Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. G. Wittstock

Klausur Analysis I Lösungshinweise

Aufgabe 1: Geben Sie jeweils eine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften an, und weisen Sie diese nach: (Vgl. Zwischenklausur Aufgabe 3)

a) $f : [\frac{1}{2}, \infty) \to [-1, 2]$ ist *injektiv* und *streng monoton fallend*. Z. B.:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

b) $f : [0, 1) \to [-1, 1]$ ist *surjektiv* und *monoton wachsend*. Z. B.:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{für} \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{für} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist *unbeschränkt* und *nach oben beschränkt*. Z. B.:

$$f(n) = -n$$

d) $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ ist *konkav* auf $[-1, 0)$ und *konvex* auf $[0, 1]$. Z. B.:

$$f(x) = 0$$

e) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ist *stetig in* $\frac{1}{2}$ und *unstetig* sonst. Z. B.:

$$f(x) = (x - \frac{1}{2})D(x) \qquad \text{(vgl. Übungsaufgabe 8.3)}$$

Warum haben die angegebenen Funktionen die gewünschten Eigenschaften?

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte: (Vgl. Übungsaufgaben 5.1 und 6.8, speziell 6.8 c) bzw. 6.8 f))

$$\text{i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \sqrt{5^n}}{3^n + 1} \qquad\qquad \text{ii)} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{\frac{n}{2}+1}$$

zu i) Es ist

$$\frac{n^2 + \sqrt{5^n}}{3^n + 1} = \frac{\frac{1}{3^n}(n^2 + \sqrt{5^n})}{\frac{1}{3^n}(3^n + 1)} = \frac{\frac{n^2}{3^n} + \frac{\sqrt{5^n}}{3^n}}{1 + \frac{1}{3^n}} = \frac{\frac{n^2}{3^n} + \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^n}}{1 + \frac{1}{3^n}}.$$

Mit

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{n^2}{3^n} = 0, \ \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{5}{9}\right)^n = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{3^n} = 0$$

ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \sqrt{5^n}}{3^n + 1} = 0.$$

zu ii) Es ist

$$\left(1+\tfrac{1}{5n}\right)^{\frac{n}{2}+1} = \left(1+\tfrac{1}{5n}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1+\tfrac{1}{5n}\right) = \left(1+\tfrac{1}{5n}\right)^{\frac{5n}{10}}\left(1+\tfrac{1}{5n}\right) = \left(\left(1+\tfrac{1}{5n}\right)^{5n}\right)^{\frac{1}{10}}\left(1+\tfrac{1}{5n}\right).$$

Mit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{5n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{5n} = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{5n}\right)^{5n} = e \qquad \text{(Stichwort: Teilfolge)}$$

ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{\frac{n}{2}+1} = \sqrt[10]{e}.$$

b) i) Geben Sie eine Nullfolge an.

ii) Zeigen Sie mit Hilfe der Grenzwertdefinition für Folgen, daß es sich dabei um eine Nullfolge handelt.

zu i) und ii) Ein Nullfolge ist z. B.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 = 1$. Für alle $n > n_0$ ist dann $|a_n - 0| = 0 < \varepsilon$.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie Infimum und Supremum; entscheiden Sie ob ein Minimum oder Maximum vorliegt: (Vgl. Übungsaufgabe 9.1)

i) $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 + 8x \le 0\} \cap [0,1]$

ii) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} |x| & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{sonst} \end{cases}$

zu i) Es ist $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1 \wedge x^4 + 8x \le 0\}$. Da mit $x > 0$ auch $x^4 + 8x > 0$ ist und für $x = 0$ auch $x^4 + 8x = 0$ ist, sind die Bedingungen nur für $x = 0$ erfüllt. Also ist $M = \{0\}$. Offensichtlich ist dann

$$\max M = \sup M = 0 = \inf M = \min M.$$

zu ii) Es ist $f([-1,0]) = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \cup ([-1,0] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$ und $f([0,1]) = [0,1]$. Damit ist

$$f([-1,1]) = ([-1,0] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup [0,1],$$

also

$$\sup(f([-1,1])) = 1 = \max(f([-1,1]))$$

und

$$\inf(f([-1,1])) = -1$$

kein Minimum.

b) Gegeben ist die Folge $a_n = (-1)^n \dfrac{n + (-1)^n}{n}$ und die Menge $N := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Es ist $a_n = (-1)^n \frac{n}{n} + (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n + \frac{(-1)^{2n}}{n} = (-1)^n + \frac{1}{n}$

i) Bestimmen Sie $\liminf a_n$ und $\limsup a_n$. (Vgl. Übungsaufgabe 12.4)

ii) Bestimmen Sie Infimum und Supremum von N; entscheiden Sie ob ein Minimum oder Maximum vorliegt. (Vgl. Übungsaufgabe 9.1)

