Proseminar zu Differentialgleichungen im WS 2001-02

Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Prof. Wittstock

Ausarbeitung durch die Studierenden

Inhaltsverzeichnis

1 Elementare Lösungsverfahren
(Yvonne Johann)

Im Folgenden sollen einige elementare Lösungsverfahren für explizite gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung vorgestellt werden.

1.1 Trennung der Veränderlichen

1.1.1 Satz. *Seien $f : I \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf offenen Intervallen $I, U \subset \mathbb{R}$. Seien $t_0 \in I$, $y_0 \in U$ feste Punkte mit $g(y_0) \neq 0$. Dann existiert ein offenes Intervall $I_0 \subset I$ um t_0, auf dem das Anfangswertproblem*

$$y' = f(t)g(y), \qquad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Diese ergibt sich auf I_0 durch Auflösen der Gleichung

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \int_{t_0}^{t} f(t)dt$$

nach $y(t)$.

Beweis. Angenommen $y : I \to \mathbb{R}$ löst das gegebene Anfangswertproblem. Dann gilt notwendigerweise $y(t) \in U$ und $g(y(t)) \neq 0$ auf einer Umgebung I_0 von t_0. Folglich

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \int_{t_0}^{t} \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int_{t_0}^{t} f(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad H(t, y(t)) = 0$$

mit

$$H : I_0 \times U \to \mathbb{R}, \quad H(t, y) = \int_{y_0}^{y} 1/g(\eta)d\eta - \int_{t_0}^{t} f(t)dt.$$

Offenbar ist H eine C^1-Funktion mit $H(t_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial H}{\partial y}(y_0) = 1/g(y_0) \neq 0$. Nach Verkleinerung von I_0 und U (zu I_0 bzw. U_0) existiert daher nach dem Satz über implizite Funktionen eine C^1-Funktion

$$y : I_0 \to \mathbb{R}, \text{ so dass} \qquad H(t, y) = 0 \quad ((t, y) \in I_0 \times U_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = y(t).$$

Hieraus folgt bereits die behauptete Eindeutigkeit; um den Existenzbeweis abzuschließen, bleibt zu zeigen, dass die oben konstruierte Funktion $y : I_0 \to \mathbb{R}$ das gegebene Anfangswertproblem löst. Differenzieren der Identität $H(t, y(t)) = 0$ nach t liefert $-f(t) + \frac{1}{g(y(t))} y'(t) = 0$ oder äquivalent $y' = f(t)g(y(t))$ auf I_0. □

Der Satz bzw. der Beweis zeigt, dass zur Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(t)g(y)$$

folgende Strategie meist zum Erfolg (d.h. zur allgemeinen Lösung) führt: Dividiere durch $g(y)$, bilde auf beiden Seiten Stammfunktionen

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t)dt + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

und versuche, nach y aufzulösen. Da dies jedoch keinem rigorosen Beweis entspricht, hat man anschließend zu prüfen, ob die so erhaltene Funktion y tatsächlich eine Lösung ist. Ferner beachte man: Ist $g(\hat{y}) = 0$ für ein $\hat{y} \in \mathbb{R}$, so ist die Konstante Funktion $y \equiv \hat{y}$ eine Lösung.

1.1.2 Beispiel. Das oben beschriebene Verfahren soll nun am Beispiel der Differentialgleichung

$$y'(x) = -2x(y^2 - y)$$

explizit durchgeführt werden. Hierzu wählen wir (mit den Bezeichnungen von oben)

$$f(x) = -2x \quad \text{und} \quad g(y) = \frac{1}{y^2 - y}.$$

Wir erhalten dann wie oben beschrieben:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -2x(y^2 - y) \\
\Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2 - y} dy &= \int -2x dx \\
\Leftrightarrow \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} dy &= -2 \int x dx \\
\Leftrightarrow \ln|y-1| - \ln|y| &= -x^2 + c_1 \\
\Leftrightarrow \frac{y-1}{y} &= \pm e^{-x^2+c_1} = \pm e^{-x^2} e^{c_1} \\
\Leftrightarrow \frac{y-1}{y} &= ce^{-x^2} \qquad \text{mit} \qquad c = \pm e^{c_1} \\
\Leftrightarrow y &= \frac{1}{1 - ce^{-x^2}}
\end{aligned}$$

1.1.3 Beispiel. Die Differentialgleichung

$$y'(x) = 1 + x - y(x) \qquad (*)$$

hat zwar nicht die von uns gewünschte Form $y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}$, kann aber durch die Substitution

$$z(x) = x - y(x) \qquad \Rightarrow \qquad z'(x) = 1 - y'(x)$$

in diese Form überführt werden, wie die kurze Rechnung

$$\begin{aligned}
z'(x) &= 1 - y'(x) \\
&\overset{in(*)}{=} 1 - 1 - x + y(x) \\
&= -x + y(x) \\
&= -z(x) \\
\Rightarrow -z'(x) &= z(x)
\end{aligned}$$

zeigt. Nun kann man trennen und integrieren:

$$\begin{aligned}
-\frac{dz}{dx} &= z \\
\Leftrightarrow -\frac{dz}{z} &= dx \\
\Rightarrow -\int \frac{1}{z} dz &= \int dx \\
\Leftrightarrow -\ln|z| &= x + c_1 \\
\Leftrightarrow z &= \pm e^{-x-c_1} \\
\Leftrightarrow z &= ce^{-x} \text{ mit } c = \pm e^{-c_1}
\end{aligned}$$

Da $z \equiv 0$ Lösung ist, kann $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden. Die Lösungen der ursprünglichen Gleichung ergeben sich nach der Rücksubstitution:

$$\begin{aligned}
&z(x) = x - y(x) \\
\Rightarrow x - y(x) &= ce^{-x} \\
\Leftrightarrow y(x) &= x - ce^{-x}.
\end{aligned}$$

1.2 Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Dabei handelt es sich um Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Sie lassen sich nach folgender Methode lösen:

$$\begin{aligned}
\text{Substitution:} \qquad z(x) &= \tfrac{y(x)}{x} \\
\Leftrightarrow y(x) &= z(x)x \\
\Rightarrow y'(x) &= z(x) + xz'(x) \\
\\
\Rightarrow \text{neue DGL:} \quad f(z) &= z(x) + xz'(x) \\
\\
\Leftrightarrow z'(x) &= \tfrac{f(z(x))-z(x)}{x}
\end{aligned}$$

Trennung der Variablen:

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{f(z(x)) - z(x)} dz + c_1$$

Wählt man $c_1 = -\ln|c|$

$$\Rightarrow \ln|x| = \int \frac{1}{f(z) - z} dz - \ln|c|$$

$$\Leftrightarrow \ln|cx| = \int \frac{1}{f(z)-z}dz \qquad (*)$$

Nach Ausführung der Integration auf der rechten Seite versucht man, die entstandene Gleichung nach $z = z(x)$ aufzulösen. Anschließend ist die Rücksubstitution $y(x) = xz(x)$ durchzuführen.
Hat der in $(*)$ auftretende Nenner eine Nullstelle z_0, also $f(z_0) - z_0 = 0$, so tritt zu den Lösungen der DGL noch $y(x) = z_0 x$ hinzu, denn:

Ist $z_0 = f(z_0)$ für $z_0 = z(x_0)$, also $z_0 = f(z(x_0))$, so setze $y(x) = z(x_0)x$
$\Rightarrow y'(x) = z(x_0) = f(z(x_0)) = f(\frac{y(x)}{x})$
$\Rightarrow y(x) = z_0 x$ ist Lösung.

1.2.1 Beispiel. $y'(x) = \frac{y^2-x^2}{2xy}$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y^2-x^2}{2xy} \\ &= \frac{1}{2}(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{y}{x} - \frac{\frac{1}{y}}{x}) \\ &= f(\frac{y}{x}) \end{aligned}$$

Subst: $z = \frac{y}{x}$ $\qquad y' = z + xz'$

$\Rightarrow$ *neue DGl:*

$$\begin{aligned} y' &= z + xz' \\ &= \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z}) \\ \Leftrightarrow z'x &= -\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \\ &= -\frac{1}{2}(\frac{z^2+1}{z}) \end{aligned}$$

Trennung der Veränderlichen: $\qquad \frac{dz}{dx}x = -\frac{1}{2}(\frac{z^2+1}{z})$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \int \frac{2z}{z^2+1}dz &= -\int \frac{dx}{x} + \ln c \\
\Rightarrow \ln(z^2+1) &= -\ln x + \ln c \\
\Leftrightarrow z^2+1 &= \frac{c}{x}
\end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned}
z = \frac{y}{x} \quad &\Rightarrow \quad \frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{c}{x} \\
&\Rightarrow \quad y^2 + x^2 - cx = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *Die Lösungskurven sind Kreise um* $M = (\pm r; 0)$ *mit* $r = \frac{1}{2}|c|$

1.3 Auf Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen zurückführbare Fälle

Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = \frac{ax + by(x)}{cx + dy(x)} = \frac{a + b\frac{y}{x}}{c + d\frac{y}{x}} \tag{2}$$

kann man auf Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen zurückführen, denn

$$\frac{a + b\frac{y}{x}}{c + d\frac{y}{x}} = f(\frac{x}{y}) \qquad \text{mit} \quad f(\xi) = \frac{a + b\xi}{c + d\xi}$$

Auch die allgemeinere Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{ax + by(x) + g}{cx + dy(x) + h}$$

kann man durch Koordinatentransformation auf obige Form zurückführen. Man erhält ein neues Koordinatensystem ξ, η dessen Ursprung der Schnittpunkt $(x_s|y_s)$ der beiden Geraden $G_1 : ax + by + g$ und $G_2 : cx + dy + h$ ist.
Es gelten folgende Transformationsbeziehungen:

$$x = x_s + \xi \qquad y = y_s + \eta.$$

Nun fallen die beiden Konstanten g und h heraus und die neue Gleichung sieht folgendermaßen aus:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a + b(\frac{\eta}{\xi})}{c + d(\frac{\eta}{\xi})}$$

Sind die beiden Geraden parallel, macht man folgende Substitution

$$z(x) = ax + by + g$$

Dadurch erhält man eine Differentialgleichung, die man meist mit Trennung der Veränderlichen oder elementar lösen kann. Ähnlichkeitsdgl lassen sich häufig durch Polarkoordinatentransformation vereinfachen. Transformationsgleichungen für Koordinaten und Differentiale sind:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan\frac{y}{x} \\ dx = dr - \cos\varphi - r\sin\varphi \quad d\varphi \\ dy = dr - \sin\varphi + r\cos\varphi \quad d\varphi \end{array}}$$

1.3.1 Beispiel. $y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$

Subst: $z := \frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{1+z}{1-z} = z'x + z$

$$\begin{array}{lll} \text{TdV} & \Rightarrow & \displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1-z}{1+z^2}dz \\ & \Rightarrow & \ln|x| + c_1 = \arctan z - \dfrac{1}{2}\ln|1+z^2| \\ \text{Rücksubst:} & \Rightarrow & \arctan\dfrac{y}{x} - \ln\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}} = \ln|x| + c_1 \\ & \Leftrightarrow & \arctan\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \ln|x| + \ln|x| + c_1 \\ & \Leftrightarrow & \arctan\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} + c_1 \end{array}$$

Ein formelmäßiges Auflösen nach x bzw. y ist hier nicht nicht möglich.
Mit Polarkoordinaten wird es übersichtlicher:

$\arctan\frac{y}{x} = \varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \varphi = \ln|r| + c_1$
$\Leftrightarrow r = ce^{\varphi}$ mit $c = e^{-c_1}$

1.4 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = p(x)y(x) = r(x) \tag{3}$$

nennt man <u>lineare DGL</u>.
Ist $r(x) \equiv 0$, so spricht man von einer homogenen, ist $r(x) \not\equiv 0$ von einer inhomogenen Gleichung. Im 2. Fall bezeichnet man r(x) als <u>Störfunktion</u>.

Lösung der homogenen Gleichung

Die homogene Gleichung

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0 \tag{4}$$

löst man durch Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y(x)}dx &= -\int p(x)dx + c_1 \\
\Rightarrow \qquad \ln|y(x)| &= -P(x) + c_1 \qquad \text{mit } P(x) \text{ Stammfunktion von } p(x) \\
\Rightarrow \qquad y &= ce^{-P(x)} \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'(x) + p(x)y(x) = r(x) \tag{5}$$

Diese löst man durch Variation der Konstanten.
Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung setzt sich additiv zusammen aus der allgemeinen Lösung y_H der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung y_S der inhomogenen Gleichung:
Berechnung von $y_h(x)$:

$$y_H(x) = ce^{-P(x)} \qquad \text{(s.o.)}$$

Berechnung von $y_S(x)$:
Man fasst die Konstante c von y_H als Funktion $c(x)$ auf, geht also mit dem Ansatz $y(x) = c(x)e^{-P(x)}$ in die Differentialgleichung hinein. Es ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für c', aus der sich c durch Integrieren gewinnen lässt.

$$y_S(x) = c(x)e^{-P(x)}$$

Führt man die Rechnung explizit durch, so sieht man, dass die allgemeine Lösung von der Form

$$y(x) = y_S(x) + ce^{-P(x)} = e^{-P(x)} \left(\int e^{P(x)} r(x)dx + k \right)$$

ist, wobei $c \in \mathbb{R}$ bzw. $k \in \mathbb{R}$ freie Konstanten bezeichnen.

1.4.1 Beispiel.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= x + y(x) \\
\Leftrightarrow y_H(x) &= ce^x \\
\Rightarrow y(x) &= c(x)e^x \\
\Rightarrow y'(x) &= c'(x)e^x + c(x)e^x \overset{!}{=} x + c(x)e^x \\
\Leftrightarrow c'(x)e^x &= x \\
\Leftrightarrow c'(x) &= xe^{-x} \\
\Rightarrow c(x) &= \int xe^{-x}dx \\
&= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx \\
&= -xe^{-x} - e^{-x} + k \\
&= e^{-x}(-x-1) + k \\
\Rightarrow y(x) &= c(x)e^x \\
&= (e^{-x}(-x-1) + k)e^x \\
&= -x - 1 + ke^x
\end{aligned}$$

1.5 Bernoullische Differentialgleichungen

Differentialgleichungen der folgenden Form nennt man Bernoullische DGL

$$y'(x) + p(x)y(x) = r(x)y^n(x) \tag{6}$$

$n \neq 0$ und 1, da sonst eine lineare Gleichung vorliegt.

Allgemeiner Lösungsweg:
Setze $y^{1-n} = z$
Dann gilt: $r = \dfrac{z'}{1-n} + pz$
Nun ist noch eine lineare Differentialgleichung zu lösen.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\text{Substitution: } z &= y^{1-n} \\
\Leftrightarrow y &= z^{\frac{1}{1-n}} \qquad (*) \\
\Rightarrow y'(x) &= \frac{z'}{1-n} z^{\frac{1-1+n}{1-n}} \\
&= \frac{z'}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}}
\end{aligned}$$

Multipliziert man nun (6) mit $z^{\frac{n}{n-1}}$, so erhält man

$$\begin{aligned}
(y'(x)+p(x)y(x))z^{\frac{n}{n-1}} &= (r(x)y^n(x))z^{\frac{n}{n-1}} \\
\Leftrightarrow (\frac{z'}{1-n}z^{\frac{n}{1-n}}+p(x)z^{\frac{1}{1-n}})z^{\frac{n}{n-1}} &= (rz^{\frac{n}{1-n}})z^{\frac{n}{n-1}} \qquad \text{(durch Einsetzen in (*))} \\
\Leftrightarrow \frac{z'}{1-n}z^0+p(x)z &= rz^0 \\
\Leftrightarrow \frac{z'}{1-n}+p(x)z &= r
\end{aligned}$$

Damit ist die Gleichung inhomogen linear und kann nach bekannten Methoden gelöst werden. □

1.5.1 Beispiel. $y'(x)+\frac{1}{x}y(x)=x^2y^2(x) \quad n=2 \quad r=x^2$

$$\begin{aligned}
\text{Ansatz: } z &= y^{1-n} \quad r=\frac{z'}{1-n}+p(x)z \\
\Leftrightarrow z &= y^{-1} \\
\Leftrightarrow y &= \frac{1}{z} \\
\Leftrightarrow x^2 &= -z'+\frac{1}{x}z \\
\Leftrightarrow z'-\frac{1}{x}z &= -x^2
\end{aligned}$$

Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}
z(x) &= c(x)e^{\ln x} \\
&= c(x)x \\
\Rightarrow z'(x) &= c'(x)x+c(x) \overset{!}{=} \frac{c(x)x}{x}-x^2 \\
\Leftrightarrow c'(x)x &= -x^2 \\
\Leftrightarrow c'(x) &= -x \\
\Rightarrow c(x) &= \int -x dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2+k \\
\Rightarrow z &= (-\frac{1}{2}x^2+k)x \\
&= -\frac{1}{2}x^3+kx
\end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$z=\frac{1}{y} \Rightarrow y=-\frac{1}{\frac{1}{2}x^3-kx}$$

1.6 Riccatische Differentialgleichungen

Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) + p(x)y(x) + r(x)y^2(x) = q(x) \tag{7}$$

nennt man Riccatische DGL.
Diese lassen sich auf eine Bernoullische Differentialgleichung zurückführen, falls man eine spezielle Lösung

$$y(x) = u(x)$$

findet. Mit dem Ansatz $y(x) = u(x) + v(x)$ erhält man durch Einsetzen und Umformen:

$$\underbrace{u'(x) + p(x)u(x) + r(x)u^2(x)}_{q(x)} + v'(x) + (p(x) + 2u(x)r(x))v(x) + r(x)v^2(x) = q(x)$$

$$\Leftrightarrow v'(x) + (p(x) + 2u(x)r(x))v(x) = -r(x)v^2(x)$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung für $v(x)$, die man wie im vorangehenden Abschnitt lösen kann.

1.6.1 Beispiel. $y'(x) - (1-2x)y(x) + y^2(x) = 2x \qquad (*)$
Durch Probieren erhält man: $y = 1 = u$ ist Lösung.

Ansatz: $\quad 1 + v(x) = y(x) \qquad y'(x) = v'(x)$
Einsetzten in $(*)$ liefert:

$$\begin{aligned} v'(x) - (1-2x)(1+v(x)) + (v(x)+1)^2 &= 2x \\ \Leftrightarrow v'(x) - (1-2x) - (1-2x)v(x) + v^2(x) + 2v(x) + 1 &= 2x \\ \Leftrightarrow v'(x) + 2x - (1-2x-2)v(x) + v^2(x) &= 2x \\ \Leftrightarrow v'(x) + (1+2x)v(x) &= -v^2(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Bernoullische Differentialgleichung mit n = 2
Ansatz: $z = v^{1-n} = \frac{1}{v}$

$$\begin{aligned} r &= \frac{z'}{1-n} + p(x)z \\ \Leftrightarrow -1 &= -z' + (1+2x)z \\ \Leftrightarrow 1 &= z' - (1+2x)z \end{aligned}$$

Diese hat die allgemeine Lösung

$$z = e^{x(x+1)}(c + \int e^{x(x+1)}dx).$$

Das Integral ist nicht geschlossen lösbar,

2 Lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(Sabrina Bechtel)

2.1 Problemstellung

Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$. Gesucht sind alle differenzierbaren Abbildungen $y : I \to \mathbb{C}^n$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, welche das Differentialgleichungssystem

$$y'(x) = Ay(x) \quad (x \in I)$$

lösen. Die Struktur der Lösungsmenge dieser Gleichung wird durch den folgenden Satz beschrieben.

2.1.1 Satz.

1. *Die Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = Ay(x)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und bilden einen n-dimensionalen, komplexen Unterraum L von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.*

2. *Ist ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben, so ist die Abbildung*

$$L \to \mathbb{C}^n, \quad y \mapsto y(x_0)$$

ein Vektorraumisomorphismus.

Insbesondere ist ein System von Lösungen $y_1, \ldots, y_k \in L$ genau dann linear unabhängig (in L), wenn für ein (und dann jedes) $x_0 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $y_1(x_0), \ldots, y_k(x_0) \in \mathbb{C}^n$ linear unabängig sind.

2.1.2 Definition. (Fundamentalsystem) *Ein System von n linear unabhängigen Lösungen $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, \ldots, y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eines gegebenen linearen Differentialgleichungssystems, d.h. eine Basis $(y_1, \ldots, y_n)$ von L bezeichnet man als* Fundamentalsystem.

Nach dem vorangehenden Satz kann man alle Lösungen des obigen Differentialgleichungssystems als Linearkombination der Vektoren des zugehörigen Fundamentalsystems darstellen. Es ist daher nur noch notwendig, ein geeignetes Fundamentalsystem zu finden.

2.2 Systeme mit symmetrischen Matrizen

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass man jede reelle symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ durch eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalgestalt D bringen kann, so dass die Einträge auf der Hauptdiagonalen gerade die Eigenwerte $\lambda_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ von A sind. Genauer gilt: Zu jeder reellen symmetrischen Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ findet man eine Basis des $\mathbb{C}^n$ bestehend aus Eigenvektoren v_i zum Eigenwert λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ von A. Indem man die Eigenvektoren als

Spaltenvektoren einer Matrix $T = (v_1, \ldots, v_n)$ auffasst, erhält man eine invertierbare Matrix $T \in M_n(\mathbb{C})$, mit der die Beziehung

$$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

gilt. Mit Hilfe dieser Gleichung kann man ein Fundamentalsystem von

$$y'(x) = Ay(x)$$

finden. Dazu setzt man

$$z(x) := T^{-1}y(x) \quad \text{bzw.} \quad y(x) := Tz(x)$$

und erhält für $z(x)$ das System

$$z'(x) = T^{-1}y'(x) = T^{-1}Ay(x) = T^{-1}ATz(x) = Dz(x)$$

oder äquivalent:

$$\begin{pmatrix} z_1'(x) \\ \vdots \\ z_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}.$$

Dieses System zerfällt in n voneinander unabhängige Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rcl} z_1'(x) & = & \lambda_1 z_1(x) \\ & \vdots & \\ z_n'(x) & = & \lambda_n z_n(x) \end{array} \qquad \text{mit den Lösungen:} \qquad \begin{array}{rcl} z_1(x) & = & c_1 e^{\lambda_1 x} \\ & \vdots & \\ z_n(x) & = & c_n e^{\lambda_n x}, \end{array}$$

wobei $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ frei wählbare Konstanten bezeichnen. Durch Rücktransformation erhält man als Lösung der Ausgangsgleichung die Funktion

$$y(x) = Tz(x) = (v_1, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + c_n v_n e^{\lambda_n x}.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ folgt (durch Auswerten in $x = 0$) sofort die lineare Unabhängigkeit der Lösungen $v_1 e^{\lambda_1 x}, \ldots, v_n e^{\lambda_n x}$. Somit ist also

$$(v_1 e^{\lambda_1 x}, \ldots, v_n e^{\lambda_n x})$$

ein Fundamentalsystem des Systems $y'(x) = Ay(x)$, und die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + c_n v_n e^{\lambda_n x}$$

mit beliebigen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

2.3 Systeme mit beliebigen Matrizen

Hier überführt man die Matrix A in Jordansche Normalform (JNF) und verfährt dann ähnlich wie bei den symmetrischen Matrizen. Man weiss, dass zu jeder Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix T existiert, deren Spalten aus Eigen- und Hauptvektoren bestehen, so dass gilt:

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix}$$

mit speziellen oberen Dreiecksmatrizen (Jordankästchen) $J_1, \ldots, J_m$. Wir werden dies jetzt etwas genauer formulieren. Dazu erinnern wir an folgende Definition.

2.3.1 Definition. (Hauptvektor)
Ist λ ein Eigenwert von A, so heisst ein Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ Hauptvektor q-ter Stufe *von A zum Eigenwert λ, falls gilt:*

$$(A - \lambda E)^q v = 0 \quad \textit{und} \quad (A - \lambda E)^{q-1} v \neq 0.$$

Eigenvektoren sind Hauptvektoren erster Stufe.

2.3.2 Satz. (Jordansche Normalform) *Zu jeder Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ existiert eine Basis des $\mathbb{C}^n$ bestehend aus Hauptvektoren $v_{i,j}^{(r)}$ von A derart, dass*

$$\begin{array}{rcll} (A-\lambda_i)v_{i,j}^{(1)} & = & 0 & (v_{i,j}^{(1)} \quad \textit{Eigenvektor}) \\ (A-\lambda_i)v_{i,j}^{(2)} & = & v_{i,j}^{(1)} & (v_{i,j}^{(2)} \quad \textit{Hauptvektor 2-ter Stufe}) \\ & \vdots & & \qquad\vdots \\ (A-\lambda_i)v_{i,j}^{(q_{i,j})} & = & v_{i,j}^{(q_{i,j}-1)} & (v_{i,j}^{(q_{i,j})} \quad \textit{Hauptvektor } q_{i,j}\textit{-ter Stufe}) \end{array}$$

gilt, wobei i und j den folgenden Einschränkungen unterliegen:

$$i = 1, \ldots, l \quad (l = \textit{Anzahl der (verschiedenen!) Eigenwerte}),$$

$$j = 1, \ldots, k_i \quad (k_i = \textit{Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert } \lambda_i).$$

Die Bezeichnung $v_{i,j}^{(r)}$ für den jeweiligen Hauptvektor drückt aus, dass es sich um einen zum Eigenwert λ_i, genauer zum Eigenvektor $v_{i,j}^{(1)}$, gehörenden Hauptvektor der Stufe r handelt. Mit den Hauptvektoren (aus obigem Satz) als Spaltenvektoren bildet man dann zunächst die $n \times (q_{i,1} + \cdots + q_{i,j})$-Matrizen

$$T_i = ((v_{i,1}^{(1)}, \ldots, v_{i,1}^{(q_{i,1})}), (v_{i,2}^{(1)}, \ldots, v_{i,2}^{(q_{i,2})}), \ldots, (v_{i,k_i}^{(1)}, \ldots, v_{i,k_i}^{(q_{i,k_i})}))$$

und daraus durch Aneinanderreihen die Matrix

$$T = (T_1, \ldots, T_l) \quad \in M_n(\mathbb{C}).$$

Mit dieser Wahl von T hat dann $J = T^{-1}AT$ Jordan-Normalform, d.h. es ist

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda_1|q_{1,1})} & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \boxed{J(\lambda_1|q_{1,k_1})} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \boxed{J(\lambda_l|q_{l,1})} & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \boxed{J(\lambda_l|q_{l,k_l})} \end{pmatrix},$$

wobei $J(\lambda|r)$ ein Jordankästchen der Länge r zum Eigenwert λ bezeichnet:

$$J(\lambda|r) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl dieser Kästchen ist:

$$m = k_1 + \ldots + k_l.$$

Außerdem gilt:

$$n = (q_{1,1} + \ldots + q_{1,k_1}) + \ldots + (q_{l,1} + \ldots + q_{l,k_l}).$$

Zur Behandlung des Differenzialgleichungssystems

$$y'(x) = Ay(x)$$

setzen wir nun:

$$z(x) := T^{-1}y(x) \quad \text{bzw.} \quad y(x) := Tz(x).$$

Für $z(x)$ erhalten wir (wie bei den symmetrischen Matrizen) das System:

$$z'(x) = T^{-1}ATz(x) = Jz(x)$$

bzw. in Matrixschreibweise:

$$z'(x) = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix}.$$

Dieses System löst man, indem man jedes Jordan-Kästchen separat betrachtet:

$$\begin{pmatrix} z_1'(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ z_r'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ z_r(x) \end{pmatrix}.$$

Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} z_1'(x) & = & \lambda z_1(x) + z_2(x) \\ z_2'(x) & = & \lambda z_2(x) + z_3(x) \\ & \vdots & \\ z_{r-1}'(x) & = & \lambda z_{r-1}(x) + z_r(x) \\ z_r'(x) & = & \lambda z_r. \end{array}$$

Dieses löst man von unten nach oben auf:

- Aus $z_r'(x) = \lambda z_r(x)$ folgt:

  $$\boxed{z_r(x) = c_1 e^{\lambda x}}.$$

- Die Gleichung

  $$z_{r-1}(x) = \lambda z_{r-1}(x) + z_r(x) \quad \Leftrightarrow \quad z_{r-1}'(x) - \lambda z_{r-1}(x) = c_1 e^{\lambda x}$$

  löst man durch Variation der Konstanten mit dem Ansatz:

  $$z_{r-1}(x) = C(x)e^{\lambda x}, \qquad z_{r-1}'(x) = C'(x)e^{\lambda x} + C(x)\lambda e^{\lambda x}.$$

  Für $C(x)$ ergibt sich:

  $$\begin{array}{lrcl} & C'(x)e^{\lambda x} + C(x)\lambda e^{\lambda x} - \lambda C(x)e^{\lambda x} & = & c_1 e^{\lambda x} \\ \Leftrightarrow & C'(x) & = & c_1 \\ \Leftrightarrow & C(x) & = & c_1 \cdot x + c_2. \end{array}$$

  Durch Einsetzen von $C(x)$ erhält man für $z_{r-1}(x)$:

  $$\boxed{z_{r-1}(x) = c_1 x e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x}}.$$

- Führt man nun wieder Variation der Konstanten für z_{r-2} usw. durch, so erhält man:

  $$\boxed{z_{r-2}(x) = c_1 \frac{x^2}{2!} e^{\lambda x} + c_2 \frac{x}{1!} e^{\lambda x} + c_3 e^{\lambda x}}$$

  $$\boxed{z_{r-3}(x) = c_1 \frac{x^3}{3!} e^{\lambda x} + c_2 \frac{x^2}{2!} e^{\lambda x} + c_3 \frac{x}{1!} e^{\lambda x} + c_4 e^{\lambda x}} \ldots$$

Für das Teilsystem ergibt sich folgender allgemeiner Lösungsvektor $z(x) =$

$$\begin{pmatrix} c_1 \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} e^{\lambda x} & + & c_2 \frac{x^{r-2}}{(r-2)!} e^{\lambda x} & + & \ldots & + & c_{r-1} \frac{x}{1!} e^{\lambda x} & + & c_r e^{\lambda x} \\ & & c_1 \frac{x^{r-2}}{(r-2)!} e^{\lambda x} & + & \ldots & + & c_{r-2} \frac{x}{1!} e^{\lambda x} & + & c_{r-1} e^{\lambda x} \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & c_1 \frac{x^2}{2!} e^{\lambda x} & + & c_2 \frac{x}{1!} e^{\lambda x} & + & c_3 e^{\lambda x} \\ & & & & & & c_1 \frac{x^1}{1!} e^{\lambda x} & + & c_2 e^{\lambda x} \\ & & & & & & & & c_1 e^{\lambda x} \end{pmatrix}.$$

Um ein "schönes" Fundamentalsystem zu erhalten, wählen wir $c_1, \ldots, c_r$ so, dass die Bedingungen

$$\begin{pmatrix} z_1(0) \\ \vdots \\ z_{i-1}(0) \\ z_i(0) \\ z_{i-1}(0) \\ \vdots \\ z_r(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

erfüllt sind. Wegen $z_i(0) = e_i$ sind die Vektoren $z_i(x)$ für $x = 0$ linear unabhängig, also sind die z_i bereits als Funktionen linear unabhängig. Somit ergibt sich für das Differentialgleichungssystem

$$z'(x) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} z(x)$$

folgendes Fundamentalsystem:

$$z_1(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_2(x) = \begin{pmatrix} xe^{\lambda x} \\ e^{\lambda x} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad z_{r-2}(x) = \begin{pmatrix} \frac{x^{r-3}}{(r-3)!}e^{\lambda x} \\ \frac{x^{r-4}}{(r-4)!}e^{\lambda x} \\ \vdots \\ e^{\lambda x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$z_{r-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{x^{r-2}}{(r-2)!}e^{\lambda x} \\ \frac{x^{r-3}}{(r-3)!}e^{\lambda x} \\ \frac{x^{r-4}}{(r-4)!}e^{\lambda x} \\ \vdots \\ e^{\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_r(x) = \begin{pmatrix} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}e^{\lambda x} \\ \frac{x^{r-2}}{(r-2)!}e^{\lambda x} \\ \frac{x^{r-3}}{(r-3)!}e^{\lambda x} \\ \vdots \\ xe^{\lambda x} \\ e^{\lambda x} \end{pmatrix}.$$

Aus der Beziehung $y(x) = Tz(x)$ erhalten wir ein Fundamentalsystem für unsere Ausgangsgleichung $y'(x) = Ay(x)$, dessen Form wir in folgendem Satz festhalten.

2.3.3 Satz. *Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen zur Jordanschen Normalform: Wählt man Indizes $i, j, k \in \mathbb{N}$ mit*

$$1 \le i \le l, \qquad 1 \le j \le k_i, \qquad 1 \le q \le q_{i,j}$$

und definiert man die Vektoren $v^{(1)}, \ldots, v^{(q)} \in \mathbb{C}^n$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$ als

$$\lambda = \lambda_i, \qquad v^{(1)} = v_{i,j}^{(1)}, \ldots, v^{(q)} = v_{i,j}^{(q)},$$

so ist

$$\boxed{y(x) = v^{(1)} \tfrac{x^{q-1}}{(q-1)!} e^{\lambda x} + v^{(2)} \tfrac{x^{q-2}}{(q-2)!} e^{\lambda x} + \ldots + v^{(q)} e^{\lambda x}}$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y'(x) = Ay(x) \qquad (x \in \mathbb{R});$$

die Menge aller auf diese Art entstehenden Lösungen bildet ein Fundamentalsystem.

Beweis. Dass alle diese Funktionen Lösungen sind, folgt nach obiger Konstruktion, lässt sich aber auch leicht durch Einsetzen und direktes Nachrechnen zeigen. Die Anzahl der auf diese Art gebildeten Lösungen beträgt offenbar

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k_i} q_{i,j} = n.$$

Können wir deren lineare Unabhängigkeit zeigen, liegt ein Fundamentalsystem vor. Die lineare Unabhängigkeit lässt sich einfach zeigen, indem man an der Stelle $x = 0$ auswertet und dort die lineare Unabhängigkeit zeigt. □

Die Anwendung des vorangehenden Satzes soll nun an einem konkreten Beispiel verdeutlicht werden.

2.3.4 Beispiel. Gesucht ist die allgemeinen Lösung $y = (y_1, y_2, y_3)$ des homogenen Systems:

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 \\ y_2' & = & & - & y_2 & - & y_3 \\ y_3' & = & & & 4y_2 & + & 3y_3. \end{array}$$

- Man möchte das System in der Form $y' = Ay$ schreiben, dazu setzt man:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Als erstes bestimmt man die Eigenwerte von A aus der Beziehung

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0.$$

  Als charakteristisches Polynom erhält man $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^3$, dies liefert den

$$\text{3-fachen Eigenwert} \quad \lambda_{1,2,3} = 1.$$

- Als nächstes bestimmt man eine Basis des $\mathbb{C}^3$, bezüglich der A Jordansche Normalform hat. Es ergeben sich die folgenden Hauptvektoren zum Eigenwert $\lambda = 1$:

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenvektor}$$
$$v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{Hauptvektor 2-ter Stufe}$$
$$v_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} \qquad \text{Hauptvektor 3-ter Stufe.}$$

- Gemäß Satz 2.3.3 erhalten wir folgendes Fundamentalsystem:

$$\left(e^x v_1^{(1)}, \quad e^x (v_1^{(2)} + x v_1^{(1)}), \quad e^x (v_1^{(3)} + x v_1^{(2)} + \frac{x^2}{2!} v_1^{(1)}) \right).$$

- Die gesuchte allgemeine Lösung für $y(x)$ sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^x (v_1^{(3)} + x v_1^{(2)} + \frac{x^2}{2!} v_1^{(1)}) + c_2 e^x (v_1^{(2)} + x v_1^{(1)}) + c_3 e^x v_1^{(1)} \\ &= e^x \left[c_1 v_1^{(3)} + (c_1 x + c_2) v_1^{(2)} + (c_1 \frac{x^2}{2!} + c_2 x + c_3) v_1^{(1)} \right] \\ &= e^x \left[c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} + (c_1 + x c_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (c_1 \frac{x^2}{2!} + c_2 x + c_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

2.4 Lösung mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion

Vorbemerkung

Wie aus der Analysis bekannt ist, lässt sich die reelle Exponentialfunktion e^x mit $x \in \mathbb{R}$ durch die Potenzreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

darstellen. Analog kann man die Matrix-Exponentialfunktion e^A mit Hilfe der folgenden Matrix-wertigen Potenzreihe darstellen:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \qquad (A \in M_n(\mathbb{C})).$$

Weiterhin gilt:

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n \qquad (A^0 = E).$$

Die beiden letzten Reihen konvergieren für jede $n \times n$ - Matrix A und für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt folgende Beziehung:

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = Ae^{Ax}.$$

Setzt man nun

$$Y(x) = e^{Ax}, \quad \text{so ist} \quad Y'(x) = \frac{d}{dx} Y = Ae^{Ax},$$

und folglich stellt $Y(x)$ eine Lösung der Matrix-Gleichung

$$Y'(x) = AY(x) \tag{8}$$

dar.

Lösen von Systemen

Nun aber zu unserem eigentlichen Problem, dem Lösen des Systems

$$y'(x) = Ay(x) \tag{9}$$

für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit Hilfe dieser Exponentialfunktion. (Hier besteht zu (8) der Unterschied, dass in diesem Falle y ein Vektor in Abhängigkeit von x ist, und nicht wie oben eine Matrix.) Zunächst einmal wollen wir ein Fundamentalsystem von Gleichung (9) bestimmen. Wir wissen bereits, dass ein solches System aus der Lösung der n Anfangswertprobleme

$$y_k'(x) = Ay_k(x) \quad \text{mit} \quad y_k(0) = e_k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

entsteht. Fasst man nun die Lösungen $y_k(x)$ zu der $n \times n$ - Matrix

$$Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$$

zusammen, so kann man obige Anfangswertprobleme äquivalent auch als Anfangswertproblem für eine Matrixgleichung

$$Y'(x) = AY(x) \quad \text{mit} \quad Y(0) = E$$

schreiben. $Y(x)$ ist jetzt kein Vektor mehr, sondern eine Matrix mit den Vektoren des Fundamentalsystems als Spalten, entstanden durch Lösen der n Anfangswertproleme, deren Anfangsbedingungen in der Gleichung $Y(0) = E$ zusammengefasst sind. Nach der Vorbemerkung ist klar, dass

$$Y(x) = e^{Ax}$$

der Matrixgleichung genügt, ausserdem folgt aus (2.4) sofort

$$Y(0) = E.$$

Man hat also ein Fundamentalsystem gefunden und die allgemeine Lösung des Systems $y'(x) = Ay(x)$ lautet:

$$y(x) = Y(x)c = e^{Ax}c \qquad (c \in \mathbb{C}^n \quad \text{konstant}).$$

Der Vorteil dieser Methode ist, dass man (keine Informationen über die Eigenwerte von A benötigt. Das Problem bei der praktischen Anwendung liegt jedoch in der Berechnung von e^{Ax}, was jedoch unter Ausnutzung der Jordanschen Normalform möglich ist.

