\int_{[a,b]} (f + \phi) = \int_{[a,b]} f.$$

**Bemerkung.** Unter einer Translation versteht man die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x + c,$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$  eine Konstante ist.

An der Eichungsformel 3.1.6 sieht man, daß das Integral einer Treppenfunktion invariant unter Translationen ist. Dies überträgt sich dann auf Regelfunktionen:

### Bemerkung 3.1.19 (Translationsinvarianz)

Das Integral ist **translationsinvariant**. Für  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  und  $c \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx$$

**Bemerkung.** Eine **affine** Funktion hat die Form

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto cx + d \text{ mit Konstanten } c, d \in \mathbb{R}.$$

Die folgende Transformationsformel ist ein Spezialfall der **Substitutionsformel 3.1.47** für Integrale.

### Lemma 3.1.20 (Affine Transformationen)

Gegeben sei eine affine Funktion  $g : x \mapsto cx + d$ ,  $x \in \mathbb{R}$  mit Konstanten  $c, d \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ , ein kompaktes Intervall  $I$  und  $J = g(I)$ . Für  $f \in \mathcal{R}(J)$  gilt:

$$\int_{g(I)} f = |c| \int_I f \circ g.$$

Man beachte, daß auf der rechten Seite der Betrag von  $c$  steht. Ist  $I = [a, b]$  so lautet die Formel in Differential-Schreibweise:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = \int_a^b f(g(x)) \cdot c dx.$$

**Beweis.** Es reicht die Transformationsformel für Treppenfunktionen zu zeigen. Durch Grenzwertbildung folgt sie dann für Regelfunktionen.

Wegen der Intervall-Additivität des Integrals reicht es, die Formel für konstante Funktionen  $f = K$  zu zeigen.

Es sei  $I = [a, b]$ .

Wir betrachten zunächst den Fall  $c > 0$ . Dann ist  $g(a) < g(b)$  und es gilt

$$\int_{g(I)} f = K(g(b) - g(a)) = Kc(b-a) = c \int_{[a,b]} f \circ g.$$

Im Falle  $c < 0$  ist  $g(a) > g(b)$  und es gilt

$$\int_{g(I)} f = K(g(a) - g(b)) = Kc(a-b) = -c \int_{[a,b]} f \circ g.$$



### 3.1.4 Integration stetiger Funktionen

**Bemerkung.** Wir bringen hier nur ganz wenige Beispiele von Integralen elementarer Funktionen. Leichter berechnet man diese Integrale später mit den folgenden Hilfsmitteln:

- **Hauptsatz** der Differential- und Integralrechnung.
- **Partielle Integration** 3.1.34
- **Substitution** 3.1.47
- Integration der **Umkehrfunktion** 3.1.37

#### Beispiele 3.1.21

$$\int_0^x \xi d\xi = \frac{x^2}{2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

**Bemerkung.** Die zu berechnende Fläche ist ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge  $|x|$ . Aus der Geometrie weiß man, daß die Dreiecksfläche  $\frac{x^2}{2}$  ist.

**Beweis.** Wähle die äquidistante Zerlegung des Intervalls  $[0, x]$  in  $n$  Teile, ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$Z = \{0 = x_0 < x_1 = \frac{x}{n} < \dots < x_k = \frac{kx}{n} < \dots < x_n = x\}$$

und approximiere die Funktion  $f(\xi) = \xi$  durch die Treppenfunktion

$$t_n : \xi \mapsto \begin{cases} \frac{kx}{n} & \text{für } \xi \in (\frac{(k-1)x}{n}, \frac{kx}{n}], \\ 0 & \text{für } \xi = 0. \end{cases}$$

Die Folge  $(t_n)_n$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$  und somit gilt:

$$\int_0^x t_n(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^n \frac{kx}{n} \frac{x}{n} = \frac{x^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \frac{x^2}{2} = \int_0^x f(\xi) d\xi.$$

**Bemerkung.** Für eine stetige Funktion kann man leicht approximierende Treppenfunktionen angeben:

#### Bezeichnung 3.1.22

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Zu einer Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$$

und einer Menge  $\Xi$  von **Stützstellen**

$$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\} \quad \text{mit } \xi_\varkappa \in [x_{\varkappa-1}, x_\varkappa] \text{ für } \varkappa = 1, \dots, k,$$

bildet man die Treppenfunktion

$$t_{(f,Z,\Xi)} : x \mapsto \begin{cases} f(\xi_\varkappa) & \text{für } x \in (x_{\varkappa-1}, x_\varkappa), (\varkappa = 1, \dots, k), \\ f(x_\varkappa) & \text{für } x = x_\varkappa, (\varkappa = 0, \dots, k). \end{cases}$$

#### Bezeichnung 3.1.23 (Feinheit einer Zerlegung)

Wenn  $Z = \{a = x_0 < \dots < x_k = b\}$  eine Zerlegung ist, so heißt das Maximum der Längen der Teilintervalle  $[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]$  die **Feinheit** der Zerlegung. Die Feinheit wird mit

$$d(Z) := \max_{\varkappa=1, \dots, k} (x_\varkappa - x_{\varkappa-1})$$

bezeichnet.

**Bemerkung.** Wenn  $Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$  eine Zerlegung ist, so nennen wir eine Menge von Stützstellen  $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  **zulässig**, wenn  $\xi_\varkappa \in [x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]$  für  $\varkappa = 1, \dots, k$  ist.

#### Satz 3.1.24 (Approximierende Treppenfunktion)

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß für jede Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  der Feinheit

$$d(Z) < \delta$$

und jede zulässige Wahl von Stützstellen  $\Xi$  der Abstand von  $f$  zu der Treppenfunktion  $t_{(f,Z,\Xi)}$  kleiner als  $\varepsilon$  ist:

$$\|f - t_{(f,Z,\Xi)}\| < \varepsilon$$

---

**Beweis.** Nach Satz 2.6.9 ist  $f$  gleichmäßig stetig:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Für eine Zerlegung  $Z$  mit  $d(Z) < \delta$  und jede zulässige Menge von Stützpunkten gilt dann

$$|f(x) - t_{(f,Z,\Xi)}(x)| = \begin{cases} |f(x) - f(\xi_{\varkappa})| & \text{für } x \in (x_{\varkappa-1}, x_{\varkappa}), (\varkappa = 1, \dots, k), \\ 0 & \text{für } x = x_{\varkappa}, (\varkappa = 0, \dots, k). \end{cases}$$

und somit

$$\|f - t_{(f,Z,\Xi)}\| < \varepsilon$$


---

**Bezeichnung 3.1.25** Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Zu einer Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$$

und einer Menge  $\Xi$  von zulässigen **Stützstellen**

$$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\} \quad \text{mit} \quad \xi_{\varkappa} \in [x_{\varkappa-1}, x_{\varkappa}] \quad \text{für } \varkappa = 1, \dots, k,$$

bildet man die **Riemansche Summe**:

$$S(f, Z, \Xi, ) = S(Z, \Xi) := \sum_{\varkappa=1}^k f(\xi_{\varkappa}) (x_{\varkappa} - x_{\varkappa-1})$$

BERNHARDT RIEMANN, 1826-1866

**Bemerkung.** Eine Riemansche Summe ist eine endliche Summe, zu deren Berechnung man nur endlich viele Funktionswerte des Integranden braucht.

---

**Satz 3.1.26 (Konvergenz der Riemann-Summen)**

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.. Für jede Folge  $(Z_n)_N$  von Zerlegungen des Intervalls  $[a, b]$ , deren Feinheit gegen Null strebt:

$$d(Z_n) \rightarrow 0,$$

und jede zulässige Wahl von Stützpunkten  $\Xi_n$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ), konvergieren die **Riemanschen Summen**: gegen das Integral von  $f$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, Z_n, \Xi_n) = \int_{[a,b]} f$$


---

**Beispiele 3.1.27** 1. Man wähle die äquidistante Zerlegung des Intervalls  $[0, x]$  in  $n$  Teile:

$$Z = \{0 = x_0 < x_1 = \frac{x}{n} < \dots < x_k = \frac{kx}{n} < \dots < x_n = x\}$$

und zeige

$$\int_0^x \xi^2 d\xi = \frac{x^3}{3}.$$

2. Man wähle die Einteilung von  $[1, x]$  mit geometrischer Progression  $q := \sqrt[n]{x}$ :

$$1 = q^0 < q < q^2 < \dots < q^n = x$$

und zeige

$$\int_1^x \xi^2 d\xi = \frac{1}{3}(x^3 - 1).$$

3. Mit Hilfe der obigen Einteilung mit geometrischer Progression zeige man

$$\int_1^x \frac{1}{\xi^2} d\xi = 1 - \frac{1}{x}.$$


---

**Beweis.** 1. Wählt man die äquidistante Zerlegung des Intervalls  $[0, x]$  in  $n$  Teile,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $\xi_k = x_k$  so lauten die Riemann-Summen:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{kx}{n}\right)^2 \frac{x}{n} = \frac{x^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{x^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \rightarrow \frac{x^3}{3}.$$

2. Wählt man eine Einteilung von  $[1, x]$  mit geometrischer Progression  $q := x^{\frac{1}{n}}$  so erhält man die Teil- und Stützpunkte

$$1 = q^0 < q < q^2 < \dots < q^n = x$$

und die Riemann-Summen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} q^{2k} (q^{k+1} - q^k) &= (q-1) \sum_{k=0}^{n-1} q^{3k} = \frac{q^{3n} - 1}{q^3 - 1} (q-1) \\ &= \frac{q-1}{q^3 - 1} (x^3 - 1) = \frac{1}{1+q+q^2} (x^3 - 1) \rightarrow \frac{1}{3} (x^3 - 1). \end{aligned}$$

3. Für die Teil- und Stützpunkte

$$1 = q^0 < q < q^2 < \dots < q^n = x$$

erhält man die Riemann-Summen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^{2k}} (q^{k+1} - q^k) &= q \left(1 - \frac{1}{q}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^k} \\ &= q \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{1 - \frac{1}{q}} \\ &= x^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \rightarrow 1 - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

### 3.1.5 Logarithmus als Stammfunktion

**Bemerkung.** Wir untersuchen die Stammfunktion

$$(0, \infty) \ni x \mapsto \int_1^x \xi^{-1} d\xi.$$

und zeigen, daß  $L(x) = \log x$  der natürliche Logarithmus ist.

Die Bezeichnung  $L$  verwenden wir nur im Beweis des folgenden Satzes.

Zur Identifizierung  $L = \log$  benötigen wir eine Charakterisierung der Exponentialfunktion.

### Bemerkung 3.1.28 (Funktionalgleichung)

Es sei  $E : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  stetig und es gelte

$$E(s+t) = E(s) \cdot E(t) \quad \text{für } s, t \in \mathbb{R}.$$

und  $E(1) = e$ . Dann gilt  $E(x) = e^x$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

**Beweis.** Induktiv folgt

$$E(n) = e^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin folgt aus der Funktionalgleichung

$$E(0) = 1 \quad \text{und} \quad E(-n) = e^{-n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Aus der Eindeutigkeit der  $n$ -ten Wurzel folgt

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}} \quad \text{für } m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Da  $E$  stetig ist, folgt mit 2.4.17, daß  $E(t) = e^t$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

**Satz 3.1.29 (Logarithmus)** *Es gilt*

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \log x.$$

Das Integral (der Logarithmus) hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $\log 1 = 0$  und  $x \mapsto \log x$  ist streng monoton wachsend.
2.  $\log(xy) = \log x + \log y$
3.  $\frac{x-1}{x} < \log x < x-1$  für  $0 < x < \infty$ ,  $x \neq 1$
4.  $\log e = 1$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$ .
6. Die Umkehrfunktion zu  $x \mapsto \log x$  ist die Exponentialfunktion  $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^t$ .

**Beweis.** Wir bezeichnen das Integral mit  $L(x) = \int_1^x \xi^{-1} d\xi$ .

- es ist  $L(1) = 0$ . Da der Integrand streng positiv ist, ist  $L$  streng monoton wachsend.
- Nach der Transformationsformel 3.1.20 gilt mit der affinen Transformation  $g : \xi \mapsto \eta = x\xi$ , ( $x > 0$ ):

$$\int_x^{xy} \eta^{-1} d\eta = \int_1^y (x\xi)^{-1} x d\xi = \int_1^y \xi^{-1} d\xi = L(y)$$

Hiermit folgt:

$$\begin{aligned} L(xy) &= \int_1^{xy} (\eta)^{-1} d\eta \\ &= \int_1^x \eta^{-1} d\eta + \int_x^{xy} \eta^{-1} d\eta \\ &= L(x) + L(y). \end{aligned}$$

- 
- Für  $x > 1$  gilt

$$L(x) = \int_1^x \xi^{-1} d\xi < \int_1^x 1 d\xi = x - 1.$$

Für  $0 < x < 1$  gilt

$$-L(x) = \int_x^1 \xi^{-1} d\xi > \int_x^1 1 d\xi = 1 - x.$$

Also gilt  $L(x) < x - 1$  für  $0 < x < \infty$ ,  $x \neq 1$ .

Dann folgt

$$-L(x) = L\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} - 1 = -\frac{x-1}{x}.$$

- Da die Stammfunktion  $L$  stetig ist, folgt aus (3.)

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = n \frac{(1 + \frac{1}{n}) - 1}{1 + \frac{1}{n}} \leq nL\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq n\left((1 + \frac{1}{n}) - 1\right) = 1.$$

Also ist  $L(e) = \lim_{n \rightarrow \infty} L\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (nL(1 + \frac{1}{n})) = 1$ .

- Da  $L$  monoton wachsend ist, gilt  $L(2) > L(1) = 0$  und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(2^n) \lim_{n \rightarrow \infty} nL(2) = \infty.$$

und analog  $\lim_{x \rightarrow 0} L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} L\left(\frac{1}{2^n}\right) = -\infty$ .

also ist das Bild  $L((0, \infty)) = \mathbb{R}$ .

- Es gibt die stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion  $E : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  von  $L$ . Aus (4.) folgt  $E(1) = e$  und aus (2.) folgt

$$E(s+t) = E(s) \cdot E(t) \quad \text{für } s, t \in \mathbb{R}.$$

Also gilt nach Bemerkung 3.1.28  $E(t) = e^t$  für  $t \in \mathbb{R}$  und somit nach Definition 2.5.21  $L(x) = \log x$  für  $x \in (0, \infty)$ .

### 3.1.6 Riemannsche Summen von Regelfunktionen

**Bemerkung.** Die Riemannschen Summen  $S(f, Z, \Xi)$  approximieren auch das Integral einer Regelfunktion  $f$ .

Die Riemannschen Summen von Regelfunktionen werden vorwiegend dazu verwendet, gewisse Eigenschaften endlicher Summen auf Integrale zu übertragen.

---

**Lemma 3.1.30** *Es sei  $t : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion. Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß für jede Zerlegung*

$$Z = \{a = x_0 < \dots < x_k = b\}$$

von  $[a, b]$  der Feinheit

$$d(Z) < \delta$$

und jede Wahl von Stützstellen

$$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\} \quad \text{mit } \xi_\varkappa \in [x_{\varkappa-1}, x_\varkappa] \text{ für } \varkappa = 1, \dots, k,$$

die Riemannsche Summe  $S(t, Z, \Xi)$  das Integral mit einem Fehler, der kleiner als  $\varepsilon$  ist, approximiert:

$$\left| S(t, Z, \Xi) - \int_{[a,b]} t \right| < \varepsilon.$$

**Beweis.** Zu der Treppenfunktion  $t \neq 0$  gibt es eine Zerlegung

$$Z^* = \{a = z_0^* < \dots < z_l^* = b\},$$

so daß  $t|(z_{\lambda-1}^*, z_\lambda^*) = c_\lambda$  konstant ist. Man setze

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4(l+1)\|t\|}.$$

Es sei nun

$$Z = \{a = x_0 < \dots < x_k = b\}$$

eine Zerlegung. Durch Induktion über die Anzahl  $l$  der Teilpunkte zeigt man: Es gibt höchstens  $2(l+1)$  abgeschlossene Teilintervalle  $[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]$ , die einen der Punkte  $z_\lambda^*$  enthalten. Es sei

$$M := \{\varkappa \mid \varkappa \in \{1, \dots, k\}, \exists z_\lambda^* \in [x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]\}.$$

und

$$N := \{1, \dots, k\} \setminus M.$$

Wenn die Feinheit  $d(Z) < \delta$ , dann folgt für jede zulässige Wahl von Stützstellen  $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ :

$$\begin{aligned} S(t, Z, \Xi) - \int_{[a,b]} t &= \sum_{\varkappa \in M} \left( f(\xi_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) - \int_{[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]} t \right) \\ &\quad + \sum_{\varkappa \in N} \left( f(\xi_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) - \int_{[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]} t \right) \\ &= \sum_{\varkappa \in M} \left( f(\xi_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) - \int_{[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]} t \right) \end{aligned}$$

Man beachte, daß die Summanden für  $\varkappa \in N$  verschwinden, da  $f|[x_{\varkappa-1}, x_\varkappa]$  konstant ist. Folglich gilt

$$\left| S(t, Z, \Xi) - \int_{[a,b]} t \right| < 2(l+1)2\|t\|\delta = \varepsilon.$$

**Satz 3.1.31 (Aproximation durch Riemann-Summen)** Es sei  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß für jede Zerlegung

$$Z = \{a = x_0 < \dots < x_k = b\}$$

von  $[a, b]$  der Feinheit

$$d(Z) < \delta$$

und jede Wahl von Stützstellen

$$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\} \quad \text{mit} \quad \xi_\varkappa \in [x_{\varkappa-1}, x_\varkappa] \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, \dots, k,$$

die Riemannsche Summe  $S(t, Z, \Xi)$  das Integral mit einem Fehler, der kleiner als  $\varepsilon$  ist, approximiert:

$$\left| S(f, Z, \Xi) - \int_{[a,b]} f \right| < \varepsilon.$$

**Beweis.** Zu der Regelfunktion  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  gibt es eine Treppenfunktion  $t$ , so daß auf  $[a, b]$  gilt:

$$\|f - t\| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}.$$

Zu  $t$  gibt es nach Lemma 3.1.30 ein  $\delta > 0$ , so daß für jede Zerlegung  $Z$  der Feinheit  $d(Z) < \delta$  und jede zulässige Wahl von Stützstellen  $\Xi$  stets

$$\left| S(t, Z, \Xi) - \int_{[a,b]} t \right| < \varepsilon.$$

ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} \left| S(f, Z, \Xi) - \int_{[a,b]} f \right| &\leq \left| S((f-t), Z, \Xi) \right| \\ &\quad + \left| S(t, Z, \Xi) - \int_{[a,b]} t \right| + \left| \int_{[a,b]} (t-f) \right| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

**Korollar 3.1.32 (Konvergenz der Riemann-Summen)** Es sei  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Für jede Folge  $(Z_n)_N$  von Zerlegungen des Intervalls  $[a, b]$ , deren Feinheit gegen Null strebt:

$$d(Z_n) \rightarrow 0,$$

und jede zulässige Wahl von Stützpunkten  $\Xi_n$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ), konvergieren die Riemannschen Summen gegen das Integral von  $f$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, Z_n, \Xi_n) = \int_{[a, b]} f$$

**Bemerkung** Dagegen approximieren die entsprechenden Treppenfunktionen  $t_{(f, Z_n, \Xi_n)}$  (Def. 3.1.22) im allgemeinen die Funktion  $f$  nicht gleichmäßig. In der  $L_1$ -Norm gilt aber:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - t_n\|_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} |f - t_n| = 0.$$

Konvergenz in der  $L_1$ -Norm untersuchen wir in Analysis III.

