Lineare Operatoren auf dem Hilbertraum

Vorlesung WS 2002/03

Prof. Dr. Gerd Wittstock
Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik

Version: 7. Februar 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Hilberträume

1.1 Sesquilinearformen

Bezeichnung. (Körper $\mathbb{K}$) Im folgenden bezeichne $\mathbb{K}$ wahlweise den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Der interessantere Fall ist zumeist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, aber wir wollen den reellen Fall nicht unnötig ausschließen. Wir verwenden die Bezeichnung $\mathbb{K}$ in Aussagen, die in beiden Fällen gelten und schreiben die Formeln dann so, wie sie im Komplexen lauten.

Dabei tritt häufig zu einer komplexen Zahl λ die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ und der Realteil $\operatorname{Re}\lambda$ auf. Dies ist im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ so zu lesen, daß einfach $\lambda = \overline{\lambda} = \operatorname{Re}\lambda$ ist.

Dagegen beziehen sich Formeln, in denen die imaginäre Einheit i und der Imaginärteil $\operatorname{Im}\lambda$ vorkommen, immer auf den komplexen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1.1 Bez. (konjugiert lineare Funktionale)

Ein Funktional$\varphi : V \to \mathbb{K}$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißt **konjugiert linear**, wenn

$$\varphi(\lambda x + y) = \overline{\lambda}\varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{K},\ x, y \in V$$

gilt. Das Funktional $\overline{\varphi} : x \mapsto \overline{\varphi(x)}$ ist dann linear.

Im komplexen Fall müssen wir lineare und konjugiert lineare Funktionale unterscheiden, denn hier gilt

$$\varphi = \overline{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0.$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gibt es die Unterscheidung zwischen linearen und konjugiert linearen Funktionalenl eigentlich nicht, da hier $\varphi = \overline{\varphi}$ ist. Sie entsteht nur dadurch, daß wir i.allg. die Aussagen für den reellen und komplexen Fall in einem Satz zusammenfassen.

Bezeichnung. (Funktionale und Formen) 1. Eine Abbildung φ von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V in den Körper $\mathbb{K}$ nennt man gern ein **Funktional**. Man könnte φ genauso gut eine Funktion nennen, aber in den Anwendungen ist V häufig ein Vektorraum von Funktionen, z. Bsp. $V = C([01], \mathbb{K})$. Dann ist die Bezeichnung Funktional hilfreich, um φ sprachlich von den Funktionen $f \in V$ zu unterscheiden.

2. Funktionale auf einem Vektorraum, die besondere algebraischen Bedingungen erfüllen heißen häufig **Formen**. Gebräuchlich sind die Bezeichnungen Linearform = lineares Funktional, Bilinearform, Sesquilinearform, quadratische Form, Multilinearform.

1.1.2 Def. (Sesquilinearform)

Es seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(i) *Eine **Sesquilinearform**ist ein Funktional $b : V \times W \to \mathbb{K}$, das linear in der ersten Variablen und konjugiert linear in der zweiten Variablen ist:*

$$b(\lambda x + y, z) = \lambda b(x, z) + b(y, z)$$
$$b(z, \lambda x + y) = \overline{\lambda} b(z, x) + b(z, y).$$

*Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt b eine **Bilinearform**.*

(ii) *Zu einer Sesquilinearform b definiert man die **adjungierte** Sesquilinearform b^* durch*

$$b^*(x, y) := \overline{b(y, x)}.$$

(iii) *Im Falle $V = W$ heißt eine Bilinearform b **hermitesch** oder auch* selbstadjungiert, *wenn $b = b^*$ ist. D. h., es gilt*

$$b(x, y) = \overline{b(y, x)}.$$

*Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sagt man hierfür **symmetrische** Bilinearform.*

1.1.1 Polarisationsformel

Anmerkung. (quadratische Form) Wir betrachten im folgenden immer Sesquilinearformen $b : V \times V \to \mathbb{K}$ auf einem Vektorraum V.

1. Für eine eine Sesquilinearform b nennt man das Funktional

$$V \ni x \mapsto b(x, x)$$

die zugehörige **quadratische Form**. Zur Abkürzung schreiben wir $b(x) := b(x, x)$.

2. Für die quadratische Form gilt die Parallelogrammidentität. Für ein Parallelogramm in der Ebene mit den Kantenvektoren x und y sind $x + y$ und $x - y$ die Diagonalvektoren. Die Parallelogrammidentität besagt, daß die Summe der *Quadrate der Diagonalen* gleich der Summe *der Quadrate der vier Seiten* des Parallelogramms ist.

Anmerkung. (Re und Im von Sesquilinearformen) 1. Einen komplexen Vektorraum V kann man auch als reellen Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$ betrachten. Für eine Sesquilinearform b auf V sind $\operatorname{Re} b$ und $\operatorname{Im} b$ Bilinearformen auf $V_{\mathbb{R}}$. Es gilt:

$$b \text{ hermitesch} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} b \text{ symmetrisch und } \operatorname{Im} b \text{ schiefsymm.}$$

2. Entsprechend der bekannten Formel für $(a + b)^2$ gelten für eine hermitesche Sesquilinearform b die Formeln

$$b(x \pm y) = b(x) \pm 2 \operatorname{Re} b(x, y) + b(y)$$
$$b(x \pm iy) = b(x) \pm 2 \operatorname{Im} b(x, y) + b(y)$$

1.1.3 Festst. (Parallelogrammidentität)

Für eine Sesquilinearform b auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V gilt:

$$b(x + y) + b(x - y) = 2b(x) + 2b(y) \quad \text{für } x, y \in V.$$

Anmerkung. (Polarisationsformeln) 1. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ kann man eine Sesquilinearform durch die Polarisationsformel 1.1.4(i) aus ihrer quadratischen Form zurückgewinnen.

2. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gibt es nur für symmetrische Bilinearformen eine eindeutige Beziehung 1.1.4(ii) zwischen der Bilinearform und iher quadratischen Form. Der Grund hierfür ist, daß es im Reellen auch **schiefsymmetrische** Bilinearformen $b \neq 0$. Für diese gilt

$$b(x, y) = -b(y, x).$$

Jede Bilinearform kann man auf eindeutige Weise als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Bilinearform schreiben:

$$b(x, y) = \tfrac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x)) + \tfrac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x))$$

Der erste Summand ist der symmetrische und der zweite Summand ist der schiefsymmetrische Anteil. Aus 1.1.4(ii) folgt, daß eine Bilinearformen genau dann schiefsymmetrisch ist, wenn ihre quadratische Form verschwindet.

1.1.4 Festst. (Polarisationsformel)

(i) *Für eine Sesquilinearform b auf einem komplexen Vektorraum gilt:*

$$b(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{\nu=0}^{3} i^\nu b(x + i^\nu y).$$

(ii) *Für eine hermitesche Sesquilinearform gilt*

$$\operatorname{Re} b(x, y) = \tfrac{1}{4}\big(b(x + y) - b(x - y)\big).$$

Beweis. (i) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist die Polarisationsformel 1.1.4(i) der Spezialfall $n = 4$ der folgenden Polarisationsformeln 1.1.5(i).

(ii) $b(x+y)-b(x-y) = \big(b(x)+2\operatorname{Re} b(x,y)+b(y)\big) - \big(b(x)-2\operatorname{Re} b(x,y)+b(y)\big) = 4\operatorname{Re} b(x,y)$.

1.1.5 Bem. (komplexe Polarisationsformeln)
(i) *Für eine Sesquilinearform b auf einem komplexen Vektorraum und $n = 3,4,\ldots$ gilt:*

$$b(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} \zeta_n^\nu b(x+\zeta_n^\nu y).$$

wobi $\zeta_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ die n-te Einheitswurzel ist.
(ii)

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta} b(x+e^{i\theta}y)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} b(x+\zeta y)\,d\zeta. \end{aligned}$$

Beweis. (i) Da für die n-te Einheitswurzeln

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\zeta_n^{k\nu} = \frac{\zeta_n^{kn}-1}{\zeta_n^k-1} = 0 \quad \text{für } k\in\mathbb{N}$$

ist, folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\zeta_n^\nu b(x+\zeta_n^\nu y) \\ &\quad = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\big(\zeta_n^\nu b(x) + b(x,y) + \zeta_n^{2\nu} b(y,x) + \zeta_n^\nu b(y)\big) \\ &\quad = b(x,y). \end{aligned}$$

(ii) Analog folgt die Integralform der Polarisationsformel.

1.1.6 Folg. (Charakterisierung: hermitesch)
Auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V gilt: Eine Sesquilinearform ist genau dann hermitesch, wenn ihre quadratische Form reelwertig ist.

$$b \text{ hermitesch} \quad \Leftrightarrow \quad b(x)\in\mathbb{R} \quad \text{für alle } x\in V$$

1.1.2 Schwarzsche Ungleichung

1.1.7 Def. (semidefinit, inneres Produkt)
(i) *Eine hermitesche*[1] *Sesquilinearform b heißt **positiv semidefinit**, wenn*

$$b(x,x)\geq 0 \quad \text{für alle } x\in V.$$

*bzw. **positiv definit**, wenn*

$$b(x,x) > 0 \quad \text{für alle } 0\neq x\in V.$$

(ii) *Ein **inneres Produkt** ist eine positiv definite Sesquilinearform.*

Anderere Bezeichnungen für inneres Produkt sind Skalarprodukt *oder* Innenprodukt. *Ein Vektorraum mit einem festgelegten inneren Produkt heißt ein* Innenproduktraum *oder ein* Prähilbertraum. *Innere Produkte werden vorzugsweise mit $\langle x,y\rangle$ bezeichnet.*

[1] Man beachte hierzu die folgende Anmerkung

Anmerkung. (zur Def. von semidefiniten Formen) 1. Im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ kann man auf die Forderung, daß positiv semidefinite Sesquilinearformen *hermitesch* sind, verzichten (siehe Korollar 1.1.6) Es gilt also

$$b \quad \text{pos. semidefinit} \quad \Leftrightarrow \quad b(x,x)\geq 0 \quad \text{für alle } x\in V.$$

2. Im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ist die Forderung, daß positiv semidefinite Bilinearformen symmetrisch sind, unverzichtbar (da es auch schiefsymmetrische Formen gibt).

1.1.8 Lemma
Für $0\leq a,b$ gilt

$$\inf_{0<t}\left(t^2a^2 + \frac{1}{t^2}b^2\right) = 2ab.$$

Für $0<a,b$ wird das Minmum bei $t_{\min} := \sqrt{\frac{b}{a}}$ angenommen, anderenfalls ist das Infimum der Grenzwert in ∞ bzw. 0.

1.1.9 Festst. (Schwarzsche Ungleichung)
Es sei $b: V\times V\to\mathbb{K}$ eine positiv semidefinite Sesquilinearform auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

(i) *Es gilt die Schwarzsche Ungleichung*

$$|b(x,y)| \leq \sqrt{b(x,x)}\sqrt{b(y,y)} \quad \text{für } x,y\in V.$$

(ii) *Das Funktional $p(x) := \sqrt{b(x,x)}$ ist eine Halbnorm (siehe* Definition B.1.1*) auf V. Die Dreiecksungleichung für p nennt man auch die **Minkowskische Ungleichung**:*

$$\sqrt{b(x+y)} \leq \sqrt{b(x)} + \sqrt{b(y)} \quad \text{für } x,\, y\in V.$$

Beweis. (i) Für $0<t$ und $x,y\in V$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq b(tx - \frac{1}{t}y) \\ &= t^2 b(x) - 2\operatorname{Re} b(x,y) + \frac{1}{t^2} b(y). \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.1.8 ist also

$$\operatorname{Re} b(x,y) \leq \sqrt{b(x,x)}\sqrt{b(y,y)}.$$

Ersetzt man in dieser Ungleichung y durch $\operatorname{sgn}(b(x,y)y$, so folgt die Behauptung[2].

(ii) Offensichtlich gilt $p(\lambda x) = |\lambda x|$ für $\lambda\in\mathbb{K}$. Aus der Schwarzschen Ungleichung (i) folgt die Dreiecksungleichung:

$$p(x+y)^2 = b(x) + 2\operatorname{Re} b(x,y) + b(y) \leq (p(x)+p(y))^2.$$

Anmerkung. 1. Wir haben in dem obigen Beweis die Minkowskische Ungleichung aus der Schwarzschen Ungleichung gefolgert. Durch Quadrieren folgt aus der Minkowskischen Ungleichung wieder die Schwarzsche Ungleichung.

2. Bei der Konstruktion von Hilberträumen benutzt man meist die Richtung, daß man zunächst die Minkowskische Ungleichung zeigt. Man vgl. dazu die Konstruktion 1.2.9 des Hilbertraumes ℓ_2, die die typische Vorgehensweise zeigt.

1.1.10 Folg. (Norm, Gleicheit in Schwarz. Ungl.)
(i) *Für ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V ist*

$$V\ni x\mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

eine Norm auf V.

[2] Das Signum definiert man als $\operatorname{sgn}\lambda := \begin{cases} \lambda/|\lambda| & \text{für } \lambda\neq 0, \\ 0 & \text{für } \lambda = 0. \end{cases}$

(ii) *In der Schwarzschen Ungleichung*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \quad \text{für } x, y \in V$$

gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. (i) Siehe Minkowskische Ungleichung 1.1.9 (ii).

(ii) Ohne Einschränkung seien $x, y \neq 0$. In dem Beweis der Schwarzschen Ungleichung 1.1.9 gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn für $t_{\min} := \sqrt{\frac{\|y\|}{\|x\|}}$ (vgl. Lemma 1.1.8)

$$0 = \left\|t_{\min}x - \frac{1}{t_{\min}}\operatorname{sgn}(\langle x, y\rangle) \cdot y\right\|^2$$

ist.

1.1.11 Bem. (Nullraum pos. semidef. Sesquilin.)

Es sei $b : V \times V \to \mathbb{K}$ eine positiv semidefinte Sesquilinearform auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und $p : X \mapsto \sqrt{b(x, x)}$ die zugehörige Halbnorm.

(i) *Der Kern von p:*

$$\operatorname{Kern}(p) := \{x \in V \mid b(x, x) = 0\}$$

ist ein linearer Teilraum von V.

(ii) *Wir bezeichnen die Nebenklassen von $\operatorname{Kern}(p)$ mit $[x] := x + \operatorname{Kern}(p)$. Auf dem Quotientenraum $\mathcal{X} := V/\operatorname{Kern}(p)$ erhält man ein inneres Produkt durch die Vorschrift*

$$\langle [x], [y]\rangle := b(x, y) \quad \text{für } x, y \in V.$$

Beweis. Nach Feststellung 1.1.9(ii) gilt für $p : x \mapsto \sqrt{b(x, x)}$ die Minkowskische Ungleichung. Somit ist

$$\operatorname{Kern}(p) = \{x \in V \mid p(x) = 0\}$$

ein linearer Teilraum von V. Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt für $x_1 \in [x]$, $y_1 \in [y]$:

$$\begin{aligned}
&|b(x, y) - b(x_1, y_1)| \\
&= |b(x - x_1, y) + b(x, y - y_1) - b(x - x_1, y - y_1)| \\
&\leq p(x - x_1)p(y) + p(x)p(y - y_1) + p(x - x_1)p(y - y_1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Folglich ist $\langle [x], [y]\rangle := b(x, y)$ wohldefiniert. Das Funktional $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ist offensichtlich sesquilinear, hermitesch und positiv definit.

1.2 Geometrie des Hilbertraumes

Anmerkung. Vektorräume mit einem *ausgezeichneten* inneren Produkt heißen *Prähilberträume*. Die Prähilberträume bilden eine Vorstufe zu den Hilberträumen.

Man untersucht z. B., wie sich andere Sesquilinearformen im Bezug auf das innere Produkt verhalten. Um die Formeln augenfälliger zu gestalten, bezeichnet man das *fest gewählte* innere Produkt mit $\langle x, y\rangle$ Das Funktional $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ heißt die *Norm* des Prähilbertraumes.

Andere gängige Bezeichnungen für das innere Produkt sind $(x \mid y)$ und $\langle x \mid y\rangle$.

In der Physik und der mathematischen Physik ist eine geringfügig abweichende Konvention üblich: das innere Produkt ist dort konjugiert linear in der ersten Variablen und linear in der zweiten Variablen.

Wir werden für Prähilberträume die Buchstaben $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ reservieren und Hilberträume mit $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ bezeichnen.

1.2.1 Def. (Prähilbertraum)

Es sei $\mathcal{X}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$ ein inneres Produkt auf $\mathcal{X}$.

