1. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

1. Aufgabe: Sei $\circ : X \times X \to X$ eine assoziative Verknüpfung auf einer (nichtleeren) Menge X. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots , x_n \in X$ und für alle $1 \leq r \leq s \leq n$ gilt

$$x_1 \circ \ldots \circ x_n = x_1 \circ \ldots \circ x_{r-1} \circ (x_r \circ \ldots \circ x_s) \circ x_{s+1} \circ \ldots \circ x_n,$$

wobei induktiv definiert wurde $y_1 \circ \ldots \circ y_m := (y_1 \circ \ldots \circ y_{m-1}) \circ y_m$.

2. Aufgabe: Die stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ besitze genau eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$, so daß $f(x_n) \to 0$. Zeigen Sie, daß $x_n \to z$.

3. Aufgabe: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Wenn

$$\int_a^b f(x)x^n \, dx = 0 \text{ für alle } n \geq 0,$$

dann ist $f = 0$.

4. Aufgabe: Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie: Eine Folge (x_n) in X ist genau dann konvergent, wenn die Folgen $(d(x_n, y))$ konvergent sind für alle $y \in X$.

5. Aufgabe: Sei $f \in \mathcal{R}([a, \infty[)$, $a \in \mathbb{R}$, eine monotone Regelfunktion und das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$ existiere. Zeigen Sie: Für alle $h > 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f(a + nh)$ und es gilt

$$\lim_{h\to 0} h \sum_{n=0}^{\infty} f(a + nh) = \int_a^\infty f(x)\, dx.$$

Abgabetermin: Donnerstag, den 8. November 2001, vor Beginn der Vorlesung (9.00-9.15).