### 3.1.7 Partielle Integration

**Bezeichnung 3.1.33 (Differenz der Randwerte)**

Für zwei Funktionen  $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichne

$$FG \Big|_a^b := F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

**Satz 3.1.34 (Partielle Integration)**

Gegeben seien  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$  und Stammfunktionen  $F$  von  $f$  und  $G$  von  $g$ . Dann gilt

$$\int_{[a, b]} Fg = FG \Big|_a^b - \int_{[a, b]} fG$$

**Bemerkung.** Die Formel der partiellen Integration gilt für beliebige, fest gewählte Stammfunktionen  $F$  von  $f$  und  $G$  von  $g$  (vgl. Definition 3.1.4).

**Bemerkung.**

1. Es reicht, die partielle Integration für Treppenfunktionen zu zeigen. Durch Grenzwertbildung folgt sie dann für Regelfunktionen.

2. Es sei  $f$  eine Treppenfunktion mit Stammfunktion  $F$  und  $g$  eine Treppenfunktion mit Stammfunktion  $G$ .

Nach Bemerkung 3.1.18 kann man die Treppenfunktionen  $f$  und  $g$  in den Sprungstellen abändern, ohne die Stammfunktionen und die Werte der Integrale

$$\int_{[a, b]} Fg \quad \text{und} \quad \int_{[a, b]} gF$$

zu ändern.

Wir können für den Beweis also ohne Einschränkung annehmen, daß  $f$  rechtsseitig und  $g$  linksseitig stetig ist.

**Beweis.** Es sei  $f$  eine Treppenfunktion mit Stammfunktion  $F$  und  $g$  eine Treppenfunktion mit Stammfunktion  $G$ .

Nach der Vorbemerkung können wir ohne Einschränkung annehmen, daß  $f$  **rechtsseitig** und  $g$  **linksseitig** stetig ist.

Die Integrale  $\int_{[a, b]} Fg$  und  $\int_{[a, b]} fG$  approximiert man durch Riemannscher Summen zu Zerlegungen

$$Z = \{a = x_0 < \dots < x_k = b\},$$

deren Feinheit  $d(Z)$  hinreichend klein ist (vgl. Satz 3.1.31).

Man kann die Zerlegungspunkte zugleich als Stützpunkte wählen.

Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es eine  $\delta > 0$ , so daß aus  $d(Z) < \delta$  stets folgt:

$$\left| \int_{[a, b]} Fg - \sum_{\varkappa=1}^k F(x_\varkappa)g(x_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_{[a, b]} fG - \sum_{\varkappa=1}^k f(x_{\varkappa-1})G(x_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) \right| < \varepsilon$$

Man kann ohne Einschränkung solche Zerlegungen  $Z$  wählen, auf deren offeneren Teilintervallen  $f|(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa)$  und  $g|(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa)$  konstant sind, anderenfalls füge man die Sprungstellen von  $f$  und  $g$  als weitere Zerlegungspunkte hinzu.

Da  $f$  rechtsseitig und  $g$  linksseitig stetig ist, folgt:

$$\begin{aligned} f(x_{\varkappa-1}) &= f(x_{\varkappa-1}^+) \\ g(x_{\varkappa}) &= g(x_{\varkappa}^-), \\ F(x_{\varkappa}) - F(x_{\varkappa-1}) &= f(x_{\varkappa-1})(x_{\varkappa} - x_{\varkappa-1}), \\ G(x_{\varkappa}) - G(x_{\varkappa-1}) &= g(x_{\varkappa})(x_{\varkappa} - x_{\varkappa-1}). \end{aligned}$$

Für eine solche Zerlegung folgt durch *partielle Summation*:

$$\begin{aligned} \sum_{\varkappa=1}^k F(x_{\varkappa})g(x_{\varkappa})(x_{\varkappa} - x_{\varkappa-1}) &= \sum_{\varkappa=1}^k F(x_{\varkappa})(G(x_{\varkappa}) - G(x_{\varkappa-1})) \\ &= \sum_{\varkappa=1}^k F(x_{\varkappa})G(x_{\varkappa}) - \sum_{\varkappa=0}^{k-1} F(x_{\varkappa+1})G(x_{\varkappa}) \\ &= F(x_k)G(x_k) - F(x_0)G(x_0) + \sum_{\varkappa=0}^{k-1} (F(x_{\varkappa}) - F(x_{\varkappa+1}))G(x_{\varkappa}) \\ &= FG \Big|_a^b - \sum_{\varkappa=1}^k (F(x_{\varkappa}) - F(x_{\varkappa-1}))G(x_{\varkappa-1}) \\ &= FG \Big|_a^b - \sum_{\varkappa=1}^k f(x_{\varkappa-1})G(x_{\varkappa-1})(x_{\varkappa} - x_{\varkappa-1}) \end{aligned}$$

Also ist  $\int_{[a,b]} Fg = FG \Big|_a^b - \int_{[a,b]} fG$ .

### Beispiele 3.1.35 (Integral der Potenzfunktion $x^n$ )

Wir berechnen **induktiv** die Stammfunktionen zu den Potenzen  $x^n$ :

$$\int_0^x \xi^n d\xi = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

**Beweis.**

$\boxed{n=0}$ :  $\int_0^x 1 d\xi = x$ .

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ :  $\int_0^x \xi^{n+1} \cdot 1 d\xi = \xi^{n+1} \cdot \xi \Big|_0^x - \int_0^x (n+1)\xi^n \cdot \xi d\xi$ .

Daraus folgt

$$(n+2) \int_0^x \xi^{n+1} d\xi = x^{n+2}.$$

**Bezeichnung.** Eine Funktion  $F$  heißt **unbestimmtes Integral** einer Funktion  $f$ , wenn für alle  $x_0, x_1$  im Definitionsbereich von  $F$  und  $f$  gilt:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = F(x_1) - F(x_0)$$

Solche unbestimmten Integrale sind nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Man schreibt abkürzend

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Es gilt also für ein unbestimmtes Integral  $F$  von  $f$ :

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(\xi) d(\xi).$$

Offensichtlich gilt die Formel der partiellen Integration für alle unbestimmten Integrale  $F$  von  $f$  und  $G$  von  $g$ :

$$\int_{[a,b]} Fg + \int_{[a,b]} fG = FG \Big|_a^b$$

**Beispiel.**

$$\int x^{-n} dx = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} \quad \text{für } n = 2, 3, \dots$$

**Beweis.**

$\boxed{n=2}$ : Vgl. Bsp. 3.1.27(3).  $\int_1^x \frac{1}{x^2} d\xi = 1 - \frac{1}{x}$ .

$n \Rightarrow n + 1$ :

$$\begin{aligned} \int_1^x \xi^{-(n+1)} d\xi &= \int_1^x \xi^{-n+1} \xi^{-2} d\xi \\ &= -\xi^{-n+1} \cdot \xi^{-1} \Big|_1^x - \int_1^x (n-1) \xi^{-n} \cdot \xi^{-1} d\xi. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$-n \int_0^x \xi^{-(n+1)} d\xi = 1 - x^{n+2}.$$

**Beispiele 3.1.36**  $\int_1^x \log \xi d\xi = x \log x - x.$

$$\int_1^x \log \xi \cdot 1 d\xi = \log(\xi) \xi \Big|_1^x - \int_1^x \frac{1}{\xi} \cdot \xi d\xi = x \log x - (x - 1).$$

### 3.1.8 Integral der Umkehrfunktion

**Bemerkung.** Man veranschauliche die Aussage des folgenden Satzes und auch den Beweis mit einer Zeichnung.

**Satz 3.1.37 (Integral der Umkehrfunktion)**

1. Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton wachsend mit Umkehrfunktion  $g : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy = bf(b) - af(a).$$

2. Wenn  $f$  streng monoton fallend ist gilt die obige Formel für die Umkehrfunktion  $g : [f(b), f(a)]$ :

$$\int_{[a,b]} f - \int_{[f(b),f(a)]} g = bf(b) - af(a).$$

**Beweis. 1:**  $f$  streng monoton wachsend: Es seien  $Z = \{a = x_0 < x_1 \dots x_k = b\}$ ,  $y_\varkappa := f(x_\varkappa)$ , ( $\varkappa = 1, \dots, k$ ). Man erhält eine Einteilung  $Z^* = \{f(a) = y_0 < y_1 < \dots < y_k = f(b)\}$  des Bildes. Man **addiere** die Riemannschen Summen von  $f$  und  $g$ :

$$\begin{aligned} &\sum_{\varkappa=1}^k f(x_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + \sum_{\varkappa=1}^k g(y_\varkappa)(y_\varkappa - y_{\varkappa-1}) \\ &= \sum_{\varkappa=1}^k f(x_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + \sum_{\varkappa=1}^k x_\varkappa(f(x_\varkappa) - f(x_{\varkappa-1})) \\ &= \sum_{\varkappa=1}^k f(x_\varkappa)x_\varkappa - f(x_{\varkappa-1})x_{\varkappa-1} \\ &= f(x_k)x_k - f(x_0)x_0 = bf(b) - af(a). \end{aligned}$$

Für eine Folge  $Z_n$  von Einteilung von  $[a, b]$ , deren Feinheit  $d(Z_n) \rightarrow 0$ , konvergiert auch die Feinheit der Bildeinteilung  $d(Z_n^*) \rightarrow 0$ . So folgt die Formel für die Integrale.

2:  $f$  streng monoton fallend: Es seien  $Z = \{a = x_0 < x_1 \dots x_k = b\}$ ,  $y_\varkappa := f(x_\varkappa)$ , ( $\varkappa = 1, \dots, k$ ). Man erhält eine Einteilung  $Z^* = \{f(b) = y_k < y_{k-1} < \dots < y_0 = f(a)\}$  von  $[f(b), f(a)]$ . Man **subtrahiere** die Riemannschen Summen von  $f$  und  $g$ :

$$\begin{aligned} &\sum_{\varkappa=1}^k f(x_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) - \sum_{\varkappa=0}^{k-1} g(y_{k-\varkappa})(y_{k-\varkappa} - y_{k-(\varkappa-1)}) \\ &= \sum_{\varkappa=1}^k f(x_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + \sum_{\varkappa=1}^k g(y_\varkappa)(y_\varkappa - y_{\varkappa-1}) \\ &= \sum_{\varkappa=1}^k f(x_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + \sum_{\varkappa=1}^k x_\varkappa(f(x_\varkappa) - f(x_{\varkappa-1})) \\ &= \sum_{\varkappa=1}^k f(x_\varkappa)x_\varkappa - f(x_{\varkappa-1})x_{\varkappa-1} \\ &= f(x_k)x_k - f(x_0)x_0 = bf(b) - af(a). \end{aligned}$$

Also gilt die behauptete Gleichung (2).



**Beispiele 3.1.38** Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\int_0^y t^{\frac{1}{n}} dt = \frac{n}{n+1} y^{1+\frac{1}{n}}$ .

**Beweis.** Für  $0 < x$  und  $y = x^n$  gilt

$$\int_0^x \xi^n d\xi + \int_0^y \eta^{\frac{1}{n}} d\eta = xy$$

und somit

$$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + \int_0^y \eta^{\frac{1}{n}} d\eta = x^{n+1}$$

Da  $x = y^{\frac{1}{n}}$  ist, folgt

$$\int_0^y \eta^{\frac{1}{n}} d\eta = \frac{n}{n+1} y^{1+\frac{1}{n}}.$$

### Übung.

1. Nun folgt induktiv  $\int_0^x t^{1+\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}} dt = \frac{n}{2n+2} x^{2+\frac{2}{n}}$  usw.  
Und schließlich  $\int_0^x t^r dt = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$  für  $1 \leq r \in \mathbb{Q}$ .
2. Man folgere aus (1.), daß  $\int_0^x t^r dt = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$  für  $0 \leq r < 1, r \in \mathbb{Q}$ .
3. Man folgere aus  $\int x^{-2} dx = -x^{-1}$ , daß

$$\int_1^y \frac{1}{\sqrt{\eta}} d\eta = 2(\sqrt{y} - 1).$$

D.h.  $\int x^{-\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}}$ .

4.  $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$  für  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ .
5.  $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$  für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

### Satz 3.1.39 (Integral der Exponentialfunktion)

Für  $y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_0^y e^t dt = e^y - e^0$$

**Bemerkung.** Die Exponentialfunktion  $y \mapsto e^y$  ist ein *unbestimmtes Integral* von sich selbst. Man schreibt abkürzend:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

**Beweis.** Für  $1 < x$  und  $y = \log x$  gilt

$$\begin{aligned} x \log x - (x - 1) + \int_0^y e^t dt \\ &= \int_1^x \log \xi d\xi + \int_{\log 1}^{\log x} e^t dt \\ &= x \log x - 1 \log 1 = x \log x \end{aligned}$$

Also folgt  $\int_0^y e^t dt = x - 1 = e^y - 1$ .