(i) *Das Paar $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ oder kurz $\mathcal{X}$ heißt ein Prähilbertraum.*

1.2.2 Bem. (Norm eines Prähilbertraumes)

Es sei $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum.

(i) $\mathcal{X}$ ist ein normierter Raum (vg. Anhang, Abschnitt B) mit der Skalarproduktnorm*(vgl. Korollar 1.1.10)*

$$\mathcal{X} \ni x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

(ii) Für x, $y \in \mathcal{X}$ gilt die die Schwarzsche Ungleichung

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\| \quad \text{für } x,\ y \in \mathcal{X}.$$

und die Minkowskische Ungleichung

$$\sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

1.2.3 Bem. (Stetigkeit des inneren Produktes)

Das innere Produkt eines Prähilbertraumes ist stetig. Es ist auf jeder beschränkten Teilmenge Lipschitz-stetig

Beweis.

$$\begin{aligned}
&|\langle x_1, y_1\rangle - \langle x_2, y_2\rangle| \\
&= |\langle x_1 - x_2, y_1\rangle + \langle x_1, y_1 - y_2\rangle - \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle| \\
&\leq |\langle x_1 - x_2, y_1\rangle| + |\langle x_1, y_1 - y_2\rangle| - |\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle| \\
&\leq \|x_1 - x_2\|\,\|y_1\| + \|x_1\|\,\|y_1 - y_2\| \\
&\qquad + \|x_1 - x_2\|\,\|y_1 - y_2\|.
\end{aligned}$$

Wenn $\|x\|, \|y\| \leq r < \infty$ sind, so folgt

$$|\langle x_1, y_1\rangle - \langle x_2, y_2\rangle| \leq (\sqrt{2}r + \frac{1}{2})\sqrt{\|x_1 - x_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2}$$

1.2.4 Bsp. (Inneres Prod. auf $C([a, b], \mathbb{K})$)

Der Raum $(C([a, b], \mathbb{K})$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ ist ein Prähilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_a b1 f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Wenn für eine stetige Funktion f das innere Produkt $\langle f, f\rangle = \int_a^b |f(t)|^2\,dt = 0$, so ist $f \equiv 0$ (siehe Analysis II)

Zu dem dem inneren Produkt auf $C([a,b],\mathbb{K})$ gehört die sogenannte L^2-Norm

$$\|f\|_2 := \Big(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Anmerkung. Man kann die L^2-Norm durch die sup-Norm nach oben abschätzen:

$$\|f\|_2 \le \sqrt{b-a}\,\|f\|_{\sup}.$$

Bekanntlich ist $C([a,b],\mathbb{K})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\sup}$ ein Banachraum. Dagegen ist $C([a,b1],\mathbb{K})$ mit der L^2-Norm nicht vollständig, wie das Bsp 1.2.5 zeigt.

Wir werden den Prähilbertraum $\big(C([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_2\big)$ zu einem Banachraum zu $L^2([a,b],\mathbb{K})$ vervollständigen. L^2 ist dann ein Prähilbertaum, der in der zugehörigen Norm vollständig ist. Solche Räume heißen *Hilberträume*. L^2 ist eines der wichtigsten Beispiele eines Hilbertraumes.

Um die Eigenschaften des Raumes L^2 völlig zu verstehen, braucht man einerseits die folgenden Resultate über abstrakte Hilberträume und zusätzlich die Lebesguesche Integrationstheorie. Man kann die Elemente x, y von $L^2([a,b])$ durch quadratisch Lebesgue-integrierbare Funktionen f, g so darstellen, so daß

$$\|x\|_2 = \int_{[a,b]} |f(t)|^2\,dt \quad \text{und} \quad \langle x,y\rangle = \int_{[a,b]} f(t)\overline{(g(t)}\,dt.$$

1.2.5 Bsp. ($\|\cdot\|_2$-Cauchyfolge ohne Grenzwert)

Wir geben ein Beispiel einer Folge in $C([a,b])$, die eine Cauchy-Folge in der $\|\cdot\|_2$-Norm ist, aber keinen Grenzwert in $C([a,b])$ hat.

Zu Vereinfachung nehmen wir für $[a,b]$ das Intervall $[0,2]$ und betrachten die Folge $(f_n)_n \in C([0,2])$ mit

$$f_n(t) := \begin{cases} t^n & \text{für } 0 \le t < 1, \\ 1 & \text{für } 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Wie man leicht sieht, gilt $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\|_2 = 0$.

Die f_n konvergieren punktweise gegen die charakteristische Funktion $1_{[1,2]}$, die sicher nicht stetig ist. Wir können dies aber nicht direkt ausnutzen, da wir aus der Konvergenz in der $\|\cdot\|_2$-Norm nicht auf die punktweise Konvergenz schließen können. Wir untersuchen stattdessen die Stammfunktionen.

Annahme: Es gibt ein $g \in C([1,2])$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - g\|_2 = 0$ ist. Betrachten wir die Stammfunktionen F_n mit $F_n(0) = 0$ und G mit $G(0) = 0$ von f_n bzw. g. Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$|F_n(t) - G(t)| \le \int_0^t |f_n(\tau) - g(\tau)|\,d\tau \le \sqrt{2}\|f_n - g\|_2.$$

Also ist

$$G(t) = \lim_{n\to\infty} F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le t < 1, \\ t-1 & \text{für } 1 \le t \le 1. \end{cases}$$

Da diese Funktion G im Punkt $t = 1$ nicht differenzierbar ist, kann g im Widerspruch zur Annahme nicht stetig sein.

1.2.6 Def. (Hilbertraum)

Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein Prähilbertraum, der in der Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ vollständig ist.

1.2.7 Bsp. (l_2^n, euklidische und unitäre Räume)

(i) der $\mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle x,y\rangle := \sum_{\nu=1}^n \xi_\nu \overline{\eta_\nu} \quad \text{für } x = (\xi_\nu),\ y = (\eta_\nu) \in \mathbb{K}^n.$$

wird mit $l_2^n(\mathbb{K})$ bezeichnet. Mit l_2^n meinen wir im folgenden immer den komplexen Raum $l_2^n(\mathbb{C})$.

Die zugehörige Norm bezeichnen wir mit

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{\nu=1}^n |\xi_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

In der Analysis II wurde gezeigt, daß der $\mathbb{K}^n$ ist in der Norm $\|\cdot\|_2$ vollständig ist. $l_2^n(\mathbb{K})$ ist also ein Hilbertraum.

(ii) Ein **euklidischer Raum** ist ein endlichdimensionaler reeller Prähilbertraum. Ein **unitärer Raum** ist ein endlichdimensionaler komplexer Prähilbertraum.

In der lin. Alg. wurde gezeigt, daß jeder n-dimensionale euklidische bzw. unitäre Raum $\mathcal{X}$ eine Orthonormalbasis $(b_1, \cdots, b_n)$ hat (siehe Satz 1.5.7)). Mit der Koordinatenabbildung

$$\mathcal{X} \ni x = \sum_{\nu=1}^n \xi_\nu b_\nu \mapsto (\xi_\nu)_{\nu=1}^n \in \mathbb{K}^n$$

erhält man eine Isomorphismus von $\mathcal{X}$ mit $\mathbb{K}^n$, bei der dem Skalarprodukt von $\mathcal{X}$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{K}^n$ entspricht:

$$\langle x,y\rangle = \sum_{\nu=1}^n \xi_\nu \overline{\eta_\nu} \quad \text{für } x = \sum_{\nu=1}^n \xi_\nu b_\nu,\ y = \sum_{\nu=1}^n \eta_\nu b_\nu.$$

Die Koordinatenabbildung ist also eine Isometrie von $\mathcal{X}$ auf den l_2^n. Da der l_2^n vollständig ist, erhalten wir den folgenden Satz.

1.2.8 Satz (endlichdimen. Prähilberträume)

Endlichdimensionale Prähilberträume sind Hilberträume.

1.2.9 Satz (Hilbertraum l_2)

(i) *In Analogie zum l_2^n bildet man den linearen Unterraum*

$$l^2(\mathbb{N},\mathbb{K}) := \{x = (\xi_\nu)_{\nu=1}^\infty \mid \sum_{\nu=1}^\infty |\xi_\nu|^2 < \infty\}$$

des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen. Für den komplexen Fall schreiben wir kurz $l^2 := l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

(ii) *$l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ ist ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt*

$$\langle x,y\rangle := \sum_{\nu=1}^\infty \xi_\nu \overline{\eta}_\nu \qquad (*)$$

und der Norm

$$\|x\| := \Big(\sum_{\nu=1}^\infty |\xi_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Reihe $(*)$, mit der man das innere Produkt definiert, ist absolut konvergent:

$$\sum_{\nu=1}^\infty |\xi_\nu \overline{\eta}_\nu| \le \|x\|\|y\| \quad \text{für } x,y \in l_2(\mathbb{N},\mathbb{K}).$$

Beweis. Der Beweis beruht darauf, daß für $x = (\xi_\nu)_\nu$, $y = (\eta_\nu)_\nu \in l_2$ die n-Tupel $(\xi_\nu)_{\nu=1}^n, (\eta_\nu)_{\nu=1}^n \in l_2^n$ sind und für ihre Norm in l_2^n die folgende Abschätzung gilt:

$$\|(\xi_\nu)_{\nu=1}^n\| = \Big(\sum_{\nu=1}^n |\xi_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{\nu=1}^\infty |\xi_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|x\|.$$

Wir zeigen zunächst, daß für die Elemente von l_2 die Minkowskische Ungleichung gilt. In dieser Ungleichung kommen nur Reihen mit nichtnegativen Summanden vor.

(1) Es seien x und $y \in l^2$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist $\lambda x \in l_2$ und $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. Da l_2^n ein normierter Raum ist folgt

$$\Big(\sum_{\nu=1}^n |\xi_\nu + \eta_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{\nu=1}^n |\xi_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{\nu=1}^n |\eta_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \|x\| + \|y\| < \infty.$$

Da diese Abschätzung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt nun die Minkowskische Ungleichung

$$\Big(\sum_{\nu=1}^\infty |\xi_\nu + \eta_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| + \|y\| < \infty.$$

Also ist $x+y \in l_2$ und $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Der Raum l_2 ist ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf l_2.

(2) Wir zeigen nun die Vollständigkeit von l_2. Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in l_2, wobei $x_k = (\xi_{k,\nu})_\nu$. Aus der Abschätzng

$$|\xi_{k,\nu} - \xi_{l,\nu}| \leq \|x_k - x_l\|$$

folgt, daß die Koordinaten der x_k eine Cauchyfolge $(\xi_{k,\nu})_k$ in $\mathbb{K}$ bilden. Es sei $\xi_\nu = \lim_{k\to\infty} \xi_{k,\nu}$ und $x := (\xi_\nu)_\nu \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Zu zeigen ist, daß $x \in l_2$ und $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$ ist.

Da die Normen einer Cauchy-Folge in l_2 eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ bilden (vgl. Satz B.1.3 (ii)) existiert für $y \in l_2$ der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \|x_k - y\|$ und $c := \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < \infty$.

In l_2^n gilt

$$\sum_{\nu=1}^n |\xi_\nu - \xi_{l,\nu}|^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^n |\xi_{k,\nu} - \xi_{l,\nu}|^2$$
$$\leq \lim_{k\to\infty} \|x_k - x_l\|^2 < 4c^2.$$

Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$\sum_{\nu=1}^\infty |\xi_\nu - \xi_{l,\nu}|^2 \leq \lim_{k\to\infty} \|x_k - x_l\|^2 < 4c^2.$$

Also ist $x - x_l = (\xi_\nu - \xi_{l,\nu})_\nu \in l^2$ und folglich $x = (x - x_l) + x_l \in l_2$.

Da die $(x_k)_k$ eine Cauchyfolge sind, folgt aus der letzten Abschätzung

$$\lim_{l\to\infty} \|x_l - x\|^2 \leq \lim_{l\to\infty} \lim_{k\to\infty} \|x_l - x_k\|^2 = 0.$$

(3) Aus der Schwarzschen Ungleichung für den l_2^n

$$\sum_{\nu=1}^n |\xi_\nu \overline{\eta}_\nu| \leq \Big(\sum_{\nu=1}^n |\xi_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\nu=1}^n |\eta_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|\|y\|.$$

folgt, daß die Reihe $\sum_{\nu=1}^\infty \xi_\nu \overline{\eta}_\nu$ absolut konvergent ist.

Aus den Rechenregeln für Reihen folgt nun, daß diese Reihe ein inneres Produkt auf dem l_2 definiert und $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}}$ die zugehörige Norm ist.

1.2.1 Orthogonalkomplement

1.2.10 Bem. (Parallelogrammidentität)
Für die Norm eines Prähilbertraumes gilt die Parallelogrammidentität (vgl. Feststellung 1.1.3)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Anmerkung. 1. Umgekehrt kann man folgendes zeigen: Wenn eine Norm auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum die Parallelogrammidentität erfüllt, dann erhält man durch die Polarisationsformel 1.1.4 (i) im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bzw. 1.1.4 (ii) im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ein inneres Produkt auf V, das die diese Norm erzeugt.

2. Man benutzt die Parallelogrammidentität in der Gestalt

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\|\frac{x+y}{2}\|^2,$$

um den Abstand von x zu y durch die Normen von x, y und dem Mittlpunkt $\frac{x+y}{2}$ auszudrücken. Man kann auch die Abstände zu einem weiteren bel. Punkt z benutzen:

$$\|x-y\|^2 = 2\|x-z\|^2 + 2\|y-z\|^2 - 4\|\frac{x+y}{2} - z\|^2.$$

1.2.11 Def. (konvexe Menge)
Eine Teilmenge C eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V heißt konvex, wenn wenn mit je zwei Punkten $x, y \in C$ die Verbindungsstrecke in C liegt. D.h.

$$x, y \in C, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow \quad tx + (1-t)y \in C.$$

1.2.12 Festst. (Punkt kürzesten Abstandes)
(i) *Es sei C eine vollständige konvexe Teilmenge des Prähilbertraumes $\mathcal{X}$. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathcal{X}$ genau ein $y \in C$, daß unter allen Punkten in C den kürzesten Abstand zu x hat. D.h.*

$$\|x-y\| = \min_{z\in C} \|x-z\| := \operatorname{dist}(x, C).$$

(ii) *Jede minimierende Folge (y_n) in C, d.h. es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = \operatorname{dist}(x, C),$$

ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Es sei $\rho := \operatorname{dist}(C, x) = \inf_{z\in c} \|z - x\|$. Man wähle eine minimierende Folge $(y_n)_n$ in C mit $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = \rho$.

Aus der Parallelogrammidentität

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\|y_m - x\|^2 + 2\|y_n - x\|^2 - 4\|\tfrac{y_m+y_n}{2} - x\|^2$$

und $\frac{y_m+y_n}{2} \in C$, folgt

$$\|y_m - y_n\| \leq 2\|y_m - x\|^2 + 2\|y_n - x\|^2 - 4\rho^2 \to 0$$

für $m, n \to \infty$.

Die $(y_n)_n$ sind eine Cauchyfolge. Da C vollständig ist, konvergieren die y_n gegen ein $y \in C$. Nun folgt:

$$\|y - x\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = \rho.$$

Wenn y_1 und y_2 Punkte in C mit küzesten Abstand zu x sind, so folgt offensichtlich $y_1 = y_2$.

Anmerkung. 1. Im Beweis braucht man nur die Mittelpunktskonvexität

$$x, y \in C \quad \Rightarrow \quad \frac{x+y}{2} \in C.$$

Eine abgeschlossene mittelpunktskonvexe Menge ist aber konvex.

2. In der Geometrie fällt man von einem Punkt P das Lot auf eine Gerade oder eine Ebene. Der Fußpunkt des Lotes ist der Punkt auf der Geraden oder der Ebene mit kürzestem Abstand zu P. Enstsprechendes gilt in Prähilberträumen.

1.2.13 Lemma (Lot auf Unterraum)

Es sei $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum und $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ ein linearer Teilraum. Für $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent

$$\|x-y\| = \operatorname{dist}(x, \mathcal{Y}) \quad \Leftrightarrow \quad x - y \perp \mathcal{Y}.$$

Beweis. "$\Rightarrow$" Für $0 < t$ und $z \in \mathcal{Y}$ folgt aus

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &\le \|x-(y-tz)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 - 2\operatorname{Re} t\langle x-y, z\rangle + t^2\|z\|^2,\end{aligned}$$

daß $2\operatorname{Re}\langle x-y, z\rangle \le t\|z\|^2$. Da $0 < t$ und $z \in \mathcal{Y}$ beliebig sind, folgt $\langle x-y, z\rangle = 0$. Also ist$x - y \perp \mathcal{Y}$.