Die Berechnung von e^{Ax}

Für den Fall, dass A eine Jordan-Zelle ist, ist die Berechnung von e^{Ax} besonders einfach. Sei also $A \in M_r(\mathbb{C})$ von der Form

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \lambda E + B.
\end{aligned}$$

Zunächst bestimmt man e^{Bx}. Wegen

$$\begin{aligned}
B^k &= \begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0
\end{pmatrix} \quad (k+1) - \text{te Zeile} \qquad (\text{falls } k < r) \\
B^k &= 0 \in M_r(\mathbb{C}) \qquad\qquad (\text{falls } k \geq r)
\end{aligned}$$

gilt die Formel

$$\begin{aligned}
e^{Bx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} B^n \\
&= \sum_{n=0}^{r-1} \frac{x^n}{n!} B^n \\
&= \frac{x^0}{0!} B^0 + \frac{x^1}{1!} B^1 + \frac{x^2}{2!} B^2 + \ldots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} B^{r-1} \\
&= E + xB + \frac{x^2}{2} B^2 + \ldots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} B^{r-1}.
\end{aligned}$$

Die Summe in der letzten Zeile können wir mit unserem Wissen über B konkret berechnen. Damit erhalten wir die explizite Darstellung

$$e^{Bx} = \begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & \ddots & x \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Beziehung

$$e^{(\lambda E+B)x} = e^{\lambda Ex}e^{Bx} = e^{\lambda x}e^{Bx}$$

erhalten wir schließlich für e^{Ax} das Ergebnis

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}e^{\lambda x} \\ & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & \ddots & xe^{\lambda x} \\ & & & & & e^{\lambda x} \end{pmatrix}.$$

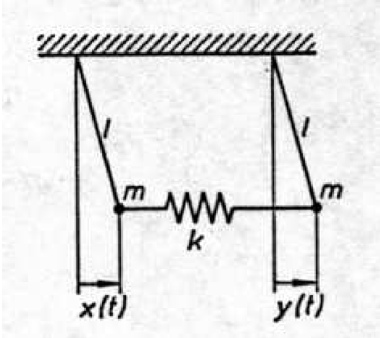
2.5 Ein Anwendungsbeispiel aus der Mechanik

Bevor nun eine konkrete Anwendung aus der Mechanik vorgestellt wird, soll noch auf folgendes Problem eingegangen werden: Bisher haben wir den allgemeinen Fall komplexer Matrizen $A \in M_r(\mathbb{C})$ betrachtet. Ist A reell, $A \in M_r(\mathbb{R})$, so ist man an einem reellen Fundamentalsystem interessiert. Schlüssel zu einem solchen ist die folgende einfache Beobachtung: Zu jedem nicht-reellen Eigenwert λ einer reellen Matrix A ist die konjugiert-komplexe Zahl $\bar{\lambda}$ ebenfalls ein Eigenwert von A. Das daraus resultierende Verfahren, von einem komplexen auf ein reelles Fundamentalsystem zu kommen, lautet dann (ohne Beweis): *Ein reelles Fundamentalsystem erhält man, indem man nacheinander für jeden nicht-reellen Eigenwert λ den zugehörenden Anteil des komplexen Fundamentalsystems in Real- und Imaginärteil aufspaltet (diese lösen beide einzeln das Differentialgleichungssystem) und den zu $\overline{\lambda}$ gehörenden Anteil des komplexen Fundamentalsystems streicht.*

Ein Beispiel hierfür wird in der nun folgenden Anwendung gerechnet.

Anwendungsbeispiel

Problem:
Zwei Pendel gleicher Länge l und gleicher Masse m sind durch eine Feder der Federkonstante k wie in folgender Zeichnung verbunden.



Frage:
Wie ist das Schwingungsverhalten dieses mechanischen Systems?

DGL-System:

$$\begin{aligned} mx''(t) &= -\tfrac{mg}{l}x(t) - k(x(t)-y(t)) \qquad g = \text{ Erdbeschleunigung (konstant)} \\ my''(t) &= -\tfrac{mg}{l}y(t) - k(y(t)-x(t)) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\boxed{\omega_0 := \sqrt{\tfrac{g}{l}}} \; \boxed{k_0 := \tfrac{k}{m}}$$

neues DGL-System:

$$\begin{aligned} x''(t) &= -(\omega_0^2 + k_0)x(t) + k_0 y(t) \\ y''(t) &= k_0 x(t) - (\omega_0^2 + k_0)y(t) \end{aligned} \tag{11}$$

Die Substitutionen $\boxed{x'(t) := u(t)}$ $\boxed{y'(t) := v(t)}$ führen das DGL-System (11) auf ein System 1-ter Ordnung (12) zurück.

System 1-ter Ordnung:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0\cdot x(t) + 0\cdot y(t) + u(t) + 0\cdot v(t) \\ y'(t) &= 0\cdot x(t) + 0\cdot y(t) + 0\cdot u(t) + v(t) \\ u'(t) &= -(\omega_0^2 + k_0)\cdot x(t) + k_0\cdot y(t) + 0\cdot u(t) + 0\cdot v(t) \\ v'(t) &= k_0\cdot x(t) - (w_0^2 + k_0)\cdot y(t) + 0\cdot u(t) + 0\cdot v(t) \end{aligned} \tag{12}$$

Mit

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(\omega_0^2 + k_0) & k_0 & 0 & 0 \\ k_0 & -(\omega_0^2 + k_0) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kann man nun (12) in der Form: $\boxed{z'(t) = Az(t) \quad (10)}$ schreiben.

Bestimmung eines Fundamentalsystems von (10):

charakteristisches Polynom: $\lambda^4 + 2\lambda^2(\omega_0^2 + k_0) + (\omega_0^2 + k_0)^2 - k_0^2 = 0$
Substitution $\boxed{s := \lambda^2}$ $\Rightarrow$ quadratische Gleichung:

$$s^2 + 2s(\omega_0^2 + k_0) + (\omega_0^2 + k_0)^2 - k_0^2 = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\omega_0^2 \\ s_2 &= -(\omega_0^2 + 2k_0) \end{aligned}$$

Rücksubstitution: $\boxed{\lambda^2 := s}$ $\Rightarrow$ komplexe Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \; i\omega_0 \\ \lambda_{3,4} &= \pm \; i\sqrt{\omega_0^2 + 2k_0} \end{aligned}$$

Da die 4×4-Matrix A vier verschiedene Eigenwerte besitzt, ist sie diagonalisierbar, d.h. es existiert eine Basis des $\mathbb{C}^4$ aus Eigenvektoren.

Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren:

$$\text{Eigenvektor zu} \quad \lambda_1 = i\omega_0 \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\omega_0 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} \quad := z_1^{(1)}$$

$$\text{Eigenvektor zu} \quad \lambda_2 = -i\omega_0 \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i\omega_0 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix} \quad := z_2^{(1)}$$

$$\text{Eigenvektor zu} \quad \lambda_3 = i\sqrt{\omega_0^2 + 2k_0} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\sqrt{\omega_0^2 + 2k_0} \\ -i\sqrt{\omega_0^2 + 2k_0} \end{pmatrix} \quad := z_3^{(1)}$$

$$\text{Eigenvektor zu} \quad \lambda_4 = -i\sqrt{\omega_0^2 + 2k_0} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\sqrt{\omega_0^2 + 2k_0} \\ i\sqrt{\omega_0^2 + 2k_0} \end{pmatrix} \quad := z_4^{(1)}$$

komplexes Fundamentalsystem :

$$z_1^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad z_2^{(1)} e^{\lambda_2 t}, \quad z_3^{(1)} e^{\lambda_3 t}, \quad z_4^{(1)} e^{\lambda_4 t} \tag{13}$$

reelle Lösungen von (13) erhält man durch Bilden von Real- und Imaginärteil von $z_1^{(1)} e^{\lambda_1 t}$ und $z_3^{(1)} e^{\lambda_3 t}$. Der Teil $z_2^{(1)} e^{\lambda_2 t}$ sowie $z_4^{(1)} e^{\lambda_4 t}$ kann wegen $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

und $\lambda_3 = \overline{\lambda_4}$ gestrichen werden.

reelles Fundamentalsystem:

$$
\begin{aligned}
z_1(t) &= \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\cos\omega_0 t - \begin{pmatrix}0\\0\\\omega_0\\\omega_0\end{pmatrix}\sin\omega_0 t\\
z_2(t) &= \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\sin\omega_0 t + \begin{pmatrix}0\\0\\\omega_0\\\omega_0\end{pmatrix}\cos\omega_0 t\\
z_3(t) &= \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\cos\sqrt{\omega_0^2+2k_0}\quad t - \begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{\omega_0^2+2k_0}\\-\sqrt{\omega_0^2+2k_0}\end{pmatrix}\sin\sqrt{\omega_0^2+2k_0}\quad t\\
z_4(t) &= \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\sin\sqrt{\omega_0^2+2k_0}\quad t + \begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{\omega_0^2+2k_0}\\-\sqrt{\omega_0^2+2k_0}\end{pmatrix}\cos\sqrt{\omega_0^2+2k_0}\quad t
\end{aligned}
$$

Entstehung des reellen Fundamentalsystems am Beispiel von $z_1^{(1)}e^{\lambda_1 t}$:

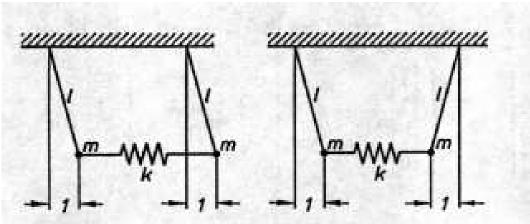
$$
\begin{aligned}
z_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} &= \begin{pmatrix}1\\1\\i\omega_0\\i\omega_0\end{pmatrix}e^{i\omega_0 t}\\
\Leftrightarrow\quad z_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} &= \begin{pmatrix}1\\1\\i\omega_0\\i\omega_0\end{pmatrix}e^{0}(\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t)
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow\quad z_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix}\cos\omega_0 t & + & i\sin\omega_0 t\\ \cos\omega_0 t & + & i\sin\omega_0 t\\ i\omega_0\cos\omega_0 t & + & i^2\omega_0\sin\omega_0 t\\ i\omega_0\cos\omega_0 t & + & i^2\omega_0\sin\omega_0 t\end{pmatrix}
$$

$$\Rightarrow \text{Realteil:} \qquad \mathrm{Re}(z_1^{(1)} e^{\lambda_1 t}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\omega_0 t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \sin\omega_0 t$$

$$\text{Imaginärteil:} \qquad \mathrm{Im}(z_1^{(1)} e^{\lambda_1 t}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\omega_0 t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \cos\omega_0 t$$

Die Lösungen $z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t)$ stellen folgende Eigenbewegungen des gekoppelten Pendels dar:



Allgemeine Lösung des DGL-Systems:
Sie entsteht durch Überlagerung der Eigenbewegungen

$$z(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) + c_3 z_3(t) + c_4 z_4(t) \qquad (c_1, \dots c_4 \in \mathbb{R} \quad \text{beliebig})$$

Anfangsbedingungen einbeziehen:
linkes Pendel ist um x_0 ausgelenkt, rechtes bleibt in Ruhezustand.

$$x(0) = x_0 \qquad x'(0) = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

Berechnung der Konstanten:

$$z(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\omega_0^2 + 2k_0} \\ -\sqrt{\omega_0 + 2k_0} \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten c_1, c_2, c_3, c_4 :

$$\begin{array}{rclcccc} x_0 & = & c_1 & & + & c_3 & & \\ 0 & = & c_1 & & - & c_3 & & \\ 0 & = & & \omega_0 c_2 & & & + & \sqrt{\omega_0^2+2k_0} \quad c_4 \\ 0 & = & & \omega_0 c_2 & & & - & \sqrt{\omega_0^2+2k_0} \quad c_4 \end{array}$$

spezielle Lösung:

$$z(t) = \frac{x_0}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\omega_0 t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \sin\omega_0 t \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\sqrt{\omega_0^2+2k_0} \quad t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\omega_0^2+2k_0} \\ -\sqrt{\omega_0^2+2k_0} \end{pmatrix} \sin\sqrt{\omega_0^2+2k_0} \quad t \right]$$

Für die Pendelauslenkung folgt:

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0}{2}(\cos\omega_0 t + \cos\sqrt{\omega_0^2+2k_0} \quad t)}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{x_0}{2}(\cos\omega_0 t - \cos\sqrt{\omega_0^2+2k_0} \quad t)}$$

3 Die Laplacetransformation

(Conny Clausen)

3.1 Eigenschaften der Laplacetransformation

3.1.1 Definition. *Sei $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Die durch*

$$\mathcal{L}\{F\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt \qquad (s \in \mathbb{C})$$

definierte Funktion $\mathcal{L}\{F\}$ heißt die Laplacetransformierte von F. Man beachte, dass $\mathcal{L}\{F\}(s)$ nur für solche $s \in \mathbb{C}$ sinnvoll definiert ist, für die das Integral existiert und endlich ist.

Im Folgenden bezeichnen wir oft die Laplacetransformierte mit dem zugehörigen Kleinbuchstaben, also etwa $\mathcal{L}\{F\} = f$. In diesem Zusammenhang nennt man F auch die Original- und f die Bildfunktion. Um die Konvergenz des Laplaceintegrals zu sichern, schränken wir uns bei den Originalfunktionen auf eine geeignete Funktionenklasse ein.

3.1.2 Definition. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ heißt von exponentieller Ordnung $\gamma \geq 0$, wenn eine Konstante $M > 0$ existiert, so dass*

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}_0^+).$$

Diese Wachstumsbeschränkung ist nicht sehr restriktiv, denn wie man sofort sieht sind alle beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung γ für jedes $\gamma \geq 0$. Dies gilt ebenfalls für alle Polynome $p(t) \in \mathbb{C}[t]$. Hat man nun zwei Funktionen f und g, die von exponentieller Ordnung γ bzw. α sind, so ist leicht einzusehen, daß $f \cdot g$ von exponentieller Ordnung $\gamma + \alpha$ und $\lambda f + g$ von exponentieller Ordnung $\max\{\alpha; \gamma\}$ ist, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl bezeichnet.
Die Funktion $f(t) = e^{t^4}$ hingegen ist nicht von exponentieller Ordnung, denn für alle $\gamma > 0$ ist $\frac{|f(t)|}{e^{\gamma t}} = e^{t^4 - \gamma t}$ offensichtlich unbeschränkt auf $\mathbb{R}_0^+$.

3.1.3 Satz. *Sei $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung γ und stückweise stetig differenzierbar. Dann existiert die Laplacetransformierte $\mathcal{L}\{F\}(s) = f(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit Re$(s) > \gamma$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist F von exponentieller Ordnung γ, d.h. es existiert eine Konstante $M > 0$, so dass für alle $t \geq 0$ gilt: $|F(t)| \leq Me^{\gamma t}$. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} |e^{-st}F(t)| &= |e^{-\mathrm{Re}(s)t}||e^{i\mathrm{Im}(s)t}||F(t)| \\ &\leq e^{-\mathrm{Re}(s)t} Me^{\gamma t} \\ &= Me^{-[\mathrm{Re}(s)-\gamma]t}. \end{aligned}$$

Da nun das Integral $\int_0^\infty e^{-[\mathrm{Re}(s)-\gamma]t}dt$ für $\mathrm{Re}(s) > \gamma$ konvergiert, existiert nach dem Vergleichskriterium auch das Laplaceintegral $\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$ für $\mathrm{Re}(s) > \gamma$. □

3.1.4 Beispiel. Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{at}$ mit $a \in \mathbb{C}$. Offenbar ist F stetig und von exponentieller Ordnung $\mathrm{Re}(a)$. Somit existiert nach Satz 3.1.3 die Laplacetransformierte $\mathcal{L}\{F(t)\}$ und es gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt \\ &= \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-(s-a)t} dt \\ &= \lim_{P\to\infty} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^P \\ &= \lim_{P\to\infty} \frac{1 - e^{-(s-a)P}}{s-a} \\ &= \frac{1}{s-a}.\end{aligned}$$

Wir können also festhalten:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = f(s) = \frac{1}{s-a} \qquad (\text{für } \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)).$$

3.1.5 Satz. *Die Laplacetransformation ist linear, d.h für zwei gegebene Funktionen $F_1, F_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung $\gamma \geq 0$ bzw. $\alpha \geq 0$ mit Laplacetransformierten f_1, f_2 und $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$\mathcal{L}\{c_1 F_1 + c_2 F_2\}(s) = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \max\{\gamma; \alpha\}$.

Beweis. Die Linearität der Laplacetransformation folgt unmittelbar aus der Linearität des Integrals. □

3.1.6 Satz. *Sei F von exponentieller Ordnung γ und $\omega \geq 0$. Dann gilt:*

$$\mathcal{L}\{F(\omega t)\}(s) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{F(t)\}(\frac{s}{\omega}) \qquad (s \in \mathbb{C}, Re(s) > \omega \cdot \gamma).$$

Beweis. Klar mit der Substitution $u = \omega t$. □

3.1.7 Beispiel. Wir wollen $\mathcal{L}\{\cos(t)\}$ und $\mathcal{L}\{\sin(3t)\}$ bestimmen. Nach Beispiel 3.1.4 wissen wir:

$$\mathcal{L}\{\cos(t) + i\sin(t)\} = \mathcal{L}\{e^{it}\} = \frac{1}{s-i}.$$

Wegen der Linearität gilt also für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(t)\} + i\mathcal{L}\{\sin(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{e^{it}\}(s) = \frac{1}{s-i} \\ &= \frac{s+i}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + i\frac{1}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Für $s \in \mathbb{R}^+$ folgt dann:

$$\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{L}\{\sin(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Daraus folgt mit Satz 3.1.6:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s) &= \frac{1}{3}\mathcal{L}\{\sin(t)\}(\frac{s}{3}) \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{s}{3}^2+1} \\
&= \frac{3}{s^2+3} \qquad (s \in \mathbb{R}^+).
\end{aligned}$$

Die oben hergeleiteten Formeln gelten sogar für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$. Um dies zu beweisen benutzt man den Identitätssatz aus der Funktionentheorie, denn da es sich jeweils um holomorphe Funktionen handelt, die auf der Menge $\mathbb{R}^+$ übereinstimmen, müssen sie nach diesem Satz auf der gesamten rechten Halbebene identisch sein.

3.1.8 Satz. *Sei $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung γ. Für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}^+$ sei $G : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ definiert durch*

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & \text{für } t \geq a \\ 0 & \text{für } 0 \leq t < a. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{F(t)\}(s-a) \qquad (s \in \mathbb{C}, Re(s) > \gamma + Re(a)) \\
\mathcal{L}\{G(t)\}(s) &= e^{-as}\mathcal{L}\{F(t)\}(s) \qquad (s \in \mathbb{C}, Re(s) > \gamma).
\end{aligned}$$

Beweis. Die erste Formel ergibt sich unmittelbar aus den Rechenregeln für die Exponentialfunftion. Unter Verwendung der Substitution $t = u + a$ erhält man die zweite Formel folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty G(t)e^{-st}dt &= \int_a^\infty F(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty F(u)e^{-s(u+a)}du \\
&= e^{-as}\int_0^\infty F(u)e^{-su}du.
\end{aligned}$$

□

3.1.9 Satz. *Sei $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und T-periodisch ($T > 0$), d.h. $F(t+T) = F(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 0$ die Beziehung*

$$\mathcal{L}\{F(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-su}F(u)du.$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}F(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\int_{iT}^{(i+1)T} e^{-st}F(t)dt \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\int_0^T e^{-s(u+iT)}F(u+iT)du \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-siT}\int_0^T F(u)e^{-su}du \\
&= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T F(u)e^{-su}du.
\end{aligned}
$$

□

3.1.10 Satz. (Differentiationsformel) *Sei $F:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{C}$ $(n-1)$-mal stetig differenzierbar und $F^{(n)}$ stückweise stetig. Ferner seien $F, F', F'', ..., F^{(n-1)}$ von exponentieller Ordnung γ. Dann gilt für $s\in\mathbb{C}, Re(s)>\gamma$:*

$$
\mathcal{L}\{F^n(t)\}(s) = s^n\mathcal{L}\{F(t)\}(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i}F^{(i)}(0).
$$

Beweis. Per Induktion: Für $n=1$ gilt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F'(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt \\
&= \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}F'(t)dt \\
&= \lim_{P\to\infty}[e^{-st}F(t)]_0^P + s\int_0^P e^{-st}F(t)dt \\
&= \lim_{P\to\infty} e^{-sP}F(P) - F(0) + s\int_0^P e^{-st}F(t)dt \\
&= s\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt - F(0).
\end{aligned}
$$

Der Induktionssschritt $n \to n+1$ verläuft analog:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F^{(n+1)}(t)\}(s) &= \int_0^\infty F^{(n+1)}(t)e^{-st} \\
&= \lim_{P\to\infty} \left[e^{-st}F^n(t)\right]_0^P + s\int_0^P e^{-st}F^n(t)dt \\
&= s\mathcal{L}\{F^{(n)}\}(s) - F^{(n)}(0) \\
&= s[s^n\mathcal{L}\{F(t)\} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i}F^{(i)}(0)] - F^{(n)}(0) \\
&= s^{n+1}\mathcal{L}\{F(t)\} - \sum_{i=0}^{n} s^{n-i}F^{(i)}(0).
\end{aligned}$$

□

3.1.11 Korollar. (Integrationsformel) *Sei $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ. Dann ist*

$$G : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \int_0^t F(u)du$$

ebenfalls von exponentieller Ordnung γ und es gilt für $s \in \mathbb{C}, Re(s) > \gamma$:

$$\mathcal{L}\{G(t)\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{F(t)\}(s)$$

Beweis. Die Funktion G ist stückweise stetig differenzierbar mit $G' = F$ und $G(0) = 0$. Weiter ist

$$|G(t)| = \int_0^\infty |F(u)|du \le M\int_0^\infty e^{\gamma u}du \le \frac{M}{\gamma}e^{\gamma t}$$

und somit nach der Differentiationsformel:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \mathcal{L}\{G'(t)\} = s\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = s\mathcal{L}\{G(t)\}.$$

□

3.1.12 Beispiel. Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s},$$

woraus mit der Integrationsformel die Beziehung

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}$$

folgt. Für höhere Potenzen argumentiert man analog:

$$\mathcal{L}\{t^2\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{2t\}(s) = \frac{2}{s}\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{2}{s^3}.$$

Induktiv erhält man so für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{(n+1)}}.$$

Bis hierhin haben wir die wichtigsten Eigenschaften der Laplacetransformation behandelt und anhand kleiner Beispiele verdeutlicht. Nun stellt sich jedoch die Frage, wie man dies alles auf die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen anwenden kann. Der Schlüssel hierzu ist die Differentiationsformel, wie wir im nun folgenden Beispiel sehen werden.

3.1.13 Beispiel. Betrachte das Anfangswertproblem

$$Y'' + Y' = t, \qquad Y(0) = 1, \qquad Y'(0) = -2.$$

Die Laplacetransformation überführt dies zunächst in die Gleichung

$$\mathcal{L}\{Y''\} + \mathcal{L}\{Y'\} = \mathcal{L}\{t\},$$

woraus sich mit der Differentiationsformel ergibt:

$$s^2\mathcal{L}\{Y\} - sY(0) - Y'(0) + \mathcal{L}\{Y\} = \frac{1}{s^2}$$

Auflösen nach $\mathcal{L}\{Y\}$ liefert uns dann die explizite Formel

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{Y\}(s) &= \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1} \\
&= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} \\
&= \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Wir haben nun zwar die Laplacetransformierte einer Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems, aber immer noch nicht die Lösung selbst. Es ist also als nächstes notwendig, etwas darüber zu erfahren, wie man von $\mathcal{L}\{Y\}$ wieder auf Y kommen kann, bzw. ob und wann dies möglich ist.

3.2 Inverse Laplacetransformation und Faltung

3.2.1 Satz. (Umkehrsatz) *Sei $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ stetig, stückweise stetig differenzierbar und von exponentieller Ordnung γ. Dann gilt für jede Wahl von $x > \gamma$ die Formel:*

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \mathcal{L}\{F(t)\}(s)e^{st}ds.$$

Da der Beweis des Umkehrsatzes den Rahmen dieser Darstellung sprengen würde, soll er hier nicht vorgeführt werden. Man findet ihn etwa in Burg-Haf-Wille [1].

Für viele Anwendungen ausreichend ist die Tatsache, dass die Laplacetranformation (zumindest auf einer geeigneten Funktionenklasse) injektiv ist. Vollständig beweisen wollen wir daher das folgende Ergebnis.

3.2.2 Satz. (Eindeutigkeitssatz im stetigen Fall) *Gilt für stetige Funktionen $F, G : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung $\gamma > 0$ die Übereinstimmung*

$$\mathcal{L}\{F(t)\}(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}(s) \qquad \textit{auf } \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \gamma\},$$

so ist $F \equiv G$.

3.2.3 Beispiel. Bevor wir zum Beweis des Satzes kommen, soll seine Anwendung anhand des Beispiels 3.1.13 verdeutlicht werden. Wir hatten dort folgendes Anfangswertproblem betrachtet:

$$Y'' + Y' = t, \quad Y(0) = 1, \quad Y'(0) = -2.$$

Die Laplacetransformierte der Lösung Y haben wir bereits errechnet. Benutzen wir zusätzlich die aus den Beispielen 3.1.7 und 3.1.12 bekannten Laplacetransformierten sowie die Linearität der Laplacetransformation, so folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{Y(t)\}(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1} \\
&= \mathcal{L}\{t\}(s) + \mathcal{L}\{\cos t\}(s) - 3\mathcal{L}\{\sin t\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{t + \cos t - 3\sin t\}(s).
\end{aligned}$$

Mit dem Eindeutigkeitssatz erhält man somit als Lösung des vorgegebenen Anfangswertproblems die Funktion

$$Y(t) = t + \cos t - 3\sin t \qquad (t \in \mathbb{R}_0^+).$$

Zum Beweis des Eindeutigkeitssatzes benötigen wir folgendes Lemma.

3.2.4 Lemma. *Ist $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig mit der Eigenschaft*

$$\int_0^1 x^n \varphi(x)dx = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

so ist $\varphi \equiv 0$.

Beweis. O.B.d.A. dürfen wir φ als reellwertig voraussetzen. Sei $\delta > 0$ beliebig. Dann existiert nach dem Weierstraßschen Approximationssatz ein Polynom $p_\delta \in \mathbb{R}[x]$ und eine Funktion $\Theta_\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $|\Theta_\delta| \leq 1$ und

$$\varphi(x) = p_\delta(x) + \delta\Theta_\delta(x) \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

Hieraus ergibt sich unter Beachtung der Voraussetzungen des Lemmas

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi^2(x)dx &= \underbrace{\int_0^1 p_\delta(x)\varphi(x)dx}_{=0} + \delta\int_0^1 \Theta_\delta(x)\varphi(x)dx \\
&= \delta\int_0^1 \Theta_\delta(x)\varphi(x)dx \\
&\leq \delta\int_0^1 |\varphi(x)|dx.
\end{aligned}$$

Angenommen $\varphi(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in [0,1]$; aus Stetigkeitsgründen ist dann $\varphi(x) \neq 0$ auf einem halboffenen Intervall um x_0. Damit ergibt sich

$$0 < \frac{\int_0^1 \varphi^2(x)dx}{\int_0^1 |\varphi(x)|dx} \leq \delta,$$

im Widerspruch dazu, dass $\delta > 0$ beliebig klein wählbar ist. $\square$

Beweis. (von Satz 3.2.2) Wegen der Linearität der Laplacetransformation genügt es zu zeigen, dass für jede stetige Funktion $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung γ gilt:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 0.$$

Verschwindet die Laplacetransformierte von F identisch, so folgt für $n \geq 1$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z_0) \geq \gamma$:

$$0 = \mathcal{L}\{F(t)\}(z_0 + n) = \int_0^\infty \underbrace{(F(t)e^{-z_0 t})}_{=:\varphi(t)} \underbrace{e^{-nt}}_{=(e^{-t})^n} dt.$$

Mit der Substitution $x = e^{-t}$ überführt man das letzte Integral in die Form

$$\int_0^1 \varphi(-\log x)x^n(-\frac{1}{x})dx = \int_0^1 \varphi(-\log x)x^{n-1}dx.$$

Da F von exponentieller Ordnung γ und $\mathrm{Re}(z_0) > \gamma$ ist, gilt mit einer geeigneten Konstanten $M > 0$ die Abschätzung

$$|F(-\log(x))e^{z_0 \log(x)}| \leq Me^{-\gamma \log(x)}e^{\mathrm{Re}(z_0)\log(x)} = Me^{(\mathrm{Re}(z_0)-\gamma)\log(x)} \xrightarrow{x \to 0} 0.$$

Daher kann $\varphi(-\log x)$ als stetige Funktion auf $[0, 1]$ aufgefasst werden mit $\varphi(0) = 0$. Eine Anwendung des vorangehenden Lemmas liefert

$$\varphi(-\log x) \equiv 0 \quad \text{auf } [0, 1]$$

oder äquivalent $F(t)e^{-z_0 t} \equiv 0$ auf $[0, \infty)$. Damit ist schließlich $F \equiv 0$, was zu zeigen war. $\square$

Da die Laplacetransformation linear ist, lassen sich Summen von Laplacetransformierten als Laplacetransformierte einer Summe schreiben. Dies haben wir zusammen mit dem Umkehrsatz benutzt, um in Beispiel 3.2.3 die Rücktransformation durchführen zu können. Wir wollen nun untersuchen, ob sich Laplacetransformationen von Produkten in ähnlicher Weise als Laplacetransformierte eines "Produktes" schreiben lassen.

3.2.5 Definition. *Seien $F_1, F_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ stückweise stetig. Dann nennt man*

$$(F_1 * F_2)(t) = \int_0^t F_1(t-u)F_2(u)du \qquad (t \in \mathbb{R}_0^+)$$

die Faltung von F_1 und F_2 .

3.2.6 Satz. (Faltungssatz) *Seien $F_1, F_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar und von exponentieller Ordnung γ. Dann existiert $\mathcal{L}\{(F_1 * F_2)\}$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > \gamma$, und für diese s gilt:*

$$\mathcal{L}\{(F_1 * F_2)\}(s) = \mathcal{L}\{F_1\}(s) \cdot \mathcal{L}\{F_2\}(s)$$

Beweis. Die Laplacetransformierte der Faltung lautet

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(F_1 * F_2)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}(F_1 * F_2)(t)dt \\
&= \int_0^\infty \left(e^{-st}\int_0^t F_1(t-u)F_2(u)du\right) dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^t F_1(t-u)F_2(u)e^{-st}du\right) dt.
\end{aligned}$$

Das letzte Integral konvergiert absolut, denn der Term in der Klammer ist betragsmäßig kleiner oder gleich

$$\int_0^t e^{\gamma(t-u)}e^{\gamma u}e^{-\mathrm{Re}(s)t}dt = \frac{1}{\gamma - \mathrm{Re}(s)}e^{(\gamma-\mathrm{Re}(s))t}.$$

Dies zeigt zum einen die Existenzbehauptung, zum anderen berechtigt es uns, den Satz von Fubini anzuwenden, d.h. die Integrationsreihenfolge zu vertauschen. Unter Berücksichtigung der korrekten Integrationsgrenzen erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\int_0^t F_1(t-u)F_2(u)e^{-st}du\right) dt \\
= &\int_0^\infty \left(\int_u^\infty e^{-st}F_1(t-u)F_2(u)dt\right) du \\
= &\int_0^\infty F_2(u)\left(\int_u^\infty F_1(t-u)e^{-st}dt\right) du
\end{aligned}$$

Durch die Substitution $v = t - u$ im inneren Integral erhält man weiter

$$\begin{aligned}
\cdots &= \int_0^\infty F_2(u)\left(\int_0^\infty F_1(v)e^{-s(u+v)}dv\right) du \\
&= \int_0^\infty e^{-su}F_2(u)du \cdot \int_0^\infty e^{-sv}F_1(v)dv \\
&= \mathcal{L}\{F_2\}(s)\cdot\mathcal{L}\{F_1\}(s).
\end{aligned}$$

□

An dem folgenden Beispiel soll die Bedeutung der Faltung bei der inversen Laplacetransformation deutlich gemacht werden.

3.2.7 Beispiel. Folgende Anfangswertaufgabe ist zu lösen:

$$Y''(x) - Y'(x) = x, \qquad Y(0) = 2, \qquad Y'(0) = -3.$$

Die Laplacetransformation verwandelt dieses Problem nach der aus Beispiel 3.1.13 bekannten Vorgehensweise in die Gleichung

$$s^2\mathcal{L}\{Y\}(s) - sY(0) - Y'(0) - s\mathcal{L}\{Y\}(s) + Y(0) = \mathcal{L}\{x\}(s).$$

Einsetzen der Anfangswerte und Auflösen nach $\mathcal{L}\{Y\}(s)$ liefert die Laplacetransformierte

$$\mathcal{L}\{Y\}(s) = \frac{1}{s^3(s-1)} - \frac{5}{s(s-1)} + \frac{2}{s-1}.$$

Man kann auf die ersten beiden Summanden nun entweder Partialbruchzerlegung anwenden oder sie als Transformierte einer Faltung betrachten. Nach den Beispielen 3.1.4 und 3.1.12 gilt:

$$\frac{1}{s^3(s-1)} = \mathcal{L}\{\frac{t^2}{2}\}(s) \cdot \mathcal{L}\{e^t\}(s),$$

weshalb sich nach dem Faltungssatz und mit Hilfe von zweimaliger partieller Integration ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^3(s-1)} &= \mathcal{L}\{\frac{t^2}{2} * e^t\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\int_0^t \frac{(t-u)^2}{2} e^u du\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\frac{-t^2}{2} - t + e^t - 1\}(s). \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für den zweiten Summanden:

$$\begin{aligned} \frac{5}{s(s-1)} &= \mathcal{L}\{1 * 5e^t\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\int_0^t 1 \cdot 5e^u du\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{5e^t - 5\}(s). \end{aligned}$$

Für den dritten Summanden kennen wir die Laplacetransformierte, und somit haben wir insgesamt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{Y(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\frac{-t^2}{2} - t + e^t - 1 - (5e^t - 5) + 2e^t\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\frac{-t^2}{2} - t - 2e^t + 4\}(s) \end{aligned}$$

Eine Anwendung des Eindeutigkeitssatzes lässt uns schließlich

$$Y(t) = \frac{-t^2}{2} - t - 2e^t + 4 \qquad (t \in \mathbb{R}_0^+)$$

als die gesuchte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems erkennen.

Bis jetzt haben wir Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten betrachtet. Nun wollen wir auch variable Koeffizienten (allerdings von ganz spezieller Form) zulassen. Genauer: Wir untersuchen Gleichungen vom Typ

$$\sum_{i=0}^{n} x^{k_i} Y^{(i)}(x) \quad = \quad 0 \qquad \text{mit } k_0, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0.$$

Ermöglicht wird dies durch den folgenden Satz.

3.2.8 Satz. *Sei $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion von exponentieller Ordnung γ. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > \gamma$ und $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\}(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{F(t)\}^{(n)}(s).$$

Beweis. Mit vollständiger Induktion. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\}'(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{ds}e^{-st}F(t)dt \\
&= \int_0^\infty -te^{-st}F(t)dt \\
&= -\int_0^\infty e^{-st}t\cdot F(t)dt \\
&= -\mathcal{L}\{tF(t)\}(s).
\end{aligned}$$

Somit ist er Induktionsanfang gezeigt. Im Induktionsschritt $n \to n+1$ argumentiert man analog. □

3.2.9 Beispiel. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$tY'' + 2Y' + tY = 0, \qquad Y(0) = 1, \qquad Y(\pi) = 0$$

Wendet man hierauf nun die Laplacetransdormation an, so erhält man mit dem Differentiationssatz und dem vorangehenden Satz:

$$\begin{aligned}
0 = \mathcal{L}\{tY'' + 2Y' + tY\}(s) &= -\frac{d}{ds}\left(s^2\mathcal{L}\{Y\}(s) - sY(0) - Y'(0)\right) \\
&\quad +2\left(s\mathcal{L}\{Y\}(s) - Y(0)\right) - \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{Y\} \\
&= -s^2\mathcal{L}\{Y\}'(s) - 2s\mathcal{L}\{Y\}(s) + 1 \\
&\quad +2s\mathcal{L}\{Y\}(s) - 2 - \mathcal{L}\{Y\}'(s) \\
&= -(s^2+1)\mathcal{L}\{Y\}'(s) - 1,
\end{aligned}$$

bzw. nach offensichtlichen Umformungen

$$\mathcal{L}\{Y\}'(s) = \frac{-1}{s^2+1}.$$

Integrieren liefert

$$\mathcal{L}\{Y\}(s) = -\arctan(s) + A$$

mit einer noch zu bestimmenden, reellen Konstanten A. Um das passende A zu finden brauchen wir noch das folgende, einfach zu beweisende Lemma.

3.2.10 Lemma. *Für jede stetige Funktion $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung γ gilt:*

$$\lim_{Re(s)\to\infty} \mathcal{L}\{Y\}(s) = 0.$$

Beweis. Mit einer geeigneten Konstanten $M > 0$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}\{Y\}(s)| &= |\int_0^\infty e^{-st} F(t) dt| \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}(s)t} M e^{\gamma t} dt \\ &= M \int_0^\infty e^{(\gamma - \mathrm{Re}(s))t} dt \\ &= M \left[\frac{1}{\gamma - \mathrm{Re}(s)} e^{(\gamma - \mathrm{Re}(s))t} \right]_0^\infty \\ &= \frac{M}{\mathrm{Re}(s) - \gamma}, \end{aligned}$$

und dieser letzte Ausdruck konvergiert offenbar gegen 0 für $\mathrm{Re}(s) \to \infty$. □

Zurück zum Beispiel: Wollen wir nun eine Funktion von exponentieller Ordnung als Lösung unseres Anfangswertproblems, so führt uns dieses Lemma auf die Wahl $A = \frac{\pi}{2}$, denn es gilt ja

$$\lim_{s \to \infty} \arctan(s) = \frac{\pi}{2}.$$

Unter Benutzung der bekannten Identität $\frac{\pi}{2} = \arctan(\frac{1}{s}) + \arctan(s)$ erhalten wir somit

$$\mathcal{L}\{Y\}(s) = -\arctan(s) + \frac{\pi}{2} = \arctan(\frac{1}{s}).$$

Nachschlagen in einer Formelsammlung führt uns auf die endgültige Lösung

$$Y(t) = \frac{\sin t}{t} \qquad (t \in \mathbb{R}_0).$$

Offenbar ist $Y(\pi) = 0$, und im Grenzwert $t \downarrow 0$ erfüllt diese Lösung auch die Anfangswertbedingung $Y(0) = 0$

3.3 Spezielle Funktionen: Gamma- und Delta-Funktion

3.3.1 Definition. *Für $z \in \mathbb{C}$, $Re(z) > 0$, definiert man die Gamma-Funktion als das Integral*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du.$$

Für $u > 0$ ist $|u^{z-1}e^{-u}| = e^{-u}|e^{\log(u)(z-1)}| = e^{-u}u^{\mathrm{Re}(z)-1}$, was die Konvergenz des Integrals an der oberen Grenze sichert. Ist $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ so ist das Integral auch an der unteren Grenze uneigentlich; die Konvergenz folgt jedoch leicht aus dem Majorantenkroterium und der Integrierbarkeit von u^γ (für $-1 < \gamma < 0$) auf dem $[0, 1]$. Weiterhin ist bekannt (vgl. *Priciples of mathematical Analysis* von W. Rudin), dass die Gamma-Funktion die Fakultäten interpoliert, d.h.

