12. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

47. Aufgabe: a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ in $C_c(\Omega)$ eine lokal endliche Zerlegung der Eins. Zeigen Sie, wenn für $f \in C(\Omega)$ gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_\Omega |f| u_\nu \, d\lambda^n < \infty, \tag{1}$$

dann konvergiert die entsprechende Summe in (1) auch für jede (andere) Zerlegung der Eins in Ω.
b) Wir schreiben $f \in CL^1(\Omega)$ falls f stetig ist und die Summe in (1) konvergiert. Für $f \in CL^1(\Omega)$ definieren wir das Integral

$$\int f \, d\lambda^n := \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_\Omega f u_\nu \, d\lambda^n. \tag{2}$$

Zeigen Sie, die Definition in (2) ist unabhängig von der Zerlegung der Eins. Zeigen Sie, das so definierte Integral ist positiv und linear.
Hinweis: $f^+ = \max(f,0)$ und $f^- = \max(-f,0)$ sind positiv.

48. Aufgabe: (Fortsetzung der Aufgabe 47.)
a) Sei $f \in C(\Omega)$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge nicht negativer Funktionen in $CL^1(\Omega)$, so daß $f_k \uparrow f$. Es gebe ferner ein $r > 0$, so daß $\int f_k \, d\lambda^n \le r$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt $f \in CL^1(\Omega)$ und $\int f \, d\lambda^n = \lim_k \int f_k \, d\lambda^n$.
b) Seien nun $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$ und $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i < b_i$. Es sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i,\ 1 \le i \le n\}$. Zeigen Sie, wenn $f \in C(\Omega)$ beschränkt ist, folgt $f \in CL^1(\Omega)$ und

$$\int_\Omega f \, d\lambda^n = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n.$$

49. Aufgabe: Wir definieren für Funktionen $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ die Faltung

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \, d\lambda^n(y).$$

a) Zeigen Sie, es gilt $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, $f * g = g * f$ und $(rf_1 + f_2) * g = rf_1 * g + f_2 * g$ für $f, f_1, f_2, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $r \in \mathbb{R}$.
b) Für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ sei $\check{f}(x) = f(-x)$. Man zeige, daß die Funktion $f * \check{f}$ positiv semidefinit ist, d.h., die Matrix $[f * \check{f}(x_i - x_j)]_{i,j=1}^m$ ist positiv semidefinit für alle $x_1 \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{N}$.
Hinweis: $(\sum_i a_i)^2 = \sum_{i,j} a_i a_j$.

50. Aufgabe: Unter einem Netz, oder besser einer verallgemeinerten Folge, in einer Menge X versteht man eine Abbildung $h : \Lambda \to X$, wobei die Menge Λ mit einer Präordnung $\leq$, d.h., $\lambda \leq \lambda$ und aus $\lambda \leq \mu$, $\mu \leq \nu \Rightarrow \lambda \leq \nu$, versehen ist, die nach oben gerichtet ist, d.h., zu $\lambda, \mu \in \Lambda$ gibt es $\nu \in \Lambda$ mit $\nu \geq \lambda, \mu$. Man schreibt $x_\lambda = h(\lambda)$ und für das Netz h kurz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Offensichtlich ist eine Folge ein Netz mit $\Lambda = \mathbb{N}$ in der natürlichen Ordnung auf $\mathbb{N}$.
Sei (X, τ) ein topologischer Raum (siehe Aufgabe 33). Ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in X konvergiert gegen $x \in X$, wenn gilt: Für alle $U \in \mathcal{O}(x)$ gibt es $\lambda(U) \in \Lambda$ so daß $x_\lambda \in U$ für alle $\lambda \geq \lambda(U)$. Man schreibt dann $\lim_\lambda x_\lambda = x$.

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und sei Λ die Menge aller endlichen Teilmengen $\lambda = \{x_0, \dots , x_n\}$ von $\mathbb{R}$, so daß $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Man ordne Λ durch $\subset$. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und

$$S_j(f) := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\}, \quad I_j(f) := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

sowie

$$OS_\lambda(f) = \sum_{j=1}^{n} S_j f(x_j - x_{j-1}), \quad US_\lambda(f) = \sum_{j=1}^{n} I_j f(x_j - x_{j-1}).$$

Zeigen Sie, daß $(OS_\lambda(f))_{\lambda\in\Lambda}$ und $(US_\lambda(f))_{\lambda\in\Lambda}$ Netze sind, die in $\mathbb{R}$ konvergieren. Was bedeutet $\lim_\lambda OS_\lambda(f) = \lim_\lambda US_\lambda(f)$? Sei f eine Regelfunktion auf $[a, b]$. Zeigen Sie, daß

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_\lambda OS_\lambda(f) = \lim_\lambda US_\lambda(f).$$

Abgabetermin: Donnerstag, 07.02.02, Briefkasten im Geb. 27.2 bis 12.45 Uhr.