"$\Leftarrow$" Für alle $z \in \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned}\|x-z\|^2 &= \|(x-y)+(y-z)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \ge \|x-y\|^2.\end{aligned}$$

Anmerkung. Es sei V ein Vektorraum und $U_1, \cdots, U_n \subset V$ Unterräume. V heißt die direkte Summe von $U_1, \ldots, U_n$, in Zeichen

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n = \bigoplus_{\nu=1}^{n} U_\nu,$$

wenn sich jedes $x \in V$ auf eindeutige Weise in der Form

$$x = y_1 + \cdots y_n \quad \text{mit } y_\nu \in U_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n,$$

schreiben läßt.

Für $n = 2$ gilt

$$V = U_1 \oplus U_2 \quad \Leftrightarrow \quad V = U_1 + U_2 \quad \text{und} \quad U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

Man nennt dann U_2 einen Komplementärraum oder direkten Summanden zu U_1.

1.2.14 Bez. (senkrechter Raum)

Es sei $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum und $M \subset \mathcal{X}$.

$$M^\perp := \{y \in \mathcal{X} \mid \langle x, y\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in M\}$$

heißt der senkrechte Raum zu M.

Es sei $M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp$.

1.2.15 Bem. (Regeln für $M^\perp$)

(i) $M^\perp$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{X}$.

(ii) Für den Abschluß M^- von M gilt $(M^-)^\perp = M^\perp$.

(iii) Die lineare Hülle $\operatorname{lin} M$ und die abgeschlossene lineare Hülle $\overline{\operatorname{lin}}\, M$ haben den gleichen senkrechten Raum wie M:

$$(\operatorname{lin} M)^\perp = (\overline{\operatorname{lin}}\, M)^\perp = M^\perp.$$

1.2.16 Bez. (orthogonale Summe)

Es seien $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum und $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ Unterräume.

(i) $\mathcal{Y}$ und $\mathcal{Z}$ heißen *orthogonal*,

$$\mathcal{Y} \perp \mathcal{Z},$$

wenn $y \perp z$ fur alle $y \in \mathcal{Y}$ und $z \in \mathcal{Z}$ ist.

(ii) Wenn $\mathcal{Y} \perp \mathcal{Z}$ ist, dann ist der lineare Teilraum $\mathcal{Y} + \mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ die direkte Summe von $\mathcal{Y}$ und $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Y} \perp \mathcal{Z} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Y} + \mathcal{Z} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}.$$

Man nennt diese Situation kurz eine *orthogonale direkte Summe.*

1.2.17 Festst. (Orthogonalzerlegung)

Es sei $\mathcal{K}$ ein vollständiger linerarer Teilraum eines Prähilbertraumes $\mathcal{X}$. Dann gilt

$$\mathcal{X} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp.$$

Aus Satz 1.2.8 folgt speziell:

1.2.18 Folg. (Komplement endlichdim. Raum)

Für einen endlichdimensionalen linearen Teilräume $\mathcal{L}$ eines Prähilbertraumes $\mathcal{X}$ gilt $\mathcal{X} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$.

Beweis. Da $\mathcal{K}$ vollständig ist, gibt es nach Feststellung 1.2.12 zu jedem $x \in \mathcal{X}$ genau einen Punkt $y \in \mathcal{K}$ mit kürzestem Abstand zu x. Nach Lemma 1.2.13 ist dann $x-y$ das Lot von x auf $\mathcal{K}$:

$$\|x-y\| = \operatorname{dist}(x, \mathcal{K}) \quad \Leftrightarrow \quad z := x - y \in \mathcal{K}^\perp$$

Also ist $x = y + z$ mit $y \in \mathcal{K}$ und $z \in \mathcal{K}^\perp$. Nach Bezeichnung 1.2.16 (ii) ist also $\mathcal{X} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$.

1.2.19 Satz (Zerlegungssatz im Hilbertraum)

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

(i) Für jeden abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{K}$ von $\mathcal{H}$ gilt

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp.$$

(ii) Für einen abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ gilt $\mathcal{K}^{\perp\perp} = \mathcal{K}$.

(iii) Für einen linearen Teilraum $\mathcal{Y} \subset \mathcal{H}$ ist der Abschluß $\mathcal{Y}^- = \mathcal{Y}^{\perp\perp}$.

(iv) Für eine Teilmenge M von $\mathcal{H}$ gilt $\overline{\operatorname{lin}}\, M = M^{\perp\perp}$.

(v) $\operatorname{lin} M$ ist genau dann dicht in $\mathcal{H}$, wenn $M^\perp = \{0\}$.

Beweis. (i) folgt aus Feststellung 1.2.17.

(ii) Offensichtlich ist $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^{\perp\perp}$. Da

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp \quad \text{und} \quad \mathcal{H} = \mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{K}^{\perp\perp}$$

ist, kann $\mathcal{K}$ kein echter Teilraum von $\mathcal{K}^{\perp\perp}$ sein.

(iii) Da der Abschluß $\mathcal{Y}^-$ nach Korollar B.1.4 ein linearer Teilraum ist und den gleichen senkrechten Raum wie $\mathcal{Y}$ hat (vgl. Bem. 1.2.15(i)), folgt

$$\mathcal{Y}^- = (\mathcal{Y}^-)^{\perp\perp} = (\mathcal{Y}^\perp)^\perp.$$

(iv) Nach (iii) und Bem. 1.2.15(iii) ist $\overline{\operatorname{lin}}\, M = ((\overline{\operatorname{lin}}\, M)^\perp)^\perp = M^{\perp\perp}$.

(v) folgt aus (iv).

Anmerkung. Der Zerlegungssatz besagt, daß es zu jedem abgeschlossenen Unterraum eines Hilbertraumes einen abgeschlossenen Komplementärraum gibt. Lindenstrauss und Tzafriri haben 1971 gezeigt, daß jeder Banachraum mit dieser Eigenschaft isomorph zu einem Hilbertraum ist.

1.3 Darstellungssatz für Linearformen

Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt:

1.3.1 Bem. (Dual eines Prähilbertraumes)
Es seien $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum und $y \in \mathcal{X}$.

(i) *Die Linearform*

$$\varphi_y : x \mapsto \langle x, y\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{X}$$

ist beschränkt und es gilt $\|\varphi_y\| = \|y\|$.

(ii) *Die Abbildung $\mathcal{X} \ni y \mapsto \varphi_y \in \mathcal{X}^*$ ist konjugiert linear und isometrisch.*

1.3.2 Satz (Darstellungssatz von Fréchet-Riesz)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\varphi \in \mathcal{H}^*$ eine beschränkte Linearform.

(i) *Es gibt es genau ein $y \in \mathcal{H}$ so, daß*

$$\varphi(x) = \langle x, y\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}.$$

(ii) *Es gilt $\|\varphi\| = \|y\|$.*

Beweis. (1. Beweis) (i) Ohne Einschränkung sei $\varphi \neq 0$. Nach dem Homomorphiesatz ist $\operatorname{kodim}\operatorname{Kern}\varphi = 1$. Da φ stetig ist, ist $\operatorname{Kern}\varphi$ abgeschlossen. Aus dem Zerlegungssatz 1.2.19 folgt

$$\mathcal{H} = \operatorname{Kern}\varphi \oplus (\operatorname{Kern}\varphi)^\perp \quad \text{und} \quad \dim(\operatorname{Kern}\varphi)^\perp = 1.$$

Es gibt also genau ein

$$y \in (\operatorname{Kern}\varphi)^\perp \quad \text{mit} \quad \varphi(y) = \|y\|^2.$$

Für $\mathcal{H} \ni x = z + \lambda y$ mit $z \in \operatorname{Kern}\varphi$ folgt nun

$$\varphi(x) = \lambda\varphi(y) = \lambda\langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

(ii) Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt $\|\varphi\| = \|y\|$.

Anmerkung. Einen anderen Beweis des Darstellungssatz erhält man aus den den folgenden beiden Bemerkungen:

1.3.3 Bem. (maximierender Vektor)
(i) *Es seien $\varphi \in \mathcal{X}^*$ und $y \in \mathcal{X}$. Aus*

$$\|y\| = \|\varphi\| \quad \text{und} \quad \varphi(y) = \|\varphi\|^2$$

folgt

$$\varphi(x) = \langle x, y\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X}.$$

(ii) *Es seien $\varphi \in \mathcal{X}^*$ und $(y_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{X}$ mit*

$$\|y_n\| = \|\varphi\| \text{ und } \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\varphi(y_n) = \|\varphi\|^2.$$

Dann ist $(y_n)_n$ eine Cauchy-Folge

Beweis. (i) Für $x \in \mathcal{X}$ und $0 < t$ gilt

$$|\varphi(tx + \frac{1}{t}y)|^2 \le \|\varphi\|^2\|tx + \frac{1}{t}y\|^2$$

Aus $\varphi(y) = \|\varphi\|^2 = \|y\|^2$ folgt

$$t^2|\varphi(x)|^2 + 2\operatorname{Re}\varphi(x)\|\varphi\|^2 \le \|\varphi\|^2(t^2\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle)$$

Nun lasse man $t \to 0$ gehen und erhält

$$\operatorname{Re}(\varphi(x) - \langle x, y\rangle) \le 0 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X}.$$

Da $x \in \mathcal{X}$ beliebig ist, folgt $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$.

(ii) Ohne Einschränkung sei $\varphi \neq 0$. Aus der Parallelogrammidentität folgt

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\| &= 2\|y_n\| + 2\|y_m\| - \|y_n + y_m\|^2 \\ &\le 2\|y_n\| + 2\|y_m\| - \underbrace{\frac{|\operatorname{Re}\varphi(y_n + y_m)|^2}{\|\varphi\|^2}}_{\to 4\|\varphi\|^2}\end{aligned}$$

Nach den Voraussetzungen an die y_n konvergiert die rechte Seite für $m, n \to \infty$ gegen Null.

Beweis. (2. Beweis des Darstellungssatzes 1.3.2) Nach Definition von $\|\varphi\|$ gibt es eine Folge $(y_n)_n$ mit

$$\|y_n\| = \|\varphi\| \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\varphi(y_n) = \|\varphi\|^2.$$

Nach Bemerkung 1.3.3(ii) ist $(y_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Da $\mathcal{H}$ vollständig ist, gibt es den Grenzwert $y = \lim_{n\to\infty} y_n \in \mathcal{H}$. Aus

$$\|y\| = \|\varphi\| \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\varphi(y) = \|\varphi\|^2.$$

folgt nach Bemerkung 1.3.3(i), daß

$$\varphi(x) = \langle x, y\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X}.$$

1.3.1 Identifizierung mit dem Dual

1.3.4 Folg. (Hilbertraum $\mathcal{H}^*$)

(i) *Die Abbildung $\mathcal{H}^* \ni \varphi \mapsto y \in \mathcal{H}$, die jeder beschränkten Linearform φ ihren darstellenden Vektor y zuordnet, ist eine konjugiert lineare Isometrie von $\mathcal{H}^*$ auf $\mathcal{H}$.*

(ii) *Man erhält ein inneres Produkt auf $\mathcal{H}^*$ durch die Vorschrift:*

$$\langle \varphi, \psi\rangle := \overline{\langle y, z\rangle} = \varphi(z) = \overline{\psi(y)} \quad \text{wenn } \varphi \mapsto y \text{ und } \psi \mapsto z.$$

1.3.5 Bez. (Bidual)
Zu dem Hilbertraum $\mathcal{H}^*$ bilde man den Dual $\mathcal{H}^{**} := (\mathcal{H}^*)^*$. Der Raum $\mathcal{H}^{**}$ heißt der Bidual von $\mathcal{H}$.

Anmerkung. Für einen normierten Raum E und $x \in E$ ergibt die Auswertung im Punkte x

$$u_x : \psi \mapsto \psi(x) \quad \text{für } \psi \in E^*$$

eine lineare kontraktive Abbildung $E \ni x \mapsto u_x \in E^{**}$. Mit Hilfe des Satzes von *Hahn-Banach* zeigt man, daß diese Abbildung eine Isometrie ist. Man identifiziert nun den Vektor x mit der Auswertung u_x und faßt so $E \subset E^{**}$ auf.

Ein Banachraum heißt **reflexif**, wenn $E = E^{**}$ ist.

1.3.6 Festst. (Hilbertraum reflexiv)
Jedes $x \in \mathcal{H}$ erzeugt eine beschränkte Linearform auf $\mathcal{H}^*$ durch die Vorschrift:

$$\mathcal{H}^* \ni \psi \mapsto \psi(x).$$

Die so definierte Abbildung von $\mathcal{H}$ in seinen Bidual ist eine lineare, isometrische Bijektion.

Man identifiziert üblicherweise

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{**}.$$

Beweis. Zu $x, y \in \mathcal{H}$ bilden wir

$$\begin{aligned} u_x &: \psi \mapsto \psi(x) \quad \text{für } \psi \in \mathcal{H}^*, \\ \varphi_y &: z \mapsto \langle z, y \rangle \quad \text{für } z \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst, daß die Abbildung $\mathcal{H} \ni x \mapsto u_x \in \mathcal{H}^{**}$ eine lineare Isometrie ist. Aus

$$|u_x(\psi)| = |\psi(x)| \leq \|\psi\| \|x\|$$

folgt $\|u_x\| \leq \|x\|$. Nach Bemerkung 1.3.1 folgt

$$\|x\|^2 = \varphi_x(x) = u_x(\varphi_x) \leq \|u_x\| \|\varphi_x\| = \|u_x\| \|x\|$$

und somit $\|x\| \leq \|u_x\|$.

Da H^* ein Hilbertraum ist, gibt es nach dem Darstellungssatz 1.3.2 zu $u \in \mathcal{H}^{**}$ ein $\varphi \in \mathcal{H}^*$ mit

$$u(\psi) = \langle \psi, \varphi \rangle \quad \text{für } \psi \in \mathcal{H}^*.$$

Zu φ gibt es ein $y \in \mathcal{H}$ mit $\varphi = \varphi_y$. Nach Definition 1.3.4 des Skalarprodukte auf $\mathcal{H}^*$ ist also

$$u(\psi) = \langle \psi, \varphi_y \rangle = \psi(y)$$

und somit $u = u_y$.

1.3.7 Bem. ($\mathcal{H} \cong \overline{\mathcal{H}^*}$)

(i) *Um eine lineare Isometrie eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ mit seinem* Dual *zu erhalten, führt man den* ***konjugierten Dual***

$$\overline{\mathcal{H}^*} := \{\overline{\varphi} \mid \varphi \in \mathcal{H}^*\}$$

ein. Das Funktional $\overline{\varphi} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $\overline{\varphi}(x) := \overline{\varphi(x)}$ ist konjugiert linear und beschränkt.

Für die Vektorraumverknüpfungen auf $\overline{\mathcal{H}^*}$ gilt

$$\overline{\varphi} + \overline{\psi} = \overline{\varphi + \psi}, \qquad \lambda\overline{\varphi} = \overline{\overline{\lambda}\varphi}.$$

(ii) *Zu jedem $\overline{\varphi} \in \overline{\mathcal{H}^*}$ gibt es genau ein $y \in \mathcal{H}$ mit*

$$\overline{\varphi}(x) = \langle y, x \rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}.$$

Die Zuordnung $\overline{\varphi} \mapsto y$ ist eine lineare Isometrie von $\overline{\mathcal{H}^*}$ mit $\mathcal{H}$.

$\overline{\mathcal{H}^*}$ ist also ein zu $\mathcal{H}$ isometrischer Hilbertraum mit dem inneren Produkt:

$$\langle \overline{\varphi}, \overline{\psi} \rangle := \langle y, z \rangle \quad \text{wenn } \overline{\varphi} \mapsto y \text{ und } \overline{\psi} \mapsto z.$$

(iii) *Für den Bidual gilt dann linear isomorph $\overline{\overline{\mathcal{H}^*}}^* = \mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}$.*

1.4 Vervollständigung eines Prähilbertraumes

Ziel. Man kann die Methode A.1.6 auf Prähilberträume anwenden:

Im Falle eines Prähilbertraumes $\mathcal{X}$ erhält man wie im Beispiel 1.3.1 eine lineare isometrische Abbildung von $\mathcal{X}$ in den konjugiert dualen Raum $\overline{\mathcal{X}^*}$:

$$\mathcal{X} \ni y \mapsto \{\overline{\varphi_y} : x \mapsto \overline{\langle x, y\rangle}\}$$

Wir identifizieren den Vektor y mit dem Funktional $\langle y, \cdot\rangle = \overline{\varphi_y}$ und fassen $\mathcal{X} \subset \overline{\mathcal{X}^*}$ auf. Nach Feststellung B.1.9 ist $\overline{\mathcal{X}^*}$ ein Banachraum. Wir können also die Vervollständigung $\mathcal{X}^\sim$ als Abschluß von $\mathcal{X}$ in $\overline{\mathcal{X}^*}$ auffassen.

