2. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

<u>Notation:</u>
Im folgenden bezeichne $M_n = M_n(\mathbb{R})$ den Raum aller $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen. Ferner sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein (beliebiges) Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

6. Aufgabe: (2 Punkte) Sei $\circ : X \times X \to X$ eine assoziative und kommutative Verknüpfung auf einer (nichtleeren) Menge X. Erinnern Sie sich an die Notation der 1. Aufgabe und zeigen Sie, daß

$$x_1 \circ \ldots \circ x_n = x_{\pi(1)} \circ \ldots \circ x_{\pi(n)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Permutationen $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

7. Aufgabe: Sei $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt und der daraus fließenden euklidischen Norm versehen. Eine Matrix $A \in M_n$ heißt bekanntermaßen symmetrisch, wenn $A = A^T$. Zeigen Sie, daß für symmetrische Matrizen $A \in M_n$ gilt

$$\sup\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1,\, x \in \mathbb{R}^n\} = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

8. Aufgabe: (5 Punkte) Beweisen Sie, daß die Determinatenfunktion $A \mapsto \operatorname{Det} A$ eine stetige Abbildung von $M_n \to \mathbb{R}$ ist. Sei

$$\mathrm{GL}(M_n) = \{A \in M_n \mid \exists A^{-1} \in M_n \; AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}\}.$$

Beweisen Sie, daß $\mathrm{GL}(M_n)$ eine offene Teilmenge von M_n ist. Beweisen Sie ferner, daß die Abbildung

$$\mathrm{inv} : \mathrm{GL}(M_n) \to \mathrm{GL}(M_n),\; \mathrm{inv}(A) = A^{-1}$$

stetig ist.

9. Aufgabe: (5 Punkte) Beweisen Sie, daß für die Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ auf $\mathbb{R}^n$ die Parallelogramm-Identität

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

gilt.
Beweisen Sie umgekehrt, gilt für eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ die Parallelogramm-Identität, dann gibt es ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$, so daß $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Hinweis: Sei $f(x) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$. Zeigen Sie, daß $f(a) + f(b) = 2f(\frac{1}{2}(a + b))$ und folgern Sie, daß f additiv ist. Folgern Sie daraus, daß f linear ist.

10. Aufgabe: Beweisen Sie, daß die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gegeben ist durch $f'(a)y = \langle \frac{a}{\|a\|}, y\rangle$ $(y \in \mathbb{R}^n)$, indem Sie die Definition der Ableitung anwenden und das Restglied mittels

$$1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \leq \sqrt{1+t} \leq 1 + \frac{t}{2}, \quad |t| < 1$$

nach unten und oben abschätzen.

Abgabetermin: Donnerstag, den 15. November 2001, Briefkasten im Gebäude 27.1 bis 12.45 Uhr.