

9. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

34. Aufgabe: Man bestimme die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme und gebe den maximalen Definitionsbereich der Lösung an:

a) $y'(x) = 2xy^2(x)$, $y(0) = 1$

b) $y'(x) = \frac{x^2}{\sin y(x)}$, $y(0) = \frac{\pi}{3}$.

35. Aufgabe: a) Sei V ein Vektorraum und $A: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Sei x_0 eine (fest vorgegebene) Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. Zeigen Sie, daß für die Lösungsmenge M des Gleichungssystems $Ax = b$ gilt: $M = x_0 + N$, wobei N die Lösungsmenge des Systems $Ax = 0$ ist.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dx}y(x) = \sin x(\sin^2 x - y(x)), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Hinweis: Lineare DGL's der Form $Af = b$ löst man folgendermaßen: Man bestimmt die Lösungen der homogenen Gleichung $Af = 0$. Ist $z(x)$ eine Lösung von $Af = 0$, dann auch $cz(x)$ für eine Konstante c , wegen der Linearität. Nun macht man für die Lösung der Gleichung $Af = b$ den Ansatz $y(x) = c(x)z(x)$ und versucht $c(x)$ entsprechend zu bestimmen. Dieses Verfahren heißt *Variation der Konstanten*.

36. Aufgabe: Die Differentialgleichung

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0, \quad \text{wobei } p, q \text{ stetig auf einem Gebiet } G \subset \mathbb{R}^2,$$

heißt *exakt*, wenn es eine Abbildung $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß $\text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Solche Gleichungen können durch Integration gelöst werden. Manche Differentialgleichungen, die nicht exakt sind, können durch Multiplikation mit einem sogenannten *integrierenden Faktor* exakt gemacht werden. Siehe hierzu z.B. *Heuser, Analysis 2*.

a) Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$3x^2y^2 + 2y + 2x^3yy' + 2(x + y)y' = 1,$$

die den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ bzw. $y(0) = -1$ genügen.

b) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $x^2 + y - xy' = 0$.

37. Aufgabe: Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad k , wenn $f(tx) = t^k f(x)$ für alle $t > 0$ gilt.

Die Differentialgleichung $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ heißt homogen vom Grad k , wenn p und q homogene Funktionen vom Grad k sind.

a) Sei nun $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ homogen vom Grad k und $px + qy \neq 0$. Zeigen Sie mit Aufgabe 13 b), daß dann die Gleichung

$$\frac{p}{px + qy}dx + \frac{q}{px + qy}dy = 0$$

exakt ist, d.h., $(px + qy)^{-1}$ ist ein integrierender Faktor.

b) Man löse die Differentialgleichung $y^2 + (x^2 - xy - y^2)y' = 0$.

Abgabetermin: Donnerstag, 17.01.02, Briefkasten im Geb. 27.2 bis 12.45 Uhr.