Im Fall  $0 < x < 1$  gilt eine analoge Rechnung für  $[x, 1]$ :

$$\begin{aligned} -x \log x - (1 - x) + \int_y^0 e^t dt \\ &= \int_x^1 \log \xi d\xi + \int_{\log x}^0 e^t dt \\ &= 1 \log 1 - x \log x = -x \log x. \end{aligned}$$

### Beispiele 3.1.40 (Approximation der Exp.-Funktion)

Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{\xi_0} d\xi_0 &= e^x - 1, \\ \int_0^x \int_0^{\xi_1} e^{\xi_0} d\xi_0 d\xi_1 &= e^x - 1 - x \\ \int_0^x \int_0^{\xi_2} \int_0^{\xi_1} e^{\xi_0} d\xi_0 d\xi_1 d\xi_2 &= e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}, \\ &\dots \\ \int_0^x \int_0^{\xi_n} \dots \int_0^{\xi_1} e^{\xi_0} d\xi_0 d\xi_1 \dots d\xi_n &= e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Da  $e^{\xi_0} \leq \max\{1, e^x\}$  folgt (vgl. 2.1.13)

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \max\{1, e^x\} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

### 3.1.9 Mittelwertsatz der Integralrechnung

**Feststellung 3.1.41** Es seien  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$  und  $g \geq 0$ . Mit den Größen

$$m := \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M := \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

gilt

$$m \int_{[a, b]} g \leq \int_{[a, b]} fg \leq M \int_{[a, b]} g.$$

**Bemerkung.** Aus dem Zwischenwertsatz 2.5.14 folgt nun:

**Satz 3.1.42 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**

Es seien  $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $g \in \mathcal{R}([a, b])$  und  $g \geq 0$ . Dann gibt es eine  $x_0 \in [a, b]$ , so daß

$$f(x_0) \int_{[a, b]} g = \int_{[a, b]} fg$$

**Bezeichnung.** Für  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und feste  $x_0, x_1 \in I$  bilde man die **iterierten Stammfunktionen**:

$$\begin{aligned} f^{(-1)} &= F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi, \\ f^{(-n-1)} &: x \mapsto \int_{x_0}^x f^{(-n)}(\xi) d\xi \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \\ g^{(-1)} &= G : x \mapsto \int_{x_1}^x g(\xi) d\xi, \\ g^{(-n-1)} &: x \mapsto \int_{x_1}^x g^{(-n)}(\xi) d\xi \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Feststellung 3.1.43 ( $n$ -fache partielle Integration)**

Es seien  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $f, g \in \mathcal{R}(I)$ . Dann gilt für  $a, b \in I$  und  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(-n)}(\xi) g(\xi) d\xi \\ = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(-n+k)} g^{(-k-1)} \Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b f(\xi) g^{(-n)}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

**Beweis.**  $\boxed{n=1}$ : Klar.

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ : Mit  $G := g^{(-1)}$  folgt:  $\int_a^b f^{(-(n+1))}(\xi) g(\xi) d\xi$

$$\begin{aligned} &= f^{(-(n+1))} G \Big|_a^b - \int_a^b f^{(-n)}(\xi) G(\xi) d\xi \\ &= f^{(-(n+1))} G \Big|_a^b - \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(-n+k)} G^{(-k-1)} \Big|_a^b \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \int_a^b f(\xi) G^{(-n)}(\xi) d\xi \right] \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(-(n+1)+k)} G^{(-k-1)} \Big|_a^b \\ &\quad + (-1)^{(n+1)} \int_a^b f(\xi) g^{(-(n+1))}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

---

**Bemerkung.** Formuliert man die folgende Feststellung mit Ableitungen statt mit Stammfunktionen, so heißt dies Resultat **Taylorformel mit Restglied** und ist einer der wichtigsten Sätze der Analysis:

**Feststellung 3.1.44 (*n*-te Stammfunktion)**

Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f \in \mathcal{R}(I)$  und  $a \in I$ . Für eine *n*-ten Stammfunktion  $f^{(-n)}$  von  $f$  und  $x \in I$  gilt:

$$f^{(-n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(-n+k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x f(\xi) \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} d\xi.$$

Ist  $f$  **stetig**, so gibt es ein  $\xi_0$  zwischen  $a$  und  $x$ , so daß

$$f^{(-n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(-n+k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + f(\xi_0) \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

(vgl. Mittelwertsatz der Integralrechnung 3.1.42)

**Beweis.** Setzt man in Feststellung 3.1.43  $g = 1$  und  $x_1 = b$  so erhält man die Stammfunktionen

$$g^{(-n)}(\xi) := (-1)^n \frac{(b-\xi)^n}{n!}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} f^{(-n)}(b) - f^{(-n)}(a) &= \int_a^b f^{(-n+1)}(\xi) \cdot 1 d\xi \\ &= - \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k f^{(-n+1+k)}(a) \cdot (-1)^{k+1} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} \\ &\quad + (-1)^{n-1} \int_a^b f(\xi) \cdot (-1)^{n-1} \frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} d\xi. \end{aligned}$$

Verschiebt man den Summationsindex, so folgt

$$f^{(-n)}(b) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(-n+k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f(\xi) \frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} d\xi.$$

**Beispiele 3.1.45 (Logarithmus-Reihe)**

Für  $0 < x$  gilt

$$\log x = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k + \int_1^x (-1)^n \xi^{-(n+1)} (x-\xi)^n d\xi.$$

Für  $0 < x \leq 2$  konvergiert die Folge der Integrale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^x (-1)^n \xi^{-(n+1)} (x-\xi)^n d\xi \rightarrow 0.$$

Man schreibt:

$$\log x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k.$$

Für  $x = 2$  erhält man die bemerkswerte alternierende Reihe:

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

**3.1.10 Transformation des Integranden**

**Bemerkung.** Wir wollen die Transformationsformel 3.1.20 für affine, monoton wachsende Transformationen verallgemeinern.

Eine affine Funktion  $G$  ist die Stammfunktion einer konstanten Funktion  $g = c = const$ :

$$G : x \mapsto \int_a^x c d\xi + d = cx + d.$$

Die Transformationsformel 3.1.20 für affine, monoton wachsende Transformationen

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy = \int_a^b f(G(x)) g(x) dx.$$

überträgt sich, auf Grund der Intervall-Additivität des Integrals, auf stetige, **stückweise affine**, monoton wachsende Transformationen und dann auf deren Grenzwerte.

**Feststellung 3.1.46**

Gegeben sei eine Funktionenfolge  $(h_n)_n$  in  $\mathcal{R}([a, b])$ , die gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen eine Grenzfunktion  $h \in \mathcal{R}([a, b])$  konvergiert.

Für jede stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt dann:

1.  $f \circ h_n \in \mathcal{R}([a, b])$ .
2. Die Funktionenfolge  $(f \circ h_n)_n$  konvergiert gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $f \circ h$ .

**Satz 3.1.47 (Transformation des Integrals)**

Es sei  $g \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $g \geq 0$ , und  $G$  ein unbestimmtes Integral von  $g$ . Also ist  $G$  eine stetige, monoton wachsende Abbildung von  $[a, b]$  auf  $[G(a), G(b)]$ .

Für jede stetige Funktion  $f : [G(a), G(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt die **Transformationsformel**

$$\int_{[G(a), G(b)]} f = \int_{[a, b]} (f \circ G) \cdot g.$$

In Differentialschreibweise:

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy = \int_a^b f(G(x)) \cdot g(x) dx.$$

Die letztere Transformationsformel gilt auch ohne die Voraussetzung  $g \geq 0$ . Wir werden dies im nächsten Kapitel als Folgerung 3.2.23 der Kettenregel 3.2.10 zeigen.

**Bemerkung** zum Beweis:

1. Im Fall  $G(a) = G(b)$  sind die Integrale in 3.1.47 gleich 0.
2. Fall  $G(a) < G(b)$ : Man Wähle eine Folge von Treppenfunktionen  $(t_n)_n$  in  $\mathcal{R}([a, b])$ , die gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert und für die  $t_n \geq 0$  ist (vgl. Korollar 2.8.20). Dann konvergieren die Stammfunktionen  $T_n : x \rightarrow G(a) + \int_a^x t_n(\xi) d\xi$  gleichmäßig gegen  $G$ :

$$T_n(x) - T_n(a) = \int_a^x t_n \rightarrow \int_a^x g = G(x) - G(a).$$

Man kann ohne Einschränkung die  $t_n$  so wählen, daß

$$T_n(b) - T_n(a) > 0 \quad \text{und} \quad T_n(b) = G(b)$$

ist. Anderenfalls betrachte man die Folge ab einem  $n_0$  und setze

$$\tilde{t}_n := \frac{G(b) - G(a)}{T_n(b) - T_n(a)} t_n.$$

**Beweis.** Man wähle also eine Folge von Treppenfunktionen  $(t_n)_n$  mit Stammfunktionen  $(T_n)_n$ , so daß  $t_n \geq 0$  und

$$\begin{aligned} \|t_n - g\| &\rightarrow 0, & \|T_n - G\| &\rightarrow 0, \\ T_n(a) &= G(a), & T_n(b) &= G(b). \end{aligned}$$

Zu  $t_n$  gibt es eine Zerlegung

$$Z_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k_n} = b\}$$

auf deren offenen Teilintervallen  $t_n|_{(x_{\varkappa-1}, x_{\varkappa})} = c_{\varkappa}$  konstant ist. Man setze  $y_{\varkappa} := T_n(x_{\varkappa})$ . Dann gilt nach 3.1.20

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\eta) d\eta &= \sum_{\varkappa=1}^{k_n} \int_{y_{\varkappa-1}}^{y_{\varkappa}} f(\eta) d\eta \\ &= \sum_{\varkappa=1}^{k_n} \int_{x_{\varkappa-1}}^{x_{\varkappa}} f(T_n(\xi)) t_n(\xi) d\xi = \int_a^b f(T_n(\xi)) t_n(\xi) d\xi \end{aligned}$$

**Beispiele 3.1.48** Aus dem Transformationsatz 3.1.47 folgt die Gleichung:

$$\int_1^b \log(\sqrt{y} - 1) dy = \int_0^{\sqrt{b}-1} \log x \cdot 2(x+1) dx \quad \text{für } b \geq 1.$$

Dabei wurde die folgende *Substitution* angewandt:

$$G(x) = (x+1)^2, \quad g(x) = 2(x+1)$$

Mit partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} \int_1^b \log(\sqrt{y} - 1) dx &= \left[ \log(x) \cdot (x+1)^2 \right]_0^{\sqrt{b}-1} - \int_0^{\sqrt{b}-1} \frac{1}{x} (x+1)^2 dx \\ &= \left[ \log(x) \cdot (x+1)^2 - \frac{x^2}{2} - 2x - \log x \right]_0^{\sqrt{b}-1}. \end{aligned}$$

**Beispiele 3.1.49** Die Zahlenfolge  $(r_n)_n$  konvergiere gegen  $a \in \mathbb{R}$ . Dann konvergiert die Funktionenfolge  $(f_n)_n$ :

$$f_n : x \mapsto x^{r_n} \quad \text{für } x \in (0, \infty)$$

auf jedem kompakten Teilintervall  $[a, b] \subset (0, \infty)$  gleichmäßig gegen  $f : x \mapsto x^a$ .

**Beweis.** Dies folgt aus der Abschätzung:

$$\begin{aligned} |x^a - x^r| &= |e^{a \log x} - e^{r \log x}| = \left| \int_{r \log x}^{a \log x} e^t dt \right| \\ &\leq |a - r| |\log x| \max\{x^a, x^r\} \end{aligned}$$

### Beispiele 3.1.50 (Integral der Potenzfunktion)

Man zeige mit Hilfe der Substitution  $\xi = G(\eta) = \eta^n$  und  $g(\eta) = (n-1)\eta^{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ):

1. Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $m \in \mathbb{Z}$  mit  $\frac{m}{n} \neq -1$  gilt

$$\int_1^x \xi^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{m}{n}} \left( x^{1 + \frac{m}{n}} - 1 \right) \quad \text{für } x \in (0, \infty).$$

2. Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq -1$  gilt:

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad \text{für } x \in (0, \infty).$$

**Bemerkung.** Wenn der Exponent  $a \geq 0$  ist, so gilt (2.) für  $x \in \mathbb{R}$ .

## 3.2 Differentialrechnung

**Bemerkung.** Man kann die Differentiation unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachten:

**Global als Umkehrung der Integration:** Wie sieht man einer Funktion  $F$  an, ob sie eine Stammfunktion ist, und wie findet man ihren Integranden  $f$ ?

**Lokal als geometrisches Problem:** Bestimmung der **Tangente** in einem Punkt an einen Funktionsgraphen.

Die Tangente ist eine affine Funktion.

**Lokal als Approximationsproblem:** Bestimmung der **besten Approximation** einer Funktion in der Umgebung eines Punkte durch eine **affine Funktion**

Wir beginnen mit der **lokalen** Beschreibung der Ableitung und leiten daraus die globalen Eigenschaften her.

### 3.2.1 Grenzwert des Differenzenquotienten

**Bemerkung.** Es seien  $I$  ein **offenes** Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in I$  ein fester Punkt.

Für einen weiteren Punkt  $x \in I$ ,  $x \neq a$ , bilde man die **Sekante** durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(x, f(x))$ :

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} t + f(a) \quad (\text{Sekantengleichung}).$$

Die Frage ist, ob für  $x \rightarrow a$  die Sekanten gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Wenn ja, heiße diese Grenzfunktion die **Tangente** an den Graphen von  $f$  im Punkte  $(a, f(a))$ .

Offensichtlich existiert die Tangente (die Grenzfunktion) genau dann, wenn der Grenzwert der **Steigung** der Sekanten

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \text{Steigung der Tangente}$$

existiert.

**Bemerkung.** Wir lösen uns von der geometrischen Sprechweise und nennen die Steigung der Sekante **Differenzenquotient**.

### Definition 3.2.1 (Differenzenquotient)

Es seien  $I$  ein offenes Intervall,  $a \in I$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die Funktion

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{für } x \in I \setminus \{a\}$$

heißt der **Differenzenquotient** von  $f$  an der Stelle  $a$ .

---

### Definition 3.2.2 (Ableitung in einem Punkt)

Sei  $I$  ein offenes Intervall. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **differenzierbar im Punkt**  $a \in I$ , wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. In diesem Fall heißt  $f'(a)$  die **Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $a$ .

**Bemerkung.** Manchmal ist es praktischer, den um  $a$  verschobenen Differenzenquotienten zu betrachten.

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{für } h \in (I - a) \setminus \{0\}$$

Man erhält dann die Ableitung als Grenzwert im Nullpunkt:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

---

### Bezeichnung 3.2.3 (Abgeleitete Funktion)

Es sei  $I$  ein offenes Intervall. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **differenzierbar auf  $I$**  oder **differenzierbar im Intervall  $I$** , wenn  $f$  in jedem Punkt des Intervalls  $I$  differenzierbar ist.

Dann ist die Ableitung  $f'$  eine Funktion auf  $I$ :

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f' : x \mapsto f'(x) \quad \text{für } x \in I.$$

$f'$  heißt die **abgeleitete Funktion** zu  $f$  oder kurz die **Ableitung** von  $f$ .

---

Man findet in Literatur weitere Bezeichnungen für die Ableitung, insbesondere, wenn  $f'(x)$  für alle  $x \in I$  existiert.

### Bezeichnung 3.2.4 (für die Ableitung)

**Differentialquotient:** Es sei  $x$  die unabhängige Variable der Funktion  $f$ . Nach LEIBNITZ nennt man die Ableitung auch Differentialquotient und schreibt für die Ableitung im Punkt  $a$

$$\left(\frac{d}{dx}f\right)(a) = \frac{df}{dx}(a) = \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=a} := f'(a).$$

Für die abgeleitete Funktion schreibt man

$$\frac{d}{dx}f = \frac{df}{dx} := f'.$$

**Differentiations-Operator:**  $D : f \mapsto Df = D(f) := f'$  und  $Df(a) = (Df)(a) := f'(a)$

---

### Bemerkung.

1. Wenn man das Differential  $df$  richtig definiert, ist der Differentialquotient (siehe [3.2.32](#)) wirklich ein Quotient und man schreibt:

$$df(x) = f'(x) dx.$$

2. Der Begriff Differential wirkt zunächst etwas *schillernd*, da man in Physikbüchern häufig kommentarlos für **kleine Änderungen**  $\Delta x$  die **Differenz**  $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$  mit dem **Differential**  $df = f'(x) dx$  **identifiziert** und  $df$  als **infinitesimale Änderung** bezeichnet.
3. Wir führen die Differentiale und den Differentialquotienten deshalb erst am Ende des Kapitels ein, wenn die wesentlichen Eigenschaften der Ableitung geklärt sind. Dann klärt sich auch der oben angedeutete Gebrauch der Differentiale in der Physik.

### Bezeichnung.

- In der Physik werden nach NEWTON Ableitungen nach der Zeit mit einem Punkt bezeichnet. Bsp.

$$a(t) = \dot{v}(t)$$

ist die Beschleunigung  $a$  als Ableitung der Geschwindigkeit  $v$ .

- Ableitungen werden auch bezeichnet, indem man die Variable, nach der differenziert wird, als Index schreibt:

$$f_x := f' \quad \text{und} \quad f_{xx} = f''.$$

Dies ist besonders bei **partiellen Ableitungen** verbreitet:

$$f_t - f_{xx} := \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{Wärmeleitungsgleichung}).$$

### Beispiele 3.2.5 (Ableitung von Potenz und Wurzel)

- $(x^n)' = nx^{n-1}$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x \in \mathbb{R}$ .
- $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in (0, \infty)$ .

**Beweis.**

- Für  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x \neq a$  gilt

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k} \rightarrow na^{n-1} \quad \text{für } x \rightarrow a.$$

- Für  $n \in \mathbb{N}$  ist der Grenzwert für  $x \rightarrow a$  und  $x \neq a$ :

$$\begin{aligned} \frac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{x - a} &= \frac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{(x^{\frac{1}{n}})^n - (a^{\frac{1}{n}})^n} = \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^{\frac{k}{n}} a^{\frac{n-1-k}{n}} \right)^{-1} \\ &\rightarrow \left( na^{\frac{n-1}{n}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

### Feststellung 3.2.6 (differenzierbar $\Rightarrow$ stetig)

Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $a \in I$  differenzierbar, dann ist  $f$  an der Stelle  $a$  stetig.

**Bemerkung.** 1. Die Umkehrung ist falsch, wie das Beispiel der Betragsfunktion zeigt:

$$f(x) := |x| \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

- Es gibt Beispiele stetiger Funktionen auf einem Intervall, die in keinem Punkte differenzierbar sind.

Das erste Beispiel einer solchen Funktion wurde von K. WEIERSTRASS 1861 veröffentlicht. Einige Jahrzehnte zuvor hatte bereits B. BOLZANO ein derartiges Beispiel konstruiert.

- Für ein einfaches Beispiel von T. TAKAGI (1903) einer nirgends differenzierbaren, stetigen Funktion vergleiche man Kaballo Beispiel 19.15 oder Koenigsberger Kapitel 9.11.

### Beweis (differenzierbar $\Rightarrow$ stetig).

Man schreibe  $f$  in der Form:

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \quad \text{für } x \in I \setminus \{a\}$$

und folgere

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = f(a).$$

## 3.2.2 Rechenregeln für die Ableitung

### Satz 3.2.7 (Rechenregeln der Ableitung)

Es sei  $I$  ein offenes Intervall. Die Funktionen  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien im Punkt  $a \in I$  differenzierbar.

Dann sind auch die Funktionen

$$f + g, \quad f \cdot g \quad \text{und, falls } g(a) \neq 0, \quad \frac{f}{g}$$

an der Stelle  $a$  differenzierbar.

Es gelten die Rechenregeln:

**Linearität:**  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ,  
 $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Produktregel:**  $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ .

**Quotientenregel:**  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$ .

**Bemerkung.** 1. Man präge sich die Produktregel in dieser Reihenfolge ein:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Die Produktregel gilt auch für andere, nicht notwendig kommutative *Produkte*.