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Diese Tatsache motiviert folgenden Satz.

3.3.2 Satz. *Es gilt für $r > -1$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 0$:*

$$\mathcal{L}\{t^r\}(s) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}.$$

Beweis. Die direkte Rechnung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^r\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^r dt \\
&= \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^r d\left(\frac{u}{s}\right) \\
&= \frac{1}{s^{r+1}} \int_0^\infty u^r e^{-u} du \\
&= \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}
\end{aligned}$$

führt zum Ziel, wobei in der zweiten Zeile die Substitution $u = st$ durchgeführt wurde. □

3.3.3 Definition. *Eine „Funktion“ $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden drei Eigenschaften*

1. $\int_0^\infty \delta(t)dt = 1$
2. $\int_0^\infty \delta(t)F(t) = F(0)$ *für jede stetige Funktion $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$*
3. $\int_0^\infty \delta(t-a)F(t) = F(a)$ *für $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ stetig, $a \in \mathbb{R}_0^+$*

wird als Diracsche Delta-Funktion bezeichnet.

Eine solche Funktion existiert eigentlich nicht! In der Theorie der Distributionen kann man dennoch ein mathematisches Objekt angeben, dass den drei angegebenen Regeln genügt (aber keine Funktion im klassischen Sinne mehr ist). Dies soll hier nicht vertieft werden. Vielmehr werden wir die Existenz einer δ-Distribution akzeptieren, und formal mit den in der Definition angegebenen Regeln (im Sinne eines Kalküls) rechnen.

3.3.4 Beispiel. Wir wollen hier die Laplacetransformierte von der Diracschen Delta-Funktion betrachten; dies ist ja möglich, da die Laplacetransformation eine Integraltransformation, d.h. obige Regeln anwendbar sind. Nach Regel 3 erhalten wir

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = e^{-as}.$$

Somit gilt insbesondere mit $a = 0 : \mathcal{L}\{\delta(t)\} \equiv 1$. Wir haben nun also endlich ein Funktion, deren Laplacetransformierte uns die konstanten Funktionen bringt.

Die Diracsche Delta-Dristribution ist ein sehr nützliches Hilfsmittel in den Ingenieurwissenschaften. Sie dient dazu, Punktmassen oder punktförmige Ladungen zu modellieren. Als konkretes Beispiel soll die Durchbiegung eines Balkens berechnet werden, auf dem eine vorgegebene Punktmasse lastet.

Die Durchbiegung eines Balkens wird mathematisch folgendermassen beschrieben: Betrachtet man einen Balken, der an beiden Enden ($x = 0$ und $x = l$) befestigt ist, und auf dem eine Lastenverteilung, die durch die Funktion $W(x)$ beschrieben wird, aufliegt, dann erfüllt die Lagefunktion Y, die die Auslenkung (Biegung) des Balkens beschreibt ein Anfangswertproblem der Form:

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI}$$

$$Y(0) = 0, \qquad Y'(0) = 0, \qquad Y(l) = 0, \qquad Y'(l) = 0.$$

Hierbei sind $E, I > 0$ materialabhängige Konstanten. Die Anfangsbedingungen werden durch die Art der Befestigung des Balkens bestimmt (vgl. Buch von Spiegel).

3.3.5 Beispiel. Wir haben einen Balken, der an den Enden $x = 0$ und $x = l$ befestigt ist. Genau auf dem Punkt $\frac{l}{3}$ lastet ein Gewicht P_0. Um nun die Lagefunktion des Balkens zu berechnen, muss man folgendes Anfangswertproblem lösen:

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{P_0}{EI}\delta(x - \frac{l}{3}),$$

$$Y(0) = 0, \qquad Y'(0) = 0, \qquad Y(l) = 0, \qquad Y'(l) = 0.$$

Bildung der Laplacetransformierten auf beiden Seiten liefert uns dann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\frac{d^4Y}{dx^4}\}(s) &= s^4\mathcal{L}\{Y\}(s) - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) \\
&= \frac{P_0}{EI}e^{-\frac{l}{3}s} \\
&= \mathcal{L}\{\frac{P_0}{EI}\delta(x - \frac{l}{3})\}(s)
\end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangswerte und ersetzen von $Y''(0) =: c_1$ und $Y'''(0) =: c_2$ liefert dann:

$$\begin{aligned}
& s^4\mathcal{L}\{Y\}(s) - sc_1 - c_2 = \frac{P_0}{EI}e^{-\frac{l}{3}s} \\
\Leftrightarrow \quad & s^4\mathcal{L}\{Y\}(s) = \frac{P_0}{EI}e^{-\frac{l}{3}s} + sc_1 + c_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathcal{L}\{Y\}(s) = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{P_0}{EI}\frac{e^{-\frac{l}{3}s}}{s^4}
\end{aligned}$$

Wir kennen bis jetzt noch keine Funktion mit dieser Laplacetransformierten. Deshalb soll hier die Heaviside-Funktion eingeführt werden. Die Funktion

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(x - a) := \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x > a \end{cases}$$

heißt Heavisidefunktion. Ihre Laplacetransformierte berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u(x-a)\}(s) &= \int_0^\infty u(x-a)e^{-sx}dx \\
&= \int_0^a e^{-sx}\cdot 0dx + \int_a^\infty e^{-xs}\cdot 1dx \\
&= \lim_{P\to\infty}\int_a^P e^{-xs}dx \\
&= \lim_{P\to\infty}\left[\frac{e^{-sx}}{-s}\right]_a^P \\
&= \lim_{P\to\infty}\frac{e^{-as}-e^{-sP}}{s} \\
&= \frac{e^{-as}}{s}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Heavisidefunktion können wir nun, unter Benutzung des (allgemeinen) Eindeutigkeitssatzes (siehe etwa [1]), die Rücktransformation vornehmen. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{c_1x^2}{2!}+\frac{c_2x^3}{3!}+\frac{P_0}{EI}\frac{(x-\frac{l}{3})^3}{3!}u(x-\frac{l}{3}) \\
&= \begin{cases} \frac{c_1x^2}{2!}+\frac{c_2x^3}{3!} & (0<x<\frac{l}{3}) \\ \frac{c_1x^2}{2!}+\frac{c_2x^3}{3!}+\frac{P_0}{EI}\frac{(x-\frac{l}{3})^3}{3!} & (\frac{l}{3}<x<l). \end{cases}
\end{aligned}$$

Unsere Funktion Y ist nun jedoch immer noch nicht eindeutig bestimmt, denn sie enthält noch die Konstanten c_1 und c_2. Wir haben aber auch noch nicht alle Anfangswertbedingungen benutzt. Mit den Bedingungen $Y(l)=0$ und $Y'(l)=0$ erhält man nun folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(i) \qquad \frac{c_1}{2}l^2+\frac{c_2}{6}l^3+\frac{P_0}{EI}\frac{(l-\frac{l}{3})^3}{6} &= 0 \\
(ii) \qquad c_1l+\frac{c_2}{2}l^2+\frac{P_0}{EI}\frac{(l-\frac{l}{3})^2}{2} &= 0.
\end{aligned}$$

Umformen von (ii) ergibt dann:

$$(*) \qquad c_1=-\frac{c_2}{2}-\frac{P_0}{EI}\frac{\frac{4}{9}l}{2}=-\frac{c_2}{2}-\frac{2}{9}\frac{P_0l}{EI}.$$

Einsetzen in (i) liefert dann:

$$0 = -\frac{c_2}{4}l^3-\frac{1}{9}\frac{P_0l}{EI}l^3+\frac{c_2}{6}l^3+\frac{P_0}{EI}\frac{(\frac{2}{3}l)^3}{6}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
-\frac{3c_2}{12}l^3+\frac{2c_2}{12}l^3 &= \frac{P_0}{EI}l^3\left(\frac{1}{9}-\frac{(\frac{2}{3})^3}{6}\right) \\
\frac{c_2}{12}l^3 &= \frac{P_0}{EI}l^3\left(\frac{1}{9}-\frac{\frac{8}{27}}{6}\right).
\end{aligned}$$

Und somit erhalten wir:

$$c_2 = -12\frac{P_0}{EI}\left(\frac{9-4}{81}\right) = -\frac{20}{27}\frac{P_0}{EI}.$$

Durch Einsetzen in $(*)$ bekommt man

$$c_1 = \frac{P_0}{EI}\frac{10}{27}l - \frac{P_0}{EI}\frac{2}{9}l = \frac{4}{27}\frac{P_0}{EI}l.$$

Damit haben wir nun eine eindeutige Lösungsfunktion, die die Lage des Balkens beschreibt:

$$Y(x) \quad = \quad \frac{2P_0lx^2}{27EI} - \frac{10P_0x^3}{81EI} + \frac{P_0}{6EI}\left(x-\frac{l}{3}\right)^3 u\left(x-\frac{l}{3}\right) \qquad (x \in [0,l]).$$

4 Schwingungen

(Lijun Zhang)

4.1 Vorbemerkungen

Wir betrachten im Folgenden eine allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (p, q \in \mathbb{R}).$$

Setzt man den *Eulerschen Ansatz*

$$y(t) := e^{rt} \quad (r \in \mathbb{C} \text{ eine zunächst freie Konstante})$$

in die Differentialgleichung ein, so sieht man leicht, dass $y(t) = e^{rt}$ genau dann eine Lösung ist, wenn r eine Nullstelle des zugehörigen charakteristische Polynoms

$$p(r) = r^2 + pr + q$$

ist. Vollständig beschrieben wird das Lösungsverhalten der obigen Differentialgleichung durch den folgenden Satz.

4.1.1 Satz. *Die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung*

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (p, q \in \mathbb{R})$$

erhält man wie folgt: Man bestimmt die Nullstellen $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ des charakteristischen Polynoms $p(r) = r^2 + pr + q$ und setzt $\Delta = p^2 - 4q$. Ist dann

- $\Delta > 0$, *so ist* $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ *und* $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\Delta = 0$, *so ist* $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ *und* $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x} \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\Delta < 0$, *so ist* $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ *mit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *und*

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jeweils die allgemeine Lösung. Das zugehörige Anfangswertproblem

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0$$

ist für $x_0, y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$ stets eindeutig lösbar.

4.2 Elementare trigonometrische Umformungen

In diesem Abschnitt stellen wir einige später benötigte trigonometrische Identitäten zusammen. Wir gehen aus von den Additionstheoremen

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x) \tag{14}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y). \tag{15}$$

Von obigen Gleichungen kann man alle anderen ableiten. Setzt man $x = y$, folgt:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \tag{16}$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x). \tag{17}$$

Wenn man (14) bzw. (15) addiert bzw. substrahiert, erhält man:

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \tag{18}$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \tag{19}$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \tag{20}$$

Daraus ergibt sich durch weitere einfache Umformungen:

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{y-x}{2}) \tag{21}$$
$$\cos(x) - \cos(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{y-x}{2}). \tag{22}$$

4.3 Motivation

Ein Massenpunkt M mit Masse $m > 0$ sei an einer horizontalen Feder befestigt und liege auf einer (ebenfalls horizontalen) $x-$Achse. Bei ungespannter Feder befinde sich M im Nullpunkt (Gleichgewichtslage). Verschiebt man M, so übt die (ausgedehnte oder zusammengedrückte) Feder eine sogenannte Rückstellkraft K aus, die M in die Gleichgewichtslage zurückzutreiben sucht. Bei *kleinen* Auslenkungen x ist in guter Näherung $K = -kx$ mit einer positiven Federkonstanten oder Federsteifigkeit k (*Hookesches Gesetz*). Befindet sich M zur Zeit t im Punkte $x(t)$ und sehen wir von dämpfenden Reibungskräften ab, so gilt also nach dem *Newtonschen Kraftgesetz:*

$$mx'' = -kx.$$

Diese Gleichung beschreibt den *ungedämpften harmonischen Oszillator*. In der Regel wird man jedoch Reibungs- oder Dämpfungskräfte in Rechung stellen müssen, und diese hemmenden Kräfte werden in vielen Fällen *proportional zur Geschwindigkeit von M* sein, also die Form $-rx'$ mit festem $r > 0$ haben. Obige Gleichung wird dann erweitert zu der Differentialgleichung:

$$mx'' = -kx - rx'$$

Die Rückstellkraft und die Dämpfungskraft nennt man "innere Kräfte", in vielen Fällen wirkt aber auf M noch zusätzlich eine zeitabhängige "äußere Kraft", eine sogenannte "Zwangskraft" oder "erregende Kraft" $K(t)$. In diesem Falle lautet die zugehörige Differentialgleichung:

$$mx'' = -kx - rx' + K(t)$$

Befindet sich der Massenpunkt M zur Zeit t_0 am Ort x_0 und besitzt er dort die Geschwindigkeit x_0', so wird sein Weg-Zeitgesetz $x = x(t)$ die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x'' + \frac{r}{m}x' + \frac{k}{m}x' = \frac{1}{m}Kt, \qquad x(t_0) = x_0, \qquad x'(t_0) = x_0'$$

Zur Vereinfachung setzt man $2\rho := \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$, $f(t) := \frac{K(t)}{m}$ und erhält:

$$\boxed{x'' + 2\rho x' + \omega_0^2 x = f(t) \quad (\rho, \omega_0 > 0).} \tag{23}$$

4.4 Freie Schwingungen eines Massenpunktes ($\rho = f(t) = 0$)

Die reibungsfreie Bewegung eines elastisch angebundenen Punktes M mit Masse m von der Differentialgleichung

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \tag{24}$$

beschrieben. Die allgemeine Lösung davon lautet:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}). \tag{25}$$

Die freien Konstanten C_1, C_2 machen es möglich, die Lösung vorgegebenen Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ und $x'(t_0) = x_0'$ anzupassen, also Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit von M vorzuschreiben. Im Falle $C_1 = C_2 = 0$ bleibt M bewegungslos im Nullpunkt. Fällt aber mindestens ein $C_k \neq 0$ aus ($k = 1, 2$), so können wir $x(t)$ auf die Form

$$x(t) = A\left(\frac{C_1}{A}\cos(\omega_0 t) + \frac{C_2}{A}\sin(\omega_0 t)\right)$$

bringen, wobei $A := \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Da $(\frac{C_1}{A})^2 + (\frac{C_2}{A})^2 = 1$ ist, gibt es genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$ mit

$$\frac{C_1}{A} = \sin(\phi) \quad \text{und} \quad \frac{C_2}{A} = \cos(\phi).$$

Damit gilt dann

$$x(t) = A(\sin(\phi)\cos(\omega_0 t) + \cos(\phi)\sin(\omega_0 t)) \tag{26}$$

und nach Ausnutzung der Additionstheoreme

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi). \tag{27}$$

Aus dieser Darstellung liest man ab, dass M zwischen den Maximalausschlägen $-A$ und A periodisch hin- und herschwingt und innerhalb der Zeit

$$T := \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

eine volle Schwingung (von der Ausgangslage zurück zur Ausgangslage) ausführt. Man nennt A die *Amplitude* und T die *Periode der Schwingung*. Die

Größe $\nu := \frac{1}{T}$ gibt die Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit an und wird die *Frequenz der Schwingung* genannt. Offenbar gilt

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{oder also} \quad \omega_0 = 2\pi\nu$$

für die *Kreisfrequenz* ω_0 der Schwingung. (Der Kürze halber redet man allerdings häufig einfach von der *Frequenz* ω_0.) Die Größe ϕ mennt man *Phasenkonstante.* Wegen $x(0) = A\sin(\phi)$ legt sie die Lage von M zur Zeit $t = 0$ fest.

4.5 Die gedämpfte Schwingung ($\rho \neq 0, f(t) = 0$)

Die zugehörige Differentialgleichung lautet also

$$x'' + 2\rho x' + \omega_0^2 x = 0. \tag{28}$$

Zur Lösung brauchen wir nur auf die Einführung zurückzugreifen; sei also $\Delta = 4(\rho^2 - \omega_0^2)$. In Abhängigkeit vom Vorzeichen von Δ müssen wir wieder drei Fälle unterscheiden:

Der Kriechfall (starke Dämpfung): $\rho > \omega_0 \Leftrightarrow r > 2\sqrt{mk}$.

In diesem Falle haben wir $\Delta > 0$ und somit

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \text{ mit } \lambda_{1,2} := -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} < 0, \tag{29}$$

woran man sofort abliest:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

Die Geschwindigkeit des Massenpunktes M ist

$$x'(t) = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Im nichttriviallen Falle (o.B.d.A. $C_1 \neq 0$) wird sie also genau dann gleich 0,wenn $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = -\frac{C_2\lambda_2}{C_1\lambda_1}$ gilt. Dies kann offenbar für höchstens einen Wert von t vorkommen. Alles in allem stellt sich also im Falle starker Dämpfung eine *aperiodische* Bewegung ein, bei welcher der Massenpunkt höchstens einmal seine anfängliche Bewegungsrichtung umkehrt, also höchstens einmal üeber den Nullpunkt hinauswandert.

Der aperiodische Grenzfall $\rho = \omega_0 \Leftrightarrow r = 2\sqrt{mk}$.

Nun haben wir $\Delta = 0$ und somit

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\rho t}.$$

Wieder ist

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0,$$

und die Geschwindigkeit ergibt sich diesmal als

$$\begin{aligned} x'(t) &= C_2 e^{-\rho t} + (C_1 + C_2 t)(-\rho)e^{-\rho t} \\ &= (C_2 - C_1\rho - C_2\rho t)e^{-\rho t}. \end{aligned}$$

Folglich ist $x'(t)$ genau dann 0, wenn $C_2 - C_1\rho - C_2\rho t = 0$ ist. Also kann die Geschwindigkeit $x'(t)$ wie im Kriechfalls höchstens einmal zu Null werden. Wir haben also denselben Bewegungstyp wie im Kriechfall.

Der Schwingfall (schwache Dämpfung) $\rho < \omega_0 \Leftrightarrow r < 2\sqrt{mk}$**.**

Jetzt ist $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\rho \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$. Mit

$$\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$$

erhalten wir als Lösung

$$x(t) = e^{-\rho t}(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)). \tag{30}$$

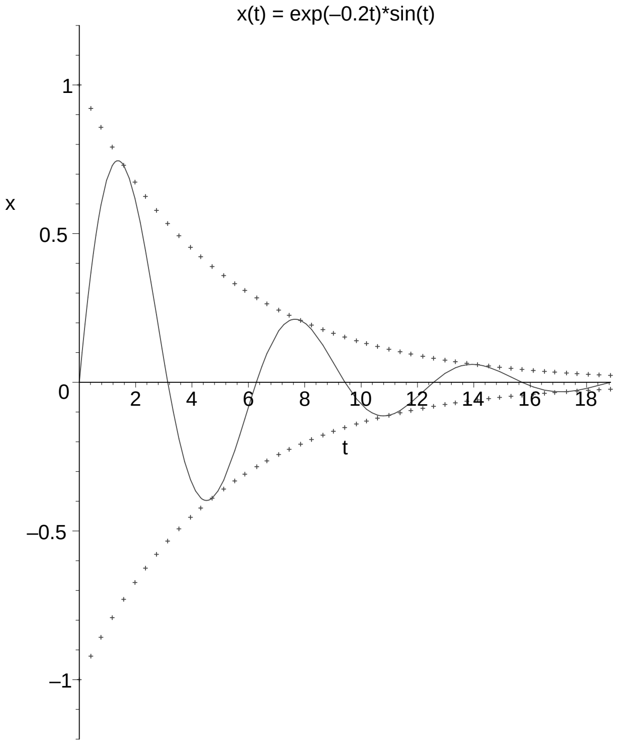
Mit geeignetem $\phi \in [0, 2\pi)$ (siehe oben) folgt schließlich

$$x(t) = Ae^{-\rho t} \sin(\omega_1 t + \phi). \tag{31}$$

Wegen $\rho > 0$ strebt zwar auch diesmal wieder $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$, aber der Sinusterm sorgt dafür, dass sich der Massenpunkt M ganz anders als in den beiden vorher betrachteten Fällen bewegt (Abbildung auf der folgenden Seite). Die Zeit

$$T := \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}}$$

zwischen jeweils zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch den Nullpunkt aus ein und derselben Richtung nennt man deshalb wieder die *Schwingungsdauer* dieser "gedämpften Schwingung mit exponentiell abnehmender Amplitude". Die Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung im Abschnitt 4.4 ist größer als die Kreisfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$ der zugehörigen gedämpften Schwingung: *Im Dämpfungsfall schwingt der Massenpunkt langsamer als im ungedämpften Fall.*



4.6 Erzwungene Schwingungen eines Massenpunktes

Zwangs- oder Erregungskräfte sind häufig *periodische* Funktionen der Zeit. Wir wollen hier – immer unter der Dämpfungsvoraussetzung $0 \leq \rho < \omega_0$ – als erstes den Fall einer "Kosinuserregung", d.h. die Differentialgleichung

$$x'' + 2\rho x' + \omega_0^2 x = a\cos(\omega t), (a, \omega > 0)$$

etwas genauer betrachten. Dabei nennt man ω die *Erregerfrequenz* und ω_0 die *Eigenfriquenz*. Wir unterscheiden die Fälle $\rho = 0$ und $\rho > 0$.

Ungedämpfter harmonischer Oszillator ($\rho = 0$).

Es handelt sich also jetzt um die inhomogene Differentialgleichung

$$x'' + \omega_0^2 x = a\cos(\omega t) \tag{32}$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung hatten wir schon behandelt; hier müssen wir also lediglich noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden. Wie üblich variieren wir die Konstante, d.h. wie betrachten die in der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung auftretenden Konstanten C_1, C_2 als Funktionen von t:

$$x(t) = C_1(t)\cos(\omega_0 t) + C_2(t)\sin(\omega_0 t). \tag{33}$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned} x'(t) \quad = \quad & C_1'(t)\cos(\omega_0 t) + C_2'(t)\sin(\omega_0 t) \\ & -\omega_0 C_1(t)\sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2\cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Um in der zweiten Differentialgleichung die Terme mit $C_1''(t)$ bzw. $C_2''(t)$ zu vermeiden, nehmen wir an:

$$C_1'(t)\cos(\omega_0 t) + C_2'(t)\sin(\omega_0 t) = 0.$$

Leiten wir noch mal ab, so finden wir

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\omega_0 C_1'(t)\sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 C_1(t)\cos(\omega_0 t) \\ &\quad +\omega_0 C_2'(t)\cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 C_2 \sin(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung (22) liefert

$$-\omega_0 C_1'(t)\sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2'(t)\cos(\omega_0 t) = a\cos(\omega t).$$

Fassen wir die obigen beide Gleichungen für C_1' und C_2' zusammen, erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \omega_0\cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Als Lösung berechnen wir durch Matrixinversion

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \omega_0\cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ a\cos(\omega t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\omega_0}\begin{pmatrix} \omega_0\cos(\omega_0 t) & -\sin(\omega_0 t) \\ \omega_0 \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a\cos(\omega t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{a}{\omega_0}\begin{pmatrix} -\sin(\omega_0 t)\cos(\omega t) \\ \cos(\omega_0 t)\cos(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der trigonometrischer Umformungen hat man

$$\begin{aligned} C_1'(t) &= -\frac{a}{2\omega_0}(\sin((\omega_0+\omega)t) + \sin((\omega_0-\omega)t)) \\ C_2'(t) &= \frac{a}{2\omega_0}(\cos((\omega_0+\omega)t) + \cos((\omega_0-\omega)t)) \end{aligned}$$

Um weiter zu intergrieren, muss man zwei verschiedene Fälle betrachten:

1. *Der Spezialfall* $\omega_0 = \omega$. In diesem Fall finden wir

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \int -\frac{a}{2\omega_0}\sin(2\omega_0 t)dt \\ &= -\frac{a}{2\omega_0}\frac{1}{2\omega_0}(-\cos(2\omega_0 t)) \\ &= \frac{a}{4\omega_0^2}\cos(2\omega_0 t) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} C_2(t) &= \int \frac{a}{2\omega_0}(\cos(2\omega_0 t) + 1) \\ &= \frac{a}{2\omega_0}(\frac{1}{2\omega_0}\sin(2\omega_0 t) + t) \\ &= \frac{a}{4\omega_0^2}\sin(2\omega_0 t) + \frac{a}{2\omega_0}t. \end{aligned}$$

Setzt man in die Gleichung (23), so hat man die spezielle Lösung:

$$\begin{aligned}
x_s(t) &= C_1(t)\cos(\omega_0 t) + C_2(t)\sin(\omega_0 t) \\
&= \frac{a}{4\omega_0^2}\cos(2\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) + (\frac{a}{4\omega_0^2}\sin(2\omega_0 t) + \frac{a}{2\omega_0}t)\sin(\omega_0 t) \\
&= \frac{a}{4\omega_0^2}\cos(\omega_0 t) + \frac{a}{2\omega_0}t\sin(\omega_0 t).
\end{aligned}$$

Addiert man diese zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, ergibt sich schließlich die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) + \frac{a}{2\omega_0}t\sin(\omega_0 t). \tag{34}$$

In diesem Fall, also $\omega = \omega_0$ (Erregerfrequenz = Eigenfrequenz), wird die Bewegung des ungedämpften und kosinuserregten harmonischen Oszillators gemäß die obige Gleichung gegeben. Hier ist das letze Glied dafür verantwortlich, daß die Ausschläge für $t \to \infty$ unbegrenzt größer werden – jedenfalls thoretisch. Praktisch wird stattdessen die Feder zu Bruch gehen. Das theoretisch ungehemmte Anwachsen der Ausschläge im Falle $\omega = \omega_0$ nennt man Resonanz, das Zerbrechen der Feder ist die "Resonanzkatastrophe".

Wirklichkeitshäher als der ungedämpfte harmonische Oszillator ist der schwach gedämpfte, den wir später noch genauer betrachten werden.

2. *Der Fall* $\omega_0 \neq \omega$.

Hier ergibt sich

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= \int -\frac{a}{2\omega_0}(\sin((\omega_0+\omega)t) + \sin((\omega_0-\omega)t))dt \\
&= -\frac{a}{2\omega_0}(-\frac{1}{\omega_0+\omega}\cos((\omega_0+\omega)t) + \frac{1}{\omega_0-\omega}\cos((\omega_0-\omega))) \\
&= \frac{a}{2\omega_0(\omega_0+\omega)}\cos((\omega_0+\omega)t) - \frac{a}{2\omega_0(\omega_0-\omega)}\cos((\omega_0-\omega)t)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
C_2(t) &= \int \frac{a}{2\omega_0}(\cos((\omega_0+\omega)t) + \cos((\omega_0-\omega)t)) \\
&= \frac{a}{2\omega_0}(\frac{1}{\omega_0+\omega}\sin((\omega_0+\omega)t) + \frac{1}{\omega_0-\omega}\cos((\omega_0-\omega)t)) \\
&= \frac{a}{2\omega_0(\omega_0+\omega)}\sin((\omega_0+\omega)t) + \frac{a}{2\omega_0(\omega_0-\omega)}\cos((\omega_0-\omega)t).
\end{aligned}$$

Als speziellee Lösung der inhomogenen Gleichung liefert dies

$$
\begin{aligned}
& x_s(t) \\
= \; & C_1(t)\cos(\omega_0 t) + C_2(t)\sin(\omega_0 t) \\
= \; & \frac{1}{2\omega_0}\left(\frac{a}{(\omega_0+\omega)}\cos((\omega_0+\omega)t) - \frac{a}{(\omega_0-\omega)}\cos((\omega_0-\omega)t)\right) \cdot \\
& \cos(\omega_0 t) \\
& + \frac{1}{2\omega_0}\left(\frac{a}{(\omega_0+\omega)}\sin((\omega_0+\omega)t) + \frac{a}{(\omega_0-\omega)}\cos((\omega_0-\omega)t)\right) \cdot \\
& \sin(\omega_0 t) \\
= \; & \frac{a}{2\omega_0(\omega_0+\omega)}\cos(\omega t) + \frac{a}{2\omega_0(\omega_0-\omega)}\cos(\omega t) \\
= \; & \frac{a}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t).
\end{aligned}
$$

Dementsprechend erhalten wir für die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung nun

$$
x(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) + \frac{a}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t). \tag{35}
$$

Wie man sich leicht überzeugt, hätte in diesem Fall der Ansatz $x = m\cos(\omega t)$ viel schneller zum Ziel geführt.

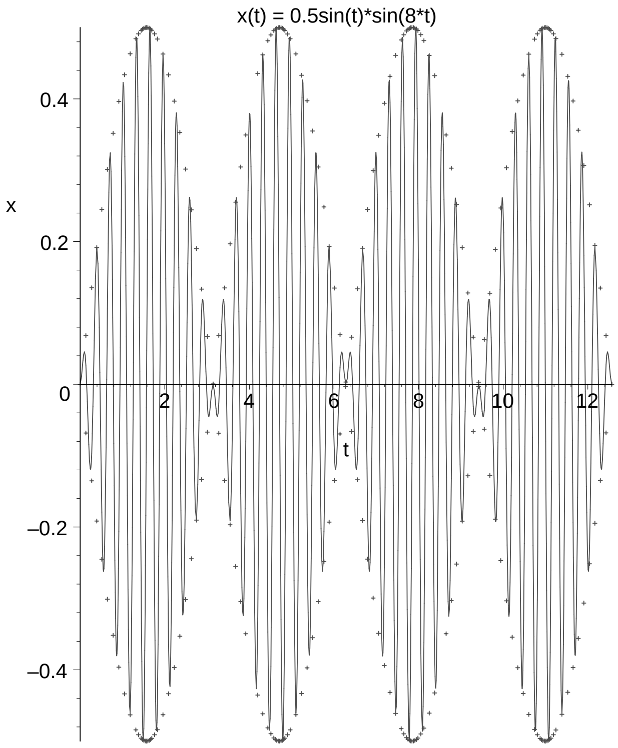
Ruht der Massenpunkt zur Zeit $t_0 = 0$ im Nullpunkt, ist also $x(0) = x'(0) = 0$, so kann man leicht nachrechnen, dass $C_1 = -\frac{a}{\omega_0^2-\omega^2}$ und $C_2 = 0$ gelten muss. Das zugehörige Bewegungsgesetz lautet dann

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{a}{\omega_0^2-\omega^2}(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)) \\
&= \frac{2a}{\omega_0^2-\omega^2}\sin(\frac{\omega_0-\omega}{2}t)\sin(\frac{\omega_0+\omega}{2}t).
\end{aligned}
$$

Der Massenpunkt vollführt also eine *Sinusschwigung mit der zeitlich veränderlichen- und zwar auch ihrerseits "sinusförmigen"*-Amplitude

$$
A(\omega, t) := \frac{2a}{\omega_0^2-\omega^2}\sin(\frac{\omega_0-\omega}{2}t) \tag{36}
$$

Die "*amplitudenmodulierten Schwingungen*" spielen in der Funktechnik eine bedeutende Rolle.



Gedämpfter harmonischer Oszillator ($\rho > 0$).

Jetzt haben wir es mit der "vollen" Differentialgleichung

$$x'' + 2\rho x' + \omega_0^2 x = a\cos(\omega t) \qquad (a, \omega > 0) \tag{37}$$

zu tun. Die algemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist bekannt:

$$x_h(t) = e^{-\rho t}(C_1\cos(\omega_1 t) + C_2\sin(\omega_1 t)) \text{ mit } \omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung lässt sich am bequemsten finden, indem man zunächst die korrespondierende komplexe Differentialgleichung

$$z'' + 2\rho z' + \omega_0^2 z = ae^{i\omega t}$$

durch einen Ansatz der Form $z(t) := Ae^{i\omega t}$ löst. Setzt man ein,

$$-\omega^2 Ae^{i\omega t} + 2\rho i\omega Ae^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} = ae^{i\omega t},$$

so folgt $A = \frac{a}{\omega_0^2=\omega^2+2\rho\omega i}$, also

$$\begin{aligned} z_p(t) &= \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\rho\omega i}e^{i\omega t} \\ &= a\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\rho\omega i}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2\omega^2}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)), \end{aligned}$$

Man sieht nun leicht ein, dass $x_p(t) = \text{Re}\ z_p(t)$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung darstellt. Offenbar ist

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{(\omega_0^2-\omega^2)a}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\rho^2\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{2\rho\omega a}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\rho^2\omega^2}\sin(\omega t) \\ &= \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\rho^2\omega^2}}(\sin(\phi)\cos(\omega t)+\cos(\phi)\sin(\omega t)) \\ &= \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\rho^2\omega^2}}\sin(\omega t+\phi), \end{aligned}$$

wobei nach Wahl von ϕ gelte

$$\sin(\phi) = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\rho^2\omega^2}}, \quad \cos(\phi) = \frac{2\rho\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\rho^2\omega^2}}.$$

Für das Bewegungsgesetz des kosinuserregten und gedämpften harmonischen Oszillators können wir somit festhalten:

$$x(t) = e^{-\rho t}(C_1\cos(\omega_1 t)+C_2\sin(\omega_1 t)) + \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\rho^2\omega^2}}\sin(\omega t+\phi).$$

Da hier der erste Summand für große t ("nach einem *Einschwingvorgang*") vernachlässigbar klein ist, wird die Bewegung im Wesentliche durch die partikuläre Lösung beschrieben: *Der harmonische Oszillator vollführt also schließlich eine reine Sinusschwingung mit Erregerfrequenz* ω und mit einer von ihr abhängigen, in markantem Unterschied zum ungedämpften Fall aber zeitlich konstanten Amplitude

$$A(\omega) := \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\rho^2\omega^2}}. \tag{38}$$

Diese nach einiger Zeit sich einstellende Sinusschwingung nennt man den *eingeschwungenen oder stationären Zustand* des Oszillators.
Ganz entsprechend – man braucht statt des Realteils von $z_0(t)$ nur den Imaginärteil zu nehmen – erhält man das Bewegungsgesetz des *sinuserregten* und *gedämpften* harmonischen Oszillators, also die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x'' + 2\rho x' + \omega_0^2 x = a\sin(\omega t), \tag{39}$$

die gegeben ist durch

$$x(t) = e^{-\rho t}(C_1\cos(\omega_1 t + C_1\sin(\omega_1 t)) + \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\rho^2\omega^2}}\sin(\omega t+\psi).$$

Wieder hat man als stationären Zustand eine reine Sinusschwingung mit der Erregerfrequenz ω und der Amplitude (38).

4.7 Resonanz

Jetzt befassen wir uns mit dem Resonanzphänomen beim schwach gedämpften harmonische Oszillator. Alles hierzu Nötige liegt schon bereit. Wir nehmen uns wieder eine Kosinuserregung vor, also die Differentialgleichung

$$x'' + 2\rho x' + \omega_0^2 x = a\cos(\omega t) \quad (a,\omega > 0 \quad \text{und} \quad 0 < \rho < \omega_0). \tag{40}$$

Nach einem Einschwingvorgang stellt sich die stationäre Sinusschwingung mit der Amplitude (38) ein. Um die Abhängigkeit der letzteren von ω genauer zu untersuchen, sehen wir uns zuerst den Radikanden $f(\omega) := (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2\omega^2$ an. Für dessen Ableitung erhalten wir

$$f'(\omega) = 4\omega(2\rho^2 - \omega_0^2 + \omega^2).$$

Ist $2\rho^2 - \omega_0^2 \geq 0$, d.h. $\rho \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, so sieht man sofort, daß $f'(\omega) > 0$, d.h. für $\omega \to \infty$ divergiert $f(\omega)$ streng wachsend gegen ∞, und daher wird $A(\omega)$ streng fallend $\to 0$ streben für $\omega \to \infty$. Ist jedoch $\rho < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, so fällt die Funktion $f(\omega)$ zunächst streng bis zur Stelle

$$\omega_R := \sqrt{\omega_0^2 - 2\rho^2}. \tag{41}$$

Erst dann beginnt sie streng und unbeschränkt zu wachsen. Folglich wächst die Amplitude $A(\omega)$ streng auf $(0, \omega_R]$, erreicht ihren Maximalwert

$$A_{max} = \frac{a}{2\rho\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}} \tag{42}$$

an der Stelle $\omega = \omega_R$ und strebt dann für $\omega \to \infty$ streng fallend gegen 0. Alles in allem stellt sich für den schwach gedämpften und kosinuserregten Oszillator das Resonanzphänomen also so dar: *Im Falle $\rho < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ – und nur in ihm – nimmt die Amplitude der erzwungenen Schwingung stark, aber nicht unbeschränkt zu, wenn die Erregerfrequenz ω in die Nähe der Eigenfrequenz ω_0 kommt*; ω_R wird *Resonanzfrequenz* genannt. Wegen der Dämpfung ist diese etwas kleiner als die Eigenfrequenz.

Bei schwacher Dämpfung, das haben wir gesehen, strebt die Amplitude $A(\omega) \to 0$ für $\omega \to \infty$ eine Erregung mit sehr hoher Frequenz bleibt praktisch folgenlos, der Oszillator spricht nicht mehr auf sie an. Das ist der Grund,weshalb das Ohr keine hochfrequenten Töne aufnimmt.

