8. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

31. Aufgabe (6 Punkte): Seien $n \in \mathbb{N}$ und $r_i > 0$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Sei $f : H_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ gegeben durch $f(x) = \prod_{i=1}^n \xi_i^{r_i}$, wobei $H_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i > 0, 0 \leq i \leq n\}$ und $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Man beweise die Ungleichung

$$\prod_{i=1}^n \eta_i^{r_i} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n r_i \eta_i}{\sum_{i=1}^n r_i} \right)^{r_1 + \dots + r_n} \quad (1)$$

für alle $\eta_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, indem man die Extremwerte der Abbildung f unter der Nebenbedingung $\sum_i \xi_i = 1$ bestimmt, was eine Ungleichung liefert.

(Wenn $r_i = 1$ für alle i ist (1) die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischem Mittel.)

32. Aufgabe (8 ZPunkte) : Seien $n \in \mathbb{N}$, S_n der Raum der symmetrischen $n \times n$ -Matrizen und T_n der Raum der schiefsymmetrischen $n \times n$ -Matrizen.

a) Sei $s \in S_n$. Es ist $e^s \in SO(n)$ genau dann, wenn $s = 0$.

b) Es ist $M_n = S_n \oplus T_n$. Also wird durch $s + t \mapsto e^s e^t$ für $s \in S_n$ und $t \in T_n$ eine Abbildung $\psi : M_n \rightarrow M_n$ definiert. Ferner gibt es eine offene Menge $U \in \mathcal{O}(0)$, so daß $\psi : U \rightarrow \psi(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Außerdem ist $\psi(U \cap T_n) = \psi(U) \cap SO(n)$.

c) Sei $\phi : M_n \rightarrow GL(M_n)$, $\phi(x) = e^x$. Zeigen Sie, es gibt eine Umgebung $W \in \mathcal{O}(0)$, so daß $\phi : W \rightarrow \phi(W)$ ein Diffeomorphismus ist und $\phi(W \cap T_n) = \phi(W) \cap SO(n)$.

Hinweis: Auf T_n stimmen ψ und ϕ überein. Die Umgebung W kann ruhig „klein“ sein, Sie müssen nur die Existenz zeigen.

33. Aufgabe (30 ZPunkte): Diese Aufgabe macht Sie mit dem Begriff des *topologischen Raumes* bekannt, der grundlegend für die Begriffe Stetigkeit und Konvergenz ist. Stellen Sie sich im folgenden einfach vor, der topologische Raum sei Ihr Blatt Papier, also eine euklidische Ebene (falls Sie es noch nicht zerknüllt haben). Tatsächlich dient Topologie dazu, in völlig unanschaulichen Situationen so argumentieren zu können, als wäre man in der vertrauten euklidischen Ebene (durch Konzentration aufs Wesentliche). Umgebungen eines Punktes können Sie sich als Kreise um den Punkt vorstellen.

Zunächst einige Definitionen:

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und τ eine Menge von Teilmengen von X , so daß 1.) $\emptyset, X \in \tau$, 2.) für $T, S \in \tau$ ist $T \cap S \in \tau$ und 3.) für $\sigma \subset \tau$ ist $\cup T, T \in \sigma$, in τ . Dann heißt (X, τ) ein topologischer Raum. τ heißt Topologie auf X und die Elemente von τ heißen offene Mengen. Eine Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Sei $x \in X$. Wir definieren den Umgebungsfilter von x als

$$\mathcal{O}(x) := \{A \subset X \mid \exists T \in \tau \text{ mit } x \in T \subset A\}.$$

a) Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt stetig an der Stelle $x \in X$, wenn $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(x)$ für alle $U \in \mathcal{O}(f(x))$. Die Abbildung heißt stetig, wenn $f^{-1}(T) \in \tau$ für alle $T \in \sigma$. Zeigen Sie, daß f genau dann stetig ist, wenn f an jeder Stelle $x \in X$ stetig ist.

b) Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume. Wir definieren die Produkttopologie

$$\tau \times \sigma := \{Q \subset X \times Y \mid \forall (x, y) \in Q \exists U \in \mathcal{O}(x), V \in \mathcal{O}(y) U \times V \subset Q\}.$$

Zeigen Sie, daß $(X \times Y, \tau \times \sigma)$ ein topologischer Raum ist.

c) Ein topologischer Raum (X, τ) heißt Hausdorffsch, wenn es zu verschiedenen Punkten disjunkte Umgebungen gibt, d.h. für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren $A \in \mathcal{O}(x)$ und $B \in \mathcal{O}(y)$, so daß $A \cap B = \emptyset$.

Zeigen Sie, daß X genau dann Hausdorffsch ist, wenn die Diagonale $\Delta \subset X \times X$ abgeschlossen ist bzgl. der Produkttopologie, wobei

$$\Delta := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}.$$

d) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren

$$\tau_d = \{T \subset X \mid \forall x \in T \exists \varepsilon > 0 U(x, \varepsilon) \subset T\}.$$

Zeigen Sie, daß (X, τ_d) ein topologischer Raum ist.

e) Sei X ein reeller Vektorraum. Sei τ eine Topologie auf X , so daß $X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x + y$ und $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$, $(r, x) \mapsto rx$ stetig sind (die Produkträume sind dabei mit der Produkttopologie ausgestattet), dann heißt X ein topologischer Vektorraum.

Sei nun V ein normierter Vektorraum. Dann liefert die Norm eine Metrik $d(v, w) = \|v - w\|$. Zeigen Sie, daß (V, τ_d) ein topologischer Vektorraum ist.

f) Sei (X, τ) ein topologischer Vektorraum. Eine Menge $B \subset X$ heißt kreisförmig, wenn für $b \in B$ folgt $rb \in B$ für alle r mit $|r| < 1$.

Zeigen Sie, zu $W \in \mathcal{O}(0)$ gibt es ein kreisförmiges $B \in \mathcal{O}(0)$ mit $B \subset W$.

g) Sei E ein endlichdimensionaler (reeller) Vektorraum. Zeigen Sie, es existiert genau eine Hausdorff-Topologie τ , so daß (E, τ) ein topologischer Vektorraum ist.

Hinweis: Es ist generell gut, sich zuerst Spezialfälle anzuschauen. Zeigen Sie also zunächst für einen Vektorraum der Dimension 1, daß $\mathbb{R} \rightarrow E$, $r \mapsto re$, wobei $0 \neq e \in E$ ein Homöomorphismus ist. Der erste Schritt hierzu ist, daß es eine Umgebung W von 0 gibt, so daß $re \notin W$ (warum?). Dann liefert f) eine kreisförmige Umgebung.

Um eine Induktion machen zu können, schreibe man $E = F + E_1$, wobei $\dim F = n - 1$ und $\dim E_1 = 1$.

Abgabetermin: Donnerstag, 10.01.02, Briefkasten im Geb. 27.2 bis 12.45 Uhr.