6. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

Die folgenden Aufgaben sind mit Arbeitsanleitungen versehen, deren Behauptungen auch zu beweisen sind. Pro Aufgabe gibt's 6 Punkte (wegen Nikolaus).

24. Aufgabe (6 Punkte): Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Es sei $\Omega \subset V$ offen, $\overline{\Omega}$ kompakt und $f \in C^1(\Omega, V) \cap C(\overline{\Omega}, V)$. Für alle $x \in \Omega$ sei $f(x) \neq 0$ und $f'(x)$ invertierbar.
Man zeige: Es gibt Punkte y und z auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω, so daß

$$\|f(y)\|_2 < \|f(x)\|_2 < \|f(z)\|_2 \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Hinweis: Man untersuche die kritischen Punkte von

$$\varphi : x \mapsto \langle f(x), f(x)\rangle \quad \text{für } x \in \Omega.$$

25. Aufgabe (6 Punkte): Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $a \in \Omega$ und $g'(a)$ invertierbar. Man zeige: $g(a)$ ist ein innerer Punkt von $g(\Omega)$.

Hinweis: Es gibt eine Umgebung $\overline{U(a,\varepsilon)} \subset \Omega$, so daß

$$g \mid \overline{U(a,\varepsilon)} \quad \text{injektiv und} \quad g'(x) \quad \text{invertierbar für } x \in U(a,\varepsilon).$$

Man nehme an, daß $g(a)$ kein innerer Punkt von $g(\Omega)$ ist. Dann gibt es eine Folge $(y_k)_k$ im Komplement von $g(\Omega)$ mit $y_k \to g(a)$. Man wende nun Aufgabe 24 auf die Funktionen

$$f_k : x \mapsto g(x) - y_k \quad \text{für } x \in \overline{U(a,\varepsilon)}$$

an und erzeuge einen Widerspruch zur Injektivität von g.

26. Aufgabe (6 Punkte): (Man zeige die folgenden Teilaussagen des Satzes über implizite Funktionen mit einem Widerspruchsbeweis. Bezeichnungen: $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{R}^n$.)

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ offen, $f = (f_1 \ldots, f_n) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $(a,b) \in \Omega$ mit

$$f(a,b) = 0 \quad \text{und} \quad D_y f(a,b) := \left[\frac{\partial f_\nu}{\partial \eta_\mu}(a,b)\right] \quad \text{invertierbar.}$$

Man zeige: Es gibt δ und ε mit $0 < \delta < \varepsilon$, so daß folgendes gilt:

1. Es ist $U(a,\varepsilon) \times \overline{U(b,\varepsilon)} \subset \Omega$ und zu jedem $x \in U(a,\varepsilon)$ gibt es höchstens ein $y \in \overline{U(b,\varepsilon)}$ mit $f(x,y) = 0$.

2. Zu jedem $x \in U(a, \delta)$ gibt es mindestens ein $y \in U(b, \varepsilon)$ mit $f(x, y) = 0$.

Hinweise: Wie in Aufgabe 23 zeige man zunächst:
Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $U(a, \varepsilon) \times \overline{U(b, \varepsilon)} \subset \Omega$ und

$$\det \left[\frac{\partial f_\nu}{\partial \eta_\mu}(x, y_\nu) \right] \neq 0 \quad \text{für } x \in U(a, \varepsilon) \text{ und } y_1, \ldots, y_n \in U(b, \varepsilon).$$

Hieraus folgt nun die Behauptung 1.
Die Aussage 2 zeige man wie in Aufgabe 25 mit einem Widerspruchsbeweis. Es sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß Aussage 1 gilt. Man nehme an, es gebe kein $0 < \delta < \varepsilon$, so daß Aussage 2 gilt. Dann gibt es eine Folge $(x_k)_k$ in $U(a, \varepsilon)$, so daß $x_k \to a$ und $f(x_k, y) \neq 0$ für $y \in U(b, \varepsilon)$. Man wende nun Aufgabe 24 auf die Funktionen

$$f_k : y \mapsto f(x_k, y) \quad \text{für } y \in \overline{U(b, \varepsilon)}$$

an und erzeuge einen Widerspruch.

Abgabetermin: Donnerstag, 13.12.01, Briefkasten im Geb. 27.2 bis 12.45 Uhr.