In der Resonanztheorie ist es vorteilhaft, sich mittles der *Eigenzeit*

$$\tau := \omega_0 t$$

weitgehend von der Eigenfrequenz ω_0 des individuellen Schwingers zu befreien. Damit ist folgendes gemeint. Setzt man

$$x(t) = x(\frac{\tau}{\omega_0}) =: y(\tau), \qquad \frac{\rho}{\omega_0} =: D, \qquad \frac{\omega}{\omega_0} =: \eta,$$

so folgt daraus

$$x'(t) = y'(\tau)\omega_0, x''(t) = y''(\tau)\omega_0^2$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad y''\omega_0^2 + 2\rho\omega_0 y' + \omega_0^2 y = a\cos(\omega\frac{\tau}{\omega_0}) \\
&\Rightarrow \quad y'' + \frac{2\rho}{\omega_0}y' + y = \frac{a}{\omega_0^2}\cos(\frac{\omega}{\omega_0}\tau) \\
&\Rightarrow \quad y'' + 2Dy' + y = \frac{a}{\omega_0^2}\cos(\eta t)
\end{aligned}$$

und für diesen "transformierten Oszillator" stellt sich nach (38) des eingeschwungenen Zustandes in der Form

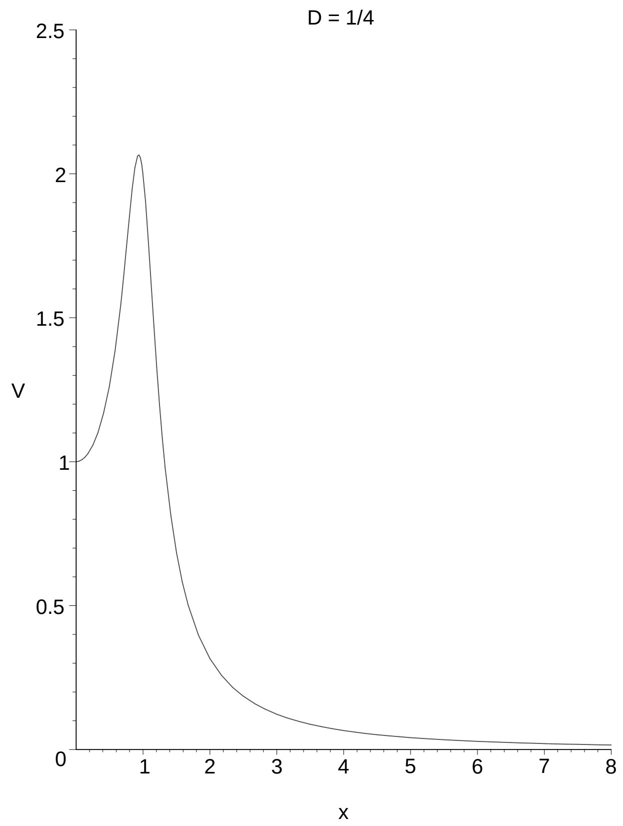
$$\frac{a}{\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}}$$

dar. Daher wird die Amplitude des eingeschwungenen Zustandes unseres ursprünglichen (untransformierten) Oszillators gegeben durch

$$V(\eta)\frac{a}{\omega_0^2} \quad \text{mit} \quad V(\eta) := \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}}. \tag{43}$$

Der *Vergrößerungsfaktor* $V(\eta)$ mit dem *Dämpfungsmaß* $D < 1$ lässt sich – und das eben ist der Vorteil der Transformation auf die Eigenzeit- *unabhängig von dem individuellen Schwinger studieren.* Trägt man $V(\eta)$ über einer $\eta-$Achse auf, so erhält man die sogeannte *Resonanzkurve* mit dem

$$\text{Maximum } \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} \text{ an der Stelle } \sqrt{1-2D^2}.$$



Das Maximum ist um so schärfer ausgeprägt, je kleiner das Dämpfungsmaß D ist.

Noch ein Beispiel für *Resonanzkatastrophen*: Brücken können zusammenstürzen, wenn Truppen sie im Gleichschritt überqueren. Im Jahre 1850 brachte ein französisches Infanteriebataillon auf diese Weise die Hängebrücke von Angers zum Einsturz. 226 Soldaten gingen dabei zugrunde. Das millitärische Regelment schreib deshalb für den Marsch über Brücken das unmilitärische Trotten vor.

5 Störungsrechnung
(Susanne Koltes)

Betrachtet man die Bewegung der Erde um die Sonne, so sind die dominierenden einwirkenden Gravitationskräfte die von Erde und Sonne. Durch die Anwesenheit der anderen Planeten, des Mondes, einer dünnen Atmosphäre etc. häufen sich sehr kleine Effekte zusammen und bilden eine Störung, die bei der mathematischen Modellierung des Systems Sonne–Erde berücksichtigt werden muss.

Im Folgenden soll an einem einfacheren physikalischen System, nämlich einem harmonischen Oszillator, aufgezeigt werden, wie sich solche kleinen Störungen mathematisch behandeln lassen. Ein harmonischer Oszillator wird bekanntlich durch die Differentialgleichung

$$u'' + u = 0$$

beschrieben (passend gewählte Einheiten vorausgesetzt). Hiervon ausgehend wollen wir als zugehörige gestörte Gleichungen der Form

$$u'' + u + \varepsilon f(u, u') = 0$$

mit kleinem reellen Parameter ε und einem reellen Polynom f in zwei Variablen betrachten. Hierbei sollen konkret die beiden Beispiele

$$u'' + u + \varepsilon u^3 = 0 \qquad \text{und} \qquad u'' + u + \varepsilon(u^2 - 1)u' = 0$$

behandelt werden, wobei wir an periodischen Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dieser Gleichungen interessiert sind.

5.1 Die nichtlineare Feder $u'' + u + \varepsilon u^3 = 0$

Eine Lösung der ungestörten Schwingungsgleichung

$$u'' + u = 0$$

mit der Anfangsbedingung $u'(0) = 0$ ist $u_0(t) = a\cos(t)$.

Man sucht eine Lösung von $u'' + u + \varepsilon u^3 = 0$ in unmittelbarer Nähe von $a\cos(t)$ mit dem Ansatz

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \ldots,$$

wobei $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ zunächst noch unbestimmte Funktionen sind. Durch Einsetzen in $u'' + u + \varepsilon u^3 = 0$ und Sortieren nach Potenzen von ϵ erhält man die Identität

$$\begin{aligned}
0 &= u'' + u + \varepsilon u^3 = 0 \\
&= (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots)'' + (u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots) + \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots)^3 \\
&= u_0'' + \varepsilon u_1'' + \varepsilon^2 u_2'' + \cdots + (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 + \ldots) + \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots)^3 \\
&= u_0'' + u_0 + \varepsilon(u_1'' + u_1 + u_0^3) + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich in ε leitet man für u_1 die Bedingung

$$u_1'' + u_1 + u_0^3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u_1'' + u_1 = -(a\cos t)^3$$

ab. Der Ausdruck $\cos^3(t)$ lässt sich wie folgt umformen:

$$\cos^3(t) = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t),$$

denn mit den Additionstheoremen gilt

$$\begin{aligned}
\cos(3t) &= \cos(2t+t) \\
&= \cos(2t)\cos(t) - \sin(2t)\sin(t) \\
&= \cos(t+t)\cos(t) - \sin(t+t)\sin(t) \\
&= (\cos^2(t) - \sin^2(t))\cos(t) - (2\sin(t)\cos(t))\sin(t) \\
&= \cos^3(t) - \sin^2(t)\cos(t) - 2\sin^2(t)\cos(t) \\
&= \cos^3(t) - (1-\cos^2(t))\cos(t) - 2(1-\cos^2(t))\cos(t) \\
&= \cos^3(t) - \cos(t) + \cos^3(t) - 2\cos(t) + 2\cos^3(t) \\
&= 4\cos^3(t) - 3\cos(t).
\end{aligned}$$

Die daraus resultierende Differentialgleichung

$$u_1'' + u_1 = -\frac{1}{4}a^3\cos(3t) + \frac{3}{4}a^3\cos(t)$$

lässt sich in zwei Schritten lösen.

(i) Betrachte

$$u_1'' + u_1 = -\frac{1}{4}a^3\cos(3t).$$

Man wählt den Ansatz

$$u_1 = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t).$$

Da $\cos'' = -\cos, \sin'' = -\sin$ und die rechte Seite der Differentialgleichung nur cos beinhaltet, kann man auch folgenden Ansatz wählen:

$$u_1 = c_1\cos(3t).$$

Dann gilt für die erste und zweite Ableitung

$$u_1' = -3c_1\sin(3t) \qquad \text{sowie} \qquad u_1'' = -9c_1\cos(3t).$$

Aus der Forderung

$$u_1'' + u_1 = -8c_1\cos(3t) \stackrel{!}{=} -\frac{1}{4}a^3\cos(3t)$$

ergibt sich dann $c_1 = -\frac{1}{32}a^3$. Partikularlösung zur Inhomogenität $-\frac{1}{4}a^3\cos(3t)$ ist also $-\frac{1}{32}a^3\cos(3t)$.

(ii) Betrachte

$$u_1'' + u_1 = -\frac{3}{4} a^3 \cos(t).$$

Da es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten handelt und ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung bekannt ist, machen wir gemäß der Methode der Variation der Konstanten den Ansatz

$$u_1(t) = c_1(t)\cos(t) + c_2(t)\sin(t).$$

Setzt man die Ableitungen

$$\begin{aligned}
u_1'(t) &= c_1'(t)\cos(t) - c_1(t)\sin(t) + c_2'(t)\sin(t) + c_2(t)\cos(t)\\
&= (c_1'(t) + c_2(t))\cos(t) + (c_2(t) - c_1(t))\sin(t)\\
u_1''(t) &= (c_1'' + c_2)\cos(t) - (c_1' + c_2)\sin(t) + (c_2'' - c_1')\sin(t) + (c_2' - c_1)\cos(t)\\
&= (c_1'' + 2c_2' - c_1)\cos(t) + (c_2 - 2c_1' - c_2)\sin(t)
\end{aligned}$$

in die betrachtete Differentialgleichung ein, so erhält man die Bedingung

$$\begin{aligned}
u_1'' + u_1 &= (c_1'' + 2c_2')\cos(t) + (c_2'' - 2c_1')\sin(t)\\
&\overset{!}{=} -\frac{3}{4} a^3 \cos(t).
\end{aligned}$$

Also muss gelten

$$c_1''(t) + 2c_2'(t) = -\frac{3}{4} a^3 \qquad \text{und} \qquad c_2''(t) - 2c_1'(t) = 0.$$

Wie man leicht sieht, können diese Gleichungen dadurch erfüllt werden, dass man

$$c_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad c_2(t) = -\frac{3}{8} a^3 t$$

setzt. Damit erhält man als Partikularlösung von $-\frac{3}{4}\cos(t)$ die Funktion

$$u_1(t) = -\frac{3}{8} a^3 t \sin(t).$$

Insgesamt ist also

$$u_1(t) = -\frac{1}{32} a^3 \cos(3t) - \frac{3}{8} t \sin(t)$$

die Lösung des Ausgangsproblems. Diese Funktion u_1 sollte eigentlich nur eine kleine Korrektur von u_0 sein, ist aber mit wachsendem t unbeschränkt. Der dafür verantwortliche Term

$$-\frac{3}{8} t \sin(t) \text{ heisst } \textbf{säkulares Glied}.$$

Um das Auftreten solcher säkulären Glieder zu verhindern, wenden wir das **Renormierungungsverfahren von Lindstedt** an. Hierzu betrachten wir die unabhängige Variable t als Funktion von s:

$$t = s \cdot (1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3 + \dots)$$

und definieren

$$\tilde{u}(s) := u(t(s)).$$

Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{u}'(s) &= u'(t(s)) \cdot t'(s) = u'(t(s)) \cdot (1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots) \\
\tilde{u}''(s) &= u''(t(s)) \cdot t'(s) \cdot (1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots) \\
&= u''(t(s)) \cdot (1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots)^2.
\end{aligned}$$

Die Gültigkeit von $u'' + u + \varepsilon u^3 = 0$ für alle $t = t(s)$ impliziert

$$\begin{aligned}
& u''(t(s)) + u(t(s)) + \varepsilon u^3(t(s)) = 0 \quad | \quad \cdot(1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \tilde{u}''(s) + (\tilde{u}(s) + \varepsilon\tilde{u}^3(s)) \underbrace{(1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots)^2}_{1+2c_1\varepsilon+\varepsilon^2(\dots)} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \tilde{u}''(s) + \tilde{u}(s) + \varepsilon(2c_1\tilde{u}(s) + \tilde{u}^3(s)) + \varepsilon^2(\dots) + \dots = 0.
\end{aligned}$$

Schaltet man jetzt die Störungsrechnung ein

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \varepsilon\tilde{u}_1 + \varepsilon^2\tilde{u}_2 + \dots \qquad \text{mit} \qquad \tilde{u}_0 = a\cos(s),$$

so ergibt sich durch Einsetzen

$$\begin{aligned}
& \tilde{u}_0'' + \varepsilon\tilde{u}_1'' + \varepsilon^2\tilde{u}_2'' + \dots \\
& \quad + \tilde{u}_0 + \varepsilon\tilde{u}_1 + \varepsilon^2\tilde{u}_2 + \dots \\
& \quad + \varepsilon(2c_1(\tilde{u}_0 + \varepsilon\tilde{u}_1 + \varepsilon^2\tilde{u}_2) + (\tilde{u}_0 + \varepsilon\tilde{u}_1 + \varepsilon^2\tilde{u}_2 + \dots)^3) \\
& \quad + \varepsilon^2(\dots) + \dots = 0
\end{aligned}$$

und als formale Potenzreihe in ε

$$(\tilde{u}_0'' + \tilde{u}_0) + \varepsilon(\tilde{u}_1'' + \tilde{u}_1 + 2c_1\tilde{u}_0 + (a\cos(s))^3) + \varepsilon^2(\dots) + \dots = 0.$$

Die erste Klammer ist Null nach Wahl von $\tilde{u}_0$. Weiter folgt durch Koeffizientenvergleich in ε für $\tilde{u}_1$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1'' + \tilde{u}_1 &= -2c_1\tilde{u}_0 + (a\cos(s))^3 \\
&= -2c_1 a\cos(s) - \frac{1}{4}a^3\cos(3s) - \frac{3}{4}a^3\cos(s) \\
&= (-2c_1 a - \frac{3}{4}a^3)\cos(s) - \frac{1}{4}a^3\cos(3s).
\end{aligned}$$

Um das Auftreten von Säkulargliedern zu verhindern, wählen wir c_1 so, dass

$$2ac_1 + \frac{3a^3}{4} = 0 \Longleftrightarrow c_1 = -\frac{3}{8}a^2.$$

Zu lösen bleibt noch

$$\tilde{u}_1'' + \tilde{u}_1 = -\frac{1}{4}a^3\cos(3s).$$

Der Ansatz

$$\tilde{u}_1 = c\cos(3s), \qquad \tilde{u}_1'' = -9c\cos(3s)$$

führt auf

$$\tilde{u}_1'' + \tilde{u}_1 = -8c\cos(3s) \stackrel{!}{=} -\frac{1}{4}a^3\cos(3s).$$

Dann ist $c = \frac{1}{32}a^3$ und für $\tilde{u}_1$ gilt

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{32}a^3\cos(3s)$$

wobei $\tilde{u}_1(0) = \tilde{u}_1'(0) = 0$ genommen wird, so dass $\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \varepsilon\tilde{u}_1 + \varepsilon^2\tilde{u}_2 + \dots$ die gleichen Anfangsbedingungen hat wie $\tilde{u}_0(s) = \cos(s)$. Damit ergibt sich also für die Differentialgleichung $u'' + u + \varepsilon u^3 = 0$ eine periodische Näherungslösung in der Form

$$u(t(s)) = \tilde{u}(s) = a\cos(s) + \varepsilon\frac{1}{32}a^3\cos(3s) + \varepsilon^2 u_2 + \dots$$

mit

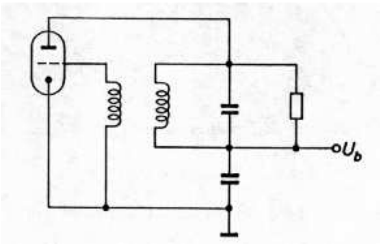
$$s = \frac{t}{1 - \frac{3a^3\varepsilon}{8}} + (O(\varepsilon^2)).$$

5.2 Die Van-der-Polsche Gleichung $u'' + u + \varepsilon(u^2 - 1)u' = 0$

Die nach dem deutschen Physiker B. van der Pol (1889–1959) benannte Van-der-Polsche Differentialgleichung

$$u'' + \varepsilon(u^2 - 1)u' + u = 0$$

ist ein mathematisches Modell der unten dargestellten Triodenschaltung, bei der die Wiederstandsbeiwerte von der Stromstärke abhängen.



Wir wenden das gleiche Verfahren wie oben an und betrachten die unabhängige Variable t als Funktion von s:

$$t = s \cdot (1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots).$$

Wir definieren erneut

$$\tilde{u}(s) := u(t(s))$$

Mit der Kettenregel folgt wie oben

$$\begin{aligned}
\tilde{u}'(s) &= u'(t(s)) \cdot t'(s) = u'(t(s)) \cdot (1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots) \\
\tilde{u}''(s) &= u''(t(s)) \cdot t'(s) \cdot (1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots) \\
&= u''(t(s)) \cdot (1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots)^2.
\end{aligned}$$

Die Gleichung $u'' + u + \varepsilon(u^2 - 1)u' = 0$ gilt für alle $t = t(s)$, d. h.

$$\begin{aligned} & u''(t(s)) + u(t(s)) + \varepsilon(u^2(t(s)) - 1)u'(t(s)) = 0 \quad | \quad \cdot(1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots) \\ \iff \; & \tilde{u}''(s) + \tilde{u}(s)(1 + c_1\varepsilon + \dots)^2 + \varepsilon(\tilde{u}^2(s) - 1)\tilde{u}'(s)(1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Schaltet man jetzt die Störungsrechnung ein,

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \varepsilon\tilde{u}_1 + \varepsilon^2\tilde{u}_2 + \dots,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0'' \; + \; & \varepsilon\tilde{u}_1'' + \dots \\ & + (\tilde{u}_0 + \varepsilon\tilde{u}_1 + \dots)(1 + c_1\varepsilon + \dots)^2 \\ & + \varepsilon((\tilde{u}_0 + \varepsilon\tilde{u}_1 + \dots)^2 - 1)(\tilde{u}_0' + \varepsilon\tilde{u}_1' + \dots)(1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots) \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man für $\tilde{u}_1$

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_1''(s) + (\tilde{u}_0^2(s) - 1)\tilde{u}_0') + 2c_1\tilde{u}_0(s) + \tilde{u}_1 = 0 \\ \iff \; & \tilde{u}_1''(s) + \tilde{u}_1 + (2c_1\cos(s) - a\sin(s)(a^2\cos^2(s) - 1)) = 0. \end{aligned}$$

Damit kein Säkularglied auftritt bzw. wir eine Resonanzkatastrophe ausschließen können, fordern wir, dass die Störfunktion keine Ausdrücke in $\sin(s)$ oder $\cos(s)$ enthalten soll. Dazu wählen wir $c_1 = 0$. Ferner benutzen wir, dass für jede auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, reellwertige, 2π-periodische C^∞-Funktion die Reihendarstellung

$$f(s) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(ns) + b_n\sin(ns))$$

gilt, wobei die Koeffizienten gegeben sind durch

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\cos(ns)ds \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\sin(ns)ds.$$

Dass die Funktion $f(s) = a\sin(s)(a^2\cos^2(s) - 1)$ keine Ausdrücke in $\sin(s)$ und $\cos(s)$ enthält, ist gleichbedeutend damit, dass $a_1 = b_1 = 0$ gelten muss. Wir betrachten zunächst a_1.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(s)(a^2\cos^2(s) - 1)\cos(s)ds \\
&\quad = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(s)(a^2(1-\sin^2(s)) - 1)\cos(s)ds \\
&\quad = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (a^2\sin(s) - a^2\sin^3(s) - \sin(s))\cos(s)ds \\
&\quad = a^2\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(s)\cos(s)ds - a^2\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3(s)\cos(s)ds \\
&\qquad\quad -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(s)\cos(s)ds \\
&\quad = \frac{a^2}{\pi}[\sin^2(s)]_0^{2\pi} - \frac{a^2}{\pi}\frac{1}{4}[\sin^4(s)]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}[\sin^2(s)]_0^{2\pi} \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Die Bedingung $a_1 = 0$ ist somit automatisch erfüllt. Wir betrachten also b_1 und fordern, dass $b_1 = 0$ ist.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(s)(a^2\cos^2(s) - 1)\sin(s)ds \overset{!}{=} 0.$$

Das ist äquivalent zu

$$a^2\int_0^{2\pi}\sin^2(s)\cos^2(s)ds = \int_0^{2\pi}\sin^2(s)ds.$$

Zur Auswertung des letzten Integrals führen wir die Substitution $s = 2t$, $ds = 2dt$ durch und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\sin^2(s)ds &= \int_0^{\pi}\sin^2(2t)2dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)2dt \\
&= \int_0^{2\pi}\sin^2(2t)dt \\
&= 4\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\cos^2(t)dt.
\end{aligned}$$

Die Bedingung $b_1 = 0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $a^2 = 4$ ist. Damit haben wir das überraschende Ergebnis erhalten, dass sich lediglich die beiden Grundlösungen $u_0 = \pm 2\cos(s)$ so stören lassen, dass keine säkularen Glieder auftreten.
Die konkrete Berechnung der Korrekturterme $\tilde{u}_1$ und u_2 soll mit Hilfe eines Maple-Programms erfolgen, das im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

5.3 Eine Implementierung des Lindstedt-Verfahrens in Maple

Die folgende Implementierung des Verfahrens von Lindstedt unter Maple 7 trägt der Tatsache Rechnung, dass bei der Berechnung der Korrekturterme u_1 und u_2 die Integrationskonstanten $x_1 = u_1(0)$, $y_1 = u_1'(0)$ sowie $x_2 = u_2(0)$, $y_2 = u_2'(0)$ als zusätzliche Parameter zur Verfügung stehen.

```
Methode von Lindstedt am Beispiel der
van der Polschen Differentialgleichung

> restart;
> n :=3;
> c||0 := 1;
> c := sum('c||j' * epsilon^j, j=0..n);
> u||0(s) := a*cos(s);
> u := sum('u||j'(s) * epsilon^j, j=0..n);
>
> DGL := diff(diff(u,s),s) + epsilon*(u^2 - 1)*diff(u,s)*c + c^2*u;
> T := taylor(DGL, epsilon, n+1);

Bestimmung von u1:

> taylor_koeff||1 := eval( coeff(T,epsilon,1) );
> taylor_koeff||1 := combine( taylor_koeff||1, trig );
> sin_koeff := coeff(taylor_koeff||1, sin(s));
> cos_koeff := coeff(taylor_koeff||1, cos(s));
> lsg_koeff := [solve({sin_koeff=0, cos_koeff=0},{a,c||1})];
> if lsg_koeff[1]={a=0, c||1=c||1} then
  lsg_koeff := lsg_koeff[2]; else lsg_koeff := lsg_koeff[1]; fi;
> DGL||1 := subs( lsg_koeff, taylor_koeff||1 );
> u := subs( lsg_koeff, u );
> c := subs( lsg_koeff, c);
> T := subs( lsg_koeff, T);
> lsg := dsolve( {DGL||1=0, u||1(0)=x||1, D(u||1)(0)=y||1}, u||1(s) );
> T := subs( lsg, T );
> u := subs( lsg, u );

Bestimmung von u2:

> taylor_koeff||2 := eval( coeff(T,epsilon,2) );
> taylor_koeff||2 := combine( taylor_koeff||2, trig );
> sin_koeff := coeff(taylor_koeff||2, sin(s));
> cos_koeff := coeff(taylor_koeff||2, cos(s));
> lsg_koeff := [solve({sin_koeff=0, cos_koeff=0},{a,c||2,x||1,y||1})];
> DGL||2 := subs( lsg_koeff, taylor_koeff||2 );
> u := subs( lsg_koeff, u );
> c := subs( lsg_koeff, c);
> T := subs( lsg_koeff, T);
> lsg := dsolve( {DGL||2=0, u||2(0) = x||2, D(u||2)(0) = y||2}, u||2(s) );
> T := subs( lsg, T );
> u := subs( lsg, u );
```

Die Originalausgabe von Maple lautet

```
                                                                          /
 u := 2 cos(s) + (sin(s) (3/4 + y1) - 1/4 sin(3 s)) epsilon + |
                                                                          \

                       /  13               \
    sin(s) y2 + cos(s) |- -- - 3/8 y1 + x2| - 5/96 cos(5 s)
                       \  96               /

                                         \        2                 3
     + 3/8 y1 cos(3 s) + 3/16 cos(3 s)| epsilon  + u3(s) epsilon
                                         /
```

bzw. in aufbereiteter Form

$$\begin{aligned} u(s) = &\quad 2\cos(s) \\ &+ \Big(\sin(s)(\frac{3}{4}+y_1) - \frac{1}{4}\sin(3s)\Big)\varepsilon \\ &+ \Big(\sin(s)y_2 + \cos(s)(-\frac{13}{96} - \frac{3}{8}y_1 + x_2) \\ &\quad -\frac{5}{96}\cos(5s) + \frac{3}{8}y_1\cos(3s) + \frac{3}{16}\cos(3s)\Big)\varepsilon^2 \\ &+ u_3(s)\varepsilon^3, \end{aligned}$$

wobei die Beziehung $s = t(1 + \frac{1}{16}\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3)$ besteht. Im Rahmen der Störungstheorie zweiter Ordnung sind dabei die reellen Konstanten $x_2 = u_2(0)$, $y_1 = u_1'(0)$ sowie $y_2 = u_2'(0)$ frei wählbar.

6 Planetenbewegung und n-Körper-Problem
(Andreas Weber, Sebastin Ziaja)

6.1 Geschichte

6.1.1 Definition. *Unter Dreikörperproblem versteht man das Problem der Bewegung dreier Himmelskörper unter dem Einfluß ihrer gegenseitigen Massenanziehung auf der Basis des Gravitationsgesetzes von Sir Isaac Newton (1642 - 1727), erstmals veröffentlicht im 1686 erschienenen Werk "Philosophisa Naturalis Principia Mathematica".*

Viele Mathematiker und Physiker haben sich seit Newton daran versucht, eine allgemeine Lösung des Dreikörperproblems zu finden, aber bis auf Spezialfälle war dies nicht möglich.

Wenn sich aber schon das Problem mit drei Körpern nicht geschlossen lösen läßt, so ist es völlig unmöglich, die Bahnen eines kompletten Planetensystems exakt auszurechnen. Will man also z.B. die Bewegungen der 9 Planeten, der $\approx$ 66 Monde und der Sonne unseres Planetensystems (bei Vernachlässigung der Kometen, ...) angeben, so ist dies nicht exakt zu lösen. Man kann mit Hilfe numerischer Integrationsmethoden nur näherungsweise Aussagen machen.

Neptun, den achten Planeten des Sonnensystems, entdeckten John Adams und Urbain Leverrier 1846 unabhängig voneinander beim Ausrechnen der Bahn des Uranus. Die errechnete Bahn des Uranus stimmte nicht mit der beobachteten Bewegung dieses Planeten überein und man konnte aus der Störung errechnen, dass es noch einen weiteren, bisher unbekannten, Planeten geben muß, der noch hinter Uranus liegt: den Neptun. Es gelang ihnen, die genaue Bahn des Neptuns auszurechnen. Die Rechnungen waren so genau, dass der Neptun dann auch tatsächlich an der vorhergesagten Stelle am Himmel gefunden werden konnte.

Tycho Brahe (1546 - 1601), dänischer Astronom, stellte aus der Beobachtung der Planetenbahnen 3 empirische Regeln auf, die Johannes Kepler (1571 - 1630), der von 1600 bis zu Brahes Tod 1601 dessen Gehilfe war, mit einer aufwendigen Berechnung schließlich beweisen konnte. Diese Regeln sind heute allgemein als Keplergesetze bekannt.

6.1.2 Gesetz. *Die drei Keplerschen Gesetze lauten:*

1. *Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse steht. (Abbildung 1)*

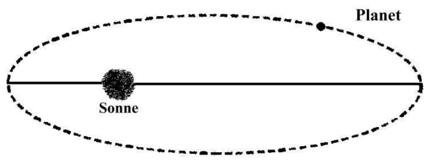


Abbildung 1:

2. *Die Verbindungslinie zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. (Flächensatz)*
   (mit anderen Worten: Je näher ein Planet der Sonne kommt, desto schneller bewegt er sich.)

3. *Das Quadrat der Umlaufdauer eines Planeten T ist proportional zur dritten Potenz seiner großen Halbachse a:*

$$\frac{T^2}{a^3} = const \qquad \text{für alle Planeten}$$

Keplers Thesen brachen mit dem Jahrhunderte alten Glauben, dass sich die Planeten auf kreisförmigen Umlaufbahnen bewegen. Isaac Newton leitete aus den Keplergesetzen das **Gravitationsgestz** her:

6.1.3 Gesetz. *Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz, dass Newton im Jahre 1686 veröffentlichte, übt jeder Körper eine anziehende Kraft auf jeden anderen Körper aus; diese Kraft ist proportional zu den Massen der beiden Körper und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes zwischen ihnen.*

Das Newtonsche Gravitationsgestz kann als einfache Vektorgleichung geschrieben werden. Seien m_1 und m_2 zwei Punktmassen, die durch den Abstand r_{12} voneinander getrennt sind. Dieser Abstand ist der Betrag des Vektors $\vec{r}_{12}$, der von der Masse m_1 zur Masse m_2 zeigt. (Abbildung 2).

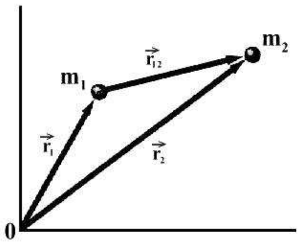


Abbildung 2: Ein Körper der Masse m_1 befindet sich am Ort $\vec{r}_1$, ein zweiter Körper der Masse m_2 am Ort $\vec{r}_2$. Der Vektor $\vec{r}_{12}$ zeigt von m_1 nach m_2.

Die Kraft $\vec{F}_{12}$, mit der die Masse m_1 auf die Masse m_2 wirkt, ist demnach

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}},$$

wobei $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ist und somit $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$.
Hier ist

$$\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

ein Einheitsvektor, der von m_1 nach m_2 zeigt, und G ist die (**universelle**) **Gravitationskonstante**, die den Wert

$$G = 6,667 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$$

hat. Die Kraft $\vec{F}_{21}$, die die Masse m_2 auf die Masse m_1 ausübt, ist nach Newtons dritten Gesetz, genau so groß wie F_{12}, zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung (siehe Abbildung 3). Der Betrag der Gravitationskraft, die zwischen einem Körper der Masse m_1 und einem zweiten Körper der Masse m_2 im Abstand r wirkt, ist gegeben durch

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}.$$

Wir werden den umgekehrten historischen Weg gehen und aus dem Gravitationsgesetz die Keplerregeln herleiten.

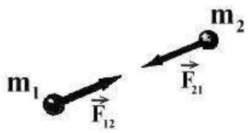


Abbildung 3: Die Kraft F_{12}, mit der m_1 auf m_2 wirkt, zeigt von m_2 nach m_1. Sie hängt umgekehrt quadratisch von der Distanz zwischen den beiden Körpern ab.

6.2 Welche Größen benötigt man, um die Bewegung eines Planeten beschreiben zu können?

Zuerst eine Vereinfachung: Da der Radius eines Planeten sehr viel kleiner ist als die Größenordnungen der Umlaufbahnen, betrachten wir die Planeten hier als Massepunkte.
Das 2. Newtonsche Axiom lautet:

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)$$

Somit braucht man folgende Größen zur Beschreibung der Bewegung:

$$\begin{array}{cl} \text{Masse} & m \quad \text{(zeitlich konstant)} \\ \text{Ort} & \vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto \vec{r}(t) \\ \text{Kraft} & \vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad \vec{r}(t) \to \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \end{array}$$

Wir betrachten zwei Körper:
Sonne S mit Masse M, Planet P mit Masse m; weiter gilt: $M \gg m$; desweiteren sei S der Koordinatenursprung des kartesischen Koordinatensystems mit den drei Achsen x, y, z. Aus dem 2. Newtonschen Axiom und unserer Annahme $M \gg m$, folgt, dass die Anziehungskraft, die von P auf S wirkt, so klein ist, dass sie praktisch vernachlässigbar ist. Betrachten wir also jetzt nur noch die Kraft, die von S auf P wirkt. Die Gesamtenergie, die P hat, besteht aus seiner kinetischen Energie E_{kin} und seiner potentiellen Energie E_{pot}. Für die Gesamtenergie E von P gilt:

$$E_{Ges} = E_{kin} + E_{pot}$$

E_{pot} ist gerade die Anziehungsenergie, die von S auf P wirkt:

$$E_{pot} = -\mu \frac{Mm}{r} \qquad \text{(aus Gravitationsgesetz)}$$

Dann gilt für die Gesamtenergie:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad E_{Ges} &= E_{kin} + E_{pot} \\ &= \frac{1}{2} m V^2 - \mu \frac{Mm}{r}, \end{aligned}$$

wobei V hier die Relativgeschwindigkeit des Planeten zur Sonne ist. Sei nun

$$E_{pot} = -\mu \frac{Mm}{r} := U(r) = U$$

Kann man U vereinfachen? Es gilt:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Aus dem Gravitationsgesetz und dem 2. Newtonschen Axiom folgt:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= -\mu \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ \Rightarrow \quad m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= -\mu \frac{Mm}{r^3} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \\ U &= -\mu \frac{Mm}{r} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\mu \frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= -\mu\ mM\ \partial x \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3} \\ &= \mu\ mM\ \frac{x}{r^3} \qquad \left(\text{analog } \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ &= -m\ddot{x} \\ \Rightarrow \quad &= \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) = -grad\ U \end{aligned} \tag{44}$$

Anhand von diesem Spezialfall versuchen wir nun, (44) mathematisch zu formulieren.

6.2.1 Satz. *Ein Kraftfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heißt* ***konservativ****, wenn eine Funktion*

$$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad mit\ \vec{F} = -grad\ V$$

existiert. V heißt dann potentielle Energie oder ***Potential****.*

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} grad\ U &= \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= -m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bei Bewegungen in einem solchen Feld ist die Energie

$$E(t) = \frac{1}{2}m \mid \underbrace{\dot{\vec{r}}(t)}_{\langle \dot{\vec{r}}(t), \dot{\vec{r}}(t) \rangle} \mid^2 + \underbrace{V(\vec{r}(t))}_{\langle grad\ V, \dot{r}(t) \rangle}$$

zeitlich konstant, da gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}\langle \dot{\vec{r}}(t), \dot{\vec{r}}(t) \rangle + \langle grad\ V, \dot{r}(t) \rangle \\ &= m\langle \ddot{\vec{r}}(t), \dot{\vec{r}}(t) \rangle - \langle \underbrace{\vec{F}(\vec{r}(t))}_{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}}, \dot{r}(t) \rangle \\ &= m\langle \ddot{\vec{r}}(t), \dot{\vec{r}}(t) \rangle - m\langle \ddot{\vec{r}}(t), \dot{\vec{r}}(t) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ hat eine weitere Eigenschaft: Ihr Betrag ist lediglich abhängig vom Abstand $|\vec{r}|$ des Planeten zur Sonne. Ihr Betrag ist also auf jedem Punkt einer Kugelschale mit Mittelpunkt S der gleiche:
So läßt sich $\vec{F}(\vec{r})$ schreiben als

$$\vec{F}(\vec{r}) = \varphi(r) \cdot \vec{r}; \qquad \varphi(r) = -\mu \frac{Mm}{r^3}$$

Dies führt zu der grundlegenden Definition des Zentralfeldes:

6.2.2 Definition. *Ein Kraftfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heißt **Zentralfeld**, falls eine Funktion $\Theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit*

$$\vec{F}(\vec{r}) = \Theta(|\vec{r}|) \cdot \vec{r}$$

existiert.

Unser Potential U erzeugt also gleichzeitig ein Zentralfeld und ein konservatives Feld. Solch ein Potential nennt man Zentralpotential:

6.2.3 Definition. *Wenn $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann heißt*

$$V : \mathbb{R}^3_* \to \mathbb{R}, \quad V(\vec{r}) = U(|\vec{r}|)$$

***Zentralpotential** und es gilt:*

$$\vec{F}(\vec{r}) = -grad\ V(\vec{r}) = U'(|\vec{r}|) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Bei Bewegungen in einem Zentralfeld ist der Drehimpuls

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times m\dot{\vec{r}}(t)$$

zeitlich konstant:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{L}(t) &= \dot{\vec{r}}(t) \times m\dot{\vec{r}}(t) + \underbrace{\vec{r}(t) \times m\ddot{\vec{r}}(t)}_{=0,\text{ da } \vec{F}(\vec{r})=m\ddot{\vec{r}}(t);\ \vec{F}(\vec{r})\|\vec{r}} \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dann gilt für die Bewegung von P entweder:

$\vec{r} \parallel \dot{\vec{r}}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \vec{L} = m\dot{\vec{r}}(t) \times r(t) = 0 \\
&\Rightarrow \quad P \text{ bewegt sich auf einer Geraden}
\end{aligned}$$

oder

$\vec{L} \perp \vec{r}(t)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \vec{L} = c, \qquad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\
&\Rightarrow \quad P \text{ bewegt sich in einer Ebene mit Normalvektor } \vec{L}
\end{aligned}$$

Wir gehen im folgenden von dem allgemeineren zweiten Fall aus (Bewegung in der Ebene), da sich P auf einer Ellipsenbahn bewegen soll. Mit einer geeigneten Koordinatentransformation gilt

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x\dot{y} - \dot{x}y \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad L &= m(x\dot{y} - \dot{x}y) = \text{const}
\end{aligned}$$

Die Erhaltungssätze erlauben nun, die Bahnkurve $\vec{r}(\varphi)$ aus der Lösung der Differentialgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}); \quad \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

zu bestimmen. Wir führen Polarkoordinaten ein.
Die **Polarkoordinaten** für $x(t)$ und $y(t)$ lauten

$$x(t) = r(t)\cos(\varphi); \qquad y(t) = r(t)\sin(\varphi)$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{r}(t)\cos(\varphi) - r(t)\sin\ \varphi(t)\dot{\varphi}(t)\\ \dot{y}(t) &= \dot{r}(t)\sin(\varphi) + r(t)\cos\ \varphi(t)\dot{\varphi}(t)\end{aligned}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} x\dot{y} - y\dot{x} &= r\cos\varphi(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)\ -\ r\sin\varphi(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)\\ &= r\cos\varphi\dot{r}\sin\varphi + r\cos^2\varphi r\dot{\varphi} - r\cos\varphi\dot{r}\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi\\ &= r^2\dot{\varphi}\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\\ &= r^2\dot{\varphi}\\ \Rightarrow \qquad L &= mr^2\dot{\varphi}\end{aligned}$$

Der Drehimpuls ist nach der obigen Betrachtung konstant. Also gilt:

$$L = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$$

Dann ist auch $\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \text{const}$, da m nicht von der Zeit abhängt.
Man betrachte die Flächengeschwindigkeit $\frac{dA}{dt}$ (von $\vec{r}$ überstrichene Fläche):

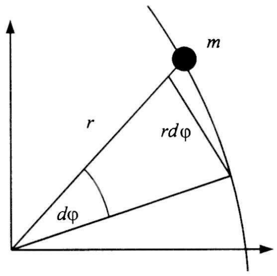


Abbildung 4: In kleinen Zeiten legt die Masse m etwa den Weg $rd\varphi$ zurück und der Fahrstrahl überstreicht ungefähr die Fläche $0,5r^2d\varphi$

Es gilt für kleine A:

$$A = \frac{1}{2}r \cdot r \cdot d\varphi = \frac{1}{2}r^2\ d\varphi$$

Daraus folgt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \text{const}$$

Somit ist die Drehimpulserhaltung äquivalent zu der Aussage des 2. Keplerschen Gesetzes.

