

11. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

Im folgenden ist unter kompakt ausschließlich die Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft zu verstehen, d.h., eine Teilmenge C eines topologischen Raumes heißt kompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $C \subset \bigcup_{T \in \sigma} T$ eine endliche Teilmenge $\sigma_0 \subset \sigma$ gibt, so daß $C \subset \bigcup_{T \in \sigma_0} T$.

43. Aufgabe: a) Seien X und Y topologische Räume, siehe Aufgabe 33. Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig. Zeigen Sie, wenn X die Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft besitzt, so auch $f(X)$.

b) Sei X ein topologischer Raum, $C \subset X$ kompakt und $A \subset C$ eine abgeschlossene Teilmenge von X . Zeigen Sie, dann ist A kompakt.

c) Man betrachte auf der Menge $\mathbb{R}$ die Topologie

$$\tau = \{(t, \infty) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

Geben Sie eine Teilmenge des topologischen Raumes $(\mathbb{R}, \tau)$ an, die kompakt und nicht abgeschlossen ist.

d) Sei (X, τ) ein Hausdorff Raum und $C \subset X$ kompakt. Zeigen Sie, zu $x \notin C$ gibt es disjunkte offene Mengen A und B , so daß $C \subset A$ und $x \in B$. Folgern Sie, daß kompakte Teilmengen eines Hausdorff Raumes abgeschlossen sind.

44. Aufgabe: Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume und $(X \times Y, \tau \times \sigma)$ ihr Produktraum, siehe Aufgabe 33 b).

a) Zeigen Sie, wenn τ und σ Hausdorff Topologien sind, dann ist $\tau \times \sigma$ eine Hausdorff Topologie.

b) Zeigen Sie, wenn X und Y kompakt sind, dann ist $X \times Y$ kompakt.

45. Aufgabe: Unter einem (achsenparallelen) Quader im $\mathbb{R}^n$ verstehen wir im folgenden Mengen der Form

$$Q(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n\},$$

wobei $a = (a_i)$ und $b = (b_i)$ in $\mathbb{R}^n$ sind, so daß $a_i \leq b_i$.

Es sei $\mathcal{Q} = \{Q(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^n \text{ mit } a_i \leq b_i\}$. Ein Würfel ist ein Quader dessen Kanten gleich lang sind.

a) Beweisen Sie die Aussage: Jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist eine Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Würfeln, die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Hinweis: Führen Sie die Details auf Seite 23 ff von *Barner-Flohr, Analysis II*, aus, d.h., transformieren Sie die dort gegebene Prosa in einen formalen mathematischen Beweis.

b) Sei $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Abbildung, so daß $f(1) = 1$ und $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dann gilt $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$.

c) Sei $\mu: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Abbildung, so daß gilt:

1. $\mu(Q) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2)$ für $Q = Q_1 \cup Q_2$ disjunkt,
2. $\mu(x+Q) = \mu(Q)$ für $x \in \mathbb{R}^n$,
3. $\mu([0, 1]^n) = 1$.

Folgern Sie aus b), daß $\mu(Q(a, b)) = \prod_i (b_i - a_i)$ für $Q(a, b) \in \mathcal{Q}$. (D.h., die Volumenabbildung von Quadern ist schon dadurch festgelegt, daß sie additiv, translationsinvariant und normiert ist.)

46. Aufgabe: Sei X eine nichtleere Menge und

$$\mathbb{R}(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist eine Abbildung}\}.$$

Bekanntermaßen ist $\mathbb{R}(X)$ unter punktweise erklärten Operationen ein reeller Vektorraum. Ein Untervektorraum $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}(X)$ heißt ein Vektorverband, wenn $\max(f, g) \in \mathcal{L}$ für alle $f, g \in \mathcal{L}$. Ein Vektorverband heißt Stonesch, wenn $\min(\mathbb{1}, f) \in \mathcal{L}$ für alle $f \in \mathcal{L}$. Hierbei sind Maximum und Minimum von Abbildungen punktweise definiert, d.h., $\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$. Mit $\mathbb{1}$ ist die Abbildung $\mathbb{1}(x) = 1$ für alle $x \in X$ gemeint.

a) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, daß die Menge $C_c(X)$ aller stetigen, reellwertigen Abbildungen mit kompaktem Träger ein Stonescher Vektorverband ist.

b) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}(X)$ ein Stonescher Vektorverband, $f \in \mathcal{L}$ und $A = \{x \in X \mid f(x) > r\}$ für ein $r > 0$. Beweisen Sie, dann gibt es eine Folge (f_n) in $\mathcal{L}$, die punktweise gegen die charakteristische Funktion χ_A konvergiert ($\chi_A(x) = 1$ für $x \in A$ und Null sonst).

Hinweis: Setzen Sie

$$f_n = \min(\mathbb{1}, n(\max(-n, f) - \max(-n, \min(r, f)))).$$

Abgabetermin: Donnerstag, 31.01.02, Briefkasten im Geb. 27.2 bis 12.45 Uhr.