Beispiel: Funktionen mit Werten in den Matrizen und das Matrizenprodukt oder für das Skalarprodukt vektorwertiger Funktionen.

2. Wir führen auch den Beweis der Quotientenregel so, daß er sich leicht auf die Inversenbildung in anderen Produkten übertragen läßt.

**Beweis (Rechenregeln der Ableitung).**

**Linearität:**  $\frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a}$   
 $= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \rightarrow f'(a) + g'(a)$  für  $x \rightarrow a$ .

**Produktregel:**  $\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a}$   
 $= \frac{f(x) - f(a)}{x - a}g(x) + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \rightarrow f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ .

**Quotientenregel:** Es reicht, den Fall  $\frac{1}{g}$  zu untersuchen.

Da  $g(a) \neq 0$  ist, existiert  $g(x)^{-1}$  in einer Umgebung von  $a$ .

$$\begin{aligned} \frac{g(x)^{-1} - g(a)^{-1}}{x - a} &= g(x)^{-1} \cdot \frac{g(a) - g(x)}{x - a} \cdot g(a)^{-1} \\ &\rightarrow -g(a)^{-1} \cdot g'(a) \cdot g(a)^{-1} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Mit den Rechenregeln 3.2.7 kann man **Polynome** und **rationale Funktionen** differenzieren.

**Beispiele 3.2.8** 1. Man zeige induktiv:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

2. Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

**Beweis.**

1. Der Fall  $n = 1$  ist klar. Nun wende man die Produktformel an.
2. Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \neq 0$  gilt nach der Quotientenregel:

$$(x^{-n})' = ((x^n)^{-1})' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

### 3.2.3 Kettenregel

**Bemerkung.** Wir formulieren die Definition der Ableitung so um, daß man nicht mehr den Grenzwert eines Quotienten untersucht. Dies bringt folgende Vorteile:

- Die Beweise zur Differenzierbarkeit von Kompositionen differenzierbarer Funktionen (Kettenregel) und der Ableitung der Umkehrfunktion vereinfachen sich sehr, da man nicht darauf achten muß, ob irgendwelche Nenner eine Nullstelle haben.
- Wir wollen später auch Funktionen, deren Variable ein Vektor ist, differenzieren. Den Differenzenquotienten kann man für solche Funktionen nicht bilden, da man durch Vektoren nicht teilen kann!  
Die Sätze und Beweise mit der äquivalenten Definition gelten sinngemäß auch für Funktionen von Vektoren.



**Bemerkung.** Es sei  $f$  differenzierbar im Punkte  $a$ .

Wir bezeichnen den verschobenen Differenzenquotienten und seinen Grenzwert bei  $h = 0$  für  $h \in \{I - a\}$  mit

$$\varphi : h \mapsto \begin{cases} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} & \text{für } h \neq 0, \\ f'(a) & \text{für } h = 0. \end{cases}$$

Die Funktion  $\varphi : \{I - a\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $h = 0$  mit Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = f'(a).$$

Für die Differenz  $\Delta f(a, h)$  der Funktionswerte von  $f$  in den Punkten  $a + h$  und  $a$  gilt

$$\Delta f(a, h) := f(a+h) - f(a) = \varphi(h) \cdot h.$$

Diese Umformung führt uns zu dem folgenden Feststellung:

### Lemma 3.2.9 (Äquivalenz zur Differenzierbarkeit)

Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $a \in I$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1.  $f$  ist differenzierbar im Punkt  $a$ .
2. Es gibt eine in  $h = 0$  stetige Funktion

$$\varphi : \{I - a\} \rightarrow \mathbb{R},$$

so daß für alle  $h \in \{I - a\}$  gilt:

$$\Delta f(a, h) = f(a+h) - f(a) = \varphi(h) \cdot h.$$

Wenn dies erfüllt ist, dann ist  $f'(a) = \varphi(0)$ .

**Beweis.** 1 $\Rightarrow$ 2.: Vergleiche die Vorbemerkung.

2 $\Rightarrow$ 1.: Nach Voraussetzung existiert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \varphi(h) = \varphi(0)$$

### Satz 3.2.10 (Kettenregel)

Seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle und

$$h : I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Funktionen. Wenn

- $f$  an der Stelle  $a \in I$  differenzierbar ist und
- $g$  an der Stelle  $f(a) \in J$  differenzierbar ist,

dann ist die Komposition  $h = g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $a$  differenzierbar. Es gilt die **Kettenregel**

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

**Bemerkung.** Die Ableitung der Komposition  $g \circ f$  ist das Produkt der Ableitungen der äußeren Funktion  $g$  mit der Ableitung der inneren Funktion  $f$ :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

**äußere Ableitung · innere Ableitung**

**Bemerkung.** Die Kettenregel gilt auch für Abbildungen zwischen Vektorräumen. Deren Ableitungen sind Matrizen und das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ.

Man präge sich deshalb die Kettenregel in dieser Reihenfolge ein:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

**Beweis.** Nach Lemma 3.2.9 gibt es eine in 0 stetige Funktion

$$\gamma : \{J - f(a)\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\gamma(0) = g'(f(a)),$$

$$g(f(a) + k) - g(f(a)) = \gamma(k) \cdot k$$

und eine in  $h = 0$  stetige Funktion  $\varphi : \{I - a\} \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= f'(a) \\ f(a+h) - f(a) &= \varphi(h) \cdot h.\end{aligned}$$

Setzt man  $k := f(a+h) - f(a)$  so folgt

$$\begin{aligned}g(f(a+h)) - g(f(a)) &= \gamma(f(a+h) - f(a)) \cdot (f(a+h) - f(a)) \\ &= \gamma(f(a+h) - f(a)) \cdot \varphi(h) \cdot h.\end{aligned}$$

Da  $h \mapsto \gamma(f(a+h) - f(a)) \cdot \varphi(h)$  stetig in  $h = 0$  ist, ist nach Lemma 3.2.9  $g \circ f$  differenzierbar im Punkte  $a$  und

$$(g \circ f)'(f(a)) = \gamma(0) \cdot \varphi(0) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

**Bemerkung.** Wenn  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton ist, dann ist  $f(I)$  ein offenes Intervall (vgl. 2.5.15).

Wenn  $f$  und die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  differenzierbar sind, so folgt aus der Kettenregel  $1 = \text{id}' = (f^{-1} \circ f)' = ((f^{-1})' \circ f) \cdot f$  und somit

$$(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}.$$

### Satz 3.2.11 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, streng monoton,  $J = f(I)$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  die Umkehrfunktion zu  $f$ . Es sei  $f$  im Punkt  $a \in I$  differenzierbar.

Die Umkehrfunktion  $g$  ist genau dann an der Stelle  $f(a)$  differenzierbar, wenn  $f'(a) \neq 0$ . In diesem Fall gilt

$$(g)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

### Beweis (Ableitung der Umkehrfunktion).

$\Rightarrow$ : Man vergleiche die Vorbemerkung.

$\Leftarrow$ : Nach Lemma 3.2.9 gibt es eine in 0 stetige Funktion  $\varphi$  mit:

$$\begin{aligned}\varphi : \{I - a\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ f(a+h) - f(a) &= \varphi(h) \cdot h, \\ \varphi(0) &= f'(a).\end{aligned}$$

Da  $\varphi(0) = f'(a) \neq 0$  und  $f$  streng monoton ist, gilt  $\varphi(h) \neq 0$ .

Man definiere eine stetige Funktion  $\gamma : \{J - f(a)\} \rightarrow \mathbb{R}$  durch:

$$k \mapsto h := g(f(a) + k) - a, \quad \gamma : k \mapsto (\varphi(h))^{-1}.$$

Man löse auf:  $k = f(a+h) - f(a) = \varphi(h) \cdot h$  und erhält:

$$\begin{aligned}g(f(a) + k) - g(f(a)) &= h = (\varphi(h))^{-1} \cdot k = \gamma(k) \cdot k. \\ \gamma(0) &= (\varphi(0))^{-1} = (f'(a))^{-1}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2.9 ist  $g$  im Punkte  $f(a)$  differenzierbar.

### 3.2.4 Mittelwertsatz

**Bemerkung.** Wir betrachten in diesem Abschnitt Funktionen auf einem Intervall, die in **jedem Punkt** des Intervalls differenzierbar sind. Für diese Funktionen zeigen wir den Mittelwertsatz und den Schrankensatz.

Beispiele überall differenzierbarer Funktionen sind unbestimmte Integrale  $F$  zu stetigen Integranden  $f$ . In diesem Fall

- ist der Integrand  $f = F'$  (siehe 3.2.12)
- entspricht der Mittelwertsatz der Integralrechnung 3.1.42 dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung 3.2.16.
- entspricht die Beschränktheit des Integrals 3.1.16(3.) dem Schrankensatz 3.2.18.

### Feststellung 3.2.12 (Ableit. eines unbest. Integrals)

Es seien  $I$  ein offenes Intervall,  $f \in \mathcal{R}(I)$  und  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  ein unbestimmtes Integral von  $f$ , d.h.

$$F(x) - F(c) = \int_c^x f(\xi) d\xi \quad \text{für alle } x, c \in I.$$

Dann ist  $F$  in jedem Stetigkeitspunkt  $a$  von  $f$  differenzierbar und es gilt dort

$$F'(a) = f(a).$$

### Beweis (Ableitung eines unbest. Integrals).

Da  $f$  im Punkt  $a \in I$  stetig ist, existiert zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß

$$|f(\xi) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für alle } \xi \in I, \text{ mit } |\xi - a| < \delta.$$

Folglich gilt für  $x \in I \setminus \{a\}$  mit  $|x - a| < \delta$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a) \right| &= \left| \frac{1}{x - a} \int_a^x (f(\xi) - f(a)) d\xi \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{|x - a|} |x - a| = \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\text{D.h. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a).$$

### Beispiele 3.2.13 (Ableitung von exp, log und Potenz)

1.  $(e^x)' = e^x$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Für  $a > 0$  gilt:

$$(a^x)' = \log(a) a^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

3.  $(\log x)' = \frac{1}{x}$  für  $x \in (0, \infty)$ .

4. Für  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

**Bemerkung.** (3.) gilt allgemeiner:

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

### Beweis (Ableitung von exp, log und Potenz).

Man schreibe exp und log als Stammfunktionen und benutze die Feststellung 3.2.12:

1.  $e^x = 1 + \int_0^x e^\xi d\xi$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Es sei  $a > 0$ . Nach der Kettenregel gilt:

$$(a^x)' = (\exp(\log(a)x))' = \log(a) \exp(\log(a)x) = \log(a)a^x.$$

3.  $\log x = \int_1^x \frac{1}{\xi} d\xi$  für  $x \in (0, \infty)$ .

4.  $(x^a)' = (\exp(a \log x))' = \exp(a \log x) \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$

**Bemerkung** Das folgende Beispiel zeigt, daß unbestimmte Integrale von Regelfunktionen und überall differenzierbare Funktionen verschieden Klassen sind.

**Beispiele 3.2.14** 1.  $|x|$  ist Stammfunktion von  $2H - 1$ ,  $H$  die Heaviside-Funktion (vgl. 2.3.30(1)). Aber  $|x|$  ist in  $x = 0$  nicht differenzierbar.

2. Die Funktion

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{für } x \neq 0 \quad \text{und } f(0) = 0$$

ist überall differenzierbar, aber die Ableitung

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{für } x \neq 0 \quad \text{und } f'(0) = 0.$$

oszilliert im Nullpunkt (vgl. Wackelfunktion 2.3.30(5)) und ist daher keine Regelfunktion.

---

**Bemerkung.** Man zeichne ein Bild eines ‘glatten’ Funktionsgraphen mit den unten angegebenen Eigenschaften.

Die Funktion hat ein **Maximum** oder ein **Minimum** im Inneren des Intervalls.

In diesem Punkt  $\xi$  ist die Tangente *waagrecht*, d.h.  $f'(\xi) = 0$ .

**Lemma 3.2.15 (Satz von Rolle)**

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und die Einschränkung  $f|_{(a, b)}$  sei auf dem offenen Intervall  $(a, b)$  differenzierbar.

Wenn  $f(a) = f(b)$  ist, so gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

ROLLE, MICHEL (1652-1719)

**Bemerkung.** Die obige Voraussetzung an eine Funktion  $f$  wird uns noch häufig begegnen. Wir sagen kurz:

$f$  ist stetig auf dem Intervall und im **Inneren** (des Intervalls) differenzierbar.

---

**Beweis (Satz von Rolle).**

**Fall**  $f$  konstant: Man wähle ein  $\xi \in (a, b)$ .

**Fall**  $f$  nicht konstant:  $f$  hat ein Maximum oder ein Minimum, das nicht auf einem der Randpunkte liegt.

Sei etwa  $\xi \in (a, b)$  und  $f(\xi)$  ein Minimum. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x < \xi, x \in [a, b], \\ \geq 0 & \text{für } x > \xi, x \in [a, b], \end{cases}$$

und folglich

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = 0.$$

Im Falle eines Maximums hat  $-f$  ein Minimum und es ist  $-f'(\xi) = 0$ .

---

**Satz 3.2.16 (Mittelwertsatz der Differentialrechn.)**

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und die Einschränkung  $f|_{(a, b)}$  sei auf dem offenen Intervall  $(a, b)$  differenzierbar.

Dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$ , so daß

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

ist.

LAGRANGE, JOSEPH, LOUIS (1736-1813)

**Bemerkung** Geometrisch besagt der Mittelwertsatz, daß die Tangente im Punkte  $(a, f(a))$  an den Graphen von  $f$  dieselbe Steigung hat, wie die Sekante durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

D.h. Tangente und Sekante sind *parallel*.

---

**Beweis (Mittelwertsatz).**

Der Fall  $b = a$  ist trivial. Es sei also  $a < b$ :

Subtrahiert man die *Gleichung der Sekante* durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$  von der Funktion  $f$ , so erhält man eine Funktion  $\varphi$ , auf die man den Satz von ROLLE anwenden kann:

$$\varphi : x \mapsto f(x) - \left( f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Es gibt also ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $\varphi'(\xi) = 0$ . D.h.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

---

**Bemerkung.** Aus dem Mittelwertsatz folgt unmittelbar das folgende einfache, aber sehr bedeutsame Korollar:

**Korollar 3.2.17 (Charakterisierung konstanter Funkt.)**

Es sei  $I$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar im Innern von  $I$ .

Wenn die Ableitung verschwindet

$$f'(x) = 0 \quad \text{für alle } x \text{ im Innern von } I,$$

dann ist  $f$  konstant auf  $I$ .

**Bemerkung.** Der Mittelwertsatz gilt nur für **reellwertige** Funktionen.

Häufig benötigt man aber nur eine aus dem Mittelwertsatz folgende Abschätzung, den **Schrankensatz**. Diese Methode, den Mittelwertsatz zum Abschätzen einzusetzen, läßt sich weitgehend verallgemeinern.

**Korollar 3.2.18 (Schrankensatz)**

Es sei  $I$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar im Innern von  $I$ .

Dann sind äquivalent:

1. Die Ableitung ist beschränkt:  $|f'| \leq L$ .
2.  $f$  Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstante  $L$ :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \text{für } x_1, x_2 \in I.$$

**Bemerkung.** Aus dem Mittelwertsatz folgt das Monotoniekriterium.

**Feststellung 3.2.19 (Monotonie-Kriterium)**

Es sei  $I$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar im Innern von  $I$ . Dann gilt

1.  $f$  ist genau dann monoton wachsend, wenn  $f' \geq 0$  ist.
2. Wenn  $f' > 0$ , dann ist  $f$  streng monoton wachsend.

**Bemerkung.** Das Beispiel  $x \mapsto x^3$  zeigt, daß in (2.) die Umkehrung nicht gilt.

**Feststellung 3.2.20 (lokales Minimum)**

Es seien  $I$  ein offenes Intervall,  $a \in I$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion mit

$$f'(a) = 0.$$

Dann gilt:

1. Wenn es ein  $\delta > 0$  so gibt, daß

$$f|(a - \delta, a) < 0 \quad \text{und} \quad f|(a, a + \delta) > 0$$

ist, dann hat  $f$  ein **lokales Minimum** im Punkt  $a$ , d.h.

$$f|(a - \delta, a) > f(a) \quad \text{und} \quad f(a) < f|(a, a + \delta).$$

2. Wenn die zweite Ableitung  $f''(a)$  existiert und  $f''(a) > 0$ , dann hat  $f$  im Punkte  $a$  ein **lokales Minimum**.

**Bemerkung.** Durch Übergang zu  $-f$  erhält man die entsprechende Charakterisierung eines **lokalen Maximums**.

**Beweis (lokales Minimum).**

1. Nach Feststellung 3.2.19(2.) ist

$$\begin{aligned} f|(a - \delta, a) & \text{ streng monoton fallend,} \\ f|(a, a + \delta) & \text{ streng monoton wachsend.} \end{aligned}$$

2. Nach Lemma 3.2.9 gibt es eine in  $h = 0$  stetige Funktion  $\Phi : \{I - a\} \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= f''(a), \\ f'(a + h) - f'(a) &= \Phi(h) \cdot h. \end{aligned}$$

Da  $\Phi$  in 0 stetig und  $\Phi(0) = f''(a) > 0$  ist, gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß

$$\Phi(h) > 0 \quad \text{für } |h| < \delta.$$

Da  $f'(a) = 0$  ist, sind die Voraussetzungen von (1.) erfüllt:

$$f'(a + h) \cdot h = \Phi(h) \cdot h^2 > 0 \quad \text{für } 0 < |h| < \delta.$$

---

### Bemerkung 3.2.21 (Einfache Form: de L'Hospital)

Es sei  $I$  ein offenes Intervall,  $a \in I$  und  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien im Punkte  $a$  differenzierbar.