Die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ setzt sich zusammen aus Radial- und Transversalkomponente von $\dot{\vec{r}}$. Die kinetische Energie sieht dann wie folgt aus:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

und damit die Gesamternergie

$$\begin{aligned} E_{Ges} &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + U(r) \end{aligned} \tag{45}$$

und es gilt:

$$L = mr^2\dot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{m^2r^4}$$

Setzt man dies in (45) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} E_{Ges} &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{L^2}{m^2r^4}\right) + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[\frac{1}{2}\,\frac{L^2}{mr^2} + U(r)\right] \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{1}{2}\,\frac{L^2}{mr^2}$$

heißt **effektives Potential**. Dann sieht

$$E_{Ges} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

aus wie die Gesamtenergie einer eindimensionalen translatorischen Bewegung mit potentieller Energie $U_{eff}(r)$.
Aus $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$ folgt:

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)$$

und daraus

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)} \tag{46}$$

Der Drehimpulssatz läßt sich auch anders schreiben:

$$\begin{aligned} L &= mr^2\dot{\varphi} \\ &= mr^2\frac{d\varphi}{dt} \\ &= mr^2\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dt} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{1}{mr^2}L\cdot\frac{1}{\frac{dr}{dt}} \\ &= \frac{L}{mr^2\dot{r}} \end{aligned}$$

und mit (46) folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dr} &= \frac{1}{mr^2}L\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U_{eff}(r)\right)}}\\ &= \frac{L}{r^2\sqrt{2m\left(E-U_{eff}(r)\right)}}\end{aligned}$$

und nach Integration folgt:

$$\varphi-\varphi_0=\int\limits_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)}\frac{L}{r^2\sqrt{2m\left(E-U_{eff}(r)\right)}}\,\mathrm{dr}$$

Setzt man nun das Kepler-Potential $U(r)=-\mu\frac{mM}{r}$ in dieses Integral ein, so gilt:

$$U_{eff}(r)=-\mu\frac{mM}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}$$

und es folgt:

$$\varphi-\varphi_0=\int\limits_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)}\frac{L}{r^2\sqrt{2m\left(E+\mu\frac{mM}{r}-\frac{L^2}{2mr^2}\right)}}\,\mathrm{dr} \qquad (47)$$

Wie kann man dieses Integral nun vereinfachen?
Man braucht folgende Idee: $(\arccos(x))'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Kann man (47) auf diese Form bringen?

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \varphi-\varphi_0 &= \int\limits_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)}(-1)\,\frac{\left(-\frac{1}{r^2}\right)}{\sqrt{2\frac{mE}{L^2}+2\frac{\mu m^2M}{L^2}\,\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}}}\,\mathrm{dr}\\ &= \int\limits_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)}(-1)\,\frac{\left(-\frac{1}{r^2}\right)}{\sqrt{2\frac{mE}{L^2}+\left(\frac{\mu^2m^4M^2}{L^4}\right)-\left(\frac{1}{r^2}-2\frac{\mu m^2M}{rL^2}+\frac{\mu^2m^4M^2}{L^4}\right)}}\,\mathrm{dr}\\ &= \int\limits_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)}(-1)\,\frac{\left(-\frac{1}{r^2}\right)}{\sqrt{2\frac{mE}{L^2}+\left(\frac{\mu m^2M}{L^2}\right)^2-\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu m^2M}{L^2}\right)^2}}\,\mathrm{dr}\end{aligned}$$

Nun setzt man zur Vereinfachung $p = \frac{L^2}{\mu m^2 M}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \varphi - \varphi_0 &= \int_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)} (-1) \frac{\left(-\frac{1}{r^2}\right)}{\sqrt{2\frac{mE}{L^2} + \left(\frac{1}{p^2}\right) - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2}} \, \mathrm{dr} \\
&= \int_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)} (-1) \underbrace{\frac{\left(-\frac{1}{r^2}\right)}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{1}{p^2}}}}_{\text{innnere Ableitung}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}{\sqrt{2\frac{mE}{L^2} + \frac{1}{p^2}}}\right)^2}} \, \mathrm{dr} \\
&= \left[\arccos \left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}{\sqrt{2\frac{mE}{L^2} + \frac{1}{p^2}}} \right) \right]_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)}
\end{aligned}
$$

Nun setzt man $\varphi_0 = 0$ und $r(\varphi_0) = \frac{1}{p}$. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \arccos \left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}{\sqrt{2\frac{mE}{L^2} + \frac{1}{p^2}}} \right) \\
\Leftrightarrow \quad \cos\varphi &= \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}{\sqrt{2\frac{mE}{L^2} + \frac{1}{p^2}}} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{p} &= \sqrt{2\frac{mE}{L^2} + \frac{1}{p^2}} \cdot \cos\varphi \\
&= \frac{1}{p} \cdot \sqrt{2\frac{mE}{L^2} p^2 + 1} \cdot \cos\varphi
\end{aligned}
$$

Setzt $\epsilon = \sqrt{2\frac{mE}{L^2}p^2 + 1}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r} - \frac{1}{p} &= \frac{1}{p}\epsilon\cos\varphi \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} &= \frac{1}{p}(1 + \epsilon\cos\varphi) \\
\Leftrightarrow \quad r(\varphi) &= \frac{p}{1 + \epsilon\cos\varphi}
\end{aligned}
$$

wobei:

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{L^2}{\mu m^2 M} \\
\epsilon &= \sqrt{2\frac{mEp^2}{L^2} + 1}
\end{aligned}
$$

Damit haben wir die Bahnkurve $r(\varphi)$ in Abhängigkeit vom Winkel φ.
Wie sieht diese Bahnkurve nun aber aus??
p ist nur ein verstärkender / verkleinender Faktor der Kurve, aber ϵ bestimmt im wesentlichen die Form der Kurve, wie man schnell mit Hilfe von Maple sieht:

- Für $\epsilon = 0$ erhält man die Kurven in Abbildung (5) und Abbildung (6).

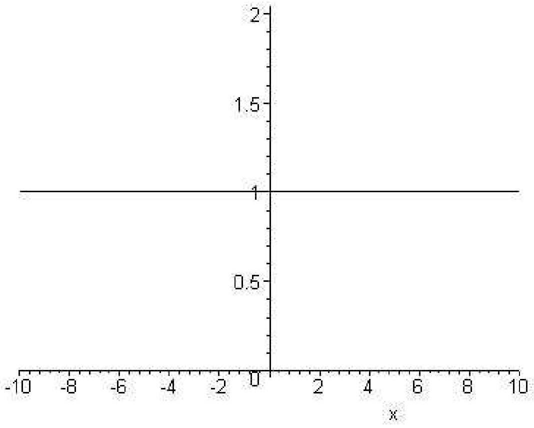


Abbildung 5: $y = \frac{1}{1+0cos(x)}$ in Normalform

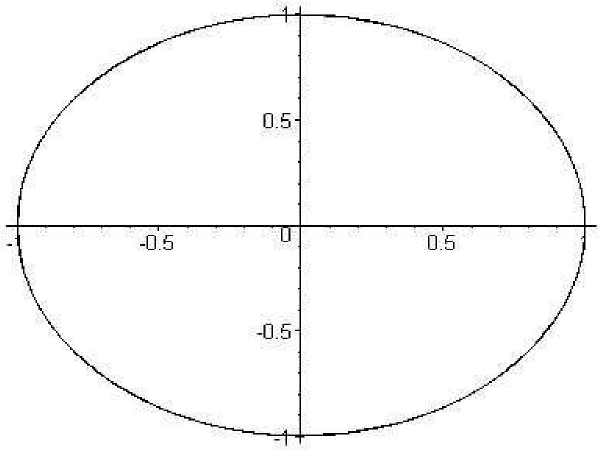


Abbildung 6: $y = \frac{1}{1+cos(x)}$ in Polarkoordinaten

Wie man leicht sieht, bekommen wir eine **Kreisbahn** heraus ($\epsilon = 0$).

- Für $\epsilon = 1$ erhält man die Kurven in Abbildung (7) und Abbildung (8). Wie man leicht erkennen kann, liefert uns $r(\varphi)$ eine **Parabelbahn** ($\epsilon = 1$).
- Für $\epsilon = 2$ erhält man die Kurven in Abbildung (9) und Abbildung (10). Der Planet beschreibt also eine **Hyperbelbahn** ($\epsilon = 2$).
- Für $\epsilon = \frac{4}{5}$ erhält man die Kurven in Abbildung (11) und Abbildung (12).

  Der Planet beschreibt also eine **Ellipsenbahn** ($\epsilon = \frac{4}{5}$).

Für vier verschiedene ϵ bekommen wir also vier verschiedene Bahnkurven aus $r(\varphi)$. Liefert uns $r(\varphi)$ noch weitere Bahntypen?

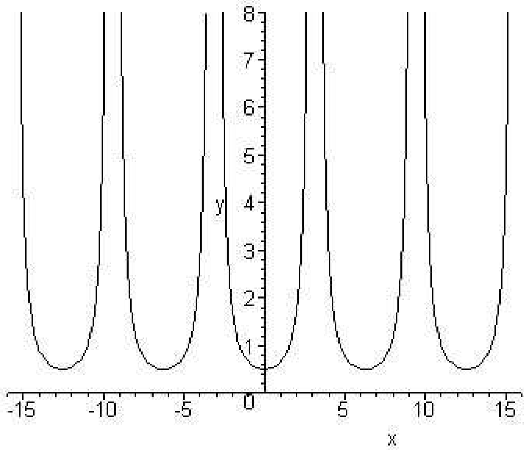


Abbildung 7: $y = \frac{1}{1+cos(x)}$ in Normalform

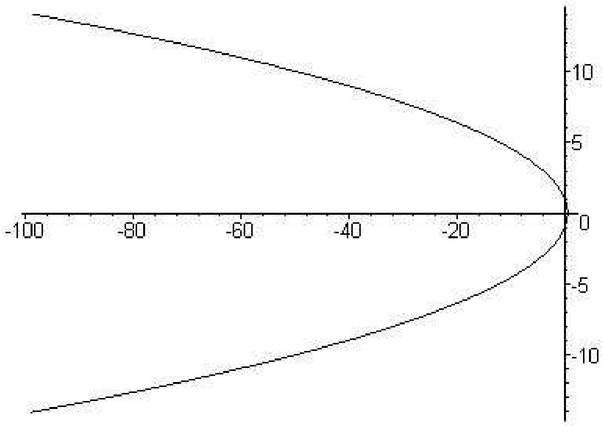


Abbildung 8: $y = \frac{1}{1+cos(x)}$ in Polarkoordinaten

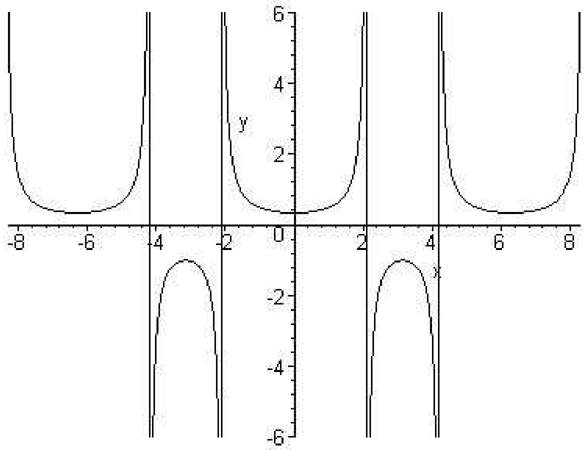


Abbildung 9: $y = \frac{1}{1+2cos(x)}$ in Normalform

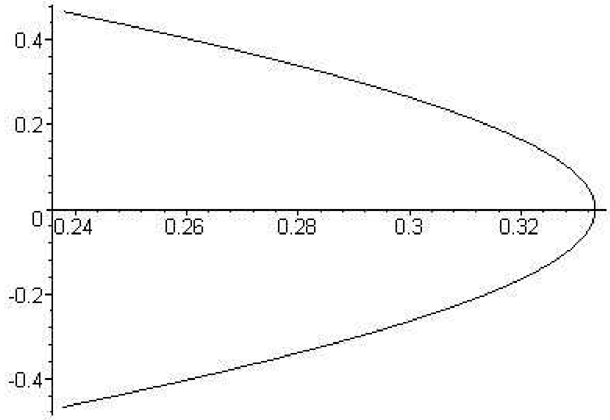


Abbildung 10: $y = \frac{1}{1+2cos(x)}$ in Polarkoordinaten

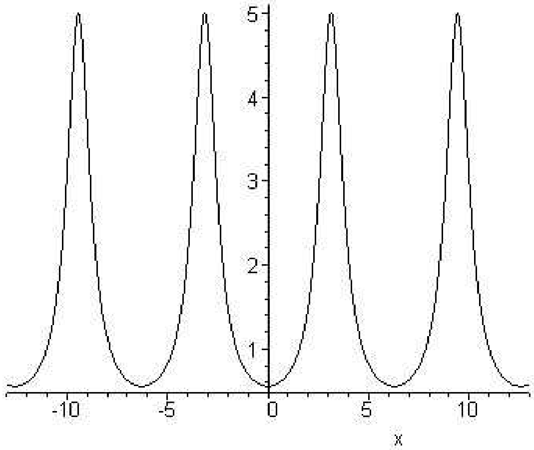


Abbildung 11: $y = \frac{1}{1+\frac{4}{5}cos(x)}$ in Normalform

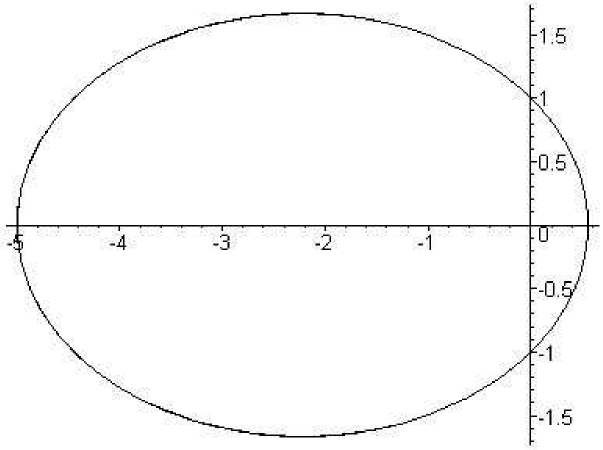


Abbildung 12: $y = \frac{1}{1+\frac{4}{5}cos(x)}$ in Polarkoordinaten

Wir transformieren zurück in kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ x^2 &= r^2\cos^2\varphi \\ y^2 &= r^2\sin^2\varphi \\ \Leftrightarrow \quad r^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1+\epsilon\cos\varphi} \\ \Leftrightarrow \quad p &= r + \epsilon r\cos\varphi \\ &= r + \epsilon x \\ \Leftrightarrow \quad r &= p - \epsilon x \\ \Leftrightarrow \quad (p-\epsilon x)^2 &= r^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ \leftrightarrow \quad p^2 - 2\epsilon p x + \epsilon^2 x^2 &= x^2 + y^2 \\ \leftrightarrow \quad p^2 &= x^2 + y^2 + 2\epsilon p x - \epsilon^2 x^2 \\ &= x^2\left(1-\epsilon^2\right) + 2\epsilon p x + y^2 \end{aligned}$$

Sei nun $\epsilon = 0$. Dann gilt:

$$p^2 = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2} = 1$$

Dies ist gerade die Gleichung einer Kreisbahn mit Radius p^2.
Sei nun $\epsilon = 1$. Dann gilt:

$$p^2 = 2px + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{p^2 - y^2}{2p} = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}$$

Das ist die Formel einer Parabelbahn.

Sei nun $\epsilon \neq 0$, $\epsilon \neq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{p^2}{1-\epsilon^2} &= x^2 + 2\frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}x + \frac{y^2}{1-\epsilon^2} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{p^2}{1-\epsilon^2} &= x^2 + 2\frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}x + \left(\frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}\right)^2 - \left(\frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\epsilon^2} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{p^2}{1-\epsilon^2} &= \left(x + \frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}\right)^2 - \left(\frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\epsilon^2} \\
\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\epsilon^2} &= \frac{p^2}{1-\epsilon^2} + \left(\frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\epsilon^2} &= \frac{p^2}{1-\epsilon^2} + \left(\frac{\epsilon^2 p^2}{(1-\epsilon^2)^2}\right) \\
&= \frac{p^2\left(1-\epsilon^2\right) + \epsilon^2 p^2}{(1-\epsilon^2)^2} \\
&= \frac{p^2\left(\left(1-\epsilon^2\right) + \epsilon^2\right)}{(1-\epsilon^2)^2} \\
&= \frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^2} \qquad (48)
\end{aligned}$$

Fallunterscheiung:

1. $0 < \epsilon < 1$

   $$\begin{aligned}
   \Rightarrow \quad & 1 - \epsilon^2 > 0 \\
   \Rightarrow \quad & (48) \text{ hat die Form: } \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y-y_0^2}{b^2} = 1
   \end{aligned}$$

   Diese Formel beschreibt eine Ellipsenbahn.

2. $\epsilon > 1$

   $$\begin{aligned}
   \Rightarrow \quad & 1 - \epsilon^2 < 0 \\
   \Rightarrow \quad & (48) \text{ hat die Form: } \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{y-y_0^2}{b^2} = 1
   \end{aligned}$$

   Diese Formel beschreibt eine Hyperbelbahn.

Mit diesen Kurven wollen wir uns nun näher beschäftigen.

6.3 Kegelschnitte

6.3.1 Vorbetrachtung

Kegelschnitte sind Kurven, die durch den Schnitt einer Ebene mit der Oberfläche eines geraden Kreiskegels gebildet werden. Als Schnittfiguren erhält man Kreis-, Ellipsen-, Hyperbel- oder Parabelkurven. Kegelschnitte werden auch als Kurven 2-ter Ordnung bezeichnet und genügen der Gleichung:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Durch 5 gegebene Punkte geht genau eine Kurve zweiter Ordnung. Sie haben in **Polarkoordinaten** die Gleichung

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$$

p: Parameter; ϵ: Exzentrizität der gegebenen Kurve

Kegelschnitte haben die Leinlinieneigenschaft: Die Menge aller Punkte M, für die das Verhältnis der Abstände zu einem Brennpunkt F und zu einer gegebenen Geraden (der Leitlinie) konstant gleich ϵ ist, ist eine Kurve zweiter Ordnung.

6.3.2 Ellipse

6.3.1 Definition. *Die Ellipse ist die Menge aller Punkte M = (x,y), für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen festen Punkten F_1 und F_2 (den Brennpunkten) konstant ist ($r_1 + r_2 = 2a$) (a = große Halbachse)*

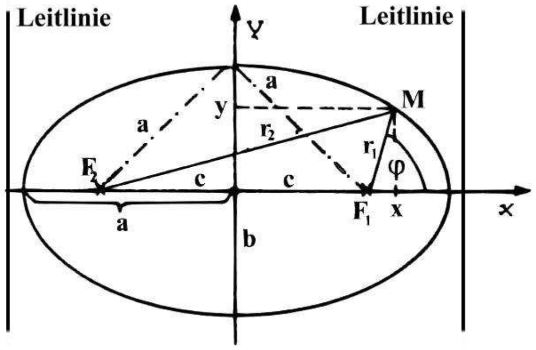


Abbildung 13: Ellipse

Normalform:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a = große Halbachse, b = kleine Halbachse
Die Ellipsengleichung in kartesischen Koordinaten soll auch noch angegeben werden. Aus der Abbildung 13 liest man unmittelbar

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

ab, so dass die Bestimmungsgleichung für die Ellipse

$$r_1 + r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

lautet. Mit $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ gilt:

$$r_1 + r_2 = \sqrt{\left(x - \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x + \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 + y^2} = 2a$$

Diese lösen wir nun nach b^2 auf und erhalten

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{y^2 a^2}{a^2 - x^2} \\ \Leftrightarrow \quad a^2 - x^2 &= \frac{y^2 a^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{a^2 - x^2}{a^2} &= \frac{y^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \quad 1 &= \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \end{aligned}$$

Polarkoordinaten:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \qquad \forall \epsilon < 1$$

Die **Leitliniengeraden** sind der kleinen Achse parallel und haben von dieser den Abstand d $= \frac{a}{\epsilon}$. Dann gilt:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \epsilon$$

Der **Kreis** ist ein Spezialfall der Ellipse (a = b = r). Die beiden Brennpunkte fallen im Mittelpunkt des Kreises zusammen. Alle Eigenschaften der Ellipse können sinngemäß übertragen werden.

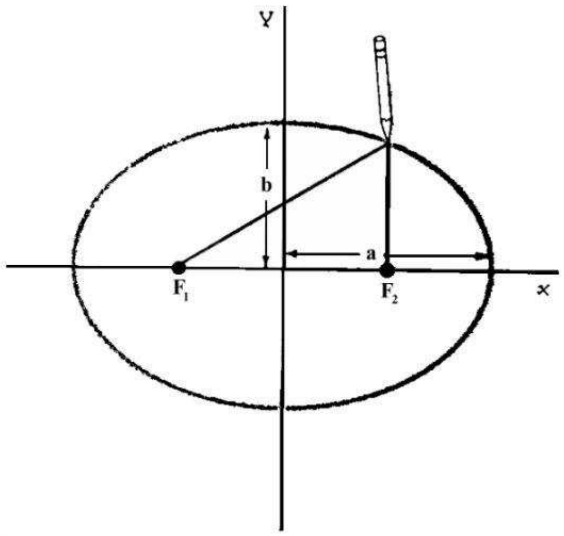


Abbildung 14: Praktisches Zeichnen einer Ellipse

Eine Ellipse läßt sich praktisch zeichnen, wenn man eine Schnur an den beiden Brennpunkten (F_1 und F_2) befestigt und mit ihrer Hilfe, in der Abbildung (6.3.2) am Punkt M gezeigt, einen Stift führt.

6.3.3 Parabel

6.3.2 Definition. *Die Parabel ist die Menge der Punkte M = (x,y), die von einem festem Punkt (Brennpunkt) F = (-c,0) und einer festen Gerade (Leitlinie) gleich weit entfernt sind.*

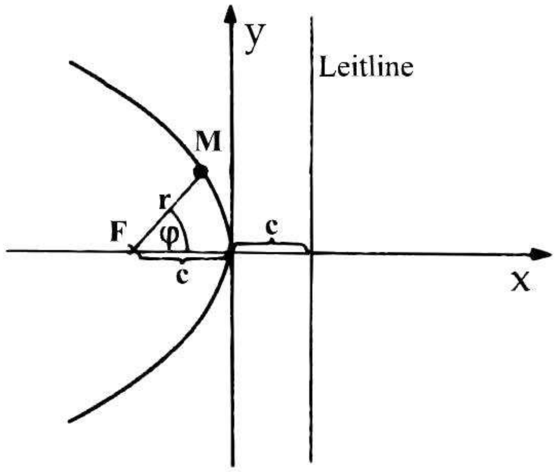


Abbildung 15: Parabel

Normalform:

y^2 = 4cx
Auch die Parabel wollen wir noch in kartesischen Koordinaten notieren. Aus der Abbildung 15 ist $r = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$ abzulesen, so dass aus $r = c + x$ nach Quadrieren $y^2 = 4cx$ folgt.

Polarkoordinaten:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\varphi)} = \frac{p}{1 + \cos(\varphi)} \qquad \epsilon = 1$$

Die **Leitlinie** verläuft parallel zur y-Achse

6.3.4 Hyperbel

6.3.3 Definition. *Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte M = (x,y), für die die Differenz der Abstände von zwei Brennpunkten F_1 = (-c,0) und F_2 = (c,0) konstant ist (=2a). Die Punkte, für die $r_1 - r_2$ = 2a ist, gehören einem Zweig der Hyperbel an, die Punkte, für die $r_2 - r_1$ = 2a gilt, gehören dem anderen Zweig der Hyperbel an.*

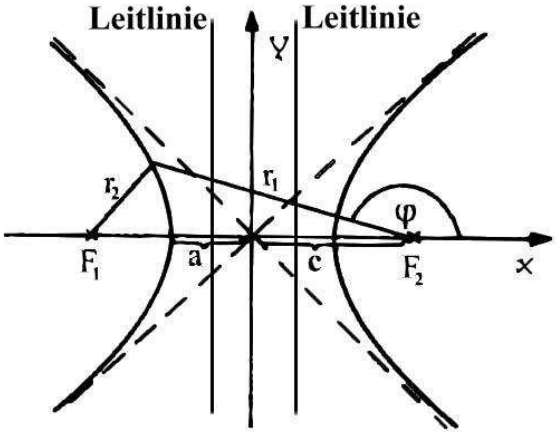


Abbildung 16: Hyperbel

Normalform:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

In kartesischen Koordinaten ist hier

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(c+x)^2 + y^2} \\ r_2 &= \sqrt{(c-x)^2 + y^2} \end{aligned}$$

ab, so dass die Bestimmungsgleichung für die Hyperbel

$$r_1 - r_2 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2} - \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a$$

lautet. Mit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ gilt:

$$r_1 - r_2 = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2} + x\right)^2 + y^2} - \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2} - x\right)^2 + y^2} = 2a$$

Wir lösen nach b^2 auf und erhalten

$$\begin{aligned} b^2 &= -\frac{y^2 a^2}{a^2 - x^2} \\ \Leftrightarrow \quad a^2 - x^2 &= -\frac{y^2 a^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{a^2 - x^2}{a^2} &= -\frac{y^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \quad 1 &= \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \end{aligned}$$

Polarkoordinaten:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \qquad \text{für } \epsilon > 1$$

Die **Leitlinien** sind Geraden, die auf der x-Achse senkrecht stehen und diese in der Entfernung d = $\frac{a}{e}$ vom Mittelpunkt schneiden. Es gilt für jeden Punkt P(x,y):

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}$$

Wir haben bereits die Gültigkeit der ersten beiden Keplergesete nachgerechnet. Es bleibt noch das dritte Keplergestz zu zeigen. Dies wollen wir erreichen über die Berechnung der Umlaufzeiten. Nach dem zweiten Keplergesetz gilt für die vom Radiusvektor in der Zeit t überstrichene Fläche:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \underbrace{=}_{L=mr^2\dot{\varphi}} \frac{L}{2m} \underbrace{=}_{\Rightarrow \quad \frac{L}{m}=c} \frac{c}{2}, \qquad c = \text{const.}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^T \frac{dA}{dt}dt = \frac{c}{2}T \; ; \qquad A = \pi ab \\ \Rightarrow \quad \frac{c}{2}T &= \pi ab \\ \Rightarrow \quad T &= 2\pi\frac{ab}{c} \end{aligned} \tag{49}$$

Mit $p = \frac{L^2}{\mu m^2 M} = \frac{c^2}{\mu M}$ und $p = \frac{b^2}{a}$ folgt

$$b^2 = \frac{ac^2}{\mu M}.$$

$b = \sqrt{a\frac{c^2}{\mu M}}$ eingesetzt in (49) ergibt:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\frac{a}{c}\sqrt{a\frac{c^2}{\mu M}} \\ \Leftrightarrow \quad T^2 &= 4\pi^2\frac{a^2}{c^2}a\frac{c^2}{\mu M} \\ &= 4\pi^2\frac{a^3}{\mu M} \\ \Rightarrow \quad \frac{T^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{\mu M} \end{aligned}$$

Da $\left(\frac{4\pi^2}{\mu M}\right)$ für alle Planeten denselben Wert hat, gilt für zwei beliebige Planeten (bei Vernachlässigung der Eigenmassen:) $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$. Dies ist gerade die Aussage des 3. Keplerschen Gesetzes.

6.4 Wie hängt ϵ von der Energie ab?

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= \sqrt{1+\frac{2mEp^2}{L^2}} \qquad ; \qquad p=\frac{L^2}{\gamma m^2 M} \\
&= \sqrt{1+\frac{2mEL^4}{\gamma^2 m^4 M^2 L^2}} \\
\Rightarrow \quad \epsilon^2 &= 1+\frac{2EL^2}{\gamma^2 m^3 M^2} \\
\Rightarrow \quad 2EL^2 &= (\epsilon^2-1)\gamma^2 m^3 M^2 \\
\Rightarrow \quad E &= (\epsilon^2-1)\underbrace{\frac{\gamma^2 m^3 M^2}{2L^2}}_{\text{const } > 0}
\end{aligned}
$$

Also gilt für die Gesamtenergie E:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = (\epsilon^2-1)c \quad ; \quad c>0; \quad c \in \mathbb{R}$$

3 Fälle gilt es nun zu betrachten:

1. $0 \le \epsilon < 1$:

$$
\begin{aligned}
E_{kin}+E_{pot} &< 0 \qquad \Leftrightarrow \\
|E_{pot}| &> E_{kin}
\end{aligned}
$$

   Die potentielle Energie ist betragsmäßig größer als die kinetische Energie des Planeten. Der Planet kann sich nicht von der Sonne entfernen. Er kreist in einer **Ellipsenbahn** um die Sonne.

2. $\epsilon = 1$:

$$
\begin{aligned}
E_{kin}+E_{pot} &= 0 \qquad \Leftrightarrow \\
|E_{pot}| &= E_{kin}
\end{aligned}
$$

   Die potentielle Energie ist betragsmäßig nun genauso groß wie die kinetische Energie des Planeten. Der Planet bewegt sich auf einer **Parabelbahn**. (Dieser Fall kommt in der Wirklichkeit nicht vor.)

3. $\epsilon > 1$:

$$
\begin{aligned}
E_{kin}+E_{pot} &> 0 \qquad \Leftrightarrow \\
|E_{pot}| &< E_{kin}
\end{aligned}
$$

   Die potentielle Energie ist betragsmäßig kleiner als die kinetische Energie des Planeten. Der Planet hat nun genug kinetische Energie, um sich auf einer **Hyperbelbahn** (trotz der Anziehung durch die Sonne) von der Sonne zu entfernen.

6.5 Das Zweikörperproblem

Betrachten wir nun zwei Planeten P_1 und P_2 mit beliebigen Massen m_1 und m_2. Es gilt

$$\vec{F} = m \underbrace{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}_{\ddot{\vec{r}}}$$

Dann folgt aus dem Gravitationsgesetz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{{r_{12}}^3} \vec{r}_{12} \\ \vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{{r_{12}}^3} \vec{r}_{21} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0, \text{ da } \vec{r}_{12} \begin{array}{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ = -(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ = -\vec{r}_{21} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \int \sum_{i=1}^{2} m_i \ddot{\vec{r}}_i \, dt = c; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2} \underbrace{m_i \dot{\vec{r}}_i}_{\vec{p}} = c$$

Der Impuls $\vec{p} = m_i \dot{\vec{r}_i}$ bleibt konstant (Impulserhaltungssatz). Daraus folgt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad ; \quad \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

Diese Gleichungen besagen, dass E und damit $\vec{F}$ nicht von $\vec{r}_1$ <u>und</u> $\vec{r}_2$ abhängt, sondern nur von der Kombination: $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Man zerlegt nun das Zweikörperproblem in die Bewegung des Schwerpunktes R (Absolutbewegung) und des Differenzenvektors $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (Relativbewegung). Für den Schwerpunkt gilt:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

wobei $\vec{R}$ die Koordinaten des Schwerpunktes S sind. Sei $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r_1}} &= F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \\ m_2 \ddot{\vec{r_2}} &= -F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \\ \Rightarrow m_1 \ddot{\vec{r_1}} + m_2 \ddot{\vec{r_2}} &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\vec{R}} &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\vec{R}} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig. Diese Bewegung ist also vernachlässigbar. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r_1}} &= F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \\ m_2 \ddot{\vec{r_2}} &= -F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \\ \Rightarrow \quad \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r_1}} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) && (50) \\ \frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1} \ddot{\vec{r_2}} &= -\frac{m_1}{m_2 + m_1} F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) && (51) \end{aligned}$$

(50) - (51) liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{m_2 m_1}{m_1+m_2}\ddot{\vec{r}}_1 - \frac{m_1 m_2}{m_2+m_1}\ddot{\vec{r}}_2 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}F(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\frac{m_1}{m_2+m_1}F(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) \\
\Leftrightarrow \underbrace{\frac{m_2 m_1}{m_1+m_2}}_{\text{reduzierte Masse}}\ddot{\vec{r}} &= \underbrace{\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}}_{=1}F(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = F(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)
\end{aligned}$$

Dieses Problem haben wir aber bis auf den konstanten Vorfaktor $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ bereits bei der Behandlung des Keplerproblems gelöst. Die Relativbewegung ist also zu der Bewegung im Kepler-Potential äquivalent und beide Planeten bewegen sich auf Kegelschnitten. Wie kommt man nun von der Gleichung der Relativbewegung zurück zur Bewegungsgleichung der beiden Planeten?

Wie oben bereits definiert, gilt :

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \quad ; \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\
\Rightarrow \vec{r}_1 &= \vec{r} + \vec{r}_2, \\
\vec{r}_2 &= \vec{r}_1 - \vec{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(m_1+m_2)\vec{R} &= m_1\vec{r}_1 + m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}) \\
&= m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_1 - m_2\vec{r} \\
\Rightarrow \quad & \underline{\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}} \qquad \vec{r}_1(t) = \vec{R}(t) + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(m_1+m_2)\vec{R} &= m_2\vec{r}_2 + m_1(\vec{r}_2 + \vec{r}) \\
&= m_2\vec{r}_2 + m_1\vec{r}_2 + m_1\vec{r} \\
\Rightarrow \quad & \underline{\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}} \qquad \vec{r}_2(t) = \vec{R}(t) - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}
\end{aligned}$$

Ist $0 < \epsilon < 1$, für beide Planeten so umlaufen die zwei Körper - um den Winkel 180 verschoben - den gemeinsamen Schwerpunkt S auf ähnlichen Ellipsen. Der Schwerpunkt des Systems ist der gemeinsame Brennpunkt der beiden Ellipsen.

Für die großen Halbachsen gilt: $a_r = c\frac{M}{E}$; r = relativ

$$\Rightarrow \underbrace{a_1 = -c\frac{m_2}{E} \; ; \; a_2 = -c\frac{m_1}{E}}_{\frac{a_1}{a_2}=\text{const } \frac{m_2}{m_1}}$$

Die Achsen sind den Massen umgekehrt proportional.

Gilt $m_1 = m \ll m_2 = M$, dann gilt $a_1 \gg a_2$, dann kommt man zum Keplerproblem. Somit ist das Keplerproblem ein Spezialfall des Zweikörperproblems. Um uns dies besser vorzustellen betrachten wir die Abildungen 17 und 18.

Wir haben bereits bei der Definition des Dreikörperproblems festgestellt:
Das Dreikörperproblem ist nicht (eindeutig) lösbar. Nur Spezialfälle sind lösbar, aber warum? Dieser Frage wollen wir nun auf den Grund gehen!

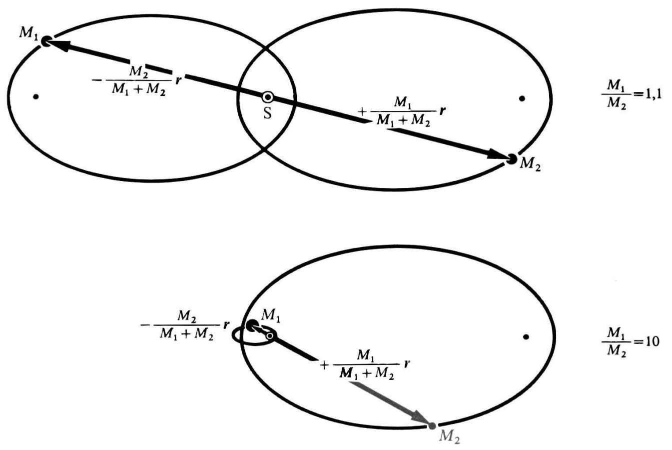


Abbildung 17: Gravitationsbewegungen zweier Körper im Schwerpunktsystem. Die beiden Körper laufen auf Ellipsen um den gemeinsamen Schwerpunkt S, wobei S den einen Brennpunkt beider Ellipsen bildet. Im oberen Bild ist $\frac{M_1}{M_2} = 1,1$, im unteren $\left(\frac{M_1}{M_2} \gg 1\right)$ bleibt der Körper 1 immer in der Nähe von S, so dass der Körper 2 eine Ellipse um den Körper 1 als Brennpunkt beschreibt (erstes Keplersches Gesetz der Planetenbewegung).

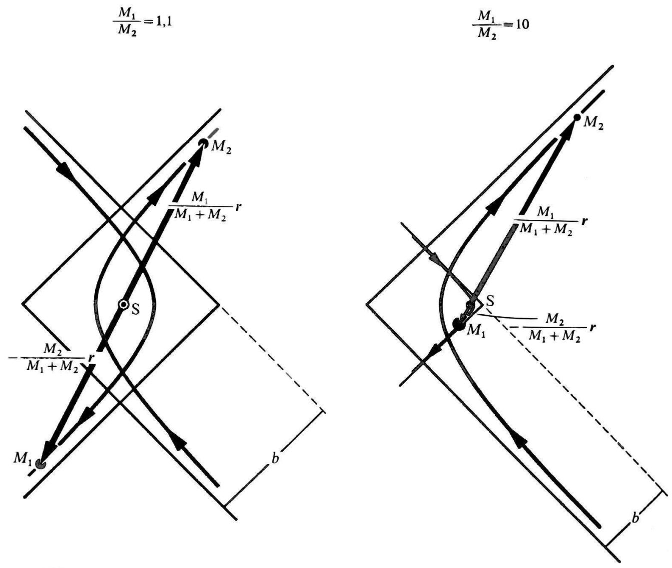


Abbildung 18: Gravitationsbewegungen zweier Körper im Schwerpunktsystem. Die beiden Körper laufen auf Hyperbelästen um den gemeinsamen Schwerpunkt S, der wieder den Brennpunkt beider Hyperbeläste bildet. Im linken Bild ist $\frac{M_1}{M_2} = 1,1$, im rechten $\frac{M_1}{M_2} = 10$.

