7. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

27. Aufgabe: Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : M \rightarrow M$ eine Abbildung. Sei induktiv $f^{n+1} = f \circ f^n$ und f^0 die Identität auf M . Es existiere $r > 0$, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \leq rd(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

Dann hat f genau einen Fixpunkt $z \in M$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = z$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie zusätzlich die „Fehlerabschätzung“

$$d(f^n(x), z) \leq rd(f^n(x), f^{n+1}(x)) \quad \forall x \in M \text{ und } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie ferner, daß der Banachsche Fixpunktsatz aus diesem Satz folgt.

28. Aufgabe: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Es gelte $\text{grad } f(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega$. Dann ist die Wertemenge $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ offen.

29. Aufgabe: a) Sei folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_3 + x_2x_4^2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_4^3 + x_2^2x_3^6 = 0 \end{aligned}$$

Ist das Gleichungssystem in einer Umgebung von $(0, 1, 0, 0)$ nach x_3 und x_4 auflösbar? Wenn ja, so berechne man die Ableitung von $\varphi(x_1, x_2)$ mit $x_3 = \varphi_1$ und $x_4 = \varphi_2$ an der Stelle $(0, 1)$.

b) Gegeben sei die Gleichung $g(x, y, z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0$. Ist die Gleichung in einer Umgebung von $(0, e, 2)$ nach z auflösbar? Wenn ja, so berechne man $\frac{\partial z}{\partial x}(0, e)$ und $\frac{\partial z}{\partial y}(0, e)$.

30. Aufgabe (6 Punkte): Gegeben sei eine Kugel mit Radius 1, deren Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liege. Beweisen Sie, daß es Punkte (x, y, z) auf der Kugeloberfläche gibt, die die Bedingung $x + y + z = 0$ erfüllen und minimalen bzw. maximalen Abstand von der z -Achse haben. Geben Sie diese Punkte und die jeweiligen Abstände an.

Abgabetermin: Donnerstag, 20.12.01, Briefkasten im Geb. 27.2 bis 12.45 Uhr.