Aufgabe 4: Welche der folgenden drei Aussagen sind wahr bzw. falsch? Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen, so daß $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $b > 0$ konvergiert. Dann ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. (Das ist wahr! Beweisen Sie es!)

b) Zu zwei Mengen $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, $\emptyset \neq N \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir das punktweise Produkt

$$M \cdot N := \{xy \in \mathbb{R} \mid x \in M,\ y \in N\}.$$

Seien M, N nach oben beschränkt. Dann gilt $\sup(M \cdot N) = \sup(M) \cdot \sup(N)$. (Das ist falsch! Finden Sie ein Gegenbeispiel!)

c) Sei I ein offenes Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ unstetig in $a \in I$, dann ist $f + g : I \to \mathbb{R}$ unstetig in a. (Das ist falsch! Finden Sie ein Gegenbeispiel!)

Aufgabe 5: Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion:

a) $\displaystyle\int \frac{2^{x-1}}{\sqrt{1+2^x}}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1-2\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx$

c) $\displaystyle\int \log(x^2-1)\, dx$ d) $\displaystyle\int (1+x^2)e^{\frac{1}{2}x^2}\, dx$

zu a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{2^{x-1}}{\sqrt{1+2^x}}\, dx &= \int \frac{2^x}{2\sqrt{1+2^x}}\, dx \\
&= \frac{1}{\log 2}\int (-\tfrac{1}{2}+1)\,(1+2^x)^{-\frac{1}{2}}\,\underbrace{2^x \log 2}_{(2^x)'}\, dx \\
&= \frac{(1+2^x)^{-\frac{1}{2}+1}}{\log 2} \\
&= \frac{\sqrt{1+2^x}}{\log 2}
\end{aligned}$$

zu b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-2\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx &= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx \\
&= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx \\
&= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x}\, dx \\
&= \int \cos x - \sin x\, dx \\
&= \sin x + \cos x
\end{aligned}$$

zu c)

$$\begin{aligned}
\int \log(x^2-1)\, dx &= \int \log(x-1) + \log(x+1)\, dx \\
&= ((x-1)\log(x-1) - (x-1)) + ((x+1)\log(x+1) - (x+1)) \\
&= x\log(x^2-1) + \log(\frac{x+1}{x-1}) - 2x
\end{aligned}$$

zu d)

$$\begin{aligned}
\int (1+x^2)e^{\frac{1}{2}x^2}\, dx &= \int e^{\frac{1}{2}x^2}\, dx + \int x \cdot xe^{\frac{1}{2}x^2}\, dx \text{ (Integrieren Sie das hintere Integral partiell)} \\
&= xe^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6:

a) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem offenen Intervall I und differenzierbar auf $I \setminus \{a\}$ $(a \in I)$ und es existiere $c := \lim_{x\to a} f'(x)$. Zeigen Sie: Dann ist f differenzierbar in a und es gilt $f'(a) = c$.

Hinweis: Betrachten Sie Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to a$ und benutzen Sie den Mittelwertsatz.

b) i) Zeigen Sie:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

ii) Zeigen Sie:

$$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist überall differenzierbar.

zu a) Sei (x_n) eine beliebige Folge, die gegen a konvergiert. Dann existiert – nach dem Mittelwertsatz – zu jedem x_n ein ξ_n zwischen x_n und a mit

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(\xi_n).$$

Da ξ_n zwischen x_n und a liegt, konvergiert die Folge (ξ_n) auch gegen a. Wir erhalten

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = \lim_{x\to a} f'(x) = c.$$

zu b) zu i) Es ist $\log(1+x) = 0 = x$ für $x = 0$ und $\log(1+x)' = \frac{1}{1+x}$ und $x' = 1$. Nun gilt mit dem Satz von DE L‘ HOSPITAL:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{1+x} = 1.$$

zu ii) Als Komposition und Quotient differenzierbarer Funktionen ist f für $x \neq 0$ differenzierbar. Nach i) kann $\frac{\log x}{x}$ in 0 durch den Wert 1 stetig fortgesetzt werden. f ist also stetig auf ganz $(-1, \infty)$. Nach a) genügt es nun zu zeigen, daß $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existiert: Mit Hilfe des Satzes von DE L‘ HOSPITAL erhält man $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$. (Alternativ können Sie hier auch direkt den Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle 0 mit dem Satz von DE L‘ HOSPITAL berechnen.)

Aufgabe 7: Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2n\left(\sqrt[n]{2x} - 1\right).$$

(Vgl. Übungsaufgabe 14.2)

a) Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge (f_n)?

b) Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge (f_n) auf allen kompakten Teilintervallen gleichmäßig konvergiert.

c) Ist die Konvergenz auf dem angegebenen Intervall selbst gleichmäßig?

Hinweis: Schreiben sie f_n als Integral.

- Die Funktionenfolge konvergiert gegen $2\log(2x)$. Zur Lösung vgl. die Musterlösung zu Übungsaufgabe 14.2