10. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

38. Aufgabe: Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$, $y(1) = 1$.

Hinweis: Machen Sie den Ansatz $u(x) = \frac{y(x)}{x}$.

39. Aufgabe: Sei I ein offenes Intervall. Es sei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t, y) = y^2$. Beweisen Sie, daß jede maximale Lösung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ von einem der folgenden Typen ist:

1. $I = \mathbb{R}$ und $\varphi(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
2. $I = (-\infty, c)$ oder $I = (c, \infty)$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und $\varphi(t) = \frac{1}{c - t}$ für alle $t \in I$.

Hinweis: Als Def.bereich von Lösungen der DGL sind nur offene Intervalle I zugelassen. Zeigen Sie durch einen indirekten Beweis, daß für eine Lösung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ der DGL mit $\varphi(t) = 0$ für ein $t \in I$ schon folgt, daß $\varphi = 0$ sein muß.

40. Aufgabe: Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = 2ty$, $y(0) = 1$ durch Koeffizientenvergleich.

41. Aufgabe: Man bestimme die allgemeine Lösung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung $y' = A(t)y + b(t)$, wobei

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Offenbar ist $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Die Methode Variation der Konstanten funktioniert analog zum eindimensionalen.

42. Aufgabe: Sei D der gewöhnliche Differentialoperator, d.h. $D = \frac{d}{dx}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(D^3 + 2D^2 - D - 2)y(x) = e^x + x^2.$$

Hinweis: Schreiben Sie die Gleichung zunächst in ein System 1. Ordnung um.

Abgabetermin: Donnerstag, 24.01.02, Briefkasten im Geb. 27.2 bis 12.45 Uhr.