Es seien  $f(a) = g(a) = 0$  und  $g'(a) \neq 0$

Dann gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

---

### 3.2.5 Hauptsatz der Integral- und Differential-Rechnung

**Bemerkung.** Die folgenden Fakten ergeben zusammengenommen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

- Zwei unbestimmte Integrale  $F_1$  und  $F_2$  einer Regelfunktion  $f \in \mathcal{R}(I)$  unterscheiden sich nur um eine Konstante:

$$F_1(x) - F_1(a) = \int_a^x f(\xi) d\xi = F_2(x) - F_2(a) \quad \text{für } x \in I$$

- Wenn  $F$  ein unbestimmtes Integral einer **stetigen** Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist, dann ist  $F$  im Inneren von  $I$  differenzierbar und  $F' = f$  (vgl. Feststellung 3.2.12)
- Zwei auf einem Intervall überall differenzierbare Funktionen mit gleicher Ableitung unterscheiden sich nur um eine Konstante (vgl. Korollar 3.2.17 zum Mittelwertsatz).

### Satz 3.2.22 (Hauptsatz der Diff.- u. Int.-Rechnung)

Es seien  $I$  ein nicht entartetes Intervall und  $f \in \mathcal{R}(I)$  und stetig im Inneren von  $I$ .

Für eine Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  sind äquivalent:

1.  $F$  ist stetig auf  $I$  und differenzierbar im Inneren von  $I$  mit Ableitung  $F' = f$ .
2.  $F$  ist ein unbestimmtes Integral von  $f$ :

$$\int_a^x f(\xi) d\xi = F(x) - F(a) \quad \text{für alle } a, x \in I.$$

---

### Bemerkung.

1. Der Schluß  $\boxed{1 \Rightarrow 2}$  des Hauptsatzes erlaubt es, Integrale einer stetigen Funktion  $f$  dadurch zu berechnen, daß man zu  $f$  eine **primitive** Funktion  $F$  mit  $F' = f$  findet oder **rät** (siehe Formelsammlungen).
2. In der deutschen Literatur wurde der Begriff **primitive** Funktion durch den Begriff **Stammfunktion** verdrängt. Im Englischen und Französischen heißt  $F$  *the primitive of  $f$*  bzw. *le primitive de  $f$* .
3. Der **wichtigere** Schluß  $\boxed{2 \Rightarrow 1}$  des Hauptsatzes erlaubt es, Funktionen mit vorgegebener stetiger Ableitung  $f$  zu **konstruieren**. Dies ist ein erster Schritt zu Lösung von **Differentialgleichungen**. Umgekehrt nennt man Lösungen von Differentialgleichungen manchmal auch *Integrale*.

---

### Beweis (Hauptsatz der Diff.- u. Int.-Rechnung).

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ : Zu  $f \in \mathcal{R}(I)$  und festem  $a \in I$  bilde man die Funktion

$$\Phi : x \mapsto \int_a^x f(\xi) d\xi \quad \text{für } x \in I.$$

Nach Feststellung 3.1.5 ist  $\Phi$  auf jedem kompakten Teilintervall von  $I$  stetig. Da der Integrand  $f$  im Inneren von  $I$  stetig ist, ist  $\Phi$  nach Feststellung 3.2.12 dort differenzierbar mit Ableitung  $\Phi' = f$ . Also ist

$$\Phi' - F' = f - f = 0$$

Nach Korollar 3.2.17 ist  $\Phi - F$  konstant.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ : Vergleiche Feststellung 3.2.12.

---

**Bemerkung.** Man kann den Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung auf Regelfunktionen erweitern, wenn man die Differenzierbarkeit in allen Punkten etwas abschwächt: (vgl. Koenigsberger Kap. 9.10 und 11.4)

### Hauptsatz der Diff.-u. Integralr. für Regelfunktionen.

Es sei  $I$  ein nichtausgeartetes Intervall. Für  $f \in \mathcal{R}(I)$  und  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  sind äquivalent:

1.  $F$  ist stetig und bis auf eine abzählbare Ausnahmemenge  $A \subset I$  differenzierbar mit Ableitung

$$F'(x) = f(x), \quad \text{für } x \in I \setminus A.$$

2.  $F$  ist unbestimmtes Integral von  $f$ :

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = F(x) - F(a) \quad \text{für alle } a, x \in I.$$

**Bemerkung.** Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung 3.2.22 und der Kettenregel 3.2.10 ergibt sich unmittelbar die Substitutionsregel (vgl. Satz 3.1.47):

**Satz 3.2.23 (Substitution)**

Es seien  $I$  und  $J$  Intervalle. Die Funktionen

$$J \xrightarrow{g} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

seien stetig und  $g$  stetig differenzierbar im Innern von  $I$ .

Wenn  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist, dann ist  $F \circ g$  eine Stammfunktion zu  $(f \circ g) \cdot g'$ .

D.h. für alle  $a, b \in I$  gilt

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

**Bemerkung.** Für die Anwendungen beachte man die **Integralgrenzen** der beiden Integrale!

### 3.2.6 Grenzwertsätze für Folgen differenzierbarer Funktionen

**Bemerkung.** Es sei  $f$  der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge  $(f_n)_n$  differenzierbarer Funktionen. Dann kann folgendes passieren:

- $f$  nicht differenzierbar.

- $f$  differenzierbar, aber  $(f'_n)_n$  konvergiert nicht gegen  $f'$ .  
Das typische Beispiel ist eine Folge von Schwingungen

$$f_n(t) = \frac{1}{n} \sin(n^2 t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R},$$

deren Amplitude  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  und deren Frequenz  $n^2 \rightarrow \infty$  geht. Dann geht  $f_n \rightarrow 0$  gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ , aber die Folge der Ableitungen  $f'_n(t) = \cos(nt)$  konvergiert nicht gegen 0.

**Satz 3.2.24 (Folgen differenzierbarer Funktionen)**

Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(n \in \mathbb{N})$  seien stetig differenzierbar auf  $I$ . Es gelte:

- (i) Die Folge der Ableitungen  $(f'_n)_n$  konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (ii) Die Konvergenz  $f'_n \rightarrow g$  ist gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall von  $I$ .
- (iii) Es gibt ein  $a \in I$  so daß die Zahlenfolge  $f_n(a)$  konvergiert.

Dann gilt: (a) Die Folge  $(f_n)_n$  konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (b)  $f$  ist differenzierbar mit Ableitung  $f' = g$ .
- (c) Auf jedem kompakten Teilintervall von  $I$  konvergiert die Folge  $(f_n)_n$  gleichmäßig gegen  $f$ .

**Beweis.** Aus dem Hauptsatz 3.2.22 folgt

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(\xi) d\xi \quad \text{für } x \in I.$$

Da die Folge  $(f'_n)_n$  auf jedem kompakten Teilintervall  $J \subset I$  gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert, ist nach Satz 2.8.6  $g|_J$  stetig. Also ist  $g$  stetig auf  $I$ . Man setze

$$f(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a),$$

$$f : x \mapsto f(a) + \int_a^x g(\xi) d\xi.$$

Aus dem Hauptsatz folgt  $f' = g$ .

Nach Korollar 3.1.17 gilt für ein kompaktes Teilintervall  $J \subset I$  mit  $a, x \in J$ :

$$\left| \int_a^x f'_n(\xi) d\xi - \int_a^x g(\xi) d\xi \right| \leq |J| \max_{\xi \in J} |f'_n(\xi) - g(\xi)| \rightarrow 0$$

Also konvergiert die Folge  $(f_n)_n$  gleichmäßig auf  $J$  gegen  $f$ .

Für die Beispiele brauchen wir das Majorantenkriterium.

### Satz 3.2.25 (Majorantenkriterium)

Gegeben seien eine Folge  $(a_n)_n$  nichtnegativer Zahlen und eine Funktionenfolge  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(n \in \mathbb{N})$ . Es gelte

1. Die Folge der Partialsummen der  $a_n$  ist beschränkt:

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq M < \infty \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

2. Für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $|f_n| \leq a_n$ .

Dann konvergiert die Funktionenfolge  $(s_n)_n$  der Partialsummen der  $(f_n)_n$ :

$$s_n := \sum_{k=1}^n f_k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gleichmäßig auf  $I$ .

### Beweis (Majorantenkriterium).

Da die monoton wachsende Folge der Partialsummen  $\sum_{k=1}^n a_k$  beschränkt ist, ist sie eine Cauchyfolge (vgl. Satz 2.2.11). Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0$ , so daß

$$\sum_{k=m}^n a_k < \varepsilon \quad \text{und nach Vor. (2.)} \quad |f_k| \leq a_k$$

für  $k, m, n \geq n_0$ . Dann gilt für  $x \in I$  und  $n > m \geq n_0$

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{k=m}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=m}^n a_k < \varepsilon.$$

Also ist das Cauchysche Konvergenzkriterium 2.8.11 für gleichmäßige Konvergenz erfüllt.

### Beispiele 3.2.26 (Potenzreihe des Logarithmus)

Man setze

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

$$f'_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \begin{cases} \frac{1-(-1)^n x^n}{1+x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \\ n & \text{für } x = -1. \end{cases}$$

Für  $x \in (-1, 1)$  konvergiert  $f'_n(x) \rightarrow g(x) := \frac{1}{1+x}$  gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall  $[-r, r] \subset (-1, 1)$ :

$$|f'_n(x) - g(x)| \leq \frac{r^n}{1-r} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \in [-r, r].$$

Da  $f_n(0) = 0$  konvergiert die Folge  $(f_n)_n$  gegen die Stammfunktion von  $g$  (vgl. mit Beispiel 3.1.45)

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \text{für } x \in (-1, 1).$$

### Beispiel (Potenzreihe der Exponentialfunktion).

Man setze

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist  $f'_n = f_{n-1}$  und  $1 + \int_0^x f_n(\xi) d\xi = f_{n+1}(x)$ .

In Beispiel 3.1.40 hatten wir gezeigt:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \max\{1, e^x\} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Folge  $(f_n)_n$  konvergiert also gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall gegen die Exponentialfunktion.



Aus dem Grenzwertsatz 3.2.24 erhalten wir nun die bekannte Tatsache, daß die Ableitung der Exponentialfunktion die Exponentialfunktion ist.

### Beispiele 3.2.27 (Potenzreihe von $\sin x$ und $\cos x$ )

Für die Grenzwerte  $\sin x$  und  $\cos x$  der beiden konvergenten Reihen

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x & \sin 0 &= 0, \\ (\cos x)' &= -\sin x & \cos 0 &= 1.\end{aligned}$$

### Beweis (Potenzreihe von $\sin x$ und $\cos x$ ).

Setzt man – nach dem Vorbild der Exponentialreihe –

$$\begin{aligned}s_n : x &\mapsto \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} & \text{für } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \\ c_n : x &\mapsto \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} & \text{für } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

dann gilt  $s'_n = c_n$  und  $c'_n = -s_{n-1}$ . Aus der Abschätzung

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} |x|^{2k+1} \leq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{|x|^k}{k!} \leq \exp |x|,$$

folgt nach 3.2.25, daß  $(s_n)_n$  und analog  $(c_n)_n$  auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig konvergiert. Nach Satz 3.2.24 haben die Grenzfunktionen die gewünschten Eigenschaften:

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \quad \text{und} \quad \cos x = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(x).$$

### 3.2.7 Ableitung als lineare Approximation

**Bemerkung.** Man schreibe nach Lemma 3.2.9:

$$\begin{aligned}\Delta f(a, h) &= f(a+h) - f(a) = \varphi(h) \cdot h \\ &= \varphi(0) \cdot h + ((\varphi(h) - \varphi(0))) \cdot h\end{aligned}$$

Mit  $\varphi(0) = f'(a)$  und  $r(h) := (\varphi(h) - \varphi(0)) \cdot h$  erhält man:

$$\Delta f(a, h) = f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h + r(h).$$

Die lineare Abbildung  $\mathbb{R} \ni h \mapsto f'(a) \cdot h$  approximiert die Differenz  $\Delta f(a, h)$  in einer Umgebung von  $h = 0$ . D.h., für das **Restglied**  $r(h)$  gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} |\varphi(h) - f'(a)| = 0$$

Man sagt, das **Restglied**  $r(h)$  geht für  $h \rightarrow 0$  **schneller als linear** gegen 0.

**Bemerkung.** Für die gängigen Funktionen gilt sogar

$$|r(h)| \leq c|h|^2$$

mit einer Konstante  $c \in [0, \infty)$

### Bemerkung 3.2.28 (quadratisches Restglied)

Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion. Zu  $a \in I$  wähle man  $\delta > 0$ , so daß  $[a - \delta, a + \delta] \subset I$ .

Dann gilt für alle  $h \in \{I - a\}$  mit  $|h| \leq \delta$  die Abschätzung des Restgliedes:

$$|r(h)| \leq \max_{|\chi| \leq \delta} |f''(a + \chi)| h^2.$$

### Beweis (quadratisches Restglied).

Es seien  $g$  eine stetige Funktion und  $g^{(-1)}, g^{(-2)}$  eine erste bzw. zweite Stammfunktion. Nach der Taylor-Formel 3.1.44 gibt es zu jedem  $x$  ein  $\xi_0$  zwischen  $a$  und  $x$ , so daß

$$g^{(-2)}(x) = g^{(-2)}(a) + g^{(-1)}(a)(x-a) + g(\xi_0) \frac{(x-a)^2}{2!}.$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes 3.2.22 kann man dies umformulieren:

Für eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  und  $h \in \{I - a\}$  gibt es ein  $\xi_0$  zwischen  $a$  und  $a + h$ , so daß

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi_0)}{2!}h^2.$$

Hieraus folgt unmittelbar die behauptete Abschätzung des Restgliedes.

Die Formulierung der Differenzierbarkeit als lineare Approximation ist der Schlüssel für die vielen Anwendungen der Differentialrechnung in Naturwissenschaft und Technik.

### Satz 3.2.29 (Ableitung als lineare Approximation)

Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in I$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Funktion  $f$  ist differenzierbar in  $a \in I$ .
2. Es gibt eine **lineare Abbildung**  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und ein Funktion  $r : \{I - a\} \rightarrow \mathbb{R}$ , genannt **Restglied**, derart, daß für  $h \in \{I - a\}$  gilt:

$$\Delta f(a, h) := f(a + h) - f(a) = L(h) + r(h),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

In diesem Fall ist  $L(h) = f'(a) \cdot h$ .

### Beweis (Ableitung als lineare Approximation).

**1 $\Rightarrow$ 2:** Wir hatten eingangs aus Lemma 3.2.9 gefolgert, daß die Ableitung eine lineare Approximation mit den gewünschten Eigenschaften des Restgliedes liefert.

**2 $\Rightarrow$ 1:** Aus (2.) folgt für den Differenzenquotienten

$$\left| \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{L(h)}{h} \right| = \frac{|r(h)|}{|h|} \rightarrow 0$$

für  $h \rightarrow 0$ . Eine lineare Abbildung  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Form

$$L(h) = l \cdot h$$

mit einem  $l \in \mathbb{R}$  und somit existiert die Ableitung  $f'(a) = l$ .

---

**Ausblick.** Angesichts des simplen Beweises sieht die Formulierung und die Unterscheidung zwischen der linearen Abbildung  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und der Zahl  $f'(a) = l$  aufgebläht aus.

Das liegt daran, daß wir bisher nur den **eindimensionalen** Fall  $\mathbb{R}^1$  mit einem **festem Basisvektor** betrachten.

- Diese Begriffsbildung läßt sich jedoch sofort auf  **$n$  Dimensionen** übertragen:  $L$  wird eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen und die Ableitung  $f'(a) = l$  die zugehörige Matrix bezüglich einer Basis.
- Weiterhin läßt sich diese Begriffsbildung für Funktionen auf **Kurven** übertragen. Die **Tangentialegerade** in einem Punkt der Kurve übernimmt die Rolle des Vektorraumes  $\mathbb{R}^1$ .
- Der nächste Schritt sind dann **Flächen** und die  $n$ -dimensionalen Gebilde, die **Manigfaltigkeiten**.

---

## 3.2.8 Rechnen mit Differentialen

### Bemerkung.

- Die Auffassung der Ableitung als lineare Approximation klärt, was das **Differential**  $df$  einer auf einem Intervall  $I$  differenzierbaren Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sein soll.
- In der Lehrbuchliteratur wird die Einführung des Differentials häufig bis zur Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variabler aufgeschoben.
- In den Anwendungsfächern ist das **formale hantieren** mit Differentialen – da sehr suggestiv – üblich und später wird es auch in der Mathematik benutzt.
- Zur Vereinheitlichung der Anwendungen und Schreibweisen, setzen wir von vornherein voraus, daß das  $f$ , zu dem man das Differential  $df$  bildet, stetig differenzierbar ist.

---

### Bezeichnung 3.2.30 (Differential einer Funktion)

Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei auf ganz  $I$  (stetig) differenzierbar. Zu jedem Punkt  $a \in I$  gehört gemäß Satz 3.2.29 die lineare Abbildung

$$h \mapsto f'(a) \cdot h \quad \text{für } h \in \mathbb{R},$$

die wir das **Differential** von  $f$  im Punkt  $a$  nennen und folgendermaßen bezeichnen:

$$df(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \mapsto df(a)(h) := f'(a) \cdot h.$$

**Bemerkung. (Das Differential ist eine Abbildung)**

- Das Differential  $df$  einer Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ordnet jedem Punkt  $a \in I$  die lineare Abbildung (Linearform)  $df(a) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  zu.

$$df : a \mapsto df(a) \quad \text{für } a \in I.$$

$df$  ist eine Abbildung von  $I$  in den Raum  $\text{Lin}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R})$  der **Linearformen** auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}^1$ .