6.6 Das Dreikörperproblem

Dazu betrachten wir allgemeine Aussagen über das n-Körperproblem.
Wir haben nun n Körper in einem kartesischen Koordinatensystem. Dann können wir die Gravitationskraft wie folgt schreiben:

$$\vec{F}_{xy} = -\mu \frac{m_x m_y}{r_{xy}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{xy}}{r_{xy}} \qquad ; \ r_{xy} = |\vec{r}_y - \vec{r}_x|$$

Um die nachfolgenden Rechnungen zu vereinfachen, wählt man im folgenden die Einheiten für Zeit, Strecke und Masse so, dass μ (= Gravitationskonstante) 1 wird. Dies wird z. B. erreicht, indem man

- Strecken in Lichtsekunden
$$1\ Ls \approx 3 \cdot 10^8 m$$
- Massen in Erdmassen
$$1\ m_{Erde} = 5,977 \cdot 10^{24} kg$$
- die Zeit in $259.972s \approx 3,01d$ mißt.

Sei nun im folgenden $\mu = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\ddot{\vec{r}} \\ \Rightarrow \quad m_k \ddot{\vec{r}}_k &= \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} \frac{m_j m_k}{r_{jk}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{kj}}{r_{kj}} \end{aligned} \tag{52}$$

Da sich die Kraft in die x-, y-, und z- Richtung des kartesischen Koordinatensystem zerlegen läßt, erhält man also *3 n Differentialgleichungen 2ter Ordnung* oder *6 n Differentialgleichungen 1ter Ordnung*. Man erhält $\boxed{6n}$ Gleichungen
Summiert man in diesem System alle Kräfte auf, so erhält man:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} \frac{m_j m_k}{r_{jk}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{kj}}{r_{kj}} = 0,$$

da die Summe der Kräfte zwischen zwei Körpern 0 ist. ($\vec{r}_{jk} = -\vec{r}_{kj}$). Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_k m_k \ddot{\vec{r}}_k &= 0 \qquad (53) \\ \Rightarrow \quad \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k &= \text{const.} \end{aligned}$$

Also bleibt der Impuls $\vec{p}_k = m_k \dot{\vec{r}}_k$ in einem solchen System erhalten. Für den Schwerpunkt $\vec{R}$ eines Systems von n Körpern gilt:

$$\vec{R} = \frac{\sum_k m_k \vec{r}_k}{\sum_k m_k}$$

Aus (53) folgt der **Schwerpunktsatz**:

6.6.1 Satz.

$$\vec{R}(t) = \vec{a}t + \vec{b}; \qquad \vec{a},\ \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

Der Schwerpunktsatz liefert also 6 Konstanten der Bewegung. Somit bleiben $\boxed{6n-6}$ Gleichungen
Legt man zusätzlich den Koordinatenurspung in den Schwerpunkt, so erhält man:

$$\begin{aligned} \sum_k m_k \vec{r}_k = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k = 0 \\ \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

Multipliziert man (52) mit $\dot{\vec{r}}_k$ (skalar) und summiert über alle k auf, so erhält man:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\vec{r}}_k \ddot{\vec{r}}_k = \sum_k \sum_j \frac{m_j m_k}{r_{jk}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{kj}}{r_{jk}} \dot{\vec{r}}_k \tag{54}$$

Für die Gesamtenergie eines Systems von n Körpern gilt:

$$\begin{aligned} E &= E_{kin} + U \qquad U \text{ Potential mit } -\text{ grad } U = \vec{F}\,(\vec{r}(t)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k |\dot{\vec{r}}_k|^2 + \left(\sum_{1 \le k < j \le n} -\frac{m_j m_k}{r_{jk}} \right) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2} \sum m_k |\dot{\vec{r}}_k|^2}_{E_{kin}} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 2 m_k \dot{\vec{r}}_k \ddot{\vec{r}}_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\vec{r}}_k \ddot{\vec{r}}_k \end{aligned}$$

Da $grad\ |x| = \frac{x}{|x|}$ und $grad\ \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}\,(g\ grad\ f - f\ grad\ g)$ gilt, ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\sum_{k<j} \frac{m_j m_k}{r_{kj}} \right) &= \sum_{k<j} -\frac{m_j m_k}{r_{jk}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{kj}}{r_{jk}} \left(\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_k \right) \\ &= \sum_{k<j} + \frac{m_j m_k}{r_{jk}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{jk}}{r_{jk}} \cdot \dot{\vec{r}}_j + \frac{m_j m_k}{r_{jk}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{kj}}{r_{jk}} \cdot \dot{\vec{r}}_k \\ &= \sum_k \sum_j \frac{m_j m_k}{r_{jk}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{kj}}{r_{jk}} \cdot \dot{\vec{r}}_k \end{aligned}$$

Also läßt sich (53) schreiben als:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{kin} &= \frac{d}{dt}(-U) \qquad \mid U = E_{pot} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(E_{kin} + E_{pot}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \quad E(t) &= c; \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die Energie in einem System von n Körpern ist also zeitlich konstant. Unser System reduziert sich auf $\boxed{6n-7}$ Gleichungen

Der Drehimpuls $\vec{L}(t)$ ist definiert wie folgt:

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times m\dot{\vec{r}}(t)$$

Bildet man in (52) das Kreuzprodukt mit $\vec{r}_k$ von links und summiert alle Kräfte auf, so ergibt sich:

$$\sum_k m_k \vec{r}_k \times \ddot{\vec{r}}_k = \sum_j \sum_{k\ j \neq k} \vec{r}_k \times \frac{m_j m_k}{r_{jk}^3} \cdot \vec{r}_{kj} = 0, \quad \text{da } \vec{r}_k \times \vec{r}_j = -\vec{r}_j \times \vec{r}_k$$

Es gilt dann:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_k m_k \vec{r}_k \times \dot{\vec{r}}_k\right)}_{\vec{L}(t)} = \sum_k \underbrace{m_k \dot{\vec{r}}_k \times \dot{\vec{r}}_k}_{=0} + \sum_k m_k \vec{r}_k \times \ddot{\vec{r}}_k = 0$$

Daraus folgt $\vec{L}(t) = \vec{d}, \quad \vec{d} \in \mathbb{R}^3$. Der Drehimpuls bleibt erhalten. Aus den Erhaltungssätzen von Energie, Impuls und Drehimpuls folgt schließlich ein System mit $\boxed{6n-10}$ Gleichungen. Wir haben unser System von $6n$ Gleichungen 1-ter Ordnung auf $6n-10$ Gleichungen reduziert.

Betrachtet man das Problem mit zwei Körpern, so bleibt ein System von $6 \cdot 2 - 10 = 2$ Gleichungen 1-ter Ordnung. Im Kapitel Zweikörperproblem haben wir bereits das Zweikörperproblem geschlossen gelöst. Um die zwei restlichen Gleichungen lösen zu können, haben wir anstatt der Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ die Polarkoordinaten $r(t)$, $\varphi(t)$ eingeführt und mussten die Zeit t eliminieren. Deswegen konnten wir eine Bahnkurve $r = r(\varphi)$ angeben, die uns nur den Typ der Bahn liefert, jedoch nicht, wann genau sich der Planet an welchen Ort befindet (dies hätte uns nur eine Bahnkurve $r = r(t)$ geliefert).

Beim **Dreikörperproblem** bleiben 8 übrig. Man kann diese höchstens auf 6 durch Einführung anderer Koordinaten und Elimination der Zeit verkürzen. Da man in diesem Fall jedoch keine allgemeine Lösung des Systems finden kann, ist das Dreikörperproblem nicht geschlossen lösbar, es sind nur Spezialfälle exakt lösbar.

Einen dieser Spezialfälle, die exakt lösbar sind, werden wir nun im folgenden betrachten:

6.6.2 Satz. ***Lagrange, 1772***
Das Dreikörperproblem läßt sich durch elementare Formeln streng lösen, wenn man annimmmt, dass das von den drei Himmelskörpern gebildete Dreieck sich selbst dauernd ähnlich bleibt.

Der genannte Spezialfall des Dreikörperproblems läßt sich als einer der wenigen noch exakt lösen. Bei dem Beweis werden sich 4 Aussagen ergeben:

1. Die drei Planeten bewegen sich in einer Ebene.

2. Die Resultierende der Newtonschen Kräfte in jedem der drei Punkte geht durch ihren gemeinsamen Schwerpunkt.

3. Das von ihnen gebildete Dreieck ist gleichseitig.

4. Die drei Planeten beschreiben einander ähnliche Kegelschnitte, die den Schwerpunkt zu einem ihrer Brennpunkte haben.

Seien nun drei Planeten P_1, P_2, P_3 mit dazugehörigen beliebigen Massen m_1, m_2 und m_3 gegeben. Nach Punkt 3 sollen die Planeten ein Dreieck bilden, sie können nicht auf einer Geraden liegen. Sie spannen also eine Ebene E auf, wobei ihr Schwerpunkt 0 auch in dieser Ebene liegen muss. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass 0 ruhend ist. E dreht sich also um 0 mit einer resultierenden Drehung $\vec{\omega}$, wobei 0 fest im Raum ist. Wir versetzen uns auf E . Dann sind

- $\vec{r}_i$ Vektor von 0 zu P_i;
- $\vec{v}_i$, $\frac{d\vec{v}_i}{dt}$ die von E aus beurteilten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der P_i

Somit sieht die Bewegungsgleichung wie folgt aus:

$$\frac{\vec{F}_i}{m_i} = \frac{d\vec{v}_i}{dt} + \underbrace{2\,(\vec{\omega} \times \vec{v}_i)}_{\text{Coriolisbeschleunigung}} + \underbrace{\vec{\omega}\,(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) - \vec{r}_i\vec{\omega}^2}_{= \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Zentripetalbeschleunigung}}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_i}_{\text{lineare Beschleunigung}} \tag{55}$$

Die Coriolis-, Zentripetal- und lineare Beschleunigung bewirken in unserem rotierenden Bezugssysteme Kräfte, die nur in diesem System existieren. Diese Kräfte, die sogenannten **Scheinkräfte**, sind von außen nicht beobachtbar. Zudem gilt

$$\frac{\vec{F}_1}{m_1} = \frac{m_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}^2}\,\frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}} \tag{56}$$

Wir legen nun in die Ebene E ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die x- und die y- Achse spannen E auf. Unsere einzige Forderung ist, dass 0 Nullpunkt sei. Die z- Achse steht senkrecht zu E. Wir zerlegen nun $\vec{\omega}$ in x-, y- und z- Richtung. Es gilt

$$\vec{\omega} = (\underbrace{p}_{x}, \underbrace{q}_{y}, \underbrace{r}_{z}) \tag{57}$$

Wir werden Punkt (1) des Beweises nicht zeigen, da der Beweis dieses Punktes zu aufwendig wäre. Nehmen wir nun also an, dass sich die Planeten in einer Ebene bewegen. Dann sind die $\vec{\omega}$- Komponenten in x- und y- Richtung 0. $\vec{\omega}$ sieht dann wie folgt aus:

$$\vec{\omega} = (0, 0, r)$$

Nun sei r (Drehung von E in sich) so bestimmt, dass $\vec{r}_1$ eine feste Richtung in E hat. Daraus folgt, dass auch $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$ feste Richtungen in E haben und somit gilt:

$$\vec{r}_i(t) = \lambda(t)\,(a_i,\ b_i,\ 0)$$

$\lambda(t)$ beschreibt die zeitliche Größenänderung der Vektoren $0\ P_i = \vec{r}_i$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i(t) &= \dot{\lambda}(t)\ (a_i,\ b_,\ 0) \\ \tfrac{d\vec{v}_i(t)}{dt} &= \ddot{\lambda}(t)\ (a_i,\ b_i,\ 0) \end{aligned} \tag{58}$$

Also hat die in (56) dargestellte Kraft $\vec{F}_i$ verschwindende z- Komponente (da $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$), die x-, y- Komponente ist **umgekehrt proportional** zu λ^2. Also setzen wir abkürzend:

$$\frac{\vec{F}_i}{m_i} = \frac{1}{\lambda^2}\ (L_i,\ M_i,\ 0) \tag{59}$$

Wie sieht nun die x-, y- Komponente von(55) aus?
Mit (58) und (59) folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{F}_i}{m_i} &= \frac{d\vec{v}_i}{dt} + 2\,(\vec{\omega}\times\vec{v}_i) + \vec{\omega}\cdot\left(\dot{\vec{r}}_i\,\vec{\omega}\right) - \vec{r}_i\ \omega^2 + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_i \\
&= \ddot{\lambda}\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 0 \end{pmatrix} + 2\dot{\lambda}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}(\lambda(a_i,\ b_i,\ 0))\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \\
&\quad -\lambda\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 0 \end{pmatrix} r^2 + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{r} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \ddot{\lambda}\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 0 \end{pmatrix} + 2\dot{\lambda}\begin{pmatrix} -b_i r \\ a_i r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}\cdot\lambda\cdot 0 \\
&\quad -\lambda\begin{pmatrix} a_i r^2 \\ b_i r^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -b_i\dot{r} \\ a_i\dot{r} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} L_i \\ M_i \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus folgt für die
x**- Komponente**

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\lambda^2}\ L_i &= \ddot{\lambda}a_i + 2\dot{\lambda}(-b_i r) - \lambda a_i r^2 - b_i\lambda\dot{r} \\ &= \left(\ddot{\lambda} - \lambda r^2\right)a_i - \left(2\dot{\lambda}r + \lambda\dot{r}\right)b_i \end{aligned} \tag{60}$$

und für die
y**- Komponente**

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\lambda^2}\ M_i &= \ddot{\lambda}b_i + 2\dot{\lambda}a_i r - \lambda b_i r^2 + a_i\lambda\dot{r} \\ &= \left(2\dot{\lambda}r + \lambda\dot{r}\right)a_i + \left(\ddot{\lambda} - \lambda r^2\right)b_i \end{aligned} \tag{61}$$

Aus dem Drehimpulserhaltunssatz folgt, da

$$
\begin{aligned}
\vec{L} &= m\vec{r}_i \times \vec{v}_i && | \ \vec{r}_i \perp \vec{v}_i \\
&= m\vec{r}_i\vec{v}_i && | \ \vec{v}_i = \vec{\omega}\vec{r}_i \\
&= m\vec{r}_i\vec{\omega}\vec{r}_i \\
&= m\vec{\omega}|r_i|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \vec{L} &=& \sum m_i\vec{\omega}|r_i|^2 = \text{const.} \\
\Leftrightarrow \quad & \vec{L} &=& \sum m_i|r_i|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \text{const.} \\
\Leftrightarrow \quad & L &=& r\sum m_i|r_i|^2 = r\lambda^2 \sum m_i \left(a_i^2 + b_i^2\right) = \text{const.}
\end{aligned}
$$

Wir schreiben dafür:

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 r &= \mu = \text{const.} \\
\Rightarrow \quad \left(\lambda^2 r\right)' &= 2\lambda\dot{\lambda}r + \lambda^2\dot{r} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad 2\dot{\lambda}r + \lambda\dot{r} &= 0
\end{aligned}
$$

Dann vereinfachen sich jedoch (60) und (61) wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^2}L_i = \left(\ddot{\lambda} - \lambda r^2\right) a_i \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{L_i}{a_i} = \lambda^2\left(\ddot{\lambda} - \lambda r^2\right) \\
\frac{1}{\lambda^2}M_i = \left(\ddot{\lambda} - \lambda r^2\right) b_i \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{M_i}{b_i} = \lambda^2\left(\ddot{\lambda} - \lambda r^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \frac{L_i}{a_i} = \frac{M_i}{b_i} = \lambda^2\ddot{\lambda} - \lambda^3 r^2 = \lambda^2\ddot{\lambda} - \frac{\mu^2}{\lambda}
$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= \frac{m}{\lambda^2}(L_i,\ M_i,\ 0) \\
\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 &= \frac{m_1\lambda}{\lambda^2}\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_i \\ M_i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m_1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_iM_i - b_iL_i \end{pmatrix} = 0 \qquad (62) \\
\Rightarrow \quad \vec{r}_1 &= c \cdot \vec{F}_1, \qquad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, dass $\vec{F}_1$ **durch den Schwerpunkt geht** (Punkt (2)).
Mit (62) gilt aber auch:

$$
\frac{\vec{r}_1 \times \vec{F}_1}{m_1} = \frac{m_2\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{r_{12}^3} + \frac{m_3\vec{r}_1 \times \vec{r}_3}{r_{13}^3} = 0 \qquad (63)
$$

Der Schwerpunkt 0 ist nach Vorraussetzung der Koordinatenursprung. Also gilt:

$$
\begin{aligned}
m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \vec{r}_2 &= -\frac{1}{m_2}\left(m_1\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3\right)
\end{aligned}
$$

Dann gilt aber:

$$
\begin{aligned}
& m_2\,(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) + m_3\,(\vec{r}_1 \times \vec{r}_3) \\
= \quad & m_2\vec{r}_1 \times \left(-\frac{1}{m_2}(m_1\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3)\right) + m_3\vec{r}_1 \times \vec{r}_3 \\
= \quad & \vec{r}_1 \times (-(m_1\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3)) + m_3\vec{r}_1 \times \vec{r}_3 \\
= \quad & -\vec{r}_1 \times (m_3\vec{r}_3) + m_3\,(\vec{r}_1 \times \vec{r}_3) = 0 \\
\Rightarrow \quad & m_2\,(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = -\; m_3\,(\vec{r}_1 \times \vec{r}_3)
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Nach (63) gilt:

$$
\begin{aligned}
& \frac{m_2\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{r_{12}^3} + \frac{m_3\vec{r}_1 \times \vec{r}_3}{r_{13}^3} = 0 \\
\Leftrightarrow^{(64)} \quad & \frac{m_2\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{r_{12}^3} - \frac{m_2\,(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{r_{13}^3} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & m_2\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) = 0 \\
\Rightarrow \quad & r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = r_{13} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|
\end{aligned}
$$

Analog erhält man $r_{23} = r_{21}$, $r_{31} = r_{32}$. Also bilden die drei Planeten ein **gleichseitiges Dreieck** (Punkt (3)).
Wir bezeichnen nun eine Dreiecksseite $\vec{r}_{ij}$ mit $\vec{r}_{ij} = \lambda_s$, wobei $s = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$.
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\vec{F}_1}{m_1} \quad &= \quad \frac{1}{\lambda_2}\begin{pmatrix} L_1 \\ M_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \quad \frac{m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} + \frac{m_3}{r_{13}^3}\vec{r}_{13} \\
\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} L_1 \\ M_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad &= \quad \lambda^3\frac{m_2}{r_{12}^3}\begin{pmatrix} a_2 - a_1 \\ b_2 - b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda^3\frac{m_3}{r_{13}^3}\begin{pmatrix} a_3 - a_1 \\ b_3 - b_1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
r_{13}^3 &= |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3 \\
&= \left(\lambda^3 \sqrt{(a_3-a_1)^2 + (b_3-b_1)^2}\right) \\
&= \lambda^3 s^3 \\
\Rightarrow \quad L_1 &= \frac{1}{s^3}\left[m_2(a_2-a_1) + m_3(a_3-a_1)\right] \\
\Leftrightarrow \quad \frac{L_1}{a_1} &= \frac{1}{s^3}\left(m_2\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right) + m_3\left(\frac{a_3}{a_1}-1\right)\right) \\
&= \frac{1}{s^3}\left(-m_2 - m_3 + \frac{\overbrace{m_2 a_2 + m_3 a_3}^{=\,-m_1 a_1}}{a_1}\right) \\
&= \frac{1}{s^3}(-m_2 - m_3 - m_1) \\
&= \frac{L_i}{a_i} = \frac{M_i}{b_i}
\end{aligned}$$

Somit wird aus $\lambda^2\ddot{\lambda} - \frac{\mu^2}{\lambda} = \frac{L_i}{a_i}$:

$$\lambda^2\ddot{\lambda} - \frac{\mu^2}{\lambda} = \underbrace{-\frac{1}{s^3}(m_1+m_2+m_3)}_{\text{const.}}$$

(**Differentialgleichung für** λ)
Gibt es überhaupt eine Lösung dieser Differentialgleichung?
Sei $\lambda = \text{const.}$ Dann gilt

$$\lambda = \frac{\mu^2 s^3}{\underbrace{m_1+m_2+m_3}_{=\,M}} \qquad M = \text{Gesamtenergie}$$

Die Planeten bewegen sich also auf einer **Kreisbahn** um ihren Schwerpunkt. Dann folgt aus $\lambda^2 r = \mu$

$$r = \frac{\mu}{\lambda^2} = \frac{M^2}{\mu^3 s^6} = \text{const.}$$

Die Planeten bewegen sich gleichförmig auf einer Kreisbahn um 0. Nun betrachten wir die Bewegung nicht mehr von E aus, sondern von einer mit E zusammenfallenden, aber raumfesten Ebene E'. In E' fallen alle Scheinkräfte weg und es gilt:

$$|F_i| = \frac{m_i}{\lambda^2}\sqrt{L_i^2 + M_i^2}$$

Wie gezeigt gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{L_i}{a_i} &= \frac{M_i}{b_i} = -\frac{1}{s^3}M; \\
\Rightarrow \quad |F_i| &= \frac{m_i}{\lambda^2 s^3} M \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \\
\vec{r}_i &= \lambda(t) \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad \lambda^2 &= \frac{|r_i|^2}{a_i^2 + b_i^2}
\end{aligned}$$

Führen wir nun eine Ersatzmasse

$$m_i' = m_i \frac{(a_i^2 + b_i^2)^{\frac{3}{2}}}{s^3}$$

ein, so ergibt sich für die wirkende Kraft:

$$\boxed{|F_i| = \frac{m_i' M}{|r_i|^2}}$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned}
|F_i| &= \frac{m_i'(a_i^2 + b_i^2)}{|r_i|^2 s^3} M \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \cdot \frac{s^3}{(a_i^2 + b_i^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{m_i' M}{|r_i|^2}
\end{aligned}$$

Also bewegt sich jeder Körper so, als ob er die Masse m_i' hätte und von einer in 0 ruhenden Masse M angezogen würde, also auf Kegelschnitten mit 0 als einen Brennpunkt (Punkt (4)). Ein Beispiel für ein solches System von 3 Himmelskörpern, die sich auf einem gleichseitgien Dreieck und auf Ellipsenbahnen um ihren Schwerpunkt bewegen, ist das System Sonne-Jupiter-Tropanerasteroide.

6.7 Planetendaten

	Masse m des Planeten		Mittlere Entfernung e zu Sonne		Umlaufdauer (in Jahren)	Äquatorialer Radius
Planet	absolut (in $10^{24}kg$)	relativ zur Masse m_E der Erde	absolut (in $10^{12}m$)	relativ zum Erdbahn-radius r_E		
	m in $10^{24}kg$	$\frac{m}{m_E}$	e in $10^{12}m$	$\frac{e}{r_E}$	T in a	R in km
Merkur	0,328	0,053	0,0579	0,387	0,24	2 489
Venus	4,83	0,815	0,108	0,723	0,62	6 052
Erde	5,98	1,000	0,149	1,00	1,00	6 378
Mars	0,637	0,107	0,228	1,52	1,88	3 398
Jupiter	1 900,0	318,00	0,778	5,20	11,9	71 398
Saturn	567,0	95,22	1,43	9,54	29,5	60 330
Uranus	88,0	14,55	2,87	19,2	84,0	25 400
Neptun	103,0	17,23	4,50	30,1	165,0	24 300
Pluto	0,66	0,11	5,91	39,4	248,0	1 100
zum Vergleich						
Sonne	1 989 000,0	332 600,0	-	-	-	696 000
Mond	0,0735	0,012	-	-	-	1 738

Die wichtigsten Daten der Planeten des Sonnensystems und einige Vergleichsdaten

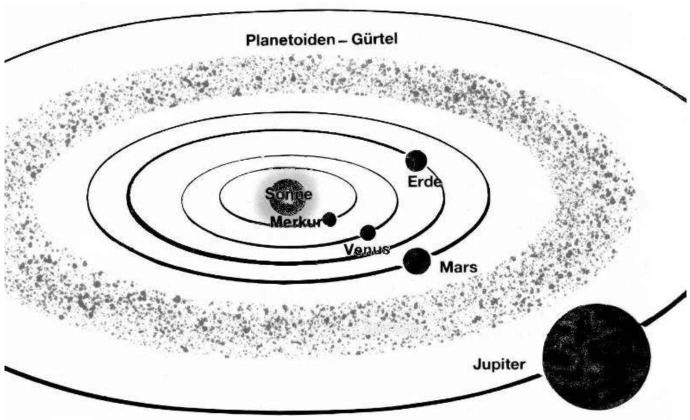


Abbildung 19: So sehen die Planetenbahnen in unserem Sonnensystem aus.

7 Zur Theorie der Epidemien
(Margret Heckmann)

7.1 Differentialgleichungen mit verzögertem Argument

7.1.1 Definition. *Sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Eine Differentialgleichung mit verzögertem Argument oder Differenzendifferentialgleichung ist eine Gleichung der Form*

$$y'(t) = f\big(t, y(t), y(t-\omega)\big) \qquad (t > t_0),$$

worin $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\omega > 0$ eine Konstante bezeichnet. Gesucht ist dabei die Funktion $y : (t_0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Anhand des Beispiels

$$y'(t) = y(t-1) \qquad (t > t_0)$$

soll nun die typische Vorgehensweise beim Lösen von Differenzendifferenzialgleichungen aufgezeigt werden. Um die gesuchte Funktion $y(t)$ herauszufinden, muss man bereits die Werte $y(t)$ für $t_0 - 1 < t \leq t_0$ kennen. Dieser Tatsache wird durch die Vorgabe einer stetigen Funktion $g : [t_0 - 1, t_0] \to \mathbb{R}$ und die Forderung der "Anfangsbedingung" $y|_{[t_0-1,t_0]} = g$ Rechnung getragen.
Konkret sei nun $t_0 = 0, y \equiv 0$ auf $[-1, 0]$. Dann folgt

$$y'(t) = y(t-1) = 1 \quad \text{auf } [0,1] \quad \Rightarrow \quad y(t) = t + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Da die gesuchte Lösung y stetig sein soll, fordern wir:

$$\lim_{t \uparrow 0} y(t) = 1 = \lim_{t \downarrow 0} y(t) = c.$$

Dies legt die Konstante c eindeutig fest und wir erhalten schließlich

$$y(t) = 1 + t \quad \text{auf } [0,1].$$

Im Intervall $[1, 2]$ ist dann

$$y'(t) = y(t-1) = 1 + (t-1) \quad \Rightarrow \quad y(t) = t + \frac{1}{2} \cdot (t-1)^2 + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Wiederum erhalten wir aus der Stetigkeitsforderung eine Bestimmungsgleichung für c:

$$\lim_{t \uparrow 1} y(t) = 2 = \lim_{t \downarrow 1} y(t) = 1 + c.$$

Hieraus folgt $c = 1$ und demnach

$$y(t) = 1 + t + \frac{1}{2} \cdot (t-1)^2 \quad \text{auf } [1,2].$$

Die Vorgehensweise im Intervall $[2, 3]$ ist nun klar: Für $t \in [2, 3]$ ist

$$y'(t) = y(t-1) = 1 + (t-1) + \frac{1}{2} \cdot (t-2)^2$$

und demnach

$$y(t) = t + \frac{1}{2} \cdot (t-1)^2 + \frac{1}{6} \cdot (t-2)^3 + c \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Das gleiche Argument wie oben führt auf $\lim_{t\uparrow 2} y(t) = \frac{7}{2} = \lim_{t\downarrow 2} y(t) = \frac{5}{2} + c$ und somit $c = 1$. Es folgt

$$y(t) = 1 + t + \frac{1}{2} \cdot (t-1)^2 + \frac{1}{6} \cdot (t-2)^3 \quad \text{auf } [2,3]$$

Dieses Verfahren kann dann völlig analog und beliebig oft fortgesetzt werden, so dass sich schließlich (per Induktion) die folgende Formel ergibt:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{m+1} \frac{(t-j+1)^j}{j!} \qquad (m \leq t \leq m+1).$$

Beachte: Die Ableitung $y'(t)$ ist keine stetige Funktion, da sie z.B. bei $t = 0$ unstetig ist:

$$\lim_{t\uparrow 0} y'(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\downarrow 0} y'(t) = 1.$$

Ab $t = 2$ treten nur noch Unstetigkeitsstellen in den höheren Ableitungen auf.

In diesem Beispiel existiert die Lösung für alle $t > 0$. Die explizite Formel für die Lösung y lässt von ihrer Struktur her Ähnlichkeiten mit der Exponentialreihe erkennen.

Die Vorgehensweise, die bei der Berechnung des obigen Beispiels einer Differenzendifferentialgleichung zum Erfolg geführt hat, ist die folgende: Ausgehend von einer vorgegebenen stetigen Funktion auf dem Intervall $[0,1]$ wurde die Lösung schrittweise auf aufeinanderfolgende Intervalle der Länge 1 ausgedehnt. Die Lösung auf dem jeweils betrachteten Intervall wurde dabei aus der Lösung auf dem vorangehenden Intervall und der Forderung nach der Stetigkeit der Lösung berechnet.

In jedem Intervall wurde dabei eine gewöhnliche Differentialgleichung gelöst, die im allgemeinen Fall nicht linear ist. Wir wenden uns nun der einfachsten Klasse der Differentialgleichungen zu, nämlich den linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten.

7.2 Lineare Differenzendifferentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Diese haben die Form

$$a_0 \cdot y'(t) + b_0 \cdot y(t) + b_1 \cdot y(t-\omega) = f(t) \quad \text{für } t_0 \leq t < \infty$$

mit der zugehörigen "Anfangsbedingung"

$$y(t) = g(t) \quad \text{für } t_0 - \omega \leq t \leq t_0,$$

wobei $a_0, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, vorgegebene Konstanten und $f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g : [t_0 - \omega, t_0] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen bezeichnen. Gehen wir wie im vorangehenden Beispiel vor, so werden wir auf die gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und stetiger rechter Seite

$$a_0 \cdot y'(t) + b_0 \cdot y(t) = f(t) - b_1 \cdot g(t-\omega) \quad \text{mit } t \in [t_0, t_0 + \omega]$$

geführt. Das Lösen dieser Gleichung erfolgt zunächst durch Trennung der Variablen und Variation der Konstanten. Eindeutig wird die Lösung durch die Forderung einer Anfangsbedingung; wir wählen die Anfangsbedingung

$$y(t_0) = \lim_{t\uparrow t_0} y(t),$$

die gerade zur Stetigkeit von y im Punkt t_0 und damit auf $[t_0 - \omega, t_0 + \omega]$ äquivalent ist. Genau wie im Beispiel aus dem letzten Abschnitt lässt sich nun eine Lösung y

schrittweise auf die Intervalle $[t_0-\omega, t_0+n\omega]$ $(n \in \mathbb{N})$ ausdehnen, indem man sukzessive für $n \in \mathbb{N}$ die Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} a_0 \cdot y'(t) + b_0 \cdot y(t) &= f(t) - b_1 \cdot y(t-\omega) \quad (t \in [t_0 + n\omega, t_0 + (n+1)\omega]) \\ y(t_0 + n\omega) &= \lim_{t \uparrow t_0 + n\omega} y(t) \end{aligned}$$

löst. Die so konstruierte Funktion $y : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig und erfüllt die Differenzialgleichung

$$y'(t) = \frac{-b_0 \cdot y(t) - b_1 \cdot y(t-\omega) + f(t)}{a_0} \quad \text{für } t \in [t_0, \infty) \setminus \{t_0 + n\omega : n \in \mathbb{N}\}$$

Nun ist die rechte Seite jedoch stetig auf dem ganzen Intervall $[t_0, \infty)$; insbesondere stimmen in den Nahtstellen $t_0 + n\omega$ $(n \geq 1)$ die linksseitige und rechtsseitige Ableitung von y überein. Als einfache Anwendung des Mittelwertsatzes folgt dann, dass y auch in den Nahtstellen differenzierbar und damit sogar stetig differenzierbar auf ganz (t_0, ∞) ist.

Laut Anfangsbedingung ist $y = g$ auf $[t_0 - \omega, t_0]$. Es stellt sich nun die Frage, wann y aufgefasst als Funktion $y : [t_0 - \omega, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist (oder äquivalent, wann y in t_0 stetig ist). Hierfür soll zumindest eine hinreichende Bedingung formuliert werden: Wir setzen voraus, dass g auf $[t_0 - \omega, t_0]$ stetig differenzierbar ist. Für die linksseitige bzw. rechtsseitige Ableitung von y in t_0 folgt dann:

$$\begin{aligned} a_0 y'(t_0^-) &= a_0 g'(t_0^-) \\ a_0 y'(t_0^+) &= f(t_0) - b_0 g(t_0) - b_1 g(t_0 - \omega). \end{aligned}$$

Aus dem Mittelwertsatz schließen wir, dass *stetige* Differenzierbarkeit von y im Punkt t_0 genau dann vorliegt, wenn die beiden rechten Seiten übereinstimmen.

7.3 Theorie der Epidemien

Modell

Eine Population denken wir uns immer bestehend aus den vier Klassen

I = infektiöse Individuen
E = infizierbare und der Ansteckung ausgesetzte Individuen
S = empfängliche, aber noch keiner Ansteckung ausgesetzte Indivduen
R = immunisierte oder bereits gestorbene Indivduen

zusammengesetzt. Es bezeichne weiter $I(t)$, $E(t)$, $S(t)$ und $R(t)$ die relative Häufigkeit der Individuen der entsprechenden Klasse zur Zeit $t \geq 0$ bezogen auf die Gesamtpopulation. Zum Zeitpunkt $t = 0$ seien die Klassen E und R leer. Hinzu kommt, dass ein Individuum nicht nach belieben von einer Klasse in eine andere wechseln kann; es sind vielmehr sinnvollerweise nur bestimmte Übergänge erlaubt. Formalisiert ergibt sich folgender Rahmen:

- $t \geq 0$
- Erlaubte Übergänge sind: $S \to E \to I \to R$.
- $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = 1$ für $t \geq 0$
- $E(0) = 0 = R(0)$

Regeln

Regel 1
Ein Individuum, das zur Zeit t infektiös wird, geht zum Zeitpunkt $t + \omega$ in die Klasse R über.

Regel 2
Ein Individuum geht erst dann von E nach I über, wenn die Dosis $m > 0$ aufgenommen wurde. Wenn es zum Zeitpunkt t_1 in die Klasse E eintritt wird es infektiös zum frühesten Zeitpunkt t mit

$$\rho \int_{t_1}^{t} I(\tau) d\tau = m$$

$\rho > 0$ ist eine Konstante, die spezifisch für eine bestimmte Krankheit ist.

Regel 3
Der Anteil der Individuen, die zu einem Zeitintervall Δt der Infektion erstmalig ausgesetzt sind, sei proportional zu I und S, d.h.:

$$\Delta S = -rI(t)S(t)\Delta t,$$

wobei r wiederum eine krankheitsspezifische Konstante ist. (Grundgedanke dieses Ansatzes ist folgender: Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei sich zufällig treffenden Individuen eines infektiös und das andere bloß empfänglich ist, ist gerade $2I(t)S(t)$.) In differentieller Form geschrieben lautet die obige Differenzengleichung

$$S'(t) = -rI(t)S(t).$$

Regel 4
Die Vorgeschichte infektiöser Individuen soll Berücksichtigung finden durch Vorgabe einer stetigen, monoton wachsenden Funktion $I_0(t)$ für $t \in [-\omega, 0]$ mit $I_0(-\omega) = 0, I_0(0) = I(0)$, die genau den Anteil (bezogen auf die Gesamtpopulation) der Individuen angibt, die zum Zeitpunkt t schon infektiös waren. Man kann annehmen, dass diese aus einer Population stammen, in der sich die Epidemie schon vorher ausgebreitet hatte. In Einklang mit Regel 1 lassen wir I_0 wie folgt abklingen

$$\begin{aligned} I_0(t) &= I_0(0) - I_0(t-\omega) \quad \text{für } 0 \le t \le \omega \quad \text{und} \\ I_0(t) &= 0 \quad \text{für } \omega < t < \infty. \end{aligned}$$

Für $t > 0$ ist dann $I_0(t)$ die relative Häufigkeit infektiöser Individuen aus der Anfangsklasse.

