14. Übung zur Analysis III WS 2001-2002

55. Aufgabe: Es sei die Funtkionenfolge

$$f_n(x) = \frac{n^t x}{1 + n^2 x^2}$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ gegeben, wobei $t > 0$. Für welche t ist die Folge (f_n) punktweise konvergent und für welche t gilt $\lim_n \int_0^1 f_n(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 \lim_n f_n(x)\, d\lambda(x)$?

56. Aufgabe: Es liege $A \subset \mathbb{R}^n$ in einem affinen Unterraum der Dimension $d < n$. Zeigen Sie, daß das Volumen von A im $\mathbb{R}^n$ Null ist, d.h., daß A eine λ^n-Nullmenge ist, also

$$\|\chi_A\|_\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \, d\lambda^n = 0,$$

wobei χ_A die charakteristische Funktion von A ist und das Integral die stetige Fortsetzung des iterierten Integrals von $C_c(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{L}^1$ ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich, das es ausreicht, zu zeigen, daß ein d-dimensionaler Würfel im $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung eine λ^n-Nullmenge ist.

57. Aufgabe: Sei X lokalkompakt und $\mu\colon C_c(X) \to \mathbb{R}$ eine positive Linearform. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer Funktionen in $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ und es gebe $r > 0$, so daß $\int f_n \, d\mu \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ferner existiere $\lim_n f_n(x) = f(x)$ μ-fast überall. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ und $\int f \, d\mu \leq r$.

Hinweis: Man setze $g_n(x) := \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\}$.

58. Aufgabe: Man gebe, mit Nachweis, ein Beispiel für eine Lebesgue-integrierbare Funktion an, die nicht Riemann-integriebar ist.

Abgabetermin: Donnerstag, 21.02.02, Briefkasten im Geb. 27.2 bis 12.45 Uhr.