Man kann  $df$  als Funktion von zwei Variablen auffassen:

$$\begin{aligned} df &: I \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}, \\ df &: (a, h) \mapsto df(a)(h) = f'(a) \cdot h. \end{aligned}$$

- In jedem Punkte  $a \in I$  gilt die lineare Approximation

$$\begin{aligned} \Delta f(a, h) &= df(a)(h) + r_a(h) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_a(h)}{|h|} &= 0. \end{aligned}$$

**Bemerkung. (Rechnen mit Differentialen)**

- Wir erklären das **Rechnen** mit Differentialen. Im eindimensionalen Fall, d.h. der Definitionsbereich  $I \subset \mathbb{R}^1$ , handelt es sich lediglich um andere Schreibweisen für die zuvor gewonnenen Ergebnisse.
- Hinweis:** Im Fall von Funktionen von  $n$  Variablen gelten die Formeln, trotz analoger Bezeichnungen, nicht ganz so einfach weiter (siehe Analysis II).

- Das Produkt einer Funktion mit einem Differential ist i. a. kein Differential einer Funktion.
- Der Begriff **Differentialquotient** macht keinen Sinn mehr.
- Die Integrale werden durch entsprechende **höherdimensionale Integralformeln** ersetzt.

**Bezeichnung (Differential der identischen Abb.)**

Zu der identischen Abbildung des Intervalls  $I$  gehört das Differential  $d \text{id}_I(a)$ . Schreibt man die identische Abbildung als  $x$ , so ist  $dx = d \text{id}_I$  und

$$dx(a) : h \mapsto dx(a)(h) = 1 \cdot h = h.$$

Es gilt also  $df(a)(h) = f'(a) \cdot h = f'(a) \cdot dx(a)(h)$ , kurz:

$$df = f' \cdot dx.$$

Alle Differentiale sind von der Form

$$\mathbf{Funktion} \cdot dx.$$

**Bemerkung.** Die identische Abbildung und ihr Differential müssen nicht  $x$  und  $dx$  heißen. Man kann jeden anderen Buchstaben, der nicht mißverständlich ist, wählen. Man sollte nur die Bezeichnung beibehalten!

**Bezeichnung 3.2.31 (Produkt: Funktion · Differential)** Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f$  stetig differenzierbar.

Man erklärt ein **Produkt** von Funktionen mit Differentialen, das wieder ein Differential ergibt:

Man wähle eine Stammfunktion  $H$  von  $gf'$ . Dann sei

$$g df = g \cdot df := gf' \cdot dx = H' \cdot dx = dH.$$

**Bemerkung.** 1. Das Produkt ist **wohldefiniert**.

- Das Produkt ist assoziativ, distributiv und kommutativ  $f dg = (dg)f$ . Bevorzugt wird  $f dg$  geschrieben.

3. Beispiel:  $df = f' \cdot dx$ .
4. Produktformel:  $d(fg) = f \cdot dg + g \cdot df$ .
5. Kettenregel:  $d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot dg$ .

### Bezeichnung 3.2.32 (Differentialquotient)

Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei auf ganz  $I$  differenzierbar.

Wenn  $g'(a) \neq 0$  für alle  $a \in I$ , so gilt für die Differentiale  $df = f' dx$  und  $dg = g' dx$  die Beziehung:

$$df = \frac{f'}{g'} \cdot dg.$$

Da das Produkt kommutativ ist, definiert man in diesem Fall, wie bei Zahlen, den **Differentialquotienten**

$$\frac{df}{dg} : a \mapsto \frac{df}{dg}(a) := \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \text{für } a \in I.$$

**Bemerkung.** Speziell gilt also für  $f : x \mapsto f(x)$

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a).$$

### Bezeichnung (Integral eines Differentials).

Es seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und im Inneren stetig differenzierbar. Man setzt dann

$$\int_a^b f dg := \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Das obige Integral  $\int_a^b f dg$  ist ein Spezialfall eines **Riemann-Stieltjes Integrals**.

**Bemerkung (Zum Hauptsatz der Diff.- u. Int.-Rechn.** Den Hauptsatz 3.2.22 kann man folgendermaßen kurz formulieren.

Es sei  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und im Inneren des Intervalls stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b dF = F(b) - F(a).$$

### Bemerkung (Zur Substitution von Integralen).

Es seien  $I$  und  $J$  Intervalle. Die Funktionen

$$J \xrightarrow{g} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar. Dann gilt

$$d(f \circ g) = (f' \circ g)g' dx = (f' \circ g) dg.$$

Für eine stetige Funktion  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  gilt (vgl. Satz 3.2.23)

$$\int_{g(a)}^{g(b)} h df = \int_a^b (h \circ g) d(f \circ g).$$

Für die identische Funktion  $x$  gilt  $d(x \circ g) = dg$  und somit speziell

$$\int_{g(a)}^{g(b)} h dx = \int_a^b (h \circ g) dg.$$

### Bemerkung. (Infinitesimale Größen)

Wie verträgt sich diese Definition des Differentials mit dem anschaulichen Gebrauch des Differential in den Naturwissenschaften?

Man betrachtet dort eine physikalische Größe  $f$ , die von einem Parameter  $x$  abhängt.

Man spricht von der **infinitesimalen Änderung**  $df$ , die  $f$  erfährt, wenn der Parameter  $x$  sich um einen *verschwindend kleinen* (infinitesimalen) Wert  $dx$  ändert.

Vergleichen wir dies mit der Definition des Differentials:

- In dieser Sprechweise sind die Variablen nicht angegeben:
  - der Punkt  $x_0$ , in dem sich das System befindet,
  - die Änderung  $\Delta x(x_0, h) = (x_0 + h) - x_0 = h$   
Man schreibt für die Änderung  $h$  kurz  $\Delta x$ .

- Die Differentiale  $dx$  und  $df$  sind mit ihrem Funktionswerten identifiziert:

$$dx = dx(x_0)(\Delta x) = \Delta x, \quad df = df(x_0)(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Das Differential  $df = df(x_0)(\Delta x)$  ist linear in der Variablen  $\Delta x$ , ändert sich also **proportional** zu  $\Delta x$ . Wenn  $\Delta x$  sehr klein wird, wird eben  $df = df(x_0)(\Delta x)$  im selben Maße klein. Das ist die Deutung des Begriffes **infinitesimal Größe**.

Die Differenz  $\Delta f$  und das Differential  $df$  unterscheiden sich nur um das Restglied:

$$\Delta f - df = \Delta f(x_0, \Delta x) - df(x_0)(\Delta x) = r_{x_0}(\Delta x).$$

Der Unterschied geht schneller als linear – in den praktischen Fällen meist sogar quadratisch – gegen Null.

Diese *beliebig kleine Unterschied* ist nicht Null, wird aber für die betreffende physikalische Argumentation klein genug gewählt. In diesem Sinne gilt die *Gleichung*  $\Delta f = df$ .

### 3.3 Trigonometrische Funktionen

**Bemerkung.** Die Funktionen  $\cos$  und  $\sin$  wurden bereits kurz im Beispiel 3.2.27 als Potenzreihen eingeführt.

- Die Eigenschaften des **Sinus** und des **Cosinus** werden aus ihren Ableitungseigenschaften hergeleitet:

$$\cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos.$$

Die Funktionen  $\cos t$  und  $\sin t$  sind also Lösungen der **freien Schwingungsgleichung**.

- Aus der Form der Schwingungsgleichung folgen die **Eindeutigkeit** der Lösung des Anfangswertproblems, die **Potenzreihenentwicklung** der Lösungen, die Periodizität und andere trigonometrische Formeln.

Die Funktionen  $\cos t$  und  $\sin t$  sind periodisch mit der Periode  $2\pi$ .

- 
- Die Punkte  $(\cos t, \sin t)$  liegen auf dem Einheitskreis  $\mathbb{S}^1$ . Für das Intervall  $(-\pi, 2\pi]$  ist die Abbildung

$$(-\pi, \pi] \ni t \mapsto \mathbb{S}^1$$

bijektiv. Die Umkehrabbildung heißt **Argument-Funktion**  $\arg(x, y)$

- Der Kreis ist orientiert: er wird im **mathematischen Drehsinn** entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn durchlaufen. Die Argumentfunktion ist streng monoton wachsend.

Ein Kreisbogen hat, wie ein Intervall, einen Anfangs- und einen Endpunkt.

- Zur Definition der Länge eines Kreisbogens betrachtet man den oberen und unteren Halbkreis jeweils als Graphen einer differenzierbaren Funktion und definiert die **Kurvenlänge** dieser Graphen als **Bogenlänge**.

- 
- Zwischen Argument-Funktion und Bogenlänge auf dem Einheitskreis besteht die folgende Beziehung:

*Die Länge eines Kreisbogens mit Anfangspunkt  $P$  und Endpunkt  $Q$ , der nicht den Punkt  $(-1, 0)$  enthält, ist die Differenz der Argumente vom Endpunkt und Anfangspunkt des Kreisbogens:*

$$\text{Länge}(\widehat{PQ}) = \arg Q - \arg P$$

- Das Argument  $\arg P$  eines Punktes  $P$  nennt man auch den **Winkel** der Geraden vom Ursprung  $O$  durch den Punkt  $P$  gegen die positive  $x$ -Achse. Der Winkel wird im **Bogenmaß** gemessen.

Man kann nun die hergebrachte Beschreibung der trigonometrischen Funktionen auf dem Intervall  $(-\pi, \pi]$  als **Winkel-Funktionen** geben.

- Im nächsten Kapitel (Analysis II) werden dann die **komplexen Zahlen** und die Exponentialfunktion im Komplexen eingeführt.

Im Komplexen lassen sich Beziehungen unter den trigonometrischen Funktionen, weiter vereinheitlichen und vereinfachen.

### 3.3.1 Harmonische Schwingungen

**Bemerkung.** Die Schwingungsgleichung ist eine **lineare Differentialgleichung** zweiter Ordnung bzw. ein **System** von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung.

#### Bemerkung und Bezeichnung 3.3.1

1. Die Funktionen  $u : t \mapsto \cos(t)$  und  $v : t \mapsto \sin(t)$  (vgl. 3.2.27) sind Lösungen der **Schwingungsgleichung**:

$$u'' + u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} u' &= -v, \\ v' &= u. \end{aligned}$$

mit den **Anfangswerten** zur Zeit  $t = 0$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

2. Wenn man in der linken Gleichung  $v := -u'$  setzt, erhält man die rechte und umgekehrt.

#### Bemerkung.

1. Physikalischen Deutung der Schwingungsgleichung:

- $u$  Auslenkung eines Massenpunktes der Masse  $m$  aus der Ruhelage.

- **Rückstellkraft** ist proportional zur Auslenkung:  $F = -Du$ . Es wirken keine weiteren Kräfte ein.

- $u'$  Geschwindigkeit,  $u''$  Beschleunigung.

- **Newtonsches Kraftgesetz:**  $mu'' = -Du$ . Zur Vereinfachung sind  $m = 1$  und  $D = 1$  gesetzt.

Die Abbildung  $t \mapsto (u(t), u'(t)) \in \mathbb{R}^2$  durchläuft im Phasenraum  $\mathbb{R}^2$  eine Kreislinie im Uhrzeigersinn.

2. Wir haben  $v = -u'$  gesetzt, damit die Abbildung

$$t \mapsto (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$$

die Kreislinie im **mathematischen Drehsinn** durchläuft.

#### Feststellung 3.3.2 (Schwingungsgleichung ist linear)

Die Schwingungsgleichung

$$\begin{aligned} u' &= -v, \\ v' &= u. \end{aligned}$$

ist **linear**. D.h., sind  $u_1, v_1$  und  $u_2, v_2$  Lösungen (mit unterschiedlichen Anfangswerten), dann ist auch jede **Linearkombination**:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \end{aligned}$$

mit Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , wieder eine Lösung der Schwingungsgleichung.

#### Beispiele 3.3.3 (Anfangswertprobleme)

1.  $u : t \mapsto \cos t, v : t \mapsto \sin t$  ist Lösung der Schwingungsgleichung mit den Anfangswerten:

$$u(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

2.  $\tilde{u} : t \mapsto -\sin t$ ,  $\tilde{v} : t \mapsto \cos t$  ist Lösung der Schwingungsgleichung mit den Anfangswerten:

$$\tilde{u}(0) = 0, \tilde{v}(0) = 1.$$

3. Die Schwingungsgleichung mit den Anfangswerten:

$$u_{u_0, v_0}(0) = u_0, v_{u_0, v_0}(0) = v_0 \quad \text{mit } u_0, v_0 \in \mathbb{R},$$

hat die als Lösung die eine Linearkombination der Lösungen von (1.) und (2.):

$$u_{u_0, v_0} : t \mapsto u_0 \cos t - v_0 \sin t$$

$$v_{u_0, v_0} : t \mapsto u_0 \sin t + v_0 \cos t$$

### Bemerkung 3.3.4 (Energie konstant)

1. Die Funktion  $E$  heißt die Energie der Schwingung:

$$E := u^2 + v^2$$

$E$  ist konstant:

$$E' = 2uu' + 2vv' = 0 \quad \Rightarrow \quad E = E(0).$$

2. Für die Lösung des Anfangswertproblems 3.3.1(1.)

$$u(0) = 0, v(0) = 1$$

gilt  $u^2 + v^2 = 1$ , d.h.  $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$ .

### Feststellung 3.3.5 (Eindeutigkeit der Lösung)

Die Lösung der Schwingungsgleichung ist durch die Anfangswerte eindeutig bestimmt.

### Beweis (Eindeutigkeit der Lösung).

Es seien  $u_1, v_1$  und  $u_2, v_2$  Lösungen der Schwingungsgleichung mit jeweils gleichen Anfangswerten. Dann ist die Differenz eine Lösung mit Anfangswerten Null (vgl. 3.3.2)

$$u := u_1 - u_2, \quad u(0) = u_1(0) - u_2(0) = 0,$$

$$v := v_1 - v_2, \quad v(0) = v_1(0) - v_2(0) = 0.$$

Man bilde die Funktion (Energie)

$$E := u^2 + v^2$$

Dann folgt nach Korollar 3.2.17:

$$E' = 2uu' + 2vv' = 0 \quad \Rightarrow \quad E = E(0) = 0.$$

Also sind  $u = 0$ ,  $v = 0$  und somit  $u_1 = u_2$ ,  $v_1 = v_2$ .

### Bemerkungen und Beispiele 3.3.6

1. Die Schwingungsgleichung 3.3.1 mit den Anfangswerten

$$u(0) = 1, v(0) = 0$$

hat die Lösungen  $u(t) = \cos t$ ,  $v(t) = \sin t$  und:

$$\tilde{u}(t) := u(-t) \quad \text{und} \quad \tilde{v}(t) := -v(-t).$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt:

$\cos$  ist eine **gerade Funktion**,  
 $\sin$  ist eine **ungerade Funktion**.

2. Die Schwingungsgleichung mit den Anfangswerten:

$$u_{u_0, v_0}(0) = u_0, v_{u_0, v_0}(0) = v_0 \quad \text{mit } u_0, v_0 \in \mathbb{R},$$

hat die **eindeutige** Lösung

$$u_{u_0, v_0} : t \mapsto u_0 \cos t - v_0 \sin t$$

$$v_{u_0, v_0} : t \mapsto u_0 \sin t + v_0 \cos t$$

**Bemerkung.** Man approximiert Lösungen von Differentialgleichungen durch Näherungen, die man durch Integrieren verbessert. Im Fall der Schwingungsgleichung sieht das so aus:

Für das Anfangswertproblem 3.3.1(1.)  $u(0) = 1, v(0) = 0$  gilt  $\cos t = u(t) \leq 1$ . Durch sukzessive Integration über  $[0, t]$  folgt:

$$\begin{aligned} v' = u, v(0) = 0 &\Rightarrow v(t) \leq t \\ u' = -v, u(0) = 1 &\Rightarrow 1 - \frac{t^2}{2} \leq u(t) \\ v' = u, v(0) = 0 &\Rightarrow t - \frac{t^3}{3!} \leq v(t) \\ u' = -v, u(0) = 1 &\Rightarrow u(t) \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} \\ v' = u, v(0) = 0 &\Rightarrow v(t) \leq t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \\ u' = -v, u(0) = 1 &\Rightarrow 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \leq u(t) \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.3.7 (Sukzessive Approximation)**

Integriert man die Abschätzung  $\cos(t) \leq 1$  für  $t \in \mathbb{R}$ , **sukzessive** über das Intervall  $[0, t]$ , so erhält man induktiv für  $n = 0, 1, \dots$  und  $t > 0$  die Abschätzungen:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} \leq \cos(t) \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} \leq \sin(t) \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}. \tag{2}$$

Hieraus folgt für  $n = 0, 1, \dots$  und  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} - \cos(t) \right| < \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!}, \tag{3}$$

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} - \sin(t) \right| < \frac{t^{2n+3}}{(2n+3)!}. \tag{4}$$

**Beweis (Sukzessive Approximation).**

1. Die Ungleichungen (1) und (2) ergeben sich induktiv, wie in der Vorbemerkung gezeigt wurde.
2. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems 3.3.1(1.)  $u(0) = 1, v(0) = 0$  folgt

$$u(-t) = u(t) \quad \text{und} \quad v(-t) = -v(t).$$

3. Also gilt die Abschätzung von  $u(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . In der Abschätzung von  $v(t)$  verkehren sich für  $t < 0$  die Vorzeichen. Aus (1) folgt also (3) und aus (2) folgt (4).