Verlauf der Epidemie

Ist die Bedingung

$$\rho \int_{t_1}^{t} I(\tau) d\tau = m$$

für kein $t \ge 0$ erfüllt, so breitet sich die Infektion (nach Regel 2) nicht aus.
Im Folgenden nehmen wir an, obige Bedingung sei für ein $\tilde{t} \ge 0$ erfüllt. Setze dann

$$t_0 = \min \left\{ 0 \le t \le \tilde{t} : \rho \int_0^t I_0(\tau) d\tau = m \right\}.$$

Die Zahl t_0 ist also die kleinste Zeit, in der eine Ansteckung möglich ist. Diese Minimum t_0 existiert, da die Menge beschränkt und abgeschlossen, also kompakt ist. Wir unterscheiden verschiedene Abschnitte:

Der Verlauf für $t \in [0, t_0]$:

Nach Definition von t_0 und Regel 2 kann hier der Übergang $E \to I$ (Ansteckung) nicht stattfinden. Ein Individuum braucht nämlich mindestens die Zeit t_0, um die nötige Dosis aufzunehmen und infiziert zu werden. Der Übergang von $I \to R$ (Immunisierung/Tod) findet jedoch (nach Regel 1) statt. Daher gilt

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0(t) \quad \text{auf } [0, t_0] \quad \text{und} \\ R(t) &= I_0(t-\omega) \quad \text{auf } [0, t_0] \quad \text{(Regel 1).} \end{aligned}$$

Da $E(0) = 0$ und der Übergang $S \to E$ nicht reversibel ist, gilt $E(t) + S(t) = S(0)$ auf $[0, \infty]$, also

$$E(t) = S(0) - S(t) \qquad (t \in [0, \infty)).$$

Aus Regel 3 folgt unmittelbar die Gültigkeit der Differentialgleichung

$$S'(t) = -rI(t)S(t) = -rI_0(t)S(t) \quad \text{auf } [0, t_0].$$

Löst man diese Differentialgleichung durch Trennung der Variablen, so erhält man

$$S(t) = S(0) \exp\left(-r \int_0^t I_0(\tau) d\tau\right).$$

Wir setzen

$$\kappa = e^{\frac{mr}{\rho}}.$$

Nach Regel 2 und Definition von t_0 ist $S(t_0) = S(0) \exp[-r \int_0^{t_0} I_0(\tau) d\tau] = S(0) \exp[-r \frac{m}{\rho}]$. Aus der Definition von κ folgt sofort die Beziehung

$$S(t_0) = \frac{S(0)}{\kappa}.$$

Da der Übergang von S nach E nicht reversibel ist, liegt es nahe, S als streng monoton fallend anzunehmen. Dies bedeutet

$$S(t_0) < S(0) \quad \Leftrightarrow \quad \kappa > 1.$$

Der Verlauf für $t \in [t_0, \infty)$:

Die Funktion S wird sinnvollerweise als stetig (sogar differenzierbar, vgl. Regel 3) und monoton fallend angenommen. Ferner gilt: $\kappa S(t_0) = S(0)$ und $\kappa > 1$. Ist also $t \geq t_0 \Rightarrow S(t) \leq \kappa S(t) \leq \kappa S(t_0) = S(0)$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert nun ein $\sigma(t)$ wie folgt:

$$\sigma(t) = \min\{0 \leq \sigma \leq t : S(\sigma) = \kappa S(t)\}.$$

Für dieses $\sigma(t)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\rho\int_{\sigma(t)}^{t} I(\tau)d\tau &= \rho\int_{\sigma(t)}^{t}\frac{1}{-r} - rI(\tau)d\tau \\
&= \rho\int_{\sigma(t)}^{t}\frac{1}{-r}\frac{S'(t)}{S(t)}d\tau \qquad \text{da } S'(\tau) = -rI(\tau)S(\tau) \\
&= -\frac{\rho}{r}[\log(S(\tau))]_{\sigma(t)}^{t} \\
&= -\frac{\rho}{r}[\log(S(t)) - \log(S(\sigma(t)))] \\
&= -\frac{\rho}{r}\log[\frac{S(t)}{S(\sigma(t))}] \\
&= -\frac{\rho}{r}\log[e^{-\frac{rm}{\rho}}] \qquad \text{da } \frac{S(t)}{S(\sigma(t))} = \frac{1}{\kappa} \\
&= -\frac{\rho}{r}(-\frac{rm}{\rho}) \\
&= m.
\end{aligned}$$

Wir halten also fest:

$$\rho\int_{\sigma(t)}^{t} I(\tau)d\tau = m.$$

- **Verlauf für $t \in [t_0, t_0 + \omega)$:**

In diesem Intervall werden (nach Regel 1) nur Individuen aus I_0 immun. Die infektiöse Population zur Zeit t besteht aus denjenigen Individuen der Anfangspopulation, die zur Zeit t noch infektiös sind, und denjenigen Individuen, die zwischen 0 und $\sigma(t)$ den Übergang $S \to E$ vollzogen haben (nach obiger Eigenschaft von $\sigma(t)$ und Regel 2):

$$\begin{aligned}
I(t) &= I_0(t) + S(0) - S(\sigma(t)) \\
&= I_0(t) + S(0) - \kappa S(t) \qquad \text{(wegen Def. von } \sigma(t)).
\end{aligned}$$

Dies setzen wir in Regel 3 ein und es folgt:

$$\begin{aligned}
S'(t) &= -r(I_0(t) + S(0) - \kappa S(t))S(t) \\
&= -r(I_0(t) + S(0))S(t) + r\kappa S^2(t).
\end{aligned}$$

Die zugehörige Anfangsbedingung zu dieser Differentialgleichung ergibt sich aus der Beziehung:

$$S(t_0) = \frac{S(0)}{\kappa}.$$

Die gegebene Riccatische Differentialgleichung kann nun durch die Substitution $S = \frac{1}{u}$ in eine lineare Gleichung u überführt werden.

$$\begin{aligned}
S'(t) &= -r(I_0(t) + S(0))S(t) + r\kappa S^2(t) \\
\Leftrightarrow -\frac{u'}{u^2} &= -r(I_0(t) + S(0))\frac{1}{u} + r\kappa\frac{1}{u^2}
\end{aligned}$$

Zu lösen bleibt also das Anfangswertproblem

$$u' - r(I_0(t) + S(0))u = -r\kappa, \qquad u(t_0) = \frac{\kappa}{S(0)}.$$

Dies wird nun gelöst durch Trennung der Variablen (homogene Gleichung), Variation der Konstanten (inhomogene Gleichung) und Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingung. Die Lösung, die man dann erhält lautet:

$$u(t) = \exp\left(r\int_{t_0}^{t} h(x)dx\right)\left[\frac{\kappa}{S(0)} - r\kappa\int_{t_0}^{t}\exp\left(-r\int_{t_0}^{\tau} h(x)dx\right)d\tau\right]$$

mit $h(t) = I_0(t) + S(0)$. Aus der Differentialgleichung für u lässt sich leicht ableiten, dass stets $u'(t) \geq 0$ gelten muss: Wegen $I_0 \geq 0$ haben wir nämlich die Abschätzung

$$u' \geq rS(0)u - r\kappa \qquad \text{mit} \quad u(t_0) = \frac{\kappa}{S(0)}.$$

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $I_0(t_0) > 0$ ist. Gäbe es dann ein $t_1 > t_0$ mit $u(t_1) < \frac{\kappa}{S(0)}$, so würde u wegen $u'(t_0) = r(I_0(t) + S(0))\frac{\kappa}{S(0)} - r\kappa > 0$ sein globales Maximum auf $[t_0, t_1]$ sicher in einem inneren Punkt $\tilde{t} \in (t_0, t_1)$ annehmen. Dort müsste dann $0 = u'(\tilde{t}) \geq rS(0)u(\tilde{t}) - r\kappa$ gelten, d.h. $u(\tilde{t}) \leq \frac{\kappa}{S(0)}$. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass bereits der Anfangswert $u(t_0) = \frac{\kappa}{S(0)}$ ist und u wegen $u'(t_1) > 0$ zunächst streng monoton wächst. Wir haben also gezeigt: $u \geq \frac{\kappa}{S(0)}$ und damit $u' \geq 0$. Dies impliziert, dass u monoton wächst, also $S = \frac{1}{u}$ monoton fällt, wie erwartet. (Mit geringem Mehraufwand kann man bei obiger Argumentation auch auf die Forderung $I_0(t_0) > 0$ verzichten.)

• **Verlauf für** $t \in [t_0 + \omega, \infty)$**:**
Hier ist $I_0(t) \equiv 0$ (siehe Regel 4). Ein Individuum, das zu $I(t)$ gehört, muss vor $\sigma(t)$ von $S \to E$ gewechselt sein (siehe Def. von $\sigma(t)$). Das Individuum, das vor $\sigma(t-\omega)$ von $S \to E$ gewechselt ist, ist zur Zeit t schon immun (nach Def. $\sigma(t)$ und Regel 1). Die zum Zeitpunkt t infektiösen Individuen sind also genau diejenigen, die im Intervall $[\sigma(t-\omega), \sigma(t)]$ den Übergang von $S \to E$ vollzogen haben. Nach Definition von $\sigma(t)$ ist also

$$I(t) = S(\sigma(t-\omega)) - S(\sigma(t)) = \kappa(S(t-\omega) - S(t)).$$

Aus Regel 3 folgt:

$$S'(t) = -r\kappa S(t)(S(t-\omega) - S(t)) \qquad (t_0 + \omega \leq t \leq \infty)$$

Löse nun induktiv auf Intervallen $[t_0 + \nu\omega, t_0 + (\nu+1)\omega]$ mit $\nu = 1, 2, \ldots$ als Riccatische Differentialgleichung (vgl. den Abschnitt über Differentialgleichungen mit verzögertem Argument). Beachte: Ist $S(\hat{t}) = 0$ für ein $\hat{t}$, so löst $S \equiv 0$ für $t \geq \hat{t}$ die gegebene Differentialgleichung. Hat also eine Lösung S eine Nullstelle $\hat{t}$, so bleibt sie aus Eindeutigkeitsgründen auch für $t \geq \hat{t}$ identisch Null. Ferner kann man ähnlich wie oben zeigen, dass S tatsächlich monoton fällt.

Insgesamt wissen wir also nun, dass $S(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, \infty)$ und dass S monoton fällt. Aus diesen Erkenntnissen folgt dann, dass der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} S(t) = \bar{S}$ existiert. Man kann zeigen (vgl. Hadeler [5], §60, dass sich dieser Grenzwert $\bar{S}$ als die kleinere der beiden Lösungen der Gleichung

$$\bar{S} = S(0)\exp(r\kappa\omega\bar{S} - r\omega S(0) - q),$$

ergibt. Hierbei ist

$$q = r\int_0^\omega I_0(t)dt$$

ein Maß für die Infektionsfähigkeit der anfangs eingeschleppten infizierten Individuen.

8 Partielle Differentialgleichungen I

(Matthias Horbach)

8.1 Vorbemerkungen

Was ist eine partielle Differentialgleichung?

Hat man eine Funktion u in mehreren unabhängigen reellen Variablen, so kann man Differentialgleichungen bilden, in denen partielle Ableitungen dieser Funktion vorkommen.

Mathematisch ist die Situation folgende: Gegeben sei eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie eine i.Allg. stetige, $\mathbb{R}^l$-wertige, auf einer "geeigneten" Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n \cdot m} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^k \cdot m}$ definierte Funktion φ gegeben. Gesucht ist eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, welche die Relation

$$\varphi\left(x, u(x), Du(x), \ldots, D^k u(x)\right) \equiv 0 \qquad (x \in \Omega)$$

erfüllt. Allgemein nennt man eine Beziehung dieser Art eine partielle Differentialgleichung für u. Im Sonderfall $n = 1$ ist $\Omega \subset \mathbb{R}$ und man erhält eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Anwendungsgebiete und Beispiele

Warum sind diese Gleichungen so interessant? Partielle Differentialgleichungen kommen in vielen Bereichen vor. An außermathematischen Anwendungsgebieten zu nennen sind beispielsweise

- Physik (Maxwell-Gleichungen, Relativistik)
- Ingenieurwissenschaften (plastisches / elastisches Materialverhalten)
- Ökonomie.

Innermathematisch treten sie in natürlicher Weise in den beiden Disziplinen

- Variationsrechnung und
- Differentialgeometrie

auf. Beispiele für "einfache", aber dennoch in Theorie und Anwendung bedeutsame partielle Differentialgleichungen sind etwa gegeben durch

$$\begin{aligned} u_x + u_y &\equiv 0 && \text{(Transportgleichung)} \\ \Delta u := u_{xx} + u_{yy} &\equiv 0 && \text{(Laplace-Gleichung)} \\ u_{tt} - \Delta u &\equiv 0 && \text{(Wellengleichung)} \\ u_{tt} - u_{xxxx} &\equiv 0 && \text{(Gleichung eines schwingenden Stabes).} \end{aligned}$$

Auf die ersten drei wird in diesem wie im nächsten Vortrag noch genauer eingegangen werden.

In Differentialgeometrie und Architektur ist es beispielsweise oft interessant, für gegebene Randfunktionen eines zusammenhängenden Gebietes herauszufinden, wie eine Fläche minimaler Größe in diese eingebettet werden kann. Auch dieses Problem lässt sich durch eine partielle Differentialgleichung beschreiben. Mit den Lösungen dieser Gleichung lassen sich z.B. die Form einer Seifenblase über einem Drahtrahmen oder das Dach des Münchener Olympiastadions beschreiben.

Praktisch die gesamte Physik des Elektromagnetismus (abgesehen von Quanteneffekten) wird beschrieben durch die *Maxwell-Gleichungen* (hier im Vakuum und im statischen Fall)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= 0 \\ \operatorname{div} E &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \operatorname{div} B &= 0 \\ \operatorname{rot} B &= \mu_0 j, \end{aligned}$$

wobei E das elektrische Feld, B das magnetische Feld, j die Stromdichte, ρ die Ladungsdichte und ϵ_0, μ_0 Naturkonstanten sind. Die Gleichung $\operatorname{rot} E = 0$ bedeutet dabei beispielsweise, dass das elektrische Feld wirbelfrei ist, $\operatorname{div} B = 0$, dass das magnetische Feld keine Quellen und Senken hat. Weiter wollen wir allerdings auf die Implikationen der Maxwell-Gleichungen nicht eingehen.

Auch alle weiteren in diesen Kapiteln genannten Beispiele werden aus verschiedenen praktischen Anwendungen heraus motiviert werden, um ein Mindestmaß an Anschaulichkeit zu gewährleisten.

Zum Warmwerden wollen wir nun eine einfache partielle Differentialgleichung lösen: Gesucht sind alle Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto u(x,y)$, die

$$u_{xx} \equiv 0$$

erfüllen. Integration liefert scheinbar

$$u_x = \text{const.}$$

Das stimmt jedoch nicht ganz, da u noch von y abhängt. Damit gilt

$$u_x = f(y)$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine völlig beliebige Funktion der Variablen y sein darf. Integriert man wieder, erhält man schließlich

$$u(x,y) = x \cdot f(y) + g(y)$$

mit beliebigen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. An diesem Beispiel erkennen wir ein Prinzip, das auf praktisch alle partiellen Differentialgleichungen zutrifft: Anders als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erhält man in der allgemeinen Lösung keine Integrationskonstanten sondern *frei wählbare Funktionen.*

8.2 Klassifikation linearer Gleichungen zweiter Ordnung

Die Klasse der partiellen Differentialgleichungen ist wie die der gewöhnlichen Differentialgleichungen sehr reichhaltig. Ist z.B. eine Funktion u in zwei Variablen x, y gesucht, so sind

$$\begin{aligned} u_x + u_y &\equiv 0 \\ u_x + y u_y &\equiv 0 \\ u_x + x u_y &\equiv 0 \end{aligned}$$

recht ähnlich aussehende und doch in ihrem Lösungsverhalten völlig verschiedene partielle Differentialgleichungen. Lösungen sind beispielsweise (in Beibehaltung obiger Reihenfolge)

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= x - y \\ u_2(x,y) &= \frac{y}{e^x} \\ u_3(x,y) &= y - \frac{1}{2}x^2, \end{aligned}$$

wie man durch Nachrechnen verifiziert.

Daher muss man sich wie schon bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen Gedanken über eine sinnvolle Klassifikation machen. Direkt ersichtlich ist die

8.2.1 Definition. *Die* Ordnung *einer partiellen Differentialgleichung bezeichnet den höchsten vorkommenden Ableitungsgrad:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u \equiv 0 &\quad\rightsquigarrow\quad \textit{1. Ordnung} \\ \Delta u \equiv 0 &\quad\rightsquigarrow\quad \textit{2. Ordnung} \\ u_x + u_{xyy} \equiv 0 &\quad\rightsquigarrow\quad \textit{3. Ordnung.} \end{aligned}$$

8.2.2 Definition. Linearität *bedeutet, dass mit zwei Lösungen u, v auch $\lambda u + \mu v$ auch Lösung ist, wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig sind.*

$$\begin{aligned} \Delta u \equiv 0 &\qquad \textit{ist linear,} \\ u_x^2 + u_y \equiv 0 &\qquad \textit{ist nicht linear.} \end{aligned}$$

Im zweiten Fall ist nämlich $u = x - y$ Lösung, $u = 2x - 2y$ aber nicht.

Eine weitere wichtige Problemgröße ist die Anzahl der bestimmenden Gleichungen.

8.2.3 Definition. *Sucht man eine skalare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$, so liegt eine* Gleichung *vor, ansonsten ein* System.

Eine der einfachsten und aus der Analysis allgemein bekannten partiellen Differentialgleichungen ist

$$\operatorname{rot} u \equiv 0,$$

die eine notwendige Voraussetzung für die Wirbelfreiheit eines Vektorfeldes $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ist ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen). Sie bildet ein System, das in folgender Art dargestellt werden kann:

$$\operatorname{rot} u = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Besonders häufig treten partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf. Wie bei algebraischen Gleichungen ist es möglich, innerhalb dieser Klasse verschiedene Typen zu unterscheiden. Als Leitbild vor Augen haben wir dabei die algebraischen Gleichungen zweiter Ordnung $x^2 + y^2 = 1$ (Kreis), $x^2 - y^2 = 1$ (Hyperbel) und $x^2 - y = 0$ (Parabel).

Wir betrachten hier den Fall einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von zwei Variablen x, y. Eine solche partielle Differentialgleichung hat dann die Form

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_x y + a_{22}u_{yy} + a_1 u_x + a_2 u_y + a_0 u \equiv 0, \tag{65}$$

wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass $a_{xx} \neq 0$ ist.

8.2.4 Satz. *Die Gleichung (65) kann mit linearen Variablentransformationen auf eine der folgenden Formen gebracht werden:*

1. *Elliptischer Fall: Ist $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$, so ist (65) reduzierbar zu*
$$u_{xx} + u_{yy} + \ldots \equiv 0.$$
2. *Hyperbolischer Fall: Ist $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$, so ist (65) reduzierbar zu*
$$u_{xx} - u_{yy} + \ldots \equiv 0.$$
3. *Parabolischer Fall: Ist $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ und $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$, so ist (65) reduzierbar zu*
$$u_{xx} + \ldots \equiv 0.$$

Dabei steht jeweils "$\cdots$" für Terme der Ordnung ≤ 1.

Beweis. Wir führen den Beweis exemplarisch für den ersten Fall. O.E. sei $a_{11} = 1$. Zur Vereinfachung setzen wir $a_2 = a_1 = a_0 = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(65) \quad &\iff \quad \partial_x^2 u + 2a_{12}\partial_x\partial_y u + a_{22}\partial_y^2 u \equiv 0 \\
&\iff \quad (\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2)u \equiv 0 \\
&\iff \quad ((\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 - a_{12}^2\partial_y^2 + a_{22}\partial_y^2)u \equiv 0 \\
&\iff \quad ((\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 u + (a_{22} - a_{12}^2)\partial_y^2 u \equiv 0.
\end{aligned}$$

Es seien $b := \sqrt{(a_{22} - a_{12}^2)}$, $x = \xi$ und $y = a_{12}\xi + b\eta$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\partial_\xi u(x,y) &= \partial_x u \cdot 1 + \partial_y u \cdot a_{12} \\
&= (\partial_x + a_{12}\partial_y)u, \\
\partial_\eta u(x,y) &= \partial_x u \cdot 0 + \partial_y u \cdot b \\
&= (b\partial_y)u.
\end{aligned}$$

Einsetzen in obige Gleichung liefert

$$\partial_\xi^2 u + \partial_\eta^2 u \equiv 0.$$

□

Man sieht sofort, dass die Wellengleichung hyperbolisch, die Laplace-Gleichung elliptisch und die sogenannte Wärmeleitungsgleichung oder Diffusionsgleichung in einer Ortsvariablen ($u_t - u_{xx} \equiv 0$) parabolisch ist. Gelöst wird letztere übrigens z.B. durch

$$u(t,x) = e^t(e^x + e^{-x}) \qquad ((t,x) \in \mathbb{R}^2).$$

8.3 Das Dirichlet-Problem und die Temperaturverteilung auf einer kreisförmigen Platte

In diesem Abschnitt betrachten wir eine dünne kreisförmige Platte mit Radius 1 aus einem homogenen Material. Wir stellen uns vor, die Platte liege auf der x-y-Ebene eines dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems, so dass die z-Achse durch die Symmetrieachse der Platte hindurchläuft. Ferner sei die Ausdehnung der Platte in z-Richtung sehr klein gegenüber ihres Durchmessers. Am Rand der Platte wird eine vorgegebene Temperaturverteilung τ angelegt. Wenn die Platte isoliert ist, wird sich irgendwann auf der Platte eine konstante Temperaturverteilung einstellen. Wir wollen untersuchen, wie diese aussieht. Dazu überlegen wir zunächst, wie wir diesen Sachverhalt mathematisch beschreiben können.

Physikalische Herleitung von Wärmeleitungs- und Laplace-Gleichung in drei Dimensionen

Aus der Physik ist bekannt: Will man einen Körper der Masse m und der spezifischen Wärmekapazität c um die Temperatur $\Delta\vartheta$ erwärmen, so benötigt man die Energie

$$\Delta Q = mc\Delta\vartheta. \tag{66}$$

Innerhalb des Körpers mit (konstanter) Wärmeleitfähigkeit λ findet Wärmeaustausch statt. Ein kleines Volumenelement $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ gewinnt (oder verliert) dann in der Zeit Δt eine Energie von

$$\Delta Q \approx \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \vartheta)\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Wegen (66) gilt aber auch

$$\Delta Q = mc\Delta\vartheta = c\rho\Delta x\Delta y\Delta z\Delta\vartheta,$$

also zusammen

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \vartheta) \approx c\rho\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$$

bzw. im Grenzübergang

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \vartheta) = c\rho\partial_t\vartheta.$$

Wegen

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \vartheta) = \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} \vartheta) = \lambda\left(\partial_{xx}\vartheta + \partial_{yy}\vartheta + \partial_{zz}\vartheta\right)$$

schreiben wir auch

$$\partial_{xx}\vartheta + \partial_{yy}\vartheta + \partial_{zz}\vartheta = \frac{c\rho}{\lambda}\partial_t\vartheta. \tag{67}$$

Dies ist die sogenannte *Wärmeleitungsgleichung*.

Nach einiger Zeit wird sich in dem betrachteten Körper ein stationärer Zustand einstellen, so dass kein Wärmefluss mehr stattfindet und daher die zeitliche Ableitung verschwindet:

$$\partial_{xx}\vartheta + \partial_{yy}\vartheta + \partial_{zz}\vartheta \equiv 0. \tag{68}$$

Diese in Mechanik, Wärmelehre und Elektrostatik immer wieder auftauchende partielle Differentialgleichung heißt *Laplace-Gleichung*. Sie ist eine der wichtigsten in der mathematischen Physik.

Die zweidimensionale Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten

Bei unseren Überlegunen zu der kreisförmigen Platte werden wir sinnvollerweise die minimale Ausdehnung in z-Richtung vernachlässigen. Die Platte selbst wird dann beschrieben durch die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Die Aufgabenstellung lautet wie folgt: Zu einer gegebenen stetigen Funktion $\tau : \partial D \to \mathbb{R}$ finde man eine Funktion $\vartheta : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$, $\vartheta \in C(\overline{\mathbb{D}})$ und $\vartheta \in C^2(\mathbb{D})$, welche die Bedingung

$$0 \equiv \Delta\vartheta = \partial_x^2\vartheta + \partial_y^2\vartheta \qquad (\text{auf } \mathbb{D})$$

erfüllt und auf dem Rand gerade die Werte von τ annimmt: $\vartheta|_{\partial\mathbb{D}} = \tau$. Dieses Problem ist als *Dirichletproblem für die Einheitskreisscheibe* bekannt; es ist ein Spezialfall des häufig auftretenden Problems, auf einem gegebenen Gebiet eine harmonische Funktion mit vorgegebenen Randwerten zu finden.

Manchmal möchte man bei zweidimensionalen Problemen lieber in Polarkoordinaten arbeiten, was sich bei dieser rotationsinvarianten Gleichung anbietet. Setzt man dann

$$u(r,\varphi) := \vartheta(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \qquad (r > 0, \varphi \in \mathbb{R}),$$

so geht $\Delta\vartheta = 0$ über in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \equiv 0. \tag{69}$$

Dies ergibt sich einfach durch formales Ausrechnen der zweiten Ableitungen von u nach r bzw. φ. Um die zugehörige Randbedingung in Polarkoordinaten formulieren zu können, setzen wir noch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(\varphi) := \tau(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Lösen der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten

Zurück zu unserer erwärmten Platte. Wie wir gerade gesehen haben, ergibt sich jede Lösung des physikalischen Ausgangsproblems aus einer Lösung u der partiellen Differentialgleichung (69). Aus technischen Gründen nehmen wir den Nullpunkt aus der Betrachtung aus.

Die Aufgabe ist es nun, eine (physikalisch sinnvolle) Lösungsfunktion u zu finden, die für $r \to 0$ gleichmäßig bzgl. φ gegen einen Wert konvergiert, nämlich gegen die Temperatur am Nullpunkt. Außerdem soll die Funktion am Rand gegen die vorgegebene Temperaturverteilung streben:

$$u(r,\varphi) \to f(\varphi_0) \quad \text{für } r \to 1^- \text{ und } \varphi \to \varphi_0. \tag{70}$$

Zuerst betrachten wir den Spezialfall, dass die Lösung nicht von φ abhängt. Die partielle Differentialgleichung (69) geht dann über in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} \equiv 0.$$

Eine Lösung erhält man aus

$$u(r) = c_1 \ln(r) + c_2$$

mit den Integrationskonstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Der Grenzwert $\lim_{r\to 0} u(r)$ existiert genau dann, wenn $c_1 = 0$ ist. Nur eine konstante Funktion $u = c$ kann also Lösung sein.

Für die Herleitung der allgemeinen Lösung von Gleichung (69) bietet sich der Separationsansatz

$$u(r,\varphi) = v(r)w(\varphi)$$

an.

Bezeichnet man Ableitungen nach r mit einem Strich, die nach φ mit einem Punkt, folgt dann nämlich:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \equiv 0 \\
\iff \quad & \frac{\partial}{\partial r}v'w + \frac{1}{r}v'w + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}v\dot{w} \equiv 0 \\
\iff \quad & v''w + \frac{1}{r}v'w + \frac{1}{r^2}v\ddot{w} \equiv 0 \\
\iff \quad & \frac{r^2v'' + rv'}{v} = -\frac{\ddot{w}}{w},
\end{aligned}$$

wenn man annimmt, dass die Division durch $v \cdot w$ erlaubt ist. Da die linke Seite nur noch von r, die rechte nur von φ abhängt, muss gelten:

$$r^2 v'' + rv' = \lambda v \tag{71}$$

$$\ddot{w} = -\lambda w \tag{72}$$

für eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$. Dies sind gewöhnliche Differentialgleichungen!

Alle Lösungen von (69) müssen also diese Bedingung erfüllen.

Allerdings müsen nicht alle Lösungen von (71) und (72) auch die Ausgangsgleichung erfüllen. Zunächst machen wir uns Gedanken über die Wahl von λ. Da wir diesen Spezialfall bereits behandelt haben, wissen wir, dass

$$\dot{w} \not\equiv 0. \tag{73}$$

Außerdem können wir aus physikalischen Gründen offensichtlich annehmen, dass w 2π-periodisch ist. Insbesondere gilt

$$w(0) = w(2\pi) \text{ und } \dot{w}(0) = \dot{w}(2\pi). \tag{74}$$

Daraus ergibt sich

$$\lambda \int_0^{2\pi} w^2 d\varphi \overset{(73)}{=} -\int_0^{2\pi} w\ddot{w} d\varphi = -[w\dot{w}]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \dot{w}^2 d\varphi \overset{(72)}{=} \int_0^{2\pi} \dot{w}^2 d\varphi > 0,$$

also auch $\lambda > 0$. Aus dem Vortrag über Schwingungen wissen wir, dass in diesem Fall die Gleichung (72) gelöst wird durch

$$w(\varphi) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\varphi)$$

mit beliebigen Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Mit (74) folgt daraus

$$\begin{aligned} C_1 &= C_1 \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}2\pi) \\ C_2 &= -C_1 \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}2\pi). \end{aligned}$$

Multiplizieren der ersten Zeile mit C_2, der zweiten Zeile mit C_1 und anschließendes Aufaddieren liefert

$$C_1^2 + C_2^2 = (C_1^2 + C_2^2)\cos(\sqrt{\lambda}2\pi),$$

also $\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) = 1$ und damit $\lambda = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. ($C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ ist wegen (73) auf jeden Fall gegeben.)

Wir sind damit auf die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} r^2 v'' + rv' - n^2 v &\equiv 0 \\ \ddot{w} + n^2 w &\equiv 0 \end{aligned}$$

gestoßen. Die erste Gleichung wird offensichtlich durch $v(r) = r^n$ gelöst, die zweite wie bekannt durch $w(\varphi) = A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)$. Daher wird die Ausgangsgleichung (69) gelöst durch

$$u(r,\varphi) := r^n \left(A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)\right) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Setzt man für $(A_n), (B_n)$ beliebige beschränkte Zahlenfolgen ein, so kann man aus den Potenzreihengesetzen und Konvergenzkriterien ableiten, dass die Reihe

$$u(r,\varphi) := \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)\right) \tag{75}$$

für $0 < r < 1$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ konvergiert und eine C^∞-Funktion ist, also insbesondere (69) löst. Außerdem konvergiert die Funktion für $r \to 0$ gleichmäßig gegen $A_0/2$.

Nun müssen wir diese Lösung noch mit der Randwertfunktion f vereinbaren. Dazu bilden wir zu der stetigen Funktion f die (formale) Fourierreihe

$$f(\varphi) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)),$$

mit

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad \text{für } n \geq 0.$$

Dabei gilt nach dem Satz von Riemann-Lebesgue (vgl. Heuser [6], Satz 134.3) $a_n, b_n \to 0$, so dass wir $A_n := a_n, B_n := b_n$ setzen dürfen. Dann gilt

$$u(r,\varphi) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \overset{r \to 1^-}{\longrightarrow} f(\varphi)$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig (nach einem bekannten Resultat aus der Theorie der Fourierreihen stetiger Funktionen, vgl. Satz 140.3 in Heuser [6]). Auch die Grenzwertforderung (70) ist erfüllt: Wegen (75) existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|u(r,\varphi) - f(\varphi)| < \epsilon/2 \quad \forall r > 1 - \delta, \forall \varphi.$$

Da f auf Kompakta gleichmäßig stetig ist, können wir δ so wählen, dass für beliebiges φ_0 gilt

$$|f(\varphi) - f(\varphi_0)| < \epsilon/2 \quad \text{für } |\varphi - \varphi_0| < \delta.$$

Dann folgt

$$|u(r,\varphi) - f(\varphi_0)| \leq |u(r,\varphi) - f(\varphi)| + |f(\varphi) - f(\varphi_0)| < \epsilon.$$

Damit haben wir den folgenden Satz gezeigt:

8.3.1 Satz. *Das durch die Gleichungen (69) und (70) definierte Randwertproblem der Temperaturverteilung auf einer kreisförmigen Platte besitzt für eine stetige, 2π-periodische Funktion f eine Lösung u in der Reihendarstellung*

$$u(r,\varphi) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \qquad (0 \leq r < 1, 0 \leq \varphi 2\pi),$$

wobei a_n und b_n die Fourierkoeffizienten von f bezeichnen:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \textit{und} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad \textit{für } n \geq 0.$$

Oft ist es unbefriedigend, eine Lösung nur als unendliche Summe angeben zu können. Mit geeigneten Umformungen (wie in Heuser [6], S. 186, angedeutet) lässt sich beispielsweise die oben erhaltene Lösung als Integral angeben:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \varphi) + r^2} dt. \tag{76}$$

Diese Formel ist als die *Poissonsche Integralformel* bekannt. Mit der Reihendarstellung aus dem vorangehenden Satz bzw. der hieraus folgenden Integraldarstellung haben wir im Prinzip explizite Lösungsformeln für das Dirichlet-Problem auf der Einheitskreisscheibe hergeleitet. Indem man das Maximumsprinzip für harmonische Funktionen benutzt (siehe etwa Strauss [9]), kann man zeigen, dass diese Lösung auch eindeutig ist. Insgesamt können wir festhalten:

8.3.2 Satz. (Dirichlet-Problem für die Einheitskreisscheibe) *Es sei eine stetige Funktion $\tau : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann besitzt das Dirichlet-Problem*

$$\Delta\vartheta \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{D} \qquad \text{und} \qquad \vartheta|_{\partial\mathbb{D}} \equiv \tau$$

eine eindeutige Lösung $\vartheta \in C(\bar{\mathbb{D}}) \cap C^2(\mathbb{D})$.

9 Partielle Differentialgleichungen II – Die Wellengleichung
(Alexander Malkis)

9.1 Einige Hilfsmittel aus Analysis

Eines der wichtigsten Hilfsmittel der Physik stellt der Gaußsche Integralsatz dar. Zunächst stellen wir uns eine Flüssigkeit in einem Volumen mit Quellen und Senken vor, durch welche die Flüssigkeit zu- und abfließt. Betrachten wir eine Quelle, so lässt sich die Flussdichte durch ihre Komponenten entlang der Achsen darstellen:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = Pe_x + Qe_y + Re_z,$$

wobei e_x, e_y, e_z die Standard-Einheitsvektoren sind. Die Quelldichte lässt sich dann durch

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)$$

ausdrücken. Die Ergiebigkeit dieser Quelle in einem Volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ kann man als Produkt der Flussdichte mit dem Volumen auffassen:

$$(\mathrm{div}\mathbf{F})\Delta x \Delta y \Delta z$$

Betrachten wir die Ergiebigkeit im ganzen Volumen, so müssen wir über alle Quellen integrieren:

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{F} \quad dxdydz \tag{77}$$

Die erzeugte Flüssigkeit läuft aber über den Rand. Da uns nur die zum Rand senkrechte Komponente interessiert, projizieren wir auf die Normale ν und integrieren über den Rand, um die gesamte Ergiebigkeit auszurechnen:

$$\int_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \nu \rangle \; dS \tag{78}$$

Da die Flüssigkeit entweder durch Quellen und Senken oder über den Rand läuft, müssen beide Integrale gleich sein. Verallgemeinert auf das mehrdimensionale Problem erhalten wir

9.1.1 Satz. (Integralsatz von Gauß) *Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld und $U \supset V$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ die Beziehung*

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{F}(x) d^n x = \int_{\partial V} \langle \mathbf{F}(x), \nu(x) \rangle \; dS(x).$$

Für einen Beweis des Satzes verweisen wir auf Forster [3] (§15, Satz 3). Als einfache Folgerung – indem man nämlich für $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld $\mathbf{F} = \mathrm{grad}\mathbf{g}$ einsetzt – erhält man den folgenden Spezialfall der Greenschen Formel:

9.1.2 Korollar. *Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld und $U \supset V$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede C^2-Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ die Identität*

$$\int_V \Delta g \, dx = \int_{\partial V} \frac{\partial F}{\partial \nu} \, dS.$$

Ein weiteres unerlässliches Hilfsmittel stellt die Transformationsformel dar.

9.1.3 Satz. (Transformationsformel) *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $\Psi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion $(f \circ \Psi) \cdot |\det \Psi'|$ über U integrierbar ist und es gilt dann:*

$$\int_V f\,dx = \int_U f(\Psi(u))|\det \Psi'(u)|\,du.$$

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes (die hier nicht angegeben werden soll) lässt sich anwenden, um Integrale über die Kugeloberfläche auszuwerten. Hierzu benutzen wir Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\aleph\, \cos\beth \\ y &= r \sin\aleph\, \sin\beth \\ z &= r \cos\aleph, \\ \text{mit } r &\geq 0,\ 0 \leq \aleph < \pi,\ 0 \leq \beth < 2\pi. \end{aligned}$$

Wir setzen also

$$\Psi(r, \aleph, \beth) := \begin{pmatrix} r \sin\aleph\, \cos\beth \\ r \sin\aleph\, \sin\beth \\ r \cos\aleph, \end{pmatrix}$$

und daher

$$\det \Psi'(r, \aleph, \beth) = \begin{vmatrix} \sin\aleph\, \cos\beth & r\cos\aleph\, \cos\beth & -r\sin\aleph\, \sin\beth \\ \sin\aleph\, \sin\beth & r\cos\aleph\, \sin\beth & r\sin\aleph\, \cos\beth \\ \cos\aleph & -r\sin\aleph & 0 \end{vmatrix} = -r^2 \sin\aleph.$$

9.1.4 Korollar. (Kugelkoordinatentransformation) *Sei $f : S_r^2 \to \mathbb{R}$ stetig auf der Oberfläche $S_r^2 \subset \mathbb{R}^3$ der 3-dimensionalen Kugel $U(0, r) \subset \mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt 0 und Radius $r > 0$. Dann gilt:*

$$\iint_{|x|=r} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,dS = r^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\Psi(\aleph, \beth)) \sin\aleph\, d\aleph\, d\beth.$$

9.1.5 Definition. (Integralmittel) *Wir betrachten nur Integralmittel über die Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel $U(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$. Wir setzen*

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial U(x,r)} u\,dS,$$

wobei ω_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet. Insbesondere für 3 Dimensionen gilt:

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial U(x,r)} u\,dS.$$

9.2 Die Transportgleichung

Die einfachste partielle Differentialgleichung ist wohl die Transportgleichung, die wir gleich in allgemeiner Form hinschreiben:

$$\begin{aligned} u_t + \langle b, Du \rangle &= f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{79}$$

wobei $b \in \mathbb{R}^n$ fest, $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gesucht, $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})^t$ der Gradient von u bezüglich der Ortskoordinaten, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ im homogenen Fall Null ist und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Randbedingung zum Zeitpunkt $t = 0$.
Fassen wir $u(x,t)$ als Stoffmenge im Punkte x zur Zeit t auf, so sagt uns die homogene Transportgleichung $u_t = \langle -b, Du \rangle$, dass je stärker sich die Funktion Nahe x räumlich ändert, desto stärker wir diese Änderungen mit dem Zeitverlauf fühlen, d.h. mit dem Transport des Stoffes. Als Proportionalitätsfaktor dient b, welcher für jede Richtung eine andere Proportionalitätskonstante angeben darf.

Um die inhomogene Transportgleichung (79) zu lösen, halten wir einen Punkt $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ fest und definieren folgende Funktion:

$$z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad z(s) = u(x + sb, t + s).$$

Berechnen wir nun die Ableitung von z, so folgt:

$$\begin{aligned} z'(s) &= u'(x+sb, t+s) \cdot (x+sb, t+s)' = \\ &= (u_{x_1}(x+sb,t+s), \dots, u_{x_n}(x+sb,t+s), u_t(x+sb,t+s)) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \langle Du(x+sb,t+s), b \rangle + u_t(x+sb,t+s) = f(x+sb,t+s), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung nach Definition von u gilt. Daher gilt für diesen Punkt (x,t)

$$\begin{aligned} u(x,t) - g(x-bt) &= z(0) - z(-t) = \int_{-t}^{0} z'(s)\, ds = \\ &= \int_{-t}^{0} f(x+sb, t+s)\, ds = \int_{0}^{t} f(x+(s-t)b, s)\, ds. \end{aligned}$$

Existiert also eine Lösung, so ist sie von der Form:

$$\boxed{u(x,t) = g(x-bt) + \int_0^t f(x+(s-t)b, s)\, ds.} \tag{80}$$

Umgekehrt zeigt man durch Nachrechnen, dass die so definierte Funktion u in der Tat eine Lösung ist. Im Falle der homogenen Transportgleichung ist die Lösung besonders einfach, da der Integralterm wegfällt. Diese Formel werden wir benutzen, um die eindimensionale Wellengleichung zu lösen.

