4. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

15. Aufgabe: Lösen Sie die Aufgabe 6.14 auf Seite 52 in *Heinz König, Analysis 1*. Das Buch steht in ausreichender Zahl in der Lehrbuchsammlung der Mathematik-Bibliothek. Machen Sie sich, im gleichen Buch, mit der Variante des Mittelwertsatzes in den Sätzen 1.16 und 1.17 in Kapitel III auf Seite 141 vertraut – Sie werden diese Variante für die nächste Aufgabe brauchen!

16. Aufgabe: a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, so daß $a < b$. Sei W ein normierter Vektorraum und $f : [a, b] \to W$ eine stetige Abbildung, die auf $]a, b[$ differenzierbar ist. Beweisen Sie, daß es ein $x \in]a, b[$ gibt, so daß

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(x)\|(b - a)$$

gilt, indem Sie Satz 1.17 (siehe vorige Aufgabe) auf die Hilfsfunktion $\varphi(t) = \|f(t) - f(a)\|$ anwenden.

b) Seien V und W normierte Vektorräume, $\Omega \subset V$ offen und $f : \Omega \to W$ differenzierbar. Seien $a, b \in \Omega$, so daß $\overline{ab}$ in Ω liegt. Folgern Sie aus a), daß es einen echten Zwischenpunkt $x \in \overline{ab}$ gibt, so daß

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \|f'(x)\| \, \|a - b\|.$$

17. Aufgabe: a) Sei $d \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie induktiv die Ableitung $f' : M_d \to \mathrm{Hom}(M_d, M_d)$ der Abbildung $f : M_d \to M_d,\ f(x) = x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Gegeben sei eine Polynomfunktion $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ P(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$, wobei $d \in \mathbb{N}$ und $c_\alpha = 0$ für fast alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Beweisen Sie, daß $c_\alpha = \frac{\partial^\alpha P(0)}{\alpha!}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

18. Aufgabe: a) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Beweisen Sie die Produktformel

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n,\ \beta \leq \alpha} \partial^\beta f \, \partial^{\alpha - \beta} g,$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, wobei $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als genügend oft partiell differenzierbar vorausgesetzt sind.

b) Beweisen Sie die binomische Formel

$$(x_1 + \cdots + x_d)^n = \sum_{|\alpha| = n} \frac{n!}{\alpha!} \, x^\alpha$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $d, n \in \mathbb{N}$, wobei die Summe über alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ der Länge n läuft.

Abgabetermin: Donnerstag, den 29. November 2001, Briefkasten im Gebäude 27.2 bis 12.45 Uhr.