Wir zeigen, daß die Vervollständigung $\mathcal{X}^\sim$ ein Hilbertraum ist und sogar mit $\overline{(\mathcal{X}^*)}$ übereinstimmt.

1.4.1 Lemma (Fortsetzung des inneren Prod.)

Es seien E ein normierter Raum und $\mathcal{X} \subset E$ ein dichter linearer Teilraum. Wenn $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum mit der Norm von E ist, d.h. auf $\mathcal{X}$ gib es ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das dieselbe Norm erzeugt, dann ist auch E ein Prähilbertraum.

Beweis. Mit der Polarisationsformel definiere man eine stetige Funktion

$$b(x, y) = \tfrac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{3} i^\nu \|x + i^\nu y\|^2 \quad \text{für } x, y \in E.$$

Auf dem dichten linearen Teilraum $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ stimmt b mit dem inneren Produkt überein. Aus der Stetigkeit von b folgt nun, daß b sesquilinear und hermitesch ist und $\|x\|^2 = b(x, x)$ für $x \in E$ gilt. D.h. b ist positiv definit und erzeugt die Norm von E.

1.4.2 Satz (Vervollst. eines Prähilbertraumes)

Die Vervollständigung $\mathcal{X}^\sim$ eines ein Prähilbertraumes $\mathcal{X}$ ist ein Hilbertraum.

$\mathcal{X}^\sim$ kann mit dem konjugiert dualen Raum $\overline{\mathcal{X}^*}$ identifiziert werden.

Beweis. Für den Hilbertraum $\mathcal{X}^\sim$ gilt nach Korollar 1.3.4 bzw. Bemerkung 1.3.7, daß $\mathcal{X}^\sim = \overline{(\mathcal{X}^\sim)^*}$ ist. Da $\mathcal{X}$ und seine Vervollständigung $\mathcal{X}^\sim$ denselben Dual haben folgt die Behauptung.

Man kann die Aussage, daß $\mathcal{X} \subset \overline{\mathcal{X}^*}$ dicht liegt, auch durch eine Vorschrift zur Approximation der Elemente von $\overline{\mathcal{X}^*}$ belegen:

1.4.3 Bem. (maximierende Folge)

Es sei $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum, $\varphi \in \mathcal{X}^*$ und $(y_n)_n$ eine die Norm $\|\varphi\|$ maximierende Folge in $\mathcal{X}$:

$$\varphi(y_n) = \|\varphi\|^2 \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \|\varphi\|.$$

Dann konvergieren die Funktionale $\varphi_{y_n} := \langle\cdot, y_n\rangle$ gegen φ.

Beweis.

$$|\varphi(tx + \tfrac{1}{t}y_n)|^2 \le \|\varphi\|^2\|tx + \tfrac{1}{t}y_n\|^2,$$

$$t^2|\varphi(x)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\varphi(y_n)\overline{\varphi(x)} + \tfrac{1}{t^2}|\varphi(y_n)|^2 \le \|\varphi\|^2\big(t^2\|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle y_n, x\rangle + \tfrac{1}{t^2}\|y_n\|^2\big),$$

$$2\,\mathrm{Re}\,\big(\varphi(y_n)\overline{\varphi(x)} - \|\varphi\|^2\langle y_n, x\rangle\big) \le t^2\big(\|\varphi\|^2\|x\|^2 - |\varphi(x)|^2\big) + \tfrac{1}{t^2}\big(\|\varphi\|^2\|y_n\|^2 - |\varphi(y_n)|^2\big).$$

Mit $\varphi(y_n) = \|\varphi\|^2$ und Lemma 1.1.8 folgt

$$\|\varphi\|\,\mathrm{Re}\,\big(\overline{\varphi(x)} - \langle y_n, x\rangle\big) \le \sqrt{\|\varphi\|^2\|x\|^2 - \varphi(x)^2}\sqrt{\|y_n\|^2 - \|\varphi\|^2}.$$

Also ist

$$\|\overline{\varphi} - \overline{\varphi}_{y_n}\|^2 \le \|y_n\|^2 - \|\varphi\|^2.$$

1.4.1 L^2 als Vervollständigung

1.4.4 Bsp. (Dichte Teilräume von $L^2([0,1])$)

Wir definieren die folgenden linearen Teilräume von $C([0,1])$:

(i) $C_{\mathrm{per}}([0,1]) = \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = f(1)\}$

(ii) $C_0([0,1]) = \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = f(1) = 0\}$

(iii) $C_c((0,1)) = \{f \in C([0,1]) \mid \mathrm{supp}(f) \subset (0,1)\}$

Wie man leicht sieht, liegen

$$C_c((0,1)) \subset C_0([0,1]) \subset C_{\mathrm{per}}([0,1]) \subset C([0,1])$$

bezüglich der L^2-Norm ineinander dicht. Als Prähilberträume haben die Räume $C_c((0,1))$, $C_0([0,1]$, $C_{\mathrm{per}}([0,1]$ und $C([0,1])$ also die gleiche Vervollständigung $L^2([0,1])$ (vgl. Bemerkung A.1.5)

Um die Dichtheit zu zeigen, ändere man eine Funktion $f \in C([0,1])$ auf zwei kleinem Teilintervallen um die Endpunkte 0 bzw. 1 durch Geradenstücke stetig ab, so daß die entstehende Funktion g in einem der kleineren Räume zu liegen kommt. Die L^2-Norm $\|f-g\|_2$ wird beliebig klein, wenn man die Gesamtlänge λ der beiden Teilintervalle nur klein genug wählt:

$$\|f - g\|_2 \le \lambda \cdot 2\|f\|_{\sup}.$$

Anmerkung. Häufig startet man bei der Konstruktion eines Hilbertraumes mit einer **positiv semidefiniten Sesquilinearform** b auf einem Vektorraum V.

Durch die Vorschrift

$$p(x) := \sqrt{b(x,x)} \quad \text{für } x \in V$$

erhält man nur eine Halbnorm p auf V. Auf dem Quotientenraum $\mathcal{X} := V/\,\mathrm{Kern}(p)$ induziert b dann ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (siehe Bemerkung 1.1.11).

Anschließend vervollständigt man den Prähilbertraum $\mathcal{X}$ zu einem Hilbertraum $\mathcal{H}$.

1.4.5 Bsp. (Prähilbertr. der Regelfunktionen)

Es sei $\mathcal{R} = \mathcal{R}([0,1],\mathbb{K})$ der Raum der Regelfunktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Die Treppenfunktionen $\mathrm{Trepp}([0,1])$ liegen bezüglich der sup-Norm dicht in den Regelfunktionen. $C([0,1])$ ist ein in der sup-Norm abgeschlossener echter Teilraum der Regelfunktionen.

Man betrachte auf $\mathcal{R}$ wie in Beispiel 1.2.4 die positive semidefinite Sesquilinearform

$$b(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

und die L^2-Halbnorm $p(f) := \sqrt{b(f,f)}$. In $\mathcal{R}$ gibt es Funktionen $f \neq 0$ mit

$$p(f) = \Big(\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt\Big)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Diese Nullfunktionen bilden einen linearen Teilraum $\mathcal{N} := \mathrm{Kern}(b) \subset \mathcal{R}$.

Die Vervollständigung des Prähilbertraumes $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ liefert einen Hilbertraum, den wir vorübergehend mit $\mathcal{R}_2$ bezeichnen. Wir zeigen $\mathcal{R}_2 = L^2([0,1])$.

1.4.6 Bem. (Prähilbertr. der Regelfunktionen) *Bei $\mathcal{R}_2$ (siehe 1.4.5) handelt es sich um denselben Hilbertraum wie $L^2([0,1])$ (vgl. Beispiel 1.2.4).*

Die Indentifizierung folgt daraus, daß die Abbildung von $(C([0,1]), \|\cdot\|_2)$ in $\mathcal{R}/\mathcal{N} \subset \mathcal{R}_2$ isometrisch ist und dichtes Bild hat. D. h. R_2 ist die Vervollständigung von $C([0,1]$ in der L^2-Norm.

Beweis. Da $C([0,1]) \cap \mathcal{N} = \{0\}$ ist, ist die Abbildung von $C([0,1])$ in $\mathcal{R}/\mathcal{N} \subset \mathcal{R}_2$ isometrisch. Wir zeigen, daß sie dichtes Bild hat.

Man kann jede Regelfunktion in der sup-Norm durch Treppenfunktionen approximieren. Aus der Abschätzung

$$p(f) = \int_0^1 |f(t)| \, dt)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{\sup}$$

folgt, daß man jede Regelfunktion in der L^2-Halbnorm p durch Treppenfunktionen approximieren kann.

Jede Treppenfunktion läßt sich in der L^2-Halbnorm p durch stetige Funktionen approximieren. Man sieht das leicht, indem man die Stufen einer Treppenfunktion auf einem kurzen Teilintervall *durch Geradenstücke stetig ausgleicht*.

Also kann man jde Regelfunktion in der L^2-Halbnorm p durch stetige Funktionen approximieren. Also liegt $C([0,1])$ in $\mathcal{R}/\mathcal{N} \subset \mathcal{R}_2$ dicht.

Nach Bemerkung A.1.5 haben die Prähilberträume $(C([0,1]), \|\cdot\|_2)$ und $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ die gleiche Vervollständigung D.h. $L^2([0,1]) = \mathcal{R}_2$.

1.5 Orthonormalsysteme

1.5.1 Def. (Orthonormalsysteme)

Es sei $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum.

(i) *Zwei Vektoren $x, y \in \mathcal{X}$ heißen **orthogonal** wenn $\langle x, y\rangle = 0$. Bezeichnung*

$$x \perp y : \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, y\rangle = 0$$

(ii) *Eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ von paarweise orthogonalen Vektoren heißt ein Orthogonalsystem.*

(iii) *Ein Orthogonalsystem $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ heißt ein **Orthonormalsystem**, wenn $\|e_\alpha\| = 1$ ist. Es gilt also*

$$\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta},$$

wobei $\delta_{\alpha,\beta}$ das Kroneckersymbol ist.

(iv) *Ein Orthonormalsystem $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ heißt* vollständig *oder eine **Orthonormalbasis**, wenn die lineare Hülle $\mathrm{lin}\{e_\alpha \mid \alpha \in I\}$ dicht in $\mathcal{X}$ ist (siehe Satz 1.5.6).*

Anmerkung. Wir schreiben Orthonormalsysteme in Form einer Famile $(e_\alpha)_\alpha$, da die e_α vorwiegend in Summen über die Indexmenge I auftreten.

Da die e_α paarweise verschieden sind, kann man genauso gut die Menge S:$= \{e_\alpha \mid \alpha \in I\}$ als Orthonormalsystem bezeichen.

Da die Zuordnung $I \ni \alpha \mapsto e_\alpha \in S$ bijektiv ist, ist die Indizierung der Elemente von S eigentlich überflüssig und man könnte kürzer sagen:

Ein Orthonormalsystem ist eine Teilmenge von $\mathcal{X}$, deren Elemente paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind.

In konkreten Beispielen hat die Indexmenge I meist noch weitere Struktur, die man in der Bezeichnung nicht verstecken sollte. Um ein einheitliches Bild der Formeln zu erreichen, verwenden wir deshalb für Orthonormalsysteme die Indexschreibweise.

1.5.2 Bem. (Pythagoras)

x, y sind genau dann senkrecht, wenn die Formel von Pythagoras gilt:

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

1.5.3 Satz (Besselsche Ungl., Parsevalsche Gl.)

Es sei $(e_\alpha)_\alpha$ ein Orthonormalsystem in einem Prähilbertraum $\mathcal{X}$.

(i) *Es gilt die Besselsche Ungleichung:*

$$\sum_{\alpha\in I} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \le \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X}.$$

Es sind also höchstens abzählbar viele $\langle x, e_\alpha\rangle \neq 0$.

(ii) *Gleichheit in der Besselschen Ungleichung gilt genau dann, wenn $x = \sum_{\alpha\in I} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$ ist.*

Die Beziehung $\sum_{\alpha\in I} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 = \|x\|^2$ heißt Parsevalsche Gleichung.

Beweis. (i) Für endliche $F \subset I$ ist

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \sum_{\alpha\in F} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha, \big(x - \sum_{\beta\in F} \langle x, e_\beta\rangle e_\beta\big)\Big\rangle \\
&= \sum_{\alpha\in F} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 - \sum_{\alpha,\beta\in F} \langle x, e_\alpha\rangle \overline{\langle x, e_\beta\rangle}\, \underbrace{\langle e_\alpha, e_\beta\rangle}_{\delta_{\alpha,\beta}} = 0
\end{aligned}$$

Da $\sum_{\alpha\in F} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha \perp \big(x - \sum_{\alpha\in F} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha\big)$, gilt die Formel von Pythagoras:

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \|\sum_{\alpha\in F} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha\|^2 + \|x - \sum_{\alpha\in F} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha\|^2 \\
&= \sum_{\alpha\in F} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 + \|x - \sum_{\alpha\in F} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha\|^2 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Da dies für alle endlichen $F \subset I$ gilt, folgt mit Feststellung D.5

$$\sum_{\alpha\in I} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 = \sup_F \sum_{\alpha\in F} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

(ii) Nach Formel $(*)$ gilt

$$\sup_F \sum_{\alpha\in F} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 = \|x\|^2$$

genau dann, wenn

$$\inf_F \|x - \sum_{\alpha\in F} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha\|^2 = 0$$

ist. Dabei durchläuft F alle endlichen Teilmengen von I.

1.5.4 Bsp. (Orthonormalbasis des l_2)

(i) Die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ des l_2^n ist eine Orthonormalbasis.

(ii) Die Vektoren $e_n := (\delta_{n,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ nennen wir die Standardbasis des $l_2(\mathbb{N})$. Die lineare Hülle der e_n:

$$\mathrm{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x = (\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \mid \text{fast alle } \xi_\nu = 0\ \}$$

ist offensichtlich dicht in $l_2(\mathbb{N})$. Also ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis des $l_2(\mathbb{N})$.

(iii) Die Elemente des $l_2(\mathbb{N})$ lassen sich nach den Basisvektoren e_n in eine unbedingt konvergente unendliche Summe entwickeln:

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n \quad \text{für } x \in l_2(\mathbb{N}). \qquad (*)$$

Dies sieht man folgendermaßen: Zu $x = (\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\sum_{\nu=n_0+1}^{\infty} |\xi_\nu|^2 < \varepsilon$. Es sei $F_0 := \{1, \dots, n_0\}$. Für alle endlichen G mit $F_0 \subset G \subset \mathbb{N}$ gilt dann:

$$\|x - \sum_{\nu\in G} \xi_\nu e_\nu\|^2 \le \sum_{\nu=n_0+1}^{\infty} |\xi_\nu|^2 < \varepsilon.$$

Also ist $x = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \xi_\nu e_\nu$. Nach Definition des inneren Produktes ist $\xi_\nu = \langle x, e_\nu\rangle$.

1.5.5 Bem.

Da die Koeffizienten ξ_ν der Reihe $(*)$ nur in l^2 und nicht in l^1 sind, ist die Reihe $(*)$ i. a. nicht absolut konvergent.

Ziel. Wir werden eine $(*)$ entsprechende Reihenentwicklung für alle separablen Hilberträume herleiten.

...

1.5.6 Satz (Entwicklng. nach orthonorm. Basis)
Es seien $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum und $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{X}$ (vgl. Definition 1.5.1 (iv)). Dann gilt

$$x = \sum_{\alpha\in I} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X}.$$

Weiterhin gilt für $x, y \in \mathcal{X}$ die Parsevalsche Gleichung $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in I} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2$ und $\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in I} \langle x, e_\alpha\rangle\overline{\langle y, e_\alpha\rangle}$.

Beweis. Da nach Vorraussetzung $\operatorname{lin}\{e_\alpha \mid \alpha \in I\}$ in $\mathcal{X}$ dicht liegt, gibt es zu $x \in \mathcal{X}$ und $\varepsilon > 0$ ein endliches $F_0 \subset I$ und ein $y \in \operatorname{lin}\{e_\alpha \mid \alpha \in F_0\}$, so daß $\|x - y\| < \varepsilon$. Für alle endlichen F, $F_0 \subset F \subset I$ ist $y \in \operatorname{lin}\{e_\alpha \mid \alpha \in F\}$ und daher

$$y = \sum_{F_0} \langle y, e_\alpha\rangle e_\alpha.$$

Mit der Besselschen Ungleichung 1.5.3 (i) folgt nun

$$\begin{aligned}\|x - \sum_{\alpha\in F} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha\| &\le \|x - y\| + \|y - \sum_{\alpha\in F} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha\| \\ &= \|x - y\| + \|\sum_F \langle y - x, e_\alpha\rangle e_\alpha\| \\ &\le 2\|x - y\| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Nach Definition D.1 der Summe ist also $x = \sum_{\alpha\in I} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$.

