3. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

11. Aufgabe: Seien V und W normierte reelle Vektorräume. Beweisen Sie, daß für eine lineare Abbildung $T : V \to W$ folgende Aussagen äquivalent sind:

1. T ist stetig im Nullpunkt.
2. T ist gleichmäßig stetig.
3. Es gibt $r > 0$, so daß $\|Tv\| \leq r\|v\|$ für alle $v \in V$.

Beweisen Sie ferner

$$\sup\{\|Tv\| | \, \|v\| < 1\} = \sup\{\frac{\|Tv\|}{\|v\|} | \, v \neq 0\} = \inf\{r > 0 | \, \|Tv\| \leq r\|v\| \; \forall v \in V\},$$

und daß $\|T\| = \sup\{\|Tv\| | \, \|v\| = 1\}$ eine Norm auf dem Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach W definiert.

12. Aufgabe: (8 Punkte) a) Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Menge $C \subset V$ heißt bekanntermaßen konvex, wenn mit zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke in C liegt, also wenn für $a, b \in C$ gilt, daß $ta + (1-t)b \in C$ für alle $t \in [0,1]$. Beweisen Sie, eine Menge $C \subset X$ ist genau dann konvex, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in C$, $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ mit $\sum_i t_i = 1$ gilt, daß $\sum_i t_i x_i \in C$.

b) Beweisen Sie, daß

$$f : \mathbb{R} \to]\text{-}1, 1[; \; f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

ein Homöomorphismus ist, d.h. f ist bijektiv stetig und die Umkehrabbildung ist auch stetig.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $C \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene und konvexe Menge, die den Nullpunkt enthält. Ferner sei C symmetrisch zum Nullpunkt, d.h. mit $a \in C$ ist auch -$a \in C$. Beweisen Sie, daß durch

$$N(x) := \inf\{r > 0 | \, x \in rC\}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird und daß $C = \{x \in \mathbb{R}^n | \, N(x) < 1\}$ gilt.

d) Folgern Sie aus b) und c), daß alle offenen und konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zueinander homöomorph sind.

Hinweis: Die Mengen müssen weder beschränkt noch symmetrisch sein – was gilt dann noch für N? Was brauchen Sie nur zu wissen? Statten Sie $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm aus.

13. Aufgabe: a) Es sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und $F = f \circ A$. Welche Beziehung besteht zwischen $\operatorname{grad} F$ und $\operatorname{grad} f$?

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig und $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$ heißt homogen vom Grade $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $x \in X$ und $t > 0$ mit $tx \in X$ gilt. Beweisen Sie, ist f an der Stelle $y \in X$ differenzierbar, so gilt $f'(y)y = \alpha f(y)$.
Hinweis: Kettenregel auf $f \circ g$, wobei $g(t) = y + ty$.

14. Aufgabe: (6 Punkte) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Beweisen Sie durch Anwendung der Mittelwertungleichung, daß zu kompaktem $K \subset X$ ein $r > 0$ existiert, so daß

$$\|f(x) - f(y)\| \leq r\|x - y\| \qquad \forall x, y \in K.$$

Hinweis: Für $x \in K$ und $\delta > 0$, so daß $\overline{U}(x, \delta) \subset X$ liefert die Mittelwertungleichung ein $s > 0$, so daß

$$\|f(u) - f(v)\| \leq s\|u - v\| \qquad \forall u, v \in \overline{U}(x, \delta).$$

(Das müssen Sie natürlich auch erst beweisen.) Führen Sie das dann zum Widerspruch.

Abgabetermin: Donnerstag, den 22. November 2001, Briefkasten im Gebäude 27.2 bis 12.45 Uhr.