9.3 Herleitung der Wellengleichung

Die Wellengleichung ist ein einfaches Modell für eine schwingende Saite ($n = 1$), für eine Membran ($n = 2$) oder einen elastischen Körper ($n = 3$). Die gesuchte Funktion $u(x,t)$ stellt die Auslenkung eines Punktes x zu einem Zeitpunkt $t \geq 0$ dar. Die Funktion muss auf einer offenen Teilmenge U gefunden werden. Nun leiten wir die Wellengleichung her. Sei $V \subseteq U$ ein beliebiges glattberadnetes beschränktes Gebiet. Die Beschleunigung eines Punktes ist die zweimalige Ableitung nach der Zeit, und um die Beschleunigung auf ganz V zu bekommen, integrieren wir. Die Differentiation und Integration darf man hier vertauschen:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_V u\, dx = \int_V u_{tt}\, dx.$$

Die Kraft, die durch den Rand auf V wirkt, sei punktweise $\mathbf{F}$, und die Gesamtkraft ist daher:

$$-\int_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \nu \rangle \, d\sigma.$$

Nach dem zweiten Newtonschen Axiom ist die Kraft proportional zur Beschleunigung. Setzen wir die Stoffdichte auf 1, so erhalten wir:

$$\int_V u_{tt} \, dx = -\int_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \nu \rangle \, d\sigma.$$

Wir formen den rechten Teil der Gleichung nach dem Satz von Gauss um:

$$\int_V u_{tt} \, dx = -\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx.$$

Da V am Anfang beliebig war, erhalten wir

$$u_{tt} = -\operatorname{div} \mathbf{F}.$$

Für elastische Körper ist $\mathbf{F}$ eine Funktion des Orts-Gradienten der Auslenkung:

$$u_{tt} + \operatorname{div} \mathbf{F}(Du) = 0.$$

Für kleinen Orts-Gradienten Du verhält sich $\mathbf{F}$ manchmal linear mit einer Proportionalitäts-Konstante $-c, c > 0$:

$$\mathbf{F}(Du) = -c \, Du.$$

Da nach der Anwendung des Divergenzoperators rechts die zweiten Ableitungen nach dem Ort stehen, erhalten wir die Wellengleichung in voller Schönheit:

$$u_{tt} - c\Delta u = 0,$$

wobei Der Laplace-Operator nur nach den Ortsvariablen ableitet.
Eine schon aus der Schule bekannte Lösung der Wellengleichung im eindimensionalen ist z.B. die Funktion $sin(\sqrt{c}t + x)$, welche sich anschaulich als eine fortschreitende Sinuswelle darstellen lässt.

9.4 Lösung der homogenen eindimensionalen Wellengleichung – Die Formel von d'Alembert

Wir lösen folgendes eindimensionales Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = g, \quad u_t(\cdot, 0) &= h \quad \text{auf } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei der Begriff „Wellengleichung“ den positiven Vorfaktor $c^2 > 0$ impliziert (sonst taucht die Gleichung unter dem Namen „Laplace-Gleichung“ auf). g gibt die Auslenkung am Anfang an und h beschreibt die Anfangsgeschwindigkeit. Wir führen dieses AWP auf zwei Transportgleichungen zurück. Wir nehmen an, es gibt eine Lösung, rechnen diese aus und prüfen das Ergebnis. Sei dazu

$$\begin{aligned} v : &\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad \text{definiert durch} \\ v : &= u_t - cu_x \end{aligned}$$

Es gilt dann:

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = u_{tt} - cu_{tx} + cu_{tx} - c^2 u_{xx} = v_t + cv_x,$$

also löst v die homogene Transportgleichung mit der Anfangsbedingung:

$$a(x) := v(x,0) = u_t(x,0) - cu_x(x,0) = h(x) - cg'(x).$$

Die Lösung dieser Transportgleichung erhalten wir mit der Formel (80):
$v(x,t) = a(x-ct)$. Setzen wir die Definition von v ein, erhalten wir eine andere Transportgleichung:

$$u_t(x,t) - cu_x(x,t) = a(x-ct),$$

deren Lösung wieder mit (80) wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= g(x-(-c)t) + \int_0^t a(x+(s-t)(-c)-cs)\,ds \\
&= g(x+ct) + \int_0^t a(x-2cs+ct)\,ds \\
&= g(x+ct) + \int_{y(0)}^{y(t)} a(y)\,ds \quad \text{mit } y(s) = x-2cs+ct, \text{also } s = \frac{x+ct-y}{2c} \\
&= g(x+ct) + \frac{-1}{2c}\int_{x+ct}^{x-ct} a(y)\,dy \\
&= g(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} a(y)\,dy \\
&= g(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y) - cg'(y)\,dy \\
&= g(x+ct) - \frac{1}{2}\left(g(x+ct) - g(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Das heisst, falls eine Lösung u des vorgegebenen Anfangsproblems existiert, hat sie notwendigerweise die Form:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy.} \tag{81}$$

Dass die Formel für u von d'Alembert (81) tatsächlich eine Lösung ist, rechnet man leicht nach. Man bemerke, dass für den Funktionswert $u(x,t)$ die Anfangsgeschwindigkeit genau im Intervall $[x-ct, x+ct]$ und die Anfangsauslenkung auf dessen Rand von Bedeutung ist. Dies stimmt gut mit der Vorstellung überein, dass eine Störung höchstens ct weit Einfluss hat, wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist.

9.5 Lösung der eindimensionalen Wellengleichung auf einem Strahl

Selten haben wir es mit einer unendlich langen schwingenden Saite zu tun. Ein bisschen trickreicher ist das Problem einer endlichen Gitarrensaite. Wir betrachten hier nur das Problem auf einem Strahl $\mathbb{R}_0^+$, um z.B. das Verhalten der elektromagnetischen Wellen zu erfassen:

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 &\quad \text{auf } \mathbb{R}^+ \times (0,\infty) \\
u(\cdot,0) = g, \quad u_t(\cdot,0) = h &\quad \text{auf } \mathbb{R}^+ \\
u(0,\cdot) = 0 &\quad \text{auf } (0,\infty)
\end{aligned}$$

Die zweite Zeile beschreibt die Lage der Saite sowie die Geschwindigkeiten einzelner Punkte am Anfang der Schwingung und die dritte besagt, dass die Saite an einem Ende befestigt ist.
Um dieses Anfangswertproblem zu lösen, setzen wir die Funktionen g und h auf ganz $\mathbb{R}$ ungerade (d.h gespiegelt um die Null) zu $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ fort. Somit dürfen wir d'Alemberts Formel anwenden und erhalten:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+ct) + \tilde{g}(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{h}(y)\,dy.$$

Um im Term nur Funktionen g und h zu haben, führen wir eine Fallunterscheidung durch:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy, & \text{if } x \geq ct \\ \frac{1}{2}(g(ct+x) - g(ct-x) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x} h(y)\,dy, & \text{if } 0 < x < ct \end{cases} \tag{82}$$

Die zweite Formel kommt zustande, wenn wir bemerken, dass die Stammfunktion von $\tilde{h}$ gerade ist und auf dem Bereich $x \geq ct$ mit der Stammfunktion von h übereinstimmt. Die Lösung können wir so verstehen, dass die durch g gegebene Anfangsauslenkung in zwei Teile zerfällt, von denen sich einer nach rechts mit Geschwindigkeit c und der andere nach links mit Geschwindigkeit c ausbreitet. Der letzte spiegelt sich um den Nullpunkt, wo die schwingende Saite festgehalten wird. Die gespiegelte Welle trägt zur Auslenkung der Punkte $x \leq ct$ bei.

9.6 Lösung der Wellengleichung in drei Raumdimensionen

Das Anfangsproblem der homogenen Wellengleichung für n=3 sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) &\text{ auf } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ u(\cdot,0) = g &\text{ auf } \mathbb{R}^3 \\ u_t(\cdot,0) = h &\text{ auf } \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{83}$$

Die Herleitung der Lösung basiert auf der Methode des sphärischen Mittels. Das Mittel von u auf der Sphäre $U(0,r)$, welches wir mit $\bar{u}(r,t)$ bezeichnen, ist das Integral über die Oberfläche geteilt durch die Oberfläche (bis auf eine Konstante):

$$\begin{aligned} \bar{u}(r,t) &:= \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{|x|=r} u(x,t)dS \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin\aleph\, d\aleph\, d\beth. \end{aligned} \tag{84}$$

womit wir die Transformationsformel benutzt haben. Wir zeigen zunächst, dass jede Lösung von $\bar{u}$ die partielle Differentialgleichung

$$(\bar{u})_{tt} = c^2(\bar{u})_{rr} + 2c^2\frac{1}{r}(\bar{u})_r \tag{85}$$

erfüllt. Dazu wenden wir den Divergenzsatz auf die partielle Differentialgleichung (83) an:

$$\iiint_{U(\bar{0},r)} u_{tt}\,dx = c^2\iiint_{U(\bar{0},r)} \Delta u\,dx = c^2\iint_{\partial U(0,r)} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$$

welches wir parametrisiert umschreiben als

$$\begin{aligned}
&\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_{tt} k^2 \sin\aleph\, d\aleph d\beth dk = c^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial u}{\partial n} r^2 \sin\aleph\, d\aleph d\beth \\
\Leftrightarrow & \int_0^r k^2 \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_{tt} \sin\aleph\, d\aleph d\beth dk = c^2 r^2 \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \sin\aleph\, d\aleph d\beth \\
\Leftrightarrow & \int_0^r k^2 \overline{u_{tt}}(k,t) dk = c^2 r^2 \overline{(\frac{\partial u(r,t)}{\partial r})} = c^2 r^2 \frac{\partial \bar{u}(r,t)}{\partial r} \\
\Rightarrow & r^2 \overline{u_{tt}} = c^2 (r^2 \bar{u}_r)_r = c^2 r^2 \bar{u}_{rr} + 2c^2 r \bar{u}_r \\
\Rightarrow & \bar{u}_{tt} = \overline{u_{tt}} = c^2 \bar{u}_{rr} + c^2 \frac{2}{r} \bar{u}_r,
\end{aligned}$$

womit (85) erfüllt wird. Nun definieren wir $v(r,t) := r\bar{u}(r,t)$, dann

$$v_r = \bar{u} + r\bar{u}_r, \quad v_{rr} = \bar{u}_r + \bar{u}_r + r\bar{u}_{rr} = 2\bar{u}_r + r\bar{u}_{rr}$$

womit sich die partielle Differentialgleichung (85) wie folgt schreiben lässt:

$$r\bar{u}_{tt} = c^2 r\bar{u}_{rr} + 2c^2\bar{u}_r \Leftrightarrow \bar{v}_{tt} = c^2 v_{rr}$$

Diese Gleichung ist nur für $r \geq 0$ hergeleitet worden, stellt also ein eindimensionales Anfangswertproblem auf dem Strahl dar. Die Anfangsbedingungen sind:

$$\begin{aligned}
v(0,t) &= 0\bar{u}(0,t) = 0 \\
v(r,0) &= r\bar{u}(r,0) = r\bar{g}(r) \\
v_t(r,0) &= r\bar{u}_t(r,0) = r\bar{h}(r)
\end{aligned}$$

Mit der Lösungsformel (82) erreichen wir die explizite Darstellung von v für $ct \geq r$ (und mit einer ein wenig anderen Formel für $ct < r$):

$$v(r,t) = \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} sh(s)\, ds + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} sg(s)\, ds$$

Wir bestimmen $u(0,t)$:

$$u(0,t) = \bar{u}(0,t) = \lim_{r\to 0} \frac{v(r,t)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{v(r,t) - v(0,t)}{r} = v_r(0,t).$$

Wir sparen uns die Schreibarbeit und betrachten nur den ersten Term von v, mit dem 2. Term arbeiten wir genauso, indem wir „. . . " setzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2c} \left((ct+r)h(ct+r) + (ct-r)h(ct-r) + \dots \right) \\
\Rightarrow & u(0,t) = v_r(0,t) = \frac{1}{2c} \left(2cth(ct) + \dots \right) = th(ct) + \dots \\
\Rightarrow & u(0,t) = t \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \iint_{|x|=ct} h\, dS + \dots = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|x|=ct} h\, dS + \dots
\end{aligned}$$

Nun unterziehen wir diese Gleichung einer Verschiebung, um $u(x_0,t)$ zu ermitteln. Für ein beliebiges festes x_0 setzen wir

$$w(x,t) := u(x + x_0, t).$$

w ist die Lösung des Anfangsproblems zu $g(x + x_0)$ und $h(x + x_0)$. Wenden wir die Lösung für den Nullpunkt auf w an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&u(x0,t) = w(0) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|x|=ct} h(x + x_0)\, dS + \dots = \\
&\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|x-x_0|=ct} h(x)\, dS + \dots
\end{aligned}$$

Die vollständige Lösung sieht wie folgt aus:

$$\boxed{u(x_0,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{|x-x_0|=ct} h(x)\,dS + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{|x-x_0|=ct} g(x)\,dS}$$

Schließlich soll nocht erwähnt werden, dass in zwei Raumdimensionen im Gegensatz zur 3-Dimensionalen Variante die Lösung nicht nur von der Oberfläche der Kugel abhängt, sondern auch von dem Inneren. Das sogenannte Huygensche Prinzip gilt nur in ungerader Anzahl von Dimensionen. Es besagt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit jeder Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung genau gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist, nicht größer, aber auch nicht kleiner. Dadurch sind wir in der Lage, Bilder scharf zu sehen. Es bedeutet, dass jeder Klang sich mit genau einer festgelegten Geschwindigkeit ohne Echo in der Luft sich ausbreitet. So kann ein Hörer zu einem Zeitpunkt t genau das hören, was ein Musiker zum Zeitpunkt t-d/c gespielt hat, wobei d der Abstand zum Musikinstrument ist, und nicht etwa eine Mischung von Tönen, die zu verschiedenen Zeitpunkten gespielt wurden.

Im zweidimensionalen gilt dieses Prinzip erstaunlicherweise nicht. Das erfährt der Wasserkäfer, sobald er die Wellen von einem ins Wasser gefallenen Kieselstein spürt. Die Wellen bleiben theoretisch für alle Zeiten bestehen, obwohl der Kieselstein ziemlich gleich verschwindet.

10 Vordiplomaufgaben der letzten Jahre
(Sonja Zaun)

10.1 Lineare Differentialgleichung erster Ordnung (Herbst 2000)

Aufgabenstellung:
Bestimmen Sie alle reellwertigen Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y' + y\sin(x) = \sin(2x). \qquad (*)$$

Lösung:
1. Schritt: Löse die zugehörige *homogene Differentialgleichung*

$$y_1' + y_1 \sin(x) = 0$$

durch *Trennung der Variablen* (für eine formale Behandlung siehe Satz **??**):

$$\begin{array}{lrcll}
\Leftrightarrow & \frac{dy_1}{dx} & = & -y_1 \sin(x) & \\
\Leftrightarrow & \frac{dy_1}{y_1} & = & -\sin(x)dx & \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{y_1}dy_1 & = & -\sin(x)dx & \mid \int \\
\Leftrightarrow & \ln\mid y_1 \mid & = & \cos(x) + \tilde{c} & (\tilde{c} \in \mathbb{R})
\end{array}$$

wobei wir den Fall $y_1 \equiv 0$ ausgeschlossen haben. Durch Anwenden von exp und Auflösen des Betrages erhalten wir dann unter Einbeziehung der trivialen Lösung $y_1 = 0$ schließlich als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung die Funktion

$$y_1(x) = c \cdot e^{\cos(x)} \quad c \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

2. Schritt: Löse die *inhomogene Differentialgleichung* $(*)$ durch *Variation der Konstanten* c aus (1): Fasse c als Funktion $c \in C^1(I)$ auf. Nach Einsetzen von $c = c(x)$ in (1) ergibt sich als Ansatz für eine spezielle Lösung von (*) die Funktion

$$y_2(x) = c(x)e^{\cos(x)}.$$

Man berechnet nun zunächst die erste Ableitung

$$\begin{array}{rcl}
y_2'(x) & = & c'(x)e^{\cos(x)} + c(x)e^{\cos(x)}(-\sin(x)) \\
 & = & (c'(x) - c(x)\sin(x))e^{\cos(x)}.
\end{array}$$

Dann werden y_2 und y_2' in $(*)$ eingesetzt:

$$\begin{array}{lrcl}
 & (c'(x) - c(x)\sin(x))e^{\cos(x)} + c(x)e^{\cos(x)}\sin(x) & = & \sin(2x) \\
\Leftrightarrow & (c'(x) - c(x)\sin(x) + c(x)\sin(x))e^{\cos(x)} & = & \sin(2x) \\
\Leftrightarrow & c'(x)e^{\cos(x)} & = & \sin(2x) \\
\Leftrightarrow & c'(x) & = & \sin(2x)e^{-\cos(x)}.
\end{array}$$

Nach Integration von $c'(x)$ ergibt sich dann (wähle Integrationskonstante Null) die Funktion

$$c(x) = (2 + 2\cos(x))e^{-\cos(x)},$$

die nun in den Ansatz für $y_2(x)$ eingesetzt wird:

$$\begin{array}{rcl}
y_2(x) & = & c(x)e^{\cos(x)} \\
 & = & (2 + 2\cos(x))e^{-\cos(x)}e^{\cos(x)} \\
 & = & (2 + 2\cos(x))\dfrac{e^{\cos(x)}}{e^{\cos(x)}} \\
 & = & 2 + 2\cos(x). \qquad (2)
\end{array}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich schließlich aus *Addition* der allgemeinen Lösung (1) der homogenen und einer speziellen Lösung (2) der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ &= c \cdot e^{\cos(x)} + 2 + 2\cos(x) \qquad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

10.2 Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung erster Ordnung (Frühjahr 1998)

Aufgabenstellung:
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' - y^2 t - 2yt^2 - t^3 + 1 = 0, \quad y(0) = 1$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall für die Lösung an. Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung von $y + t$.

Lösung:
Setze $\quad z(t) = y(t) + t \quad$ bzw. $\quad y + t = z \quad$ (Substitution)

$$\Rightarrow \quad z' = y' + 1 \quad \text{und} \quad z(0) = y(0) + 0 = y(0) = 1.$$

Die Differentialgleichung für y kann wie folgt in eine Differentialgleichung für z umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & y' - y^2 t - 2yt^2 - t^3 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y' - t(y^2 + 2yt + t^2) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \underbrace{y' + 1}_{z'} - t\underbrace{(y+t)^2}_{z^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & z' - tz^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & z' = tz^2. \end{aligned}$$

Die erhaltene Gleichung ist nun nach z aufzulösen (wieder durch Trennung der Variablen, allerdings empfiehlt sich hier die Verwendung bestimmter Integrale, da wir die Anfangsbedingung für z kennen):

$$\begin{array}{rrcllrcl} & z' &=& tz^2 & & & & \\ \Leftrightarrow & \frac{z'}{z^2} &=& t & \Leftrightarrow & \int_0^t \frac{z'(\tilde{t})}{z^2(\tilde{t})} d\tilde{t} &=& \int_0^t \tilde{t} d\tilde{t} \\ \Leftrightarrow & \int_{z(0)}^{z(t)} \frac{dz}{z^2} &=& [\frac{1}{2}\tilde{t}^2]_0^t & \Leftrightarrow & [-\frac{1}{z}]_1^{z(t)} &=& \frac{1}{2}t^2 \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{z(t)} + 1 &=& \frac{1}{2}t^2 & \Leftrightarrow & 1 - \frac{1}{2}t^2 &=& \frac{1}{z(t)} \\ \Leftrightarrow & z(t) &=& \frac{1}{1-\frac{1}{2}t^2}. & & & & \end{array}$$

Rücksubstitution: $\quad y = z - t \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}t^2} - t \qquad (*)$
Um das maximale Existenzintervall zu bestimmen, muss man den Nenner der berechneten Funktion $(*) \neq 0$ setzen:

$$\begin{array}{rcl} 1 - \frac{1}{2}t^2 &=& 2 - t^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow& t \neq \pm\sqrt{2} \\ &\Rightarrow& t \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \end{array}$$

(Die Null muss im Intervall enthalten sein, da sonst der Anfangswert nicht definiert wäre.)

10.3 Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (Frühjahr 2000)

Aufgabenstellung:
Bestimmen Sie alle reellwertigen Lösungen f von
a) $f'' + f' - 2f = 0$
b) $f'' + f' - 2f = 4e^{2t}$.

Lösung:
zu a):
Man bildet zunächst das *charakteristische Polynom* $p(\lambda)$, indem man für alle auftretenden Ableitungsordnungen $n \geq 0$ auf der linken Seite der homogenen Differentialgleichung a) jeweils $f^{(n)}$ durch λ^n ersetzt. Anschließend werden dann die *Nullstellen* dieses Polynoms bestimmt.

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstellen: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ (Vielfachheit jeweils $= 1$)

Damit ergibt sich nach einem bekannten Satz (siehe Ergänzungen auf Seite 131) als *Fundamentalsystem*: $(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}) = (e^t, e^{-2t})$ und als Lösung dieser homogenen Differentialgleichung:

$$f(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \qquad (*)$$

zu b):
Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung setzt sich wieder aus der Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen. Die homogene Gleichung wurde bereits in a) gelöst; es ist also nur noch eine spezielle Lösung zu suchen.
Durch Variation der Konstanten in $(*)$ ergibt sich:

$$f_*(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-2t}$$

Da man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung hat, benötigt man nun hier neben der ersten auch die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f_*' &= \underbrace{c_1' e^t + c_2' e^{-2t}}_{=0 \text{ (Forderung 1)}} + c_1 e^t - 2c_2 e^{-2t} \\ &= c_1 e^t - 2c_2 e^{-2t} \\ \\ f_*'' &= c_1' e^t - 2c_2' e^{-2t} + \underbrace{c_1 e^t + 4c_2 e^{-2t}}_{=2f_* - f_*'} \end{aligned}$$

f_* , f_*' und f_*'' werden nun in die inhomogene Ausgangsgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} & f_*'' + f_*' - 2f_* \\ = \; & c_1' e^t - 2c_2' e^{-2t} + 2f_* - f_*' + f_*' - 2f_* \\ = \; & \underbrace{c_1' e^t - 2c_2' e^{-2t}}_{=4e^{2t} \text{ (Forderung 2)}} \end{aligned}$$

Die beiden Forderungen sind genau dann erfüllbar, wenn das System

$$(**)\qquad \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(Forderung 1)} \\ \text{(Forderung 2)} \end{matrix}$$

lösbar ist. Die Determinante der 2×2-Matrix ist $-2e^{-t} - e^{-t} = -3e^{-t} < 0$ und somit wissen wir, dass das Gleichungssystem für alle $t \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Man berechnet jetzt also c_1' und c_2' und bestimmt direkt jeweils eine entsprechende (spezielle) Stammfunktion c_1 bzw. c_2:

$$(**) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ 0 & -3e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcl} \Leftrightarrow & -3e^{-2t}c_2' & = & 4e^{2t} \\ \Leftrightarrow & c_2' & = & -\frac{4}{3}e^{4t} \\ \Rightarrow & c_2 & = & -\frac{1}{3}e^{4t} \\ & & & \\ \text{und} & c_1'e^t + c_2'e^{-2t} & = & 0 \\ \Rightarrow & c_1'e^t - \frac{4}{3}e^{4t}e^{-2t} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & c_1'e^t & = & \frac{4}{3}e^{2t} \\ \Leftrightarrow & c_1' & = & \frac{4}{3}e^t \\ \Rightarrow & c_1 & = & \frac{4}{3}e^t \end{array}$$

Damit ergibt sich für die spezielle Lösung $f_*(t)$:

$$\begin{aligned} f_*(t) &= c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-2t} \\ &= \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{4t}e^{-2t} \\ &= e^{2t} \end{aligned}$$

und schließlich für die allgemeine Lösung

$$f(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t} + e^{2t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Ergänzungen

Sei $p(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i\lambda^i$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Ein Fundamentalsystem für die durch p gegebene homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$p(\frac{d}{dt})f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^n a_i f^{(i)} = 0$$

erhält man wie folgt:
1. Schritt: Man bildet das charakteristische Polynom und zerlegt es in Linearfaktoren:

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^k (z - \lambda_j)^{n_j},$$

wobei n_j die Vielfachheit der Nullstelle λ_j angibt ($\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ paarweise verschieden).
2. Schritt: Für jedes $\lambda_j \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ mit zugehöriger Vielfachheit n_j gilt:

$$e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \dots, t^{n_j-1}e^{\lambda_j t}$$

sind n_j linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung. Da die so gebildeten Fundamentallösungen zu verschiedenen Eigenwerten ebenfalls linear unabhängig sind, erhält man auf diese Weise $n = n_1 + \cdots + n_k$ linear unabhängige Lösungen und damit ein Fundamentalsystem für die gegebene Differentialgleichung.

Beispiel:
Die Differentialgleichung $f'' - 2f' + f = 0$ hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Die Nullstelle $\lambda = 1$ ist eine doppelte Nullstelle. Es ergibt sich also als Fundamentalsystem

$$(e^{\lambda t}, t^{n-1}e^{\lambda t}) \quad = \quad (e^t, te^t)$$

und damit als allgemeine Lösung:

$$f(t) = c_1 e^t + c_2 te^t$$

Für Polynome mit reellen Koeffizienten $(a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$ und einer *komplexen* Nullstelle λ gilt, dass mit λ auch $\bar{\lambda}$ Nullstelle des Polynoms ist. Im oben gebildeten Fundamentalsystem taucht also das Paar von Lösungen

$$(e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t})$$

auf. Um ein reelles Fundamentalsystem angeben zu können, kann man z.B. das obige Paar von Fundamentallösungen ersetzen durch das Paar reeller Lösungen

$$(e^{(Re\lambda)t}\cos(Im\lambda)t, \quad e^{(Re\lambda)t}\sin(Im\lambda)t),$$

welches offensichtlich denselben (komplexen) Spann wie das obige Lösungspaar hat. Auch hierzu ein ***Beispiel:***
Die Differentialgleichung $f'' - 4f' + 7f = 0$ hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 7 = (\lambda - 2)^2 + 3$. Nullstellen sind also $\lambda = 2 + i\sqrt{3}$ und $\bar{\lambda} = 2 - i\sqrt{3}$, und als Fundamentalsystem ergibt sich $(e^{(2+i\sqrt{3})t}, e^{(2-i\sqrt{3})t})$ bzw. in reeller Form $(e^{2t}\cos(\sqrt{3}t), e^{2t}\sin(\sqrt{3}t))$.

10.4 Differentialgleichungssysteme

10.4.1 Herbst 2001

Aufgabenstellung:
Wir betrachten das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}
y_1'(x) &= y_1(x) - y_2(x) + 4y_3(x) \\
y_2'(x) &= 3y_1(x) + 2y_2(x) - y_3(x) \\
y_3'(x) &= 2y_1(x) + y_2(x) - y_3(x)
\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.
c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des obigen Systems.

Lösung:

zu a):
Das *charakteristische Polynom einer Matrix* berechnet sich wie folgt:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 2 + 12 - 8(2-\lambda) + (1-\lambda) - (-1-\lambda)(-3)$
$= (2-\lambda-2\lambda+\lambda^2)(-1-\lambda) + 14 - 16 + 8\lambda + 1 - \lambda + 3(-1-\lambda)$
$= (2-3\lambda+\lambda^2)(-1-\lambda) - 1 + 7\lambda - 3 - 3\lambda$
$= -2 + 3\lambda - \lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 1 - 3 + 4\lambda$
$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6.$

zu b):
Die *Eigenwerte der Matrix* A entsprechen den Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A. Setze also

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \text{ (geraten)}$$

Mit Polynomdivision erhält man:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
 & (-\lambda^3 & + & 2\lambda^2 & + & 5\lambda & - & 6) & : & (\lambda-1) & = & -\lambda^2+\lambda+6 \\
- & (-\lambda^3 & + & \lambda^2) & & & & & & & & \\
 & & & \lambda^2 & + & 5\lambda & & & & & & \\
 & & - & (\lambda^2 & - & \lambda) & & & & & & \\
 & & & & & 6\lambda & - & 6 & & & & \Rightarrow \lambda_2 = -2 \\
 & & & & - & (6\lambda & - & 6) & & & & \\
 & & & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Nach erneuter Polynomdivision ergibt sich $\lambda_3 = 3$.
Man hat also drei verschiedene Eigenwerte mit Vielfachheit jeweils gleich 1.

zu c):
Eine $n \times n$-Matrix heißt diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige *Eigenvektoren* besitzt. Dies ist insbesondere erfüllt, wenn die Matrix n paarweise verschiedene Eigenwerte hat. Wie aus Teil b) ersichtlich, trifft diese Bedingung auf die gegebene Matrix A zu; sie ist also diagonalisierbar. Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung des Gleichungssystems muß man zunächst eine Basis bestimmen, bzgl. der die Matrix Jordansche Normalform (hier dann Diaginalgestalt) hat. Bei diagonalisierbaren Matrizen besteht diese aber gerade aus den Eigenvektoren (EVen) zu den entsprechenden Eigenwerten (EWen):

- EV zum EW $\lambda_1 = 1$:
  Berechne $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$, $v_1 = \text{EV}$ bzw. $\text{Kern}(A - \lambda_1 I)$

  $$= Kern \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow Kern \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  $$\Leftrightarrow x_1 + x_3 = 0 \Leftrightarrow -x_1 = x_3 \text{ (beliebig)} =: 1 \Rightarrow -x_2 + 4x_3 = 0$$

  $$\Rightarrow x_2 = 4 \qquad \Rightarrow \text{Eig}(A,1) = \text{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}) =: v_1$$

- EV zum EW $\lambda_2 = -2$:

$$\mathrm{Kern}(A-\lambda_2 I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots$$

$$\longrightarrow \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 = x_3 =: 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,-2) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) =: v_2$$

- EV zum EW $\lambda_3 = 3$:

$$\mathrm{Kern}(A-\lambda_3 I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots$$

$$\longrightarrow \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 = 2x_3 =: 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,3) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) =: v_3$$

Die allgemeine Lösung setzt sich dann wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 x} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}, \end{aligned}$$

wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ beliebige Konstanten sind.

10.4.2 Frühjahr 1999

Aufgabenstellung:
Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Zuerst müssen wieder die EWe der Matrix A über ihr charakteristisches Polynom berechnet werden:

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \ldots = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$$

Setze $\quad -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 1.$
Nach zweimaliger Polynomdivision folgt $\quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1.$
Also hat λ_1 Vielfachheit 1, und λ_2 hat Vielfachheit 2.

Bei Vorliegen eines doppelten EWs $\lambda_{2,3} = -1$ kann der Fall eintreten, dass keine Basis aus EVen existiert. Deshalb gibt man hier statt dessen eine *Jordanbasis* zur Matrix A an, die sich aus *Hauptvektoren (HVen)* zu den EWen zusammensetzt. Diese gilt es also zunächst zu berechnen:

- 1. Basisvektor:
  Da $\lambda_1 = 1$ ein einfacher EW ist, ist der gesuchte HV auch hier wieder der zum EW gehörige EV - EVen sind HVen *erster Stufe*:

$$\mathrm{Kern}(A - \lambda_1 I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots$$

$$\longrightarrow \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 =: 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A, 1) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) =: v_1$$

- 2. und 3. Basisvektor:
  Berechne auch hier zunächst den EV zu $\lambda_{2,3} = -1$:

$$\mathrm{Kern}(A - \lambda_{2,3} I) =: \mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = x_3 =: 1, x_1 = -1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A, -1) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

  Wie bereits erwähnt, ist der Eigenraum von $\lambda_{2,3}$ also nur eindimensional Will man aber eine entsprechende Basis angeben, benötigt man zu doppelten EWen aber auch zwei Basisvektoren.
  Ziel ist also, neben dem EV noch einen HV *zweiter Stufe* zu berechnen:

$$\mathrm{Kern}(B^2) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = s \wedge x_1 = -x_3 = t \Rightarrow \mathrm{Kern}(B^2) = \mathrm{span}(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2^{(2)}}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Mit $v_2^{(2)}$ bildet man nun die Kette:

$$Bv_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} =: v_2^{(1)}$$

$$\Rightarrow \text{Jordanbasis } S^{-1} = (v_1 \quad v_2^{(1)} \quad v_2^{(2)}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bezüglich dieser Basis hat A Jordansche Normalform: $SAS^{-1} = J$.

Als Fundamentalsystem von $y' = Ay$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= v_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t \\ \varphi_2(t) &= v_2^{(1)} e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \\ \varphi_3(t) &= v_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} + t v_2^{(1)} e^{\lambda_2 t} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \\ -1-t \end{pmatrix} e^{-t} \\ \Rightarrow \qquad y(t) &= c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \\ -1-t \end{pmatrix} e^{-t} \end{aligned}$$

mit frei wählbaren Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ bzw. $\in \mathbb{C}$.

10.4.3 Frühjahr 2001

Aufgabenstellung:
Betrachten Sie für $a \in R$ das folgende Differentialgleichungssystem:

$$(S) \qquad \begin{aligned} y_1'(x) &= -y_1(x) + ay_2(x) + ay_3(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) - y_2(x) \\ y_3'(x) &= y_1(x) - y_3(x). \end{aligned}$$

a) Verifizieren Sie, daß die Matrix A des Systems (S) die Gleichung $A = -I_3 + B$ erfüllt, wobei I_3 für die Einheitsmatrix des $\mathbb{R}^3$ steht und

$$B := \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie B^2 und B^3.
c) Berechnen Sie e^{tA} für $t \in R$.
d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems (S).

Lösung:
zu a):

Die Vorfaktoren der $y_1(x)$ bilden die erste Spalte von A, die Vorfaktoren der $y_2(x)$ die zweite und die Vorfaktoren der $y_3(x)$ die dritte Spalte von A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{-I_3} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \qquad \surd$$

zu b):

$$\begin{aligned} B^2 &= B \cdot B \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} \\ B^3 &= B^2 \cdot B \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0) \\ &\Rightarrow \; B^n = 0, \;\; n \geqslant 3 \end{aligned}$$

zu c):

$$A = -I_3 + B$$

$$\Rightarrow \quad e^{tA} = e^{t(-I_3+B)} = e^{-tI_3+tB} = e^{-tI_3} e^{tB}$$

$$\begin{aligned} (1) \qquad e^{-tI_3} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-tI_3)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}}_{e^{-t}} I_3^n \\ &= e^{-t} I_3 = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \qquad e^{tB} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tB)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n \\ &\overset{b)}{=} \sum_{n=0}^{2} \frac{t^n}{n!} B^n = \underbrace{I_3}_{n=0} + \underbrace{tB}_{n=1} + \underbrace{\frac{1}{2} t^2 B^2}_{n=2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & at & at \\ -t & 1-\frac{a}{2}t^2 & -\frac{a}{2}t^2 \\ t & \frac{a}{2}t^2 & 1+\frac{a}{2}t^2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow e^{tA} &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & at & at \\ -t & 1-\frac{a}{2}t^2 & -\frac{a}{2}t^2 \\ t & \frac{a}{2}t^2 & 1+\frac{a}{2}t^2 \end{pmatrix} \\
&= e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & at & at \\ -t & 1-\frac{a}{2}t^2 & -\frac{a}{2}t^2 \\ t & \frac{a}{2}t^2 & 1+\frac{a}{2}t^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

zu d):
Wie wir bereits wissen, wird das System $y' = Ay$ mit der in c) berechneten Funktion e^{tA} bzw. genauer von

$$y(t) = e^{tA}c, \quad c \in R^3 \text{ konstant}$$

gelöst, denn:

$$
\begin{aligned}
y' &= (e^{tA}c)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} c \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n c \right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} n t^{n-1} c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AA^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} c \\
&= A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n c = Ae^{tA}c. \\
&= Ay \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

Alternativ kann man kann das System (S) auch (wie in der vorangegangenen Aufgabe) durch Bestimmung einer Jordanbasis lösen, was hier natürlich wegen des großen Rechenaufwandes nicht ratsam ist. Wir werden dies trotzdem im Spezialfall $a = 1$ hier vorführen, da im Gegensatz zu den bisherigen Beispielen erstmals ein dreifacher Eigenwert auftritt.

- Eigenwerte: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)^3$
  $\Rightarrow \quad \lambda = -1$, Vielfachheit: 3
- Hauptvektoren: Da man nur einen einzigen EW hat, muss man diesmal für die Kette einen HV *dritter Stufe* berechnen.

  - (1) $\text{Kern}(A - \lambda I) = \dots$
    $\Rightarrow \text{Eig}(A, -1) = \text{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) =: v_1$
  - (2) $\text{Kern}((A - \lambda I)^2) = \dots$
    $\Rightarrow \text{span}(v_1, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2})$

– (3) $\mathrm{Kern}((A-\lambda I)^3) = \mathrm{Kern}(0) = R^3$

$\Rightarrow \mathrm{span}(v_1, v_2, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3})$, wobei v_1, v_2, v_3 linear unabhängig voneinander sein müssen

$$\Rightarrow v_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{HV dritter Stufe}$$

– (4) Kette für Jordanbasis:

$$B * v_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_3^{(2)}, \quad B^2 v_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_3^{(1)}$$

- Jordanbasis: $\quad S^{-1} = (v_3^{(1)} \quad v_3^{(2)} \quad v_3^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= v_3^{(1)} e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} \\
\varphi_2(x) &= (v_3^{(2)} + x v_3^{(1)}) e^{-x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ x \end{pmatrix} e^{-x} \\
\varphi_3(x) &= (v_3^{(3)} + x v_3^{(2)} + \frac{x^2}{2!} v_3^{(1)}) e^{-x} = \begin{pmatrix} x \\ -x^2/2 \\ 1 + x^2/2 \end{pmatrix} e^{-x}
\end{aligned}$$

also

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ x \end{pmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} x \\ -x^2/2 \\ 1 + x^2/2 \end{pmatrix} e^{-x}$$

mit frei wählbaren Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ bzw. $\in \mathbb{C}$.

Literatur

[1] K. Burg, H. Haf, F. Wille (1993). *Höhere Mathematik für Ingenieure, Band III.* B.G. Teubner, Stuttgart.

[2] *Partial Differential Equations.* AMS Graduate Studies in Mathematics, Volume 19.

[3] O. Forster (1984). *Analysis 3 – Integralrechnung im* $\mathbb{R}^n$ *mit Anwendungen.* Vieweg.

[4] W. Greiner (1974). *Theoretische Physik.* Verlag Harri Deutsch.

[5] K.P. Hadeler (1973). *Mathematik für Biologen.* Springer.

[6] H. Heuser (1995). *Lehrbuch der Analysis II.* 9. Auflage. B.G.Teubner, Stuttgart.

[7] W. Nolting (1989) *Grundkurs: Theoretische Physik. Band 1: Klassische Mechanik.* Verlag Zimmernann-Neufang.

[8] A. Sommerfeld (1964) *Mechanik.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G.

[9] W.A. Strauss (1995). *Partielle Differentialgleichungen – Eine Einführung.* Vieweg.