**Korollar 3.3.8 (Potenzreihen von cos und sin)**

Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^n}{n!} = 0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R},$$

konvergiert die Potenzreihe (3) gegen  $\cos t$  und die Potenzreihe (4) gegen  $\sin t$  (vgl. Beispiel 3.2.27).

$$\begin{aligned} \cos t &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}, \\ \sin t &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.3.9 (Kleinste Nullstelle von  $\cos t$ )**

Es gibt eine kleinste positive Nullstelle  $t_0$  der Funktion  $t \mapsto \cos t$ . Diese liegt im Intervall

$$t_0 \in \left[ \sqrt{2}, \sqrt{6 - \sqrt{12}} \right] \approx [1.41, 1.59]$$



und ist eine **einfache Nullstelle**. D.h, die Ableitung  $-\sin t_0 \neq 0$ . Es ist  $\sin t_0 = 1$  und

$$\begin{aligned} 0 < \cos t & \text{ für } t \in (-t_0, t_0), \\ 0 < \sin t & \text{ für } t \in (0, t_0]. \end{aligned}$$

### Bezeichnung 3.3.10 (Zahl $\pi$ )

Man bezeichnet

$$\pi := 2t_0,$$

wobei  $t_0$  die kleinste positive Nullstelle der Funktion  $t \mapsto \cos t$  ist.

### Beweis (Kleinste Nullstelle von $\cos t$ ).

Nach Bemerkung 3.3.7, Gleichung (1) gilt

$$1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} \quad \text{für } 0 \leq t.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 0 < \cos t & \quad \text{für } 0 \leq t < t_1 = \sqrt{2} \approx 1,41, \\ \cos t_2 \leq 0 & \quad \text{für } t_2 = \sqrt{6 - \sqrt{36 - 24}} \approx 1.59, \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz 2.5.14 hat  $\cos t$  mindestens eine Nullstelle im Intervall  $[t_1, t_2]$ .

Für die Ableitung  $(\cos t)' = -\sin t$  gilt nach Bemerkung 3.3.7, Gleichung (2)

$$-\sin t \leq -t + \frac{t^3}{3!} < 0 \quad \text{für } 0 < t < \sqrt{6} \approx 2.45,$$

Also gibt es genau eine einfache Nullstelle  $\cos t_0 = 0$  in  $[t_1, t_2]$ . und es ist  $\sin t_0 = 1$ . Ferner gilt  $0 < \cos t$  für  $t \in [0, t_0]$ .

### Bemerkung 3.3.11 (Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ )

1. Es gilt (vgl. Abbildung 3.3.14(2.))

$$\begin{aligned} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin t, & \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin t, \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos t, & \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos t. \end{aligned} \quad \text{und}$$

2. Aus den Anfangswerten erhält man die Wertetabelle:

$t$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos t$	$-1$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$	$1$
$\sin t$	$0$	$-1$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$

### Beweis. 1. Die Funktionen

$$u : t \mapsto -\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad v : t \mapsto \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

sind eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u' &= -v, & \text{und} & & u(0) &= 0, \\ v' &= u, & & & v(0) &= 1. \end{aligned}$$

Da die Lösung eindeutig ist (vgl. 3.3.5), folgen die linken Gleichungen.

Nach Beispiel 3.3.6(1) ist  $\cos$  eine gerade Funktion und  $\sin$  ungerade:

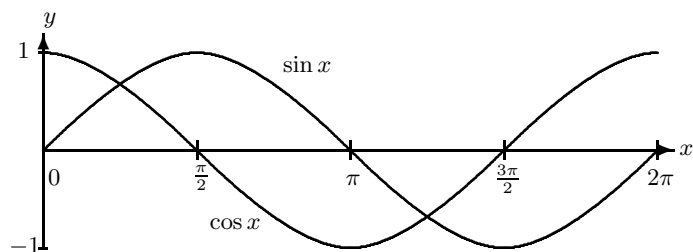
$$\begin{aligned} \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(-t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(-t) = \sin t, \\ \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(-t + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(-t) = -\cos t. \end{aligned}$$

### Bemerkung 3.3.12 (Kleinste Nullstelle von $\sin t$ )

1. Es ist  $0 < \sin t$  für  $0 < t < \pi$ .
2.  $\pi$  ist die kleinste positive Nullstelle von  $t \mapsto \sin t$ .

3. Es gelten die folgenden Vorzeichen:

$t \in$	$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, \pi)$
$\cos t$	-	+	+	-	-	+
$\sin t$	-	-	+	+	-	-



**Beweis (Kleinste Nullstelle von  $\sin t$ ).**

1. Nach 3.3.7 (2)

$$0 < t - \frac{t^3}{3!} \leq \sin t \quad \text{für } 0 < t < \sqrt{6},$$

Nach Definition 3.3.10 von  $\pi$  folgt:

$$0 < \sin t \quad \text{für } 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \leq \sqrt{6 - \sqrt{36 - 24}} < \sqrt{6},$$

Nach 3.3.7 (1) und 3.3.11 gilt:

$$1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t = \sin(t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{für } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}.$$

Also ist  $0 < \sin t$  für  $0 < t < \pi$ .

2. Aus Bemerkung 3.3.11 folgt  $\sin \pi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

**Bezeichnung 3.3.13 (Periodische Funktionen)**

1. Es seien  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine Zahl  $0 < p$  heißt eine Periode von  $f$ , wenn

$$f(t + p) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

2. Eine nichtkonstante, stetige, periodische Funktion hat eine kleinste Periode

$$p := \min\{q \mid q \text{ ist eine Periode von } f\}$$

$f$  heißt dann **periodisch** mit **der** Periode  $p$ .

**Bemerkung 3.3.14 (sin und cos sind  $2\pi$ -periodisch)**

1. Für  $t \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\cos(t + n\pi) = (-1)^n \cos t,$$

$$\sin(t + n\pi) = (-1)^n \sin t.$$

2. Die Funktionen  $t \mapsto \sin t$  und  $t \mapsto \cos t$  haben die (kleinste) Periode  $2\pi$ .

**Beweis.**

1. Die Aussage folgt induktiv aus dem Fall  $n = \pm 1$ .

Aus Bemerkung 3.3.11 folgt

$$\cos(t + \pi) = -\sin(t + \frac{\pi}{2}) = -\cos t,$$

$$\cos(t - \pi) = \sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos t.$$

Analog folgt die Behauptung für  $t \mapsto \sin t$ .

2. Da  $\sin' = \cos$  und  $\cos' = -\sin$  ist, haben Sinus und Cosinus die gleiche Periode.

$2\pi$  ist eine Periode von  $\sin$  und  $\cos$ .

Wenn es eine kleinere Periode  $p$  gibt, dann gilt  $\sin p = \sin(0 + p) = \sin 0 = 0$ . Da  $\pi$  die kleinste positive Nullstelle ist (vgl. 3.3.12), folgt  $p = \pi$ .

Da  $\cos(\pi) = -\cos 0 = -1$  ist, ist  $\pi$  keine Periode.

**Bemerkung. (Phasenbild im Phasenraum)**

- Das Verhalten einer Lösung der Schwingungsgleichung läßt sich geometrisch besser im  $\mathbb{R}^2$  beschreiben:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$$

In der Physik heißt dies das **Phasenbild**.

- Hat die Lösung die Anfangswerte

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0,$$

so liegen Punkte  $(u(t), v(t))$  auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius  $r$  (vgl. Bemerkung 3.3.4(1.)):

$$r := \sqrt{u_0^2 + v_0^2}.$$

- Wir wollen zeigen, daß die Bildpunkte  $\{(u(t), v(t)) \mid t \in [0, 2\pi)\}$  den gesamten Kreis mit Radius  $r$  ausfüllen.

### Satz 3.3.15 (Argumentfunktion, Polarkordinaten)

1. Zu jedem Punkt  $(x, y)$  auf dem Einheitskreis

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 + y^2 = 1\}$$

gibt es genau ein  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  mit

$$\cos \varphi = x, \quad \sin \varphi = y.$$

Die Abbildung des Einheitskreises

$$\arg : \mathbb{S}^1 \rightarrow (-\pi, \pi],$$

$$\arg : (x, y) \mapsto \varphi$$

heißt **Argument-Funktion**.

2. Zu jedem Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  gibt es genau ein  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  und ein  $r \in (0, \infty)$ , so daß

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Es ist  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\varphi = \arg(x, y) := \arg\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$ .

### Beweis.

1. Man setze  $\arg(1, 0) := 0$  und  $\arg(-1, 0) := \pi$ .

Die Funktion

$$(0, \pi) \xrightarrow{\cos} (-1, 1) \text{ ist bijektiv, streng monoton fallend,}$$

$$(-\pi, 0) \xrightarrow{\cos} (-1, 1) \text{ ist bijektiv, streng monoton wachsend.}$$

Zu  $x \in (-1, 1)$  gibt es also zwei Werte

$$t_1 \in (0, \pi), \quad t_2 \in (-\pi, 0),$$

mit  $\cos t_1 = x = \cos t_2$ . Nun ist  $|\sin t_1| = |\sin t_2| = |y|$  und

$$\sin t_1 > 0, \quad \sin t_2 < 0.$$

Man wähle also  $\varphi \in \{t_1, t_2\}$ , so daß  $\sin \varphi = y$ .

2. Man setze  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\varphi = \arg\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$ .

### Bezeichnung 3.3.16 (Polarkordinaten)

Die durch den Satz 3.3.15(2) definierte bijektive Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty) \times [0, 2\pi),$$

$$(x, y) \mapsto (r, \varphi)$$

heißt **Polarkoordinaten**. Man nennt

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$  die **euklidische Norm** des Vektors.

$\varphi = \arg(x, y) := \arg\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$  das **Argument** des Vektors.

**Bemerkung.1.** Eine alternative Definition des Arguments ist:

$$\phi := \begin{cases} \varphi & \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ \varphi + 2\pi & \text{für } -\pi < \varphi < 0. \end{cases}$$

2. Man nennt  $\varphi$  ( oder  $\phi$  ) den im **Bogenmaß** gemessenen **Winkel** des Vektors  $(x, y)$  gegen die  $x$ -Achse oder den Winkel zwischen dem ersten Basisvektor  $(1, 0)$  und dem Vektor  $(x, y)$ .

Wir vereinbaren **ad hoc**:

### Bezeichnung 3.3.17 (Positiver Drehsinn)

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  eine stetige Abbildung in den Einheitskreis.

Wir sagen,  $f$  läuft im **positiven Drehsinn**, wenn es zu jedem inneren Punkt  $t \in I$  mit  $f(t) \neq (-1, 0)$  ein  $\delta > 0$  gibt, so daß

$$\arg \circ f : (t - \delta, t + \delta) \rightarrow (-\pi, \pi]$$

monoton wächst.

**Beispiel.** Die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{S}^1$$

**wickelt** die Zahlengerade  $\mathbb{R}$  abzählbar unendlich oft im mathematischen positiven Drehsinn um den Einheitskreis  $\mathbb{S}^1$

---

### Bemerkung 3.3.18 (Additionstheorem für cos und sin)

Für  $t, \varphi \in \mathbb{R}$  gilt

$$\cos(t + \varphi) = \cos t \cos \varphi - \sin t \sin \varphi$$

$$\sin(t + \varphi) = \sin t \cos \varphi + \cos t \sin \varphi$$

### Bemerkung

1. Jede Lösung der Schwingungsgleichung hat die Form

$$u : t \mapsto r \cos(t + \varphi) \quad \text{und} \quad v : t \mapsto r \sin(t + \varphi)$$

mit einer **Amplitude**  $r \in [0, \infty)$  und einer **Phasenverschiebung**  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Dabei sind  $(r, \varphi)$  die Polarkoordinaten der Anfangswerte  $(u(0), v(0))$ .

2. Das Additionstheorem schreibt sich einfacher mit Hilfe der **komplexen Zahlen** und der **Eulerschen Formeln**:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad e^{i(t+\varphi)} = e^{it} \cdot e^{i\varphi}.$$

---

### Beweis (Additionstheorem für cos und sin).

Die Funktionen

$$u : t \mapsto \cos(t + \varphi) \quad \text{und} \quad v : t \mapsto \sin(t + \varphi)$$

sind eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u' &= -v, & \text{und} & & u(0) &= \cos \varphi, \\ v' &= u. & & & v(0) &= \sin \varphi. \end{aligned}$$

Da die Lösung eindeutig ist (vgl. 3.3.5) stimmen diese Lösung und die Lösung gemäß 3.3.6 (2) überein. D.h.

$$\cos(t + \varphi) = \cos t \cos \varphi - \sin t \sin \varphi,$$

$$\sin(t + \varphi) = \sin t \cos \varphi + \cos t \sin \varphi.$$

### 3.3.2 Kurvenlänge und Bogenmaß

**Bemerkung.** Wir wollen die Länge des Graphen  $L_{[a,b]} f$  einer stetig differenzierbaren Funktion  $f$  über einem Intervall  $[a, b]$  durch anschauliche Forderungen eindeutig beschreiben.

Dazu beschränken wir die Betrachtung zunächst auf monotone Funktionen  $f, g$  auf einem offenen Intervall  $I$ .

- Es seien  $f$  und  $g$  monoton wachsend. Wenn man ihren Graphen wie einen Berghang hochläuft, so wird über demselben Intervall der steilere Graph den längeren Weg ergeben.
- Wenn die eine Funktion wächst und die andere fällt, so wird ebenfalls der steilere Weg der längere sein.

Ferner soll die Länge additiv sein. Für Geradenstücke wird die Länge mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmt.

### Definition 3.3.19 (Axiome der Länge eines Graphen)

Es sei  $I$  ein offenes Intervall. Die **Kurvenlänge** ordnet jeder stetig differenzierbaren Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und jedem kompakten Intervall  $[a, b] \subset I$ , eine reelle Zahl zu:

$$f \mapsto L_{[a,b]}f.$$

Dabei sollen die folgenden Regeln gelten:

**Intervall-Additivität:** Für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a < b < c$  gilt:

$$L_{[a,b]}f + L_{[b,c]}f = L_{[a,c]}f.$$

**Monotonie** in den Ableitungen:

$$0 \leq |f'| \leq |g'| \Rightarrow L_{[a,b]}f \leq L_{[a,b]}g$$

**Eichung:** Für eine affine Funktion  $x \mapsto \alpha x + \beta$  gilt:

$$L_{[a,b]}(\alpha x + \beta) := \sqrt{1 + \alpha^2} (b - a)$$

---

### Bemerkung (Integralformel: Kurvenlänge).

Für stetig differenzierbare Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und Intervalle  $[a, b] \subset I$  erfüllt die folgende Integralformel offensichtlich die Axiome 3.3.19 der Länge eines Graphen:

$$f \mapsto \int_{[a,b]} \sqrt{1 + (f')^2}.$$

Wir wollen zeigen, daß dies die einzige Möglichkeit ist, die Länge zu definieren.

**Feststellung 3.3.20 (Kurvenlänge existiert eindeutig)** Die Länge von Graphen stetig differenzierbarer Funktionen ist durch die Axiome 3.3.19 eindeutig bestimmt.

Für eine stetig differenzierbare Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem offenen Intervall  $I$  und jedes kompakte Teilintervall  $[a, b] \subset I$  gilt für die Kurvenlänge:

$$L_{[a,b]}f = \int_{[a,b]} \sqrt{1 + (f')^2}.$$

---

### Beweis (Kurvenlänge existiert eindeutig).

Wir müssen noch die **Eindeutigkeit** zeigen:

Es sei  $L$  eine Kurvenlänge ist, die die Axiome 3.3.19 erfüllt. Man fixiere einen Punkt  $a \in I$  und bilde die folgende Funktion:

$$l : x \mapsto \begin{cases} L_{[a,x]}f & \text{für } x \in I, a \leq x, \\ -L_{[x,a]}f & \text{für } x \in I, x < a, \end{cases}$$

Für  $x_0 < x$  gilt  $l(x) - l(x_0) = L_{[x_0,x]}$ . Da  $L$  monoton ist, folgt

$$\min_{\xi \in [x_0,x]} \sqrt{1 + f'(\xi)^2} \leq \frac{l(x) - l(x_0)}{x - x_0} \leq \max_{\xi \in [x_0,x]} \sqrt{1 + f'(\xi)^2}.$$

Da  $f'$  stetig ist, existiert der rechteitige Grenzwert:

$$\lim_{x \downarrow x_0} \frac{l(x) - l(x_0)}{x - x_0} = \sqrt{1 + f'(x_0)^2}.$$

Analog erhält man für den linkeitigen Grenzwert denselben Wert. Also ist  $l' = \sqrt{1 + (f')^2}$  und  $l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'(\xi)^2} d\xi$ .

---

### Feststellung 3.3.21 (Kurvenlänge der Umkehrfunkt.)

Es seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle und  $f : I \rightarrow J$  eine streng monoton Funktion mit Umkehrfunktion  $g : J \rightarrow I$ .

Es sei  $f$  stetig differenzierbar und  $f'(x) \neq 0$  für  $x \in I$ .

Dann haben der Graph von  $f$  und der Graph der Umkehrfunktion  $g$  über einander entsprechenden Intervallen die gleiche Kurvenlänge:

$$L_{[a,b]}(f) = L_{f([a,b])}(g) \quad \text{für } [a, b] \subset I.$$

### Bemerkung.

1. Wenn  $f$  streng monoton wachsend ist, gilt

$$L_{[a,b]}(f) = L_{[f(a),f(b)]}(g) \quad \text{für } [a, b] \subset I.$$

2. Wenn  $f$  streng monoton fallend ist, gilt

$$L_{[a,b]}(f) = L_{[f(b),f(a)]}(g) \quad \text{für } [a, b] \subset I.$$

---

**Beweis (Kurvenlänge der Umkehrfunktion).**

**Fall  $f$  streng monoton wachsend:** Da nach Voraussetzung  $f'(x) \neq 0$  ist, folgt aus dem Monotonie-Kriterium 3.2.19, daß  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in I$  ist.

Für ein kompaktes Intervall  $[a, b] \subset I$  folgt nun aus der Beziehung (vgl. Satz 3.2.11)  $(g)'(f(x)) = f'(x)^{-1}$  und der der Substitutionsformel 3.2.23

$$\begin{aligned} L_{[f(a), f(b)]}(g) &= \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + g'(y)^2} dy \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + g'(f(x))^2} f'(x) dx \\ &= \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx = L_{[a, b]}. \end{aligned}$$

**Fall  $f$  streng monoton wachsend:** Analog.

---

### 3.3.3 Hyperbolische Funktionen

**Bemerkung.** Wir betrachten als Beispiel die Bogenlänge der Parabel und stoßen dabei auf die Hyperbelfunktionen.

Die Namen der Hyperbel-Funktionen erklären sich aus einer formalen Ähnlichkeit mit den trigonometrischen Funktionen, bei der an Stelle des Kreises die Hyperbel tritt.

In vielen Anwendungen kommen die folgenden Linearkombinationen der Exponentialfunktion vor:

**Definition 3.3.22 (Hyperbelfunktionen)**

$$\begin{aligned} \cosh : x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \sinh : x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Cosinus hyperbolicus** oder Hyperbel-Cosinus,

**Sinus hyperbolicus** oder Hyperbel-Sinus.

---

**Bemerkung.**

1. Es gilt

$$\begin{aligned} \cosh' t &= \sinh t, & \sinh' t &= \cosh t, \\ \cosh 0 &= 1, & \sinh 0 &= 0. \end{aligned}$$

2. Da

$$(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1,$$

liegen die Werte  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$  auf dem rechten Zweig der Einheitshyperbel

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 1 \text{ und } x > 0\}.$$

Man beachte, daß der Parameter  $t$  hier aber die Bedeutung der Fläche eines Hyperbelsektors und nicht die einer Bogenlänge hat!

Die Umkehrfunktionen heißen deshalb **Area-Funktionen**.

---

**Definition 3.3.23 (Area hyperbolici Funktionen)**

1.  $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt **Area-Cosinus**:

$$\begin{aligned} \operatorname{ar} \cosh &: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty), \\ \operatorname{ar} \cosh &: y \mapsto \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad \text{für } (y \in [1, \infty)). \end{aligned}$$

2.  $\cosh : [-\infty, 0] \rightarrow [1, \infty)$  ist streng monoton fallend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt der andere Zweig des **Area-Cosinus**:

$$\begin{aligned} \operatorname{ar} \cosh &: [1, \infty) \rightarrow (-\infty, 0], \\ \operatorname{ar} \cosh &: y \mapsto \log(y - \sqrt{y^2 - 1}) \quad \text{für } (y \in [1, \infty)). \end{aligned}$$

3.  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt **Area-Sinus**:

$$\operatorname{ar} \sinh : y \mapsto \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad \text{für } (y \in [1, \infty)).$$

### Beispiele 3.3.24 (Bogenlänge der Parabel)

Die Bogenlänge der Einheitsparabel  $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2$  über dem Intervall  $[0, x]$  ist:

$$\int_0^x \sqrt{1+4\xi^2} d\xi = \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4} \operatorname{ar sinh}(2x).$$

Man beachte die Ableitung der Area-Sinus Funktion:

$$(\operatorname{ar sinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

### 3.3.4 Bogenmaß und arccos, arcsin

#### Bemerkung (Einheitskreis)

- Der Einheitskreis  $\mathbb{S}^1$  ist die Kurve im  $\mathbb{R}^2$ , die aus Punkten besteht, deren Abstand zum Ursprung gleich 1 ist:

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$$

$\mathbb{S}^1$  ist im mathematisch positiven Drehsinn, also gegen den Uhrzeigersinn, orientiert.

- Der Einheitskreis wird durch die bijektive Abbildung

$$(-\pi, \pi] \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{S}^1$$

parametrisiert. Nach Satz 3.3.15 ist die Umkehrfunktion hierzu die Argumentfunktion  $\arg : \mathbb{S}^1 \rightarrow (-\pi, \pi]$ .

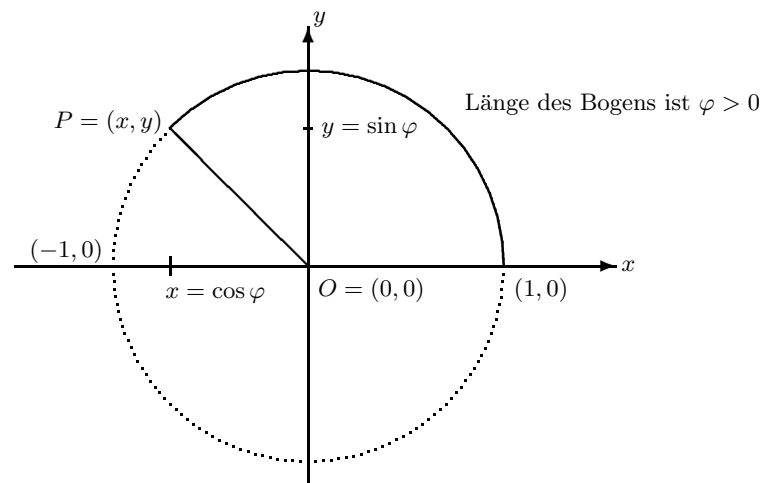
**Ziel.** Versieht man die Kurvenlänge auf dem Einheitskreis mit einem Vorzeichen, je nachdem, in welcher Richtung ein Kurvenstück durchlaufen wird, so erhält man das Bogenmaß.

Die Argumentfunktion 3.3.15 gibt das Bogenmaß auf dem Einheitskreis an:

Für einen Punkt  $P = (x, y) \in \mathbb{S}^1$  betrachte man denjenigen Kreisbogen vom Punkt  $(1, 0)$  zum Punkt  $P$ , der den Punkt  $(-1, 0)$  nicht enthält.

$\varphi = \arg(x, y)$  ist die **orientierte Länge** dieses Kreisbogens. D.h.:

- Wenn  $P$  im oberen Halbkreis liegt, liegt der Kreisbogen im oberen Halbkreis und seine absolute Länge ist  $\varphi$ .
- Wenn  $P$  im unteren Halbkreis liegt, liegt der Kreisbogen im unteren Halbkreis und seine absolute Länge ist  $-\varphi$ .



Für den Kreisbogen im oberen Halbkreis ist die Länge gleich dem Argument  $\varphi$  des Endpunktes  $P$ . (vgl. auch die Abbildung zu Korollar 3.3.30)

#### Bemerkung (Parametrisierung der Halbkreise).

- Den oberen und den unteren Halbkreis kann man als Graph einer Funktion schreiben:

$$[-1, 1] \ni x \mapsto \sqrt{1-x^2} \quad (\text{oberer Halbkreis})$$

$$(-1, 1] \ni x \mapsto -\sqrt{1-x^2} \quad (\text{unterer Halbkreis})$$

Die Funktionen sind stetig und im offenen Intervall  $(-1, 1)$  stetig differenzierbar.

Die Parametrisierung des oberen Halbkreises durchläuft den Halbkreis entgegen dem mathematischen Drehsinn.

2. Analog kann man den rechten und linken Halbkreis als Graph über der  $y$ -Achse schreiben:

$$[-1, 1] \ni y \mapsto \sqrt{1 - y^2} \quad (\text{rechter Halbkreis})$$

$$(-1, 1) \ni y \mapsto -\sqrt{1 - y^2} \quad (\text{linker Halbkreis})$$

### Bezeichnung 3.3.25 (Arcus-Funktionen)

1. Es ist  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  streng monoton fallend, stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion **Arcus-Cosinus**

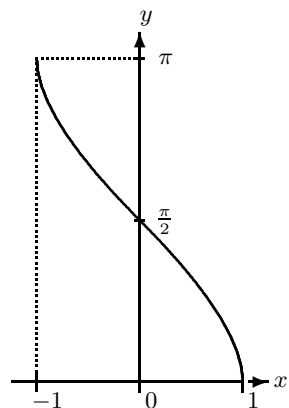
$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

ist also streng monoton fallend, stetig und bijektiv.

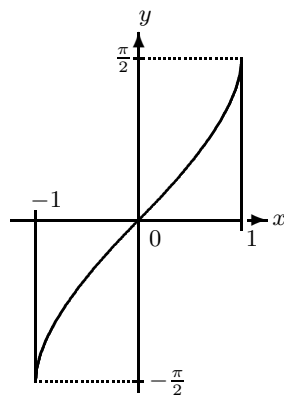
2. Es ist  $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion **Arcus-Sinus**

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

ist also streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.



$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$$



$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$$

### Beispiel (Ableitung von arccos, arcsin).

Man beachte, daß

$$\sin t \geq 0 \quad \text{für } t \in [0, \pi],$$

$$\cos t \geq 0 \quad \text{für } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Für die Umkehrfunktionen folgt nach Satz 3.2.11:

$$\begin{aligned} (\cos t)' &= -\sin t = -\sqrt{1 - (\cos t)^2} \\ \Rightarrow (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin t)' &= \cos t = \sqrt{1 - (\sin t)^2} \\ \Rightarrow (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

### Beweis.

1. Nach Bemerkung 3.3.12 ist die Ableitung

$$(\cos t)' = -\sin t < 0 \quad \text{für } t \in (0, \pi).$$

Es ist  $\cos 0 = 1$  und  $\cos(-\pi) = -1$  (vgl. Wertetabelle 3.3.11 2). Nach Satz 3.2.19 ist

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

streng monoton fallend, stetig und bijektiv. Nach Satz 2.5.17 existiert die stetige Umkehrfunktion.

2. Der Beweis geht analog:

Nach Bemerkung 3.3.9 und Beispiel 3.3.6(1) ist die Ableitung

$$(\sin x)' = \cos x > 0 \quad \text{für } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Es ist  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$  und  $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$  (vgl. Wertetabelle 3.3.11 2).



### Feststellung 3.3.26 (arg auf oberem Halbkreis)

1. Für Punkte  $(x, y)$  auf dem oberen Halbkreis gilt:

$$\arg(x, y) = \arccos x \quad (\text{oberer Halbkreis}).$$

2. Für Punkte  $(x, y)$  auf dem unteren Halbkreis mit  $x \in (-1, 1]$  gilt:

$$\arg(x, y) = -\arccos x \quad (\text{unterer Halbkreis}).$$

---

### Beweis (arg auf oberem Halbkreis).

1. Für Punkte  $(x, y)$  auf dem oberen Halbkreis ist  $x \in [-1, 1]$   $y = \sqrt{1-x^2}$ . Man setze

$$\varphi := \arccos x \in [0, \pi].$$

Nach Bemerkung 3.3.12 ist

$$0 \leq \sin \varphi = \sqrt{1 - (\cos \varphi)^2} \quad \text{für } \varphi \in [0, \pi].$$

Also ist  $x = \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi$  und somit  $\arg(x, y) = \varphi$ .

2. Für Punkte  $(x, y)$  auf dem unteren Halbkreis ist  $x \in (-1, 1]$   $y = -\sqrt{1-x^2}$ . Man setze  $\varphi := -\arccos x \in (-\pi, 0]$ . Dann ist  $x = \cos(-\varphi) = \cos \varphi$ . Nach Bemerkung 3.3.12 ist

$$0 \geq \sin \varphi = -\sqrt{1 - (\cos \varphi)^2} \quad \text{für } \varphi \in [-\pi, 0].$$

Also ist  $y = \sin \varphi$  und  $\arg(x, y) = \varphi$ .

### Bemerkung 3.3.27 (arg auf rechten Halbkreis)

Für Punkte  $(x, y)$  auf dem rechten Halbkreis gilt:

$$\arg(x, y) = \arcsin y \quad (\text{rechter Halbkreis}).$$

**Beweis.** Für Punkte  $(x, y)$  auf dem rechten Halbkreis ist  $y \in [-1, 1]$  und  $x = \sqrt{1-y^2}$ . Man setze

$$\varphi := \arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Nach Bemerkung 3.3.9 ist

$$0 \leq \cos \varphi = \sqrt{1 - (\sin \varphi)^2} \quad \text{für } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Also ist  $y = \sin \varphi$ ,  $x = \cos \varphi$  und somit  $\arg(x, y) = \varphi$ .

**Bemerkung.** Auf dem linken Halbkreis hat die Argumentfunktion im Punkte  $(-1, 0)$  eine Sprungstelle. Es gibt daher keine geschlossenen Formeln für die Argumentfunktion auf dem linken Halbkreis.

---

### Feststellung 3.3.28 (Bogenmaß: oberer Halbkreis)

Für einen Punkt  $x \in [-1, 1]$  sei  $P_x := (x, \sqrt{1-x^2})$  der Punkt auf dem oberen Halbkreis über  $x$ .

Auf dem oberen Halbkreis gilt für die Länge des Bogens über dem Intervall  $[x_1, x_2] \subset (-1, 1)$

$$\begin{aligned} L_{[x_1, x_2]} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arccos x_1 - \arccos x_2 \\ &= \arg P_{x_1} - \arg P_{x_2}. \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Es existieren die Grenzwerte:

$$\lim_{x \uparrow 1} \arccos x = \arccos 1 = 0 \quad \lim_{x \downarrow -1} \arccos x = \arccos(-1) = \pi$$

**Korollar 3.3.29** Im Grenzwert ist die Länge des Bogens auf dem oberen Halbkreis über dem Intervall  $[x, 1] \subset [-1, 1]$ :

$$L_{[x, 1]} := \arg P_x$$

---

### Beweis (Bogenmaß: oberer Halbkreis).

Man beachte, daß der Integrand  $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$  in den Endpunkten  $\xi = \pm 1$  gegen  $\infty$  geht.

Es ist  $\cos : [0, \pi] \rightarrow (-1, 1)$  streng monoton fallend, bijektiv und stetig differenzierbar. Die Umkehrfunktion

$$\arccos : (-1, 1) \rightarrow (0, \pi).$$

ist streng monoton fallend, bijektiv und stetig differenzierbar.

Für  $[x_1, x_2] \subset (-1, 1)$  substituiere man  $\xi = \cos t$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = - \int_{\arccos x_1}^{\arccos x_2} dt = \arccos x_1 - \arccos x_2.$$

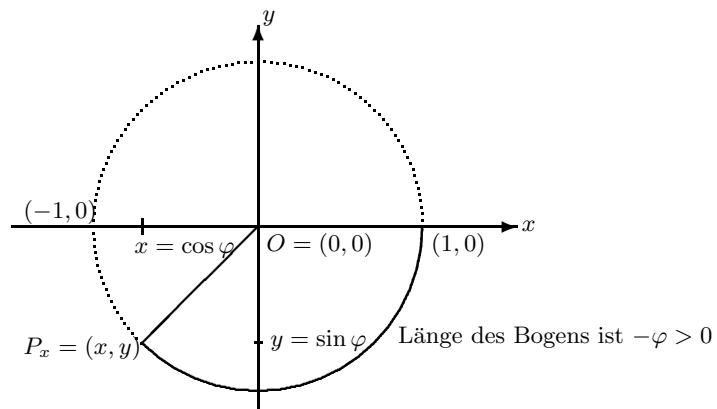
Nach Feststellung 3.3.26(1.) gilt auf dem oberen Halbkreis

$$\arccos x_1 - \arccos x_2 = \arg P_{x_1} - \arg P_{x_2}$$

### Korollar 3.3.30 (Bogenmaß: unterer Halbkreis)

Eine analoge Betrachtung zu 3.3.28 auf dem unteren Halbkreis zeigt, daß für Länge des unteren Bogens über dem Intervall  $[x, 1] \subset (-1, 1]$  die Beziehung gilt:

$$L_{[x,1]} = -\arg P_x.$$



## Literatur

- [BRÖCKER] BRÖCKER, Theodor: *Analysis I (2. Auflage)* 1995 Spektrum, Akad. Verl.
- [DIEUDONNÉ] DIEUDONNÉ, J.: *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press 1960. Deutsche Übersetzung: *Grundzüge der modernen Analysis* Vieweg 1981
- [FORSTER] FORSTER, Otto: *Analysis 1 (4. Auflage)* Vieweg 1983
- [KABALLO] KABALLO, Winfried: *Einführung in die Analysis I (2. Auflage)* Spektrum Akademische Verlag, Heidelberg Berlin
- [KÖNIGSBERGER] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis I (2. Auflage)* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York
- [LANDAU] LANDAU, Edmund: *Grundlagen der Analysis (Das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen)* Leipzig 1930, dritte Auflage: New York 1960.
- [VAN DER WAERDEN] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Algebra (Band I)* 7. Auflage: Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1966.