5. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

19. Aufgabe: Seien V und W normierte Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Wir definieren

$$i(f) := \inf \{\|f(v)\| \,|\, \|v\| = 1,\, v \in V\}. \tag{1}$$

Beweisen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $i(f) > 0$.
2. f ist injektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(V) \to V$ ist stetig.

Bestimmen Sie im Fall $i(f) > 0$ die Operatornorm von f^{-1}.

20. Aufgabe (6 Punkte): Seien V und W normierte Vektorräume, $f : \Omega \to W$ auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset V$ stetig differenzierbar und $K \subset \Omega$ kompakt. Es gelte:

1. f eingeschränkt auf K ist injektiv und
2. $i(f'(a)) > 0$ für alle $a \in K$ (siehe (1)).

Beweisen Sie, daß es eine Zahl $\lambda > 0$ gibt, so daß

$$\|f(u) - f(v)\| \geq \lambda \|u - v\|$$

für alle $u, v \in K$.
Hinweis: Der Beweis ist i.w.S. ähnlich zur 14. Aufgabe – der Mittelwertsatz angewendet auf geeignetem $\overline{U(a, \delta)}$ auf die Abbildung $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ liefert eine Abschätzung, die man zum Widerspruch führen kann.

21. Aufgabe: Man entwickle die Funktion $f(x, y) = (x - y)e^{x+y}$ um die Stelle $(0, 0)$ in eine Taylorreihe bis zu Gliedern zweiter Ordnung. Man berechne den Näherungswert für $f(\frac{1}{10}, \frac{2}{10})$, den die Taylorreihe liefert und schätze dessen Fehler mit Hilfe des Restgliedes ab.

22. Aufgabe: a) Der $\mathbb{R}^n$ sei mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ ausgestattet. Es sei

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ f(x) = \sum_{i=1}^{m} \|x - y_i\|_2^2$$

für $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^n$. Untersuchen Sie f auf kritische Punkte und Extremalstellen.

b) Es sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ f(\xi_1, \xi_2) = 2\xi_1^4 + \xi_2^2 - 3\xi_2\xi_1^2$$

gegeben. Zeigen Sie zunächst, daß die Abbildung f eingeschränkt auf eine beliebige Gerade durch den Ursprung im Ursprung ein lokales Minimum besitzt. Untersuchen Sie anschließend f auf kritische Punkte und Extremalstellen.

23. Aufgabe: Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $a \in \Omega$ und $f'(a)$ invertierbar.
Man zeige:
(i) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $\overline{U(a,\varepsilon)} \subset \Omega$ und

$$\det\left[\frac{\partial f_\nu}{\partial \xi_\mu}(x_\nu)\right] \neq 0 \quad \text{für} \quad x_1, \ldots, x_n \in U(a,\varepsilon).$$

(ii) Wenn (i) gilt, dann ist $f \mid \overline{U(a,\varepsilon)}$ injektiv.
Hinweis: Die Annahme $y, z \in \overline{U(a,\varepsilon)}$ mit

$$y \neq z \quad \text{und} \quad f(y) = f(z)$$

führt zu einem Widerspruch zu (i).

Abgabetermin: Donnerstag, 06.12.01, Briefkasten im Geb. 27.2 bis 12.45 Uhr.