Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. G. Wittstock

Klausur Analysis I
Wintersemester 2000/2001

Für jede der folgenden 7 Aufgaben gibt es 10 Punkte; mit 27 Punkten haben Sie bestanden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Geben Sie jeweils eine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften an, und weisen Sie diese nach:

a) $f : [\frac{1}{2}, \infty) \to [-1, 2]$ ist *injektiv* und *streng monoton fallend.*

b) $f : [0, 1) \to [-1, 1]$ ist *surjektiv* und *monoton wachsend.*

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist *unbeschränkt* und *nach oben beschränkt.*

d) $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ ist *konkav* auf $[-1, 0)$ und *konvex* auf $[0, 1]$.

e) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ist *stetig in* $\frac{1}{2}$ und *unstetig* sonst.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{i) } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \sqrt{5^n}}{3^n + 1} \qquad\qquad \text{ii) } \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{\frac{n}{2}+1}$$

b) i) Geben Sie eine Nullfolge an.

ii) Zeigen Sie mit Hilfe der Grenzwertdefinition für Folgen, daß es sich dabei um eine Nullfolge handelt.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie Infimum und Supremum; entscheiden Sie ob ein Minimum oder Maximum vorliegt:

i) $M := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 + 8x \leq 0\right\} \cap [0, 1]$

ii) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} |x| & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{sonst} \end{cases}$

b) Gegeben ist die Folge $a_n = (-1)^n \dfrac{n + (-1)^n}{n}$ und die Menge $N := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

i) Bestimmen Sie $\liminf a_n$ und $\limsup a_n$.

ii) Bestimmen Sie Infimum und Supremum von N; entscheiden Sie ob ein Minimum oder Maximum vorliegt.

Aufgabe 4: Welche der folgenden drei Aussagen sind wahr bzw. falsch? Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen, so daß $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $b > 0$ konvergiert. Dann ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

b) Zu zwei Mengen $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, $\emptyset \neq N \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir das punktweise Produkt

$$M \cdot N := \{xy \in \mathbb{R} \mid x \in M,\ y \in N\}.$$

Seien M, N nach oben beschränkt. Dann gilt $\sup(M \cdot N) = \sup(M) \cdot \sup(N)$.

c) Sei I ein offenes Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ unstetig in $a \in I$, dann ist $f + g : I \to \mathbb{R}$ unstetig in a.

Aufgabe 5: Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion:

a) $$\int \frac{2^{x-1}}{\sqrt{1+2^x}}\, dx$$

b) $$\int \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

c) $$\int \log(x^2 - 1)\, dx$$

d) $$\int (1 + x^2) e^{\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

Aufgabe 6:

a) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem offenen Intervall I und differenzierbar auf $I \setminus \{a\}$ $(a \in I)$ und es existiere $c := \lim\limits_{x\to a} f'(x)$. Zeigen Sie: Dann ist f differenzierbar in a und es gilt $f'(a) = c$.

Hinweis: Betrachten Sie Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to a$ und benutzen Sie den Mittelwertsatz.

b) i) Zeigen Sie:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

ii) Zeigen Sie:

$$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist überall differenzierbar.

Aufgabe 7: Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2n\left(\sqrt[n]{2x} - 1\right).$$

a) Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge (f_n)?

b) Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge (f_n) auf allen kompakten Teilintervallen gleichmäßig konvergiert.

c) Ist die Konvergenz auf dem angegebenen Intervall selbst gleichmäßig?

Hinweis: Schreiben sie f_n als Integral.