1.5.7 Satz (Gram-Schmidt Orthonormalisierung)
Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine linear unabhängige Folge in dem Prähilbertraum $\mathcal{X}$. Dann gibt es eine orthonormale Folge $(e_n)_n$ in $\mathcal{X}$, so daß

$$\operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_n\} = \operatorname{lin}\{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die e_n sind bis auf einen Faktor $\lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda_n| = 1$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Man setze $e_1 := \|x_1\|^{-1} x_1$. Induktiv bilde man dann

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &:= x_{n+1} - \sum_{\nu=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_\nu\rangle e_\nu \\ e_{n+1} &:= \|x'_{n+1}\|^{-1} x'_{n+1}. \end{aligned}$$

Da $x_{n+1} \notin \operatorname{lin}\{x_1, \dots, x_n\} = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_n\}$, ist $x'_{n+1} \neq 0$.

Die Eindeutigkeitsaussage stimmt offensichtlich für $n = 1$ und folgt nun induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$

1.5.8 Folg. (unitarer Raum $\cong l_2^n$)
Ein endlichdimensionaler Prähilbertraum $\mathcal{X}$ ist isometrisch zum l_2^n, wobei $n = \dim \mathcal{X}$.

Beweis. Aus einer Basis erhält man durch Orthonormalisierung (vgl. Satz 1.5.7) eine Orthonormalbasis $(b_1, \dots, b_n)$ von $\mathcal{X}$. Die lineare Abbildung, die $b_\nu \mapsto e_\nu \in \mathbb{K}^n$ abbildet ist eine Isometrie (vgl. Beispiel 1.2.7(ii)).

1.5.9 Satz (ONBasis separabler Prähilberträume)
(i) *Ein unendlichdimensionaler separabler Prähilbertraum $\mathcal{X}$ hat eine abzählbare Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
(ii) *Jede Orthonormalbasis eines unendlichdimensionalen separablen Prähilbertraumes ist abzählbar unendlich.*

Beweis. (i) Es sei $M\}$ eine absählbare dichte Teilmengevon $\mathcal{X}$. Induktiv findet man in M eine linear unabhängige Familie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bildet man mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormaliserungsverfahren ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Da

$$M \subset \operatorname{lin}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist, ist $\operatorname{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathcal{X}$. Nach Definition 1.5.1 (iv) ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{X}$

(ii) Eine Orthonormalbasis $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ ist eine zerstreute Menge, da $\|e_\alpha - e_\beta\|^2 = 2$ für $\alpha \neq \beta$ ist.

Da $\mathcal{X}$ separabel ist, ist nach Bemerkung A.2.1 die zerstreute Menge $\{e_\alpha \mid \alpha \in I\}$ höchstens abzählbar. Da $\dim \mathcal{X} = \infty$ ist, ist I nicht endlich.

Anmerkung. 1. Anders als in dem Beweis des Satzes 1.5.9 bildet man abzählbar unendliche Orthonormalbasen i.a. nicht mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren, sondern findet sie auf anderen Wegen, z. B. als Eigenvektoren symmetrischer Operatoren.

2. Man benutzt den obigen Satz 1.5.9 zumeist in der folgenden Form:

1.5.10 Folg. (ONBasis in dichten Teilraum)
Ist $\mathcal{Y}$ ein dichter linearer Teilraum eines Prähilbertraumes $\mathcal{X}$, so hat $\mathcal{X}$ eine Orthonormalbasis aus Elementen von $\mathcal{Y}$.

Bsp. $L^2([0,1])$ hat Orthonormalbasen, die in $\mathbb{C}_{\text{per}}([0,1])$ oder in $C^\infty([0,1])$ oder in den Polynomen liegen.

1.5.11 Festst.
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})$. Dann ist die Familie $(\xi_n f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ summierbar in $\mathcal{H}$:

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n f_n \in \mathcal{H} \quad \Leftrightarrow \quad (\xi_n)_n \in l_2(\mathbb{N}).$$

Beweis. Aus der Besselschen Ungleichung folgt, daß $(\xi_n f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Cauchy-Kriterium D.4 für summierbare Familien erfüllt.

1.5.12 Satz (separable Hilbertr. isomorph)
Jeder separable Hilbertraum ist isometrisch zu $l_2(\mathbb{N})$.

Beweis. Ein separabler Hilbertraum hat nach Satz 1.5.9 eine Orthonormalbasis $(f_n)_n$. Da nach Satz 1.5.6 die Parsevalsche Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, f_n\rangle|^2 \quad \text{für } x \in \mathcal{H}$$

gilt, ist die Folge $(\langle x, f_n\rangle)_n$ der Koeffizienten in $l_2(\mathbb{N})$. Die Abbildung

$$\mathcal{H} \ni x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, f_n\rangle f_n \mapsto (\langle x, f_n\rangle)_n \in l_2(\mathbb{N})$$

ist eine lineare Isometrie von $\mathcal{H}$ in $l_2(\mathbb{N})$.

Diese Abbildung ist aber auch surjektiv, da nach Feststellung 1.5.11 für $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})$ die Summe

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n f_n \in \mathcal{H}$$

konvergiert.

1.5.1 Fourierreihen

1.5.13 Satz (Fourierentwicklung in $L^2([0,1])$) *Die Familie $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, mit*

$$e_n(t) = e^{2\pi i n t} \quad \text{für } t \in [0,1],$$

ist eine orthonormale Basis von $L^2([0,1],\mathbb{C})$. Die Entwicklung

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle x, e_n\rangle e_n \qquad (*)$$

heißt die Fourierentwicklung von $x \in L^2([0,1],\mathbb{C})$.

Anmerkung. 1. Die Fourierreihe $(*)$ ist für stetiges $f \in C_{\text{per}}([0,1])$ i. a. nicht punktweise konvergent. Aus dem Satz von Fejer folgt aber:

Wenn die Fourierreihe von $f \in C_{\text{per}}([0,1])$ in einem Punkt $t \in [0,1]$ konvergiert, so konvergiert sie gegen $f(t)$.

2. Der Beweis beruht auf dem folgenden Approximationsatz für $C_{\text{per}}([0,1],\mathbb{C})$.

1.5.14 Festst. (Approx. mit trig. Polynomen) *Funktionen der Form*

$$T_{m,n}(t) := \sum_{\nu=-m}^{n} c_\nu e^{2\pi i n t} \quad \text{für } t \in [0,1].$$

*heißen **trigonometrische Polynome**.*

Die trigonometrischen Polynome liegen in $C_{\text{per}}([0,1])$ in der $\|\cdot\|_{\sup}$-Norm dicht.

Anmerkung. Zur Definition von $C_{\text{per}}([0,1],\mathbb{C})$ siehe Bsp. 1.4.4.

Es gibt es unterschiedliche Beweise für die obige Feststellung. Wir zeigen, wie die Behauptung aus dem Approximationssatz von Weierstraß folgt. Eine konkretere Approximation erhält man aus dem Satz von Fejer.

Approximationssatz von Weierstraß. *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Jede stetige Funktion $f \in C(X,\mathbb{K})$ kann man gleichmäßig auf X durch Polynome aus $\mathbb{K}[\xi_1,\dots,\xi_n]$ approximieren.*

Beweis. (von Feststellung 1.5.14) Es sei $\mathcal{S}^1$ die Einheitskreislinie in $\mathbb{R}^2$, oder mit komplexen Zahlen $\zeta = \xi + i\eta$ geschrieben:

$$\mathcal{S}^1 = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = 1\}.$$

Die Funktionen aus $C(\mathcal{S}^1,\mathbb{C})$ kann man nach dem Approximationssatz von Weierstraß durch Polynome $P \in \mathbb{C}[\xi,\eta]$ approximieren. Ersetzt man in P die Variablen ξ,η durch die komplexe Variable ζ:

$$\xi = \frac{\zeta+\overline{\zeta}}{2}, \quad \eta = \frac{\zeta-\overline{\zeta}}{2i},$$

so erhält man ein Polynom in den Variablen ζ und $\overline{\zeta}$. Da $\overline{\zeta} = \zeta^{-1}$ für $\zeta \in \mathcal{S}^1$ ist, hat P die Gestalt

$$P(\xi,\eta) = \sum_{\nu=-m}^{n} c_\nu \zeta^\nu.$$

Wir bezeichnen mit $\psi : [0,1] \to \mathcal{S}^1$ die Exponentialabbildung $[0,1] \ni t \mapsto e^{2\pi i t} \in \mathcal{S}^1$. Die Komposition mit ψ erzeugt eine lineare isometrische Bijektion:

$$C(\mathcal{S}^1,\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto f := \varphi \circ \psi \in C_{\text{per}}([0,1],\mathbb{C}).$$

Also kann man jedes $f \in C_{\text{per}}([0,1],\mathbb{C})$ gleichmäßig auf $[0,1]$ durch trigonometrische Polynome T der Form

$$T(t) = \sum_{\nu=-m}^{n} c_\nu e^{2\pi i \nu t}$$

approximieren.

Beweis. (des Satzes 1.5.13) Aus der Abschätzung der Normen

$$\|f\|_2 = \Big(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \le \|f\|_{\sup}.$$

folgt, daß eine Approximation in der $\|\cdot\|_{\sup}$-Norm eine Approximation in der L^2-Norm impliziert. aus der Feststellung 1.5.14 folgt nun, daß die lineare Hülle $\operatorname{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $C_{\text{per}}([01],\mathbb{C})$ ist.

Da nach Beispiel 1.4.4 $C_{\text{per}}([01])$ dicht in $L^2([0,1])$ ist, ist $\operatorname{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $L^2([0,1])$.

Also ist $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2([01],\mathbb{C})$ (vgl. Definition 1.5.1 (iv)).

1.5.2 Hilbertraumdimension

1.5.15 Satz (Existenz von ONBasen)

(i) *In einem Hilbertraum kann man jedes Orthonormalsytem zu einer Orthonormalbasis ergänzen.*

(ii) *Jeder nichttriviale Hilbertraum hat eine Orthonormalbasis.*

(iii) *Alle Orthonormalbasen eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ haben die gleiche Mächtigkeit.*

1.5.16 Def. (Hilbertraumdimension) *Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Die Mächtigkeit einer Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ heißt die Hilbertraumdimension von $\mathcal{H}$.*

Der Beweis des Satzes läuft genauso, wie der Beweis F.1.3 des entsprechenden Satzes über *algebraische Basen*.

Beweis. (i) Es sei L_0 ein orthonormale Teilmenge des Hilbertraumes $\mathcal{H}$.

Man bilde die Menge $\mathcal{S}$ aller nichtleeren, orthonormalen Teilmengen L von $\mathcal{H}$, die L_0 umfassen und ordne $\mathcal{S}$ durch die Inklusion:

$$K \leq L : \quad \Leftrightarrow \quad K \subset L.$$

Behauptung: $\mathcal{S}$ ist induktiv geordnet.

Wenn $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}$ linear geordnet ist, so ist

$$S := \bigcup_{L \in \mathcal{M}} L$$

eine orthonormale Teilmenge von $\mathcal{H}$. Also ist S eine obere Schranke von $\mathcal{M}$.

Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element $B \in \mathcal{S}$. Da B eine maximale orthonormale Teilmenge von $\mathcal{H}$ ist, folgt aus Aussage (v) des Zerlegungssatz 1.2.19, daß $\operatorname{lin} B$ dicht in $\mathcal{H}$ ist. Somit ist B eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.

(ii) Man wende (i) auf $L_0 := \{e_1\}$ an, wobei e_1 irgendein Einheitsvektor ist.

(iii) Für endlichdimensionale Räume ist die Behauptung klar. Es sei also $\mathcal{H}$ unendlichdimesional und $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$, $(f_\beta)_{\beta \in J}$ seien Orthonormalbasen von $\mathcal{H}$.

Für $\beta \in J$ ist nach Satz 1.5.6 $\|f_\beta\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle f_\beta, e_\alpha \rangle|^2$. Nach Feststellung D.2 ist also die Menge

$$I_\beta := \{\alpha \in I \mid |\langle f_\beta, e_\alpha \rangle| \neq 0\}$$

höchsten abzählbar unendlich. Da $\operatorname{lin}\{f_\beta \mid \beta \in J\}$ in $\mathcal{H}$ dicht ist, liegt jedes $\alpha \in I$ in mindestens einer der Mengen I_β. Dann ist aber die Mächtigkeit von $I = \bigcup_{\beta \in J} I_\beta$ kleiner oder gleich der Mächtigkeit von J.

Umgekehrt ist die Mächtigkeit von J kleiner oder gleich der Mächtigkeit von I. Also haben I und J die gleiche Mächtigkeit.

2 Beschränkte lineare Operatoren

Eine Besonderheit der Hilberträume $\mathcal{H}$ ist, daß man den Raum $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ der beschränkten linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit dem Raum $B(\mathcal{H},\mathcal{H};\mathbb{K})$ der beschränkten Sesquilinearformen auf $\mathcal{H}$ identifizieren kann:

$T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ entspricht die Sesquilinearform $\langle\cdot, T(\cdot)\rangle$.

Durch diese Isomorphie transportiert man die besondere Struktur des Raumes $B(\mathcal{H},\mathcal{H};\mathbb{K})$ auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Was sind diese Strukturen $B(\mathcal{H},\mathcal{H};\mathbb{K})$, die sich auf $L(\mathcal{H})$ übertragen.

1. Zu jeder Sesquilinearform b gibt es die adjungierte Form b^*. Entsprechend werden wir zu $T \in L(\mathcal{H})$ den *adjungierten Operator* T^* bilden.

Den hermiteschen bzw. den positiv semidefiniten Sesquilinearformen entsprechen die *selbstadjungierten* Operatoren $T = T^*$ bzw. die *positiven* Operatoren $T \geq 0$.

Die quadratischen Formen zu hermiteschen Sesquilinearformen sind reelle Funktionen und haben als solche eine Ordnung. Wir untersuchen, welche Bedeutung die entsprechende *Ordnung* auf den selbstadjungierten Operatoren hat:

Wie in der reellen Analysis kann man die Approximation von selbstadjungierten Operatoren durch Ungleichungen beschreiben.

Man kann aus einer Abschätzung $0 \leq S \leq T$ auf die Wertevorräte Bild S *und* Bild T *schließen.*

2. Die Existenz des adjungierten Operators hat aber auch starke Auswirkung auf die multiplikative Struktur der Banachalgebra $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$:

Man kann jeden positiven Operator T eindeutig als Quadrat eines anderen positiven Operators schreiben. Man nennt letzteren die Wurzel $T^{\frac{1}{2}}$ aus T. Für jedes $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ist T^*T ein positiver Operator und $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ hat die Bedeutung eines Betrages. Man erklärt das $\operatorname{sgn} T$ und zerlegt $T = \operatorname{sgn} T \cdot |T|$.

3. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wird die Banachalgebra $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit den obigen Zusatzeigenschaften zu einer C^*-Algebra, die wir mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bezeichnen. Sie ist der Prototyp einer C^*-Algebra, denn alle anderen C^*-Algebren erweisen sich als $*$-Unteralgebren von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Man kann viele der Ergebnisse dieses Kapitels auch abstrakter aus der Theorie der C^*-Algebren herleiten:

Zum Beispiel nennt man einen Operator T normal, wenn er mit seinem adjungierten Operator T^* kommutiert, d.h. es gilt $T^*T = TT^*$. Die von normalen Operatoren T und T^* erzeugte Algebra $\mathcal{A}$ ist eine kommutative C^*-Algebra. Im Fall von normalen Matrizen wird diese Algebra mit Hilfe der komplexen Polynome $P(\zeta,\overline{\zeta})$ untersucht. Änlich kann man auch im Unendlichdimensionalen vorgehen.

Wir wollen in diesem Kapitel davon noch keinen Gebrauch machen, sondern die Resultate aus den Eigenschaften des Hilbertraumes folgern.

2.1 Der adjungierte Operator

2.1.1 Darstellung von Sesquilinearformen

Anmerkung. Definition und einfache Eigenschaften von beschränkten Sesquilinearformen und beschränkten lineare Operatoren werden in Abschnitt B Normierte Räume, Abschnitt B.1.3 und Abschnitt B.2 erklärt.

2.1.1 Satz (Darstellung von Sesquilinearformen) *Es seien E ein normierter Raum, $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum. Zu einem beschränkter linearer Operator $T \in \mathfrak{L}(E,\mathcal{X})$ bilde man die Sesquilinearform*

$$b_T : (x,y) \mapsto \langle x, Ty\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{X},\ y \in E.$$

b_T ist beschränkt mit $\|b_T\| = \|T\|$. Wir bezeichnen $b_T := \langle\cdot, T(\cdot)\rangle$.

(i) Die Zuordnung $\mathfrak{L}(E,\mathcal{X}) \ni T \mapsto b_T \in B(\mathcal{X},E;\mathbb{K})$ ist eine konjugiert lineare Isometrie.

(ii) Im Falle eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ gibt es zu jeder beschränkten Sesquilinearform $b \in B(\mathcal{H},E;\mathbb{K})$ genau einen beschränkten linearen Operator $T \in L(E,\mathcal{H})$, so daß $b = \langle\cdot, T(\cdot)\rangle$ ist. Es gilt also

$$b(x,y) = \langle x, Ty\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H},\ y \in E.$$

Anmerkung. Wir hatten jeden Vektor $z \in \mathcal{H}$ die beschränkte Linearform $\langle\cdot, z\rangle$ zugeornet (siehe Bem. 1.3.1) Der Darstellungssatz 1.3.2 von Fréchet-Riesz besagt, daß dies eine konjugiert lineare Isometrie $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$ ergibt.

Wendet man dies Verfahren auf den Vektor Ty, so erhält man die Linearform $\langle\cdot, Ty\rangle$. Betrachtet man hierin y als weitere Variable, so entsteht die Sesquilinearform $b_T = \langle\cdot, T(\cdot)\rangle$.

Diese Bildung kann man für jeden linearen Operator T vornehmen und erhält so eine konjugiert lineare Isometrie $L(E,\mathcal{H}) \cong B(\mathcal{H},E;\mathbb{K})$. Diese Konstruktion ist also die richtige Erweiterung der konjugiert linearen Isometrie $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$.

Beweis. (i) $b_T : \mathcal{X} \times E \to \mathbb{K}$ ist offensichtlich eine Sesquilinearform. Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt, daß b_T beschränkt ist:

$$|b_T(x,y)| = |\langle x, Ty\rangle| \leq \|x\|\|Ty\| \leq \|x\|\|T\|\|y\|.$$

für $x \in \mathcal{X}$, $y \in E$. Nach Definition B.1.10 der Norm einer Sesquilineaform ist $\|b_T\| \leq \|T\|$.

Andererseits ist

$$\|Ty\|^2 = \langle Ty, Ty\rangle = b_T(Ty,y) \leq \|b_T\|\|Ty\|\|y\|,$$

Nach Definition B.2.1 der Norm eines linearen Operators ist also

$$\|Ty\| \leq \|b_T\|\|y\| \quad \text{für } y \in E.$$

Also ist $\|T\| \leq \|b_T\|$.

(ii) Es sei $b : \mathcal{H} \times E \to \mathbb{K}$ eine beschränkte Sesquilinearform. Für $y \in E$ ist die Abbildung

$$\mathcal{H} \ni x \mapsto b(x,y)$$

eine beschränkte Linearform, deren Norm höchsten $\|b\|\|y\|$ ist. Nach dem Satz von Fréchet -Riesz 1.3.2 gibt es genau einen darstellenden Vektor in $\mathcal{H}$, den wir mit Ty bezeichnen, so daß

$$b(x,y) = \langle x, Ty\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}$$

gilt. Wir erhalten so eine Abbildung $T : E \to \mathcal{H}$.

Wir zeigen, daß T homogen ist. Man beachte, daß in der folgenden Rechnung zweimal konjugiert wird. Da

$$\begin{aligned}\langle x, T(\lambda y)\rangle &= b(x, \lambda y) = \overline{\lambda} b(x, y)\\ &= \overline{\lambda}\langle x, Ty\rangle = \langle x, \lambda(Ty)\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{X}\end{aligned}$$

ist, und da der darstellende Vektor eindeutig ist, folgt $T(\lambda y) = \lambda(Ty)$. Ebenso sieht man, daß T additiv ist:

$$\begin{aligned}\langle x, T(y_1 + y_2)\rangle &= b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)\\ &= \langle x, Ty_1\rangle + \langle x, Ty_2\rangle = \langle x, Ty_1 + Ty_2\rangle\end{aligned}$$

Also ist $T(y_1 + y_2) = Ty_1 + Ty_2$.

Anmerkung. Zu eine Sesquilinearform b kann man ohne weitere Vorraussetzungen immer die adjungierte Form b^* bilden (siehe Def. 1.1.2). Mit Hilfe des Darstellungsatzes 2.1.1 übertragen wir die Bildung der Adjungierten auf beschränkte Operatoren zwischen Hilberträumen.

2.1.2 Festst. (Bildung des adjungierten Operat.)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum.

(i) *Zu einem beschränkten linearen Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{X})$ gehört nach Satz 2.1.1 (i) die Sesquilinearform $b_T := \langle \cdot, T(\cdot)\rangle$. Zu b_T bilde man die adjungierte Sesquilinearform b_T^*. Zu b_T^* gibt es einen eindeutig bestimmten darstellenden Operator, den man mit T^* bezeichnet, so daß*

$$b_T^*(x, y) = \langle x, T^* y\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H},\ y \in \mathcal{X}$$

ist. Man nennt T^* den adjungierten *Operator zu T. Es gilt*

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

(ii) *Die Abbildung $\mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{X}) \ni T \to T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ ist konjugiert linear und isometrisch.*

(iii) *Es gilt die sogenannte C^*-*Identität

$$\|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Anmerkung. 1. Die Feststellung 2.1.2 (i) besagt, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{H}; \mathbb{K}) \ni b \arrow[r, "\sim"] & b^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{X}; \mathbb{K}) \arrow[d, "\sim"] \\ \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{X}) \ni T \arrow[u] \arrow[r] & T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

kommutiert. In diesem Diagramm sind alle Pfeile konjugiert lineare Isometrien. Da $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum ist, ist der rechte Pfeil sogar eine bijektive Isometrie

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{X}; \mathbb{K}) \cong \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{H})$$

2. Die Isomtrie 2.1.2 (ii) ist für einen Prähiilbertraum $\mathcal{X}$ i. a. nicht surjektiv.

Beispiel: Es sei $\varphi_2(\mathbb{N})$ der Prähilbertraum der finiten Folgen. Die isometrische Einbettung $S : \varphi_2(\mathbb{N}) \hookrightarrow l_2(\mathbb{N})$ ist keine adjungierte Abbildung.

Beweis. **(von Feststellung 2.1.2)** (i) Nach Satz 2.1.1 (i) ist die Sesquilinearform

$$b_T^* : \mathcal{H} \times \mathcal{X} \ni (x, y) \mapsto \overline{\langle y, Tx\rangle} = \langle Tx, y\rangle \qquad (*)$$

beschränkt und es gilt $\|b_T^*\| = \|b_T\| = \|T\|$.

Nach Satz 2.1.1 (iii) gibt es genau einen darstellenden Operator $T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{H})$, so daß

$$b_T^*(x, y) = \langle x, T^* y\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H},\ y \in \mathcal{X}$$

gilt. Ferner ist $\|T^*\| = \|b_T^*\| = \|b_T\| = \|T\|$.

(ii) Die Bildung $b \mapsto b^*$ der adjungierten Sesquilinearform ist konjugiert linear. Die Zuordnung $T \mapsto b_T = \langle \cdot, T(\cdot)\rangle$ ist ebenfalls konjugiert linear. Aus der Eindeutigkeit des darstellenden Operators folgt also:

$$b_{(S+T)^*} = b^*_{(S+T)} = b_S^* + b_T^* = b_{S^*} + b_{T^*} = b_{(S^*+T^*)}$$

und somit $(S + T)^* = S^* + T^*$. Analog folgt aus

$$b_{(\lambda T)^*} = b^*_{\lambda T} = \left(\overline{\lambda} b_T\right)^* = \lambda b_T^* = b_{\overline{\lambda} T^*},$$

daß $\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ gilt.

Also ist die Bildung der Adjungierten konjugiert linear und isometrisch nach (i).

(iii) Da

$$\|T^*Tx\| \leq \|T^*\|\|Tx\| \leq \|T^*\|\|T\|\|x\|$$

ist, gilt $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$.

Andererseits folgt aus $(*)$ und der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle\\ &\leq \|T^*Tx\|\|x\| \leq \|T^*T\|\|x\|^2,\end{aligned}$$

Also ist $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$.

Später benutzt man die Feststellung 2.1.2(i) in dem wichtigen Fall zweier Hilberträume in etwas vereinfachter Form. Wir formulieren dies als eigenständigen Satz.

2.1.3 Satz (adjungierte Operatoren)

Es seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume.

(i) *Zu jedem beschränkten linearen Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ gibt es einen eindeutig bestimmten Operator $T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, so daß*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H},\ y \in \mathcal{X}$$

gilt. Man nennt T^* den adjungierten *Operator zu T.*

(ii) *Für den* biadjungierten *Operator $T^{**} := (T^*)^*$ gilt*

$$T^{**} := T.$$

(iii) *Die Bildung des adjungierten Operators*

$$\mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \ni T \to T^* \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$$

ist eine konjugiert lineare, bijektive Isometrie der Räume $\mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ und $\mathfrak{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.

(iv) *Für die Komposition von Operatoren $S \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ gilt*

$$(TS)^* = S^*T^*.$$

(v) *Wenn $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ eine Inverse $T^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ hat, dann ist auch T^* invertierbar und es gilt*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Beweis. (i)

(ii)

(iii)

(iv)

(v) Es existiere $T^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$. Aus $TT^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{K}}$ und $T^{-1}T = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ folgt nach (iii), daß

$$(T^{-1})^*T^* = (\mathrm{id}_{\mathcal{K}})^* = \mathrm{id}_{\mathcal{K}},$$
$$T^*(T^{-1})^* = (\mathrm{id}_{\mathcal{H}})^* = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,.$$

Also ist $(T^{-1})^*$ die Inverse von T^*.

Anmerkung. **(C^*-Algebren)** 1. Es sei $\mathcal{A}$ eine komplexe Algebra. Eine konjugiert lineare Abbildung $T \mapsto T^*$ von $\mathcal{A}$, mit den Eigenschaften

$$T^{**} = T \quad \text{und} \quad (TS)^* = S^*T^*$$

heißt ein **Involution**. $\mathcal{A}$ nennt man dann eine involutive Algebra.

2. Eine involutive Banachalgebra $\mathcal{A}$, in der die C^*-Bedingung

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \quad \text{für } T \in \mathcal{A}$$

erfüllt ist, heißt eine C^*-Algebra. Beispiel von C^*- Algebren:

- die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit der Involution $\zeta \mapsto \overline{\zeta}$.
- Die stetigen komplexen Funktionen $C([0,1])$ mit der sup-Norm und der Involution $f \mapsto \overline{f}$ bilden eine kommutative C^*-Algebra.
- Die Banachalgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H}) := \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ der beschränkten Operatoren auf dem Hilbertraum mit der Involution $T \mapsto T^*$ ist eine C^*-Algebra.

3. Jede C^*-Algebra ist isometrisch isomorph zu einer $*$-Unteralgebra der Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, für einen passenden Hilbertraum $\mathcal{H}$. Die C^*-Bedingung $\|T^*T\| = \|T\|^2$ ist der Schlüssel für eine mehr algebraische Theorie der Operatoren auf dem Hilbertraum.

2.1.2 selbstadj, positive und normale Op.

2.1.4 Def. (selbstadjungierte Operatoren $\mathfrak{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

(i) *T heißt* selbstadjungiert *oder* hermitesch, *wenn $T = T^*$ ist.*

Der Raum $\mathfrak{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ der der selbstadjungierten Operatoren ist ein $\mathbb{R}$-linearer Teilraum von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ reicht es, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ zu fordern. Aus der Polarisationsformel folgt dann $T = T^*$.

(ii) *Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ definiert man den* Realteil *und den* Imaginärteil *von T:*

$$\mathrm{Re}\,T := \frac{T + T^*}{2},$$
$$\mathrm{Im}\,T := \frac{T - T^*}{2i}$$

$\mathrm{Re}\,T$ und $\mathrm{Im}\,T$ sind selbstadjungiert. Es gilt $T = \mathrm{Re}\,T + i\,\mathrm{Im}\,T$.

(iii) *Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bildet man den* symmetrischen *und den* schiefsymmetrischen *Anteil von T:*

$$\frac{T + T^*}{2} \quad \text{(symmetrisch)}$$
$$\frac{T - T^*}{2} \quad \text{(schiefsymmetrisch)}.$$

Anmerkung. 1. Für die quadratische Form q_T zu einem Operator T gilt: $\mathrm{Re}\,q_T = q_{\mathrm{Re}\,T}$. Man beachte, daß im allg. $\mathrm{Re}\,b_T \neq b_{\mathrm{Re}\,T}$ ist.

2. Im allgemeinen kommutieren $\mathrm{Re}\,T$ und $\mathrm{Im}\,T$ nicht. Beispiele hierfür findet man bereits bei 2×2-Matrizen.

2.1.5 Def. (Ordnung unter Operatoren)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $S, T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

(i) *T heißt* positiv, *wenn T selbstadjungiert und*

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}.$$

Man bezeichnet dies mit $0 \leq T$ oder $T \geq 0$.

(ii) *Es seien S, T selbstadjungiert. S heißt* kleiner *als T, wenn $0 \leq T - S$ ist.*

Man bezeichnet dies mit $S \leq T$ oder $T \geq S$.

Anmerkung. 1. Bei Matrizen ist die Bezeichnung *positiv semidefinit* statt *positiv* üblich.

2. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ reicht es, $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ zu fordern. Aus der Polarisationsformel folgt dann $T = T^*$.

3. Die Relation $\leq$ ist eine Ordnung auf dem Raum $\mathfrak{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ der selbstadjungierten beschränkten Operatoren (siehe Orthogonale Projektoren 2.2.1, siehe Ordnung auf den Operatoren 2.4)

4. Im allgemeinen werden Ungleichungen mit Operatoren zerstört, wenn man sie einseitig von links oder rechts mit einem positiven Operator multipliziert. Gut geht das nur, sofern die Faktoren kommutieren (siehe Satz 2.4.5) Wenn man die Faktoren aber *symmetrisch* links und rechts anbringt, so bleiben Ungleichungen erhalten. Symmetrisch bedeutet hier, daß man links mit A^* und rechts mit A multipliziert:

2.1.6 Satz (Symmetrischer Faktoren bei Ungl.)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, A, S, $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

(i) *Da*

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 \quad \text{für } x \in \mathcal{H}$$

gilt, ist $T^*T \geq 0$.

(ii) *Aus $S \leq T$ folgt $A^*SA \leq A^*TA$.*

(iii) *$T^*T \leq \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \quad \Leftrightarrow \quad \|T\| \leq 1$.*

(iv) *$T^*T \leq \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \quad \Leftrightarrow \quad TT^* \leq \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.*

(v) *Wenn $S \geq 0$ ist, so gilt*

$$0 \leq T^*ST \leq \|S\|T^*T.$$

Insbesondere gilt für beliebiges A:

$$0 \leq (AT)^*(AT) \leq \|A\|^2T^*T.$$

Anmerkung. 1. Mit Hilfe der positiven Wurzel aus einem positiven Operator können wir des obigen Satz auf die Situation $0 \leq S \leq T$ ausdehen (siehe Festst. 2.5.6).

2. Beispiele mit 2×2-Matrizen zeigen, daß man $(TA)^*(TA)$ nicht durch ein Vielfaches von T^*T abschätzen kann:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(AT)^*(AT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T^*T,$$

wogegen für alle $c \geq 0$

$$(TA)^*(TA) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \not\leq cT^*T$$

ist.

2.Man bevorzugt die *Quadrate* in der Reihenfolge T^*T gegenüber denen in der Reihenfolge TT^*. Für die Quadrate T^*T gilt Satz 2.1.6(i):

$$q_{T^*T} = \|T\cdot\|^2$$

und für die Linksmultiplikation $L_A : T \mapsto AT$ gilt Satz 2.1.6(v):

$$(L_AT)^*(L_AT) \leq \|A\|^2 T^*T.$$

Für die Rechtsmultiplikation R_A gibt es eine entsprechende Abschätzung, wenn man das andere Quadrat TT^* verwendet. Man bevorzugt aber die Linksmultiplikation gegenüber der Rechtmultiplikation, da die Linksmultipliakation ein Algebrenhomomorphismus ist:

$$L_{AB} = L_A \circ L_B.$$

Dagegen ist die Rechtsmultiplikation ein Algebren-Antihomorphismus:

$$R_{AB} = R_B \circ R_A.$$

Beweis. (i) Nach Definition der Ordnung gilt

$$T^*T \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \langle T^*Tx, x\rangle \geq 0 \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

(ii) Für $x \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\langle A^*SAx, x\rangle = \langle SAx, Ax\rangle \leq \langle TAx, Ax\rangle = \langle A^*TAx, x\rangle.$$

(iii) Nach Definition der Ordnung und der Norm eines Operators gilt

$$\begin{aligned} T^*T \leq \mathrm{id}_\mathcal{H} \quad &\Leftrightarrow \quad \langle T^*Tx, x\rangle \leq \langle \mathrm{id}_\mathcal{H} x, x\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{H}. \\ &\Leftrightarrow \quad \|Tx\| \leq \|x\| \quad \text{für } x \in \mathcal{H}. \\ &\Leftrightarrow \quad \|T\| \leq 1. \end{aligned}$$

(iv) Mit der C^*-Identität $\|T^*T\| = \|T\|^2 = \|TT^*\|$ (siehe Festst. 2.1.2 (iii)) und (iii) erhält man die Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} T^*T \leq \mathrm{id}_\mathcal{H} \quad &\Leftrightarrow \quad \|TT^*\| = \|T\|^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad TT^* \leq \mathrm{id}_\mathcal{H}. \end{aligned}$$

(v) Die Behauptungen folgen sofort aus (i) bzw. (iii).

Anmerkung. 1. Im allgemeinen ist $T^*T \neq TT^*$ (siehe 2.1.7[normale Operatoren]). Beispiele hierfür findet man bereits bei 2×2-Matrizen:

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Für $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ folgt aber aus der C^*-Identität 2.1.2 (iii), daß $\|T^*T\| = \|TT^*\|$ ist. Eine entsprechende Aussage gilt für die Ordnung (siehe Satz 2.1.6(iv)).

Für eine Matrix T haben T^*T und TT^* die gleichen Eigenwerte. Eine ähnliche Aussage gilt für das Spektrum der Operatoren T^*T und TT^* (siehe...).

2.1.7 Def. (normale Operatoren)

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ heißt normal, *wenn T und sein adjungierter T^* vertauschen (kommutieren):*

$$T^*T = TT^*.$$

Anmerkung. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt:

$$T \text{ normal} \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Re} T \text{ und } \operatorname{Im} T \text{ vertauschen.}$$

2.1.8 Bem. (Charakterisierung normaler Op.)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(a) *T ist normal.*

(b) *$\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$.*

(c) *$\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$.*

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$.

(b)$\Rightarrow$(c): Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erhält man dies aus der Polarisationsformel 1.1.4 (i) und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ aus 1.1.4 (ii).

(c)$\Rightarrow$(a): Da $\langle x, T^*Ty\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle = \langle x, TT^*y\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt, ist $T^*T = TT^*$.

2.1.9 Bez. (adjunierbare Op. auf Prähilbertr.)

Es seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Prähilberträume und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

(i) T heißt *adjungierbar*, wenn es einen Operator $S \in \hom(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ so gibt, daß

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{X},\ y \in \mathcal{Y}$$

gilt.

S ist eindeutig bestimmt und wird mit meist mit T^* bezeichnet. Es gilt $\|S\| = \|T\|$.

Im Falle $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ definiert man weiter:

(ii) T heißt *normal*, wenn T adjungierbar ist und $TT^* = T^*T$ gilt.

(iii) T heißt *symmetrisch*, wenn die zugehörige Sesquilinearform hermitesch ist:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \text{für } x, y \in \mathcal{X}.$$

Anmerkung. (symmetrisch–selbstadjungiert) 1. Im Hinblick auf *unbeschränkte* Operatoren ist der Begriff *selbstadjungiert* für den Hilbertraumfall reserviert. Im Falle unbeschränkter Operatoren muß man sorgfältig zwischen *selbstadjungierten* und *symmetrischen* Operatoren unterscheiden.

2. Man beachte, daß die obige Definitionen von *normal* so nur für beschränkte Operatoren gilt. Bei der Definition unbeschränkter normaler Operatoren kommen noch weitere Forderungen hinzu.

2.1.10 Bem. (stetige Fortsetz. adjunbierbarer Op.)

Es seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Prähilberträume. $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ sei adjungierbar mit der adjungierten $S \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Für die stetigen Fortsetzungen $S^\sim, T^\sim$ auf die Vervollständigungen von $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$ gilt dann

$$S^\sim = (T^\sim)^*.$$

2.1.3 Operatoren von endlichem Rang

2.1.11 Bsp. (adjungierte Matrix)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ endlichdimensionale Hilberträume mit Orthonormalbasen $(e_1, \cdots e_m)$ bzw $(f_1, \cdots, f_n)$. Ist $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ ein linearer Operator mit der Matrix A, so gehört zu T^* die adjungierte Matrix A^*.

Anmerkung. Die Aussage von Beispiel 2.1.11 gilt nur, wenn beide Basen Orthonormalbasen sind.

Beweis. Für $x = \sum_{\mu=1}^n \xi_\mu e_\mu \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{\mu=1}^m \xi_\mu T e_\mu = \sum_{\mu=1}^m \xi_\mu \sum_{\nu=1}^n \langle Te_\mu, f_\nu\rangle f_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^n \Big(\sum_{\mu=1}^n \langle Te_\mu, f_\nu\rangle \xi_\mu \Big) f_\nu \end{aligned}$$

Folglich gehört zu T die $n \times m$–Matrix

$$A = \big[a_{\nu,\mu}\big]_{\nu=1,\dots,n}^{\mu=1,\dots,m} \quad \text{mit } a_{\nu,\mu} = \langle Te_\mu, f_\nu\rangle.$$

Entsprechend gehört zu dem adjungierte Operator $T^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ die $n \times m$–Matrix

$$B = \big[b_{\mu,\nu}\big]_{\mu=1,\dots,m}^{\nu=1,\dots,n} \quad \text{mit } b_{\mu,\nu} = \langle T^* f_\nu, e_\mu\rangle.$$

Nach Definition des adjungierten Operators gilt:

$$b_{\mu,\nu} = \langle T^* f_\nu, e_\mu\rangle = \langle f_\nu, Te_\mu\rangle = \overline{\langle Te_\mu, f_\nu\rangle} = \overline{a}_{\nu,\mu}.$$

Also ist B die adjungierte Matrix zu A:

$$B := A^* = \big[\overline{a}_{\nu,\mu}\big]_{\mu=1,\dots,m}^{\nu=1,\dots,n}.$$

2.1.12 Bem. (Adjungierte einer Linearform)
Es sei φ eine beschränkte Linearform auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Nach dem Darstellungssatz 1.3.2 von Fréchet-Riesz gibt es genau einen darstellenden Vektor $y_\varphi \in \mathcal{H}$, so daß

$$\varphi(x) = \langle x, y_\varphi\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

Die adjungierte Abbildung $\varphi^* : \mathbb{K} \to \mathcal{H}$ hat die Form

$$\varphi^* : \lambda \mapsto \lambda y_\varphi \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} &\varphi^*\varphi : x \mapsto \varphi(x) y_\varphi = \langle x, y_\varphi\rangle y_\varphi. \\ &\varphi\varphi^* = \langle y_\varphi, y_\varphi\rangle = \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Identifiziert man, wie üblich, $\mathfrak{L}(\mathbb{K}, \mathcal{H}) \cong \mathcal{H}$, indem man einen Vektor $y \in \mathcal{H}$ mit der linearen Abbildung $y : \lambda \mapsto \lambda y$ identifiziert, so folgt

$$\varphi^* = y_\varphi, \quad \text{und} \quad y_\varphi^* = \langle \cdot, y_\varphi\rangle = \varphi.$$

2.1.13 Bez. (Rang einer linearen Abbildung)
Es seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Der Rang einer linearen Abbildung $T \in \hom(V, W)$ ist die Vektorraumdimension des Bildraumes:

$$\operatorname{Rang} T := \dim \operatorname{Bild} T.$$

Wir sagen, T hat *endlichen* Rang, wenn $\operatorname{Rang} T \in \mathbb{N}$ ist.

Anmerkung. Wenn T injektiv ist, so ist $\operatorname{Rang} T = \dim V$.

2.1.14 Bem. (Rang der Adjungierten)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{X})$ habe endlichen Rang. Dann gilt

$$\operatorname{Rang} T^*T = \operatorname{Rang} TT^* = \operatorname{Rang} T^* = \operatorname{Rang} T.$$

Beweis. Da $\dim \operatorname{Bild} T = \operatorname{Rang} T \in \mathbb{N}$ ist, gilt $\mathcal{X} = \operatorname{Bild} T \oplus (\operatorname{Bild} T)^\perp$ (siehe Folgerung 1.2.18). Wir zeigen, daß $\operatorname{Kern} T^* = (\operatorname{Bild} T)^\perp$ ist:

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Kern} T^* \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = \langle x, T^* y\rangle = \langle TX, y\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{H} \\ &\Leftrightarrow \quad y \in (\operatorname{Bild} T)^\perp. \end{aligned}$$

Aus $\mathcal{X} = \operatorname{Bild} T \oplus \operatorname{Kern} T^*$ folgt, daß $\operatorname{Bild}(T^*) = T^*(\operatorname{Bild} T)$ ist und daß $T^*|_{\operatorname{Bild} T}$ injektiv ist. Hieraus folgt

$$\operatorname{Rang} T^* = \dim(T^*(\operatorname{Bild} T)) = \dim \operatorname{Bild} T = \operatorname{Rang} T.$$

Weiterhin ist $\operatorname{Rang} T^*T = \dim(T^*(\operatorname{Bild} T)) = \operatorname{Rang} T$.
Da $\operatorname{Rang} T^* \in \mathbb{N}$ ist, folgt analog

$$\mathcal{H} = \operatorname{Bild} T^* \oplus \operatorname{Kern} T.$$

Da $T|_{\operatorname{Bild} T^*}$ injektiv ist. erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Rang} TT^* &= \dim(T \operatorname{Bild} T^*) = \dim \operatorname{Bild} T^* \\ &= \operatorname{Rang} T^* = \operatorname{Rang} T. \end{aligned}$$

2.1.15 Bsp. (Gramsche Matrix)
Es sei $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum. Zu $x_1, \dots x_n \in \mathcal{X}$ bildet man die *Gramsche Matrix*

$$G : \big[\langle x_\mu, x_\nu\rangle\big]_{\nu=1\dots n}^{\mu=1\dots n}.$$

Der Rang der Gramschen Matrix ist geich der Anzahl der linear unabhängigen Elemente in $\{x_1, \dots, x_n\}$:

$$\operatorname{Rang} G = \dim \operatorname{lin}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Beweis. Man bilde die lineare Abbildung $T : \ell_2^n \to \mathcal{X}$ mit

$$T : (\xi_\nu)_{\nu=1}^n \mapsto \sum_{\nu=1}^n \xi_\nu x_\nu.$$

Die adjungierte Abbildung $T^* : \mathcal{X} \to \ell_2^n$ und $T^*T \in \mathfrak{L}(\ell_2^n$ haben die Form

$$\begin{aligned} T : y &\mapsto (\langle y, x_\nu\rangle)_{\nu=1}^n, \\ T^*T : (\xi_\nu)_{\mu=1}^n &\mapsto \sum_{\mu=1}^n \langle x_\mu, x_\nu\rangle \xi_\mu. \end{aligned}$$

Die Matrix von T^*T bezüglich der Standardbasis des ℓ_2^n ist also die Gramsche Matrix:

$$G : \left[\langle x_\mu, x_\nu\rangle\right]_{\nu=1\ldots n}^{\mu=1\ldots n}.$$

Nach Bemerkung 2.1.14 ist also

$$\operatorname{Rang} G = \operatorname{Rang} T^*T = \operatorname{Rang} T = \dim \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

2.1.16 Bsp. (orthogonaler Proj. auf $\operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$**)**
Es sei $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum. Für ein Orthonormalsystem $\{e_1, \ldots, e_n\}$ in $\mathcal{X}$ hat der orthogonale Projektor P_n auf den Unterraum $\operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Gestalt:

$$P_n x = \sum_{\nu=1}^{n} \langle x, e_\nu\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{X}.$$

Beweis.

2.2 Bild T und Kern T^*

2.2.1 Orthogonale Projektoren

Anmerkung. (direkte Summen und Projektoren) 1. Der Vektorraum V sei die direkte Summe $V = V_1 \oplus V_2$ zweier Unterräume V_1 und V_2. Jeder Vektor $v \in V$ hat also eine eindeutige Darstellung

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{mit } v_1 \in V_1,\, v_2 \in V_2.$$

Zu dieser Zerlegung von V in eine direkte Summe gehören die Abbildungen $P_i : V \to V$, die jedem Vektor seine Komponenten zuordnen:

$$P_i : v \mapsto v_i \qquad (i = 1, 2),$$

Die P_i sind linear und *idempotent*, d.h.

$$P_i^2 = P_i \quad \Leftrightarrow \quad P_i|\,\mathrm{Bild}\,P_i = \mathrm{id}_{\mathrm{Bild}\,P_i}$$

und *komplementär*, d.h.

$$\mathrm{id}_V = P_1 + P_2.$$

2. Ein idempotenter Operator $P \in \hom(V)$ heiße ein *Projektor*. Es gibt immer die beiden *trivialen* Projektoren 0 und id_V.

Wenn P ein Projektor auf V ist, dann ist $V = \mathrm{Bild}\,P \oplus \mathrm{Kern}\,P$.

3. Wenn P ein Projektor ist, dann ist auch $Q := \mathrm{id}_V - P$ ein Projektor:

$$Q^2 = (\mathrm{id}_V - P)^2 = \mathrm{id}_V - 2P + P^2 = \mathrm{id}_V - P = Q.$$

Zwei Projektoren P, Q mit $\mathrm{id}_v = P + Q$ heißen *komplementäre* Projektoren.

4. Für P, $Q \in \hom V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) P und Q sind komplementäre Projektoren.

(ii) $P + Q = \mathrm{id}_V$ und $PQ = 0$.

(iii) P und Q sind Projektoren und

$$\mathrm{Kern}\,P = \mathrm{Bild}\,Q, \quad \mathrm{Bild}\,P = \mathrm{Kern}\,Q.$$

(iv) P und Q sind Projektoren. Es gilt $PQ = QP = 0$ und V hat die Zerlegung $V = \mathrm{Bild}\,P \oplus \mathrm{Bild}\,Q$.

2.2.1 Bez. (orthogonaler Projektor)
Es sei $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum.

(i) Ein Projektor $P \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ heiße ein *orthogonaler* Projektor, wenn

$$\mathrm{Bild}\,P \perp \mathrm{Kern}\,P$$

gilt. Für einen orthogonalen Projektor P ist also $\mathcal{X} = \mathrm{Bild}\,P \oplus \mathrm{Kern}\,P$ eine orthogonale direkte Summe.

(ii) Ist $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ ein linearer Teilraum und gilt $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^\perp$, so nennen wir den zugehörigen Projektor

$$P_\mathcal{Y} : x \mapsto y \quad \text{für } x = y + z \in \mathcal{X} \text{ mit } y \in \mathcal{Y},\, z \in \mathcal{Y}^\perp$$

den orthogonalen Projektor auf den Unterraum $\mathcal{Y}$.

Anmerkung. In der Theorie der Hilberträume kommen idempotente beschränkte lineare Operatoren, die nicht orthogonal sind, selten vor. Daher ist es hier üblich, die orthogonalen Projektoren kurz als Projektoren zu bezeichnen. Auf Grund der Äquivalenzen in Feststellung 2.2.2 und Satz 2.2.3 ist i.a. klar, daß ein betreffender Projektor orthogonal ist.

2.2.2 Festst. (Char. orthogonaler Projektoren)
Es sei $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum und $P \in \hom \mathcal{X}$ idempotent. Dann sind äquivalent:

(a) *P ist ein orthogonaler Projektor.*

(b) $\mathrm{Bild}\,P \perp \mathrm{Kern}\,P$.

(c) *$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ für alle $x \in \mathcal{X}$.*

(d) *$0 \le \langle Px, x\rangle$ für alle $x \in \mathcal{X}$.*

(e) *P ist beschränkt und $\|P\| \le 1$.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) ist offensichtlich.

(b) $\Rightarrow$ (c): Da $\mathrm{Bild}\,P \perp \mathrm{Kern}\,P$ ist, gilt

$$\langle Px, (\mathrm{id}_\mathcal{X} - P)x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle Px, x\rangle = \|Px\|^2.$$

(c) $\Rightarrow$ (d) ist offensichtlich.

(d) $\Rightarrow$ (b): Für $y \in \mathrm{Bild}\,P$ ist $y = Py$. Für $y \in \mathrm{Bild}\,P$, $z \in \mathrm{Kern}\,P$ und $0 < t$ folgt aus

$$0 \le \langle P(ty \pm z), ty \pm z\rangle = t^2\|y\|^2 \pm t\langle y, z\rangle,$$

daß

$$\pm\langle y, z\rangle \le t\|y\|^2$$

ist. Für $t \downarrow 0$ folgt hieraus $\langle y, z\rangle = 0$. Also ist $\mathrm{Bild}\,P \perp \mathrm{Kern}\,P$.

(b) $\Rightarrow$ (e): Für alle $x \in \mathcal{X}$ ist $Px \perp (\mathrm{id}_\mathcal{X} - P)x$. Nach dem Satz von Pythagoras folgt hieraus

$$\|Px\|^2 \le \|Px\|^2 + \|(\mathrm{id}_\mathcal{X} - P)x\|^2 = \|x\|^2 \quad \text{für } x \in \mathcal{X}.$$

Also ist $\|P\| \le 1$.

(e) $\Rightarrow$ (a): Für $y \in \mathrm{Bild}\,P$ ist $y = Py$. Für $y \in \mathrm{Bild}\,P$, $z \in \mathrm{Kern}\,P$ und $0 < t$ folgt aus

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= \|P(y \pm tz)\|^2 \le \|P\|^2\|y \pm tz\|^2 \\ &= \|y\|^2 \pm 2t\,\mathrm{Re}\langle y, z\rangle + t^2\|z\|^2\end{aligned}$$

daß

$$\pm 2\,\mathrm{Re}\langle y, z\rangle \le t\|z\|^2$$

ist. Für $t \downarrow 0$ folgt $\mathrm{Re}\langle y, z\rangle = 0$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt entsprechend $\mathrm{Im}\langle y, z\rangle = \mathrm{Re}\langle y, iz\rangle = 0$.

P ist also beschränkt, idempotent und $\mathrm{Bild}\,P \perp \mathrm{Kern}\,P$. Nach Bezeichnung 2.2.1 ist P ein orthogonaler Projektor.

Anmerkung. Im Falle eines Hilbertraumes kann man die orthogonalen Projektoren mit Hilfe des adjungierten Operators charakterisieren. Zusätzlich zu den Charakterisierungen 2.2.2(a)-(e) gilt dann:

2.2.3 Satz (orthogonale Projektoren)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $P \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ sei idempotent. Dann sind äquivalent:

(a) *P ist ein orthogonaler Projektor*

(d') $P \ge 0$.

(f) $P = P^*$.

(g) *P ist normal.*

(h) $\mathrm{Kern}\,P = \mathrm{Kern}\,P^*$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (d'): Aus $\mathrm{Bild}\,P \perp \mathrm{Kern}(\mathrm{id}_\mathcal{H} - P)$ folgt

$$\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py\rangle \quad \text{für } x, y \in \mathcal{H}.$$

Also ist die Sesquilinearform $(x, y) \mapsto \langle Px, y\rangle$ hermitesch. Mit Feststellung 2.2.2 (d) folgt nun $P \ge 0$.

(d') $\Rightarrow$ (f) und (f) $\Rightarrow$ (g) sind klar.

(g) $\Rightarrow$ (h) Da P normal ist, gilt $\|Px\| = \|P^*x\|$ für alle $X \in \mathcal{H}$. Folglich ist $\operatorname{Kern} P = \operatorname{Kern} P^*$.

(h) $\Rightarrow$ (a) Wir zeigen, daß $(\operatorname{Bild} P)^\perp = \operatorname{Kern} P^*$ ist:

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Kern} P^* \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = \langle x, P^*y\rangle = \langle Px, y\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{H} \\ &\Leftrightarrow \quad y \in (\operatorname{Bild} P)^\perp. \end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{Bild} P \perp \operatorname{Kern} P$. Nach Bezeichnung 2.2.1 ist P ein orthogonaler Projektor.

2.2.4 Satz (Ordnung unter orth. Projektoren)

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ orthogonale Projektoren.

(i) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Es ist $P \leq Q$.*
(b) *Für $x \in \mathcal{H}$ ist $\|Px\| \leq \|Qx\|$.*
(c) *Es ist $\operatorname{Kern} Q \subset \operatorname{Kern} P$.*
(d) *Es ist $\operatorname{Bild} P \subset \operatorname{Bild} Q$.*
(e) *Es gilt $QP = P$.*
(f) *Es gilt $PQ = P$.*
(g) *$Q - P$ ist ein orthogonaler Projektor.*

(ii) *In diesem Fall ist $\operatorname{Bild} Q = \operatorname{Bild} P \oplus \operatorname{Bild}(Q - P)$ eine orthogonale direkte Summe.*

Bezeichnung. Man bezeichnet den obigen Fall 2.2.4 auch kurz mit

$$\operatorname{Bild} Q \ominus \operatorname{Bild} P := \operatorname{Bild}(Q - P).$$

$\operatorname{Bild} Q \ominus \operatorname{Bild} P$ ist das relative Orthogonalkomplement von $\operatorname{Bild} P$ in $\operatorname{Bild} Q$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild} Q \ominus \operatorname{Bild} P &= \operatorname{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P) \cap \operatorname{Bild} Q \\ &= (\operatorname{Bild} P)^\perp \cap \operatorname{Bild} Q. \end{aligned}$$

Beweis. (i) (a) $\Leftrightarrow$ (b): Da P und Q orthogonale Projektoren sind ist $P = P^* = P^2$ und ebenso $Q = Q^* = Q^2$ (siehe Satz 2.2.3 (f)). Für $x \in \mathcal{H}$ folgt aus $P \leq Q$:

$$\begin{aligned} \|Px\|^2 &= \langle P^*Px, x\rangle = \langle Px, x\rangle \\ &\leq \langle Qx, x\rangle = \langle Q^*Qx, x\rangle = \|Qx\|^2. \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (c) ist offensichtlich.

(c) $\Rightarrow$ (d): Aus $\operatorname{Kern} Q \subset \operatorname{Kern} P$ folgt für die senkrechten Räume:

$$\operatorname{Bild} P = (\operatorname{Kern} P)^\perp \subset (\operatorname{Kern} Q)^\perp = \operatorname{Bild} Q.$$

(d) $\Rightarrow$ (e): Da $Q|\operatorname{Bild} Q = \mathrm{id}_{\operatorname{Bild} Q}$ ist, erhält man:

$$\operatorname{Bild} P \subset \operatorname{Bild} Q \quad \Rightarrow \quad QP = P.$$

(e) $\Leftrightarrow$ (f): Adjungiert man die Gleichung $QP = P$ so folgt $PQ = P$ und umgekehrt.

(f) $\Rightarrow$ (g): $Q - P$ ist selbstadjungiert und idempotent:

$$(Q-P)^2 = Q^2 - QP - PQ + P^2 = Q - P - P + P = Q - P.$$

Nach Satz 2.2.3 (f) ist $P - Q$ ein orthogonaler Projektor.

(g) $\Rightarrow$ (a): Da $Q - P$ ein orthogonaler Projektor ist nach Satz 2.2.3 (d') $0 \leq Q - P$ und somit $P \leq Q$.

(ii) Da $Q - P \leq Q$ ist, ist nach (i)(d) $\operatorname{Bild}(Q - P) \subset \operatorname{Bild} Q$. Da auch $\operatorname{Bild} P \subset \operatorname{Bild} Q$ ist, folgt

$$\operatorname{Bild} P + \operatorname{Bild}(Q - P) \subset \operatorname{Bild} Q.$$

Anderseits gilt

$$Qx = Px + (Q - P)x \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

Also ist $\operatorname{Bild} P + \operatorname{Bild}(Q - P) = \operatorname{Bild} Q$.

Da

$$\langle Px, (Q - P)y\rangle = \langle x, P(Q - P)y\rangle = 0 \quad \text{für } x, y \in \mathcal{H}$$

gilt, ist $\operatorname{Bild} P \perp \operatorname{Bild}(Q - P)$. Also ist $\operatorname{Bild} Q = \operatorname{Bild} P \oplus \operatorname{Bild}(Q - P)$ eine orthogonale direkte Summe.

2.2.5 Satz (Produkt und Summe orth. Proj)

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ orthogonale Projektoren. Dann gilt:

(i) *Die komposition PQ ist genau dann ein orthogonaler Projektor, wenn $PQ = QP$ ist.*
In diesem Fall ist $\operatorname{Bild} PQ = \operatorname{Bild} P \cap \operatorname{Bild} Q$.

(ii) *die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Die Summe $P + Q$ ist ein orthogonaler Projektor.*
(b) *$PQ = 0$.*
(c) $\operatorname{Bild} P \perp \operatorname{Bild} Q$

In diesem Fall ist $\operatorname{Bild}(P + Q) = \operatorname{Bild} P \oplus \operatorname{Bild} Q$.

Beweis. (i) Wenn PQ ein orthogonaler Projektor ist, so ist $PQ = (PQ)^* = QP$ (siehe Satz 2.2.4).

Wenn $PQ = QP$ so ist PQ idempotent und selbstadjungiert:

$$(PQ)^2 = P^2Q^2 = PQ \quad \text{und} \quad (PQ)^* = QP = PQ.$$

Nach Satz 2.2.4 ist PQ ein orthogonaler Projektor.

(ii) (a) $\Rightarrow$ (b): Da $P \leq P + Q$ und $P + Q$ orthogonaler Projektor ist, gilt $P(P+Q) = P$, d.h. $PQ = 0$ (siehe Satz 2.2.4).

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Da $PQ = 0$ ist, ist

$$\langle Px, Qy\rangle = \langle x, PQy\rangle = 0 \quad \text{für } x, y \in \mathcal{H}.$$

Somit ist $\operatorname{Bild} P \perp \operatorname{Bild} Q$. Offensichtlich gilt auch die umgekehrte Schlußweise.

(b) $\Rightarrow$ (a): Es sei $PQ = 0$ und somit auch $QP = (PQ)^* = 0$. Da $P + Q$ selbstadjungiert und idempotent ist:

$$(P + Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q,$$

ist $P + Q$ ein orthogonaler Projektor (siehe Satz 2.2.3).

Nach Satz 2.2.4 (ii) ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild}(P + Q) &= \operatorname{Bild} P \oplus \operatorname{Bild}((P + Q) - P) \\ &= \operatorname{Bild} P \oplus \operatorname{Bild}(Q). \end{aligned}$$

2.2.2 Isometrien und partielle Isometrien

2.2.6 Bez. (Isometrie)
Es sei $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Prähilberträume. Ein linearer Operator $V \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ heißt eine Isometrie, wenn

$$\|Vx\| = \|x\| \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

Anmerkung. 1. Eine surjektive Abbildung $V : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, für die

$$\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{für } x, y \in \mathcal{X}$$

gilt, ist linear und isometrisch.
2. Beachte: Eine Isometrie ist nicht notwendig surjektiv, wie das Beispiel 2.2.7 des Shift-Operators zeigt.

2.2.7 Bsp. (Shift-Operator)
(i) Der Shift-Operator $S : \ell_2(\mathbb{N}_0) \to \ell_2(\mathbb{N}_0)$ mit

$$S : (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

ist isometrisch aber nicht surjektiv.
Der Adjungierte Operator S^* heißt der *Rückwärst-Shift* und hat die Form

$$S^* : (y_0, y_1, y_2, \dots) \mapsto (y_1, y_2, \dots)$$

S^* ist nicht injektiv, aber die Einschränkung von S^* auf den Unterraum $e_1^\perp = \{(0, y_1, y_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N}_0)\}$ ist isometrisch. Man sagt, S^* ist eine partielle Isometrie (siehe Bez. 2.2.11)

(ii) Da jeder separable unendlichdimensionale Hilbertraum isometrisch isomorph zum $l_2(\mathbb{N}_0)$ ist, findet man *den Shift-Operator* in vielerlei Gestalt auf anderen Hilberträumen wieder.

(iii) Eine solche Realisierung des Shift-Operators erhält man durch den Multiplikationsoperator M_z auf dem Hardy-Raum $H^2(\mathbf{D})$:
Zu der identischen Funktion $z \in A(\mathbf{D})$ bilde man den Multiplikationsoperator

$$M_z : H^2(\mathbf{D}) \to H^2(\mathbf{D}) \quad \text{mit} \quad M_z(f)(\zeta) := \zeta f(\zeta)$$

für $f \in H^2(\mathbf{D})$ und $\zeta \in \mathbf{D}$. Wir schreiben kurz $zf := M_z(f)$.
Die Potenzen $(z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bilden eine Orthonormalbasis des $H^2(\mathbf{D})$. Die Hilberträume $l_2(\mathbb{N}_0)$ und $H^2(\mathbf{D})$ sind isometrisch isomorph unter dem Isomorphismus

$$\ell_2(\mathbb{N}_0) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathbf{D}), (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto f = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n.$$

Unter diesem Isomorphismus entspricht dem Shif-Operator $S \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N}_0))$ der Multiplikationsoperator $M_z \in \mathcal{L}(H^2(\mathbf{D}))$.

2.2.8 Bem. (Adjungierte einer Isometrie)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum und $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{X})$.

(i) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *V ist eine Isometrie*
(b) *$V^*V = \mathrm{id}_\mathcal{H}$.*
(c) *$V : \mathcal{H} \to \mathrm{Bild}\, V$ hat die Inverse $V^*|\,\mathrm{Bild}\, V$.*
(d) *V ist injektiv und $V^*|\,\mathrm{Bild}\, V$ ist eine Isometrie.*

(ii) *Für eine Isometrie V ist*

$$\mathcal{X} = \mathrm{Bild}(VV^*) \oplus \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_\mathcal{X} - VV^*)$$

eine orthogonale direkte Summe. Die Projektoren auf die Summanden sind VV^* und $\mathrm{id}_\mathcal{X} - VV^*$.

(iii) *Für eine Isometrie V ist*

$$\mathrm{Bild}\, V = \mathrm{Bild}(VV^*),$$
$$\mathrm{Kern}\, V^* = \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_\mathcal{X} - VV^*)$$

und es gilt die Orthogonalzerlegung

$$\mathcal{X} = \mathrm{Bild}\, V \oplus \mathrm{Kern}\, V^*.$$

Beweis. (i) (a) $\Leftrightarrow$ (b): Aus der Polarisationsformel 1.1.1 und der Definition der Adjungierten gilt

$$\begin{aligned} & V \quad \text{Isometrie} \\ \Leftrightarrow\quad & \langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{für } x, y \in \mathcal{H}. \\ \Leftrightarrow\quad & V^*V = \mathrm{id}_\mathcal{H} \end{aligned}$$

(c) ist nur eine andere Formulierung von (b).
(d) $\Leftrightarrow$ (b):

$$\begin{aligned} & \|V^*Vx\| = \|Vx\| && \text{für } x \in \mathcal{H}. \\ \Leftrightarrow\quad & \langle V^*Vx, V^*Vy\rangle = \langle Vx, Vy\rangle && \text{für } x, y \in \mathcal{H}. \\ \Leftrightarrow\quad & \langle Vx, VV^*Vy\rangle = \langle Vx, Vy\rangle && \text{für } x, y \in \mathcal{H}. \\ \Leftrightarrow\quad & VV^*Vy = Vy && \text{für } y \in \mathcal{H}. \\ \Leftrightarrow\quad & VV^*V = V \quad \Leftrightarrow \quad V^*V = \mathrm{id}_\mathcal{H}\,. \end{aligned}$$

Letzteres folgt, da V nach Voraussetzung (c) injektiv ist.
(ii) Da für alle $y, z \in \mathcal{X}$

$$\langle VV^*y, (z - VV^*z)\rangle = \langle V^*y, V^*z\rangle - \langle VV^*y, VV^*z\rangle = 0$$

gilt, ist $\mathrm{Bild}(VV^*) \perp \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_\mathcal{X} - VV^*)$. Da für $y \in \mathcal{X}$

$$y = VV^*y + (\mathrm{id}_\mathcal{X} - VV^*)y$$

gilt, ist $\mathcal{X} = \mathrm{Bild}(VV^*) + \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_\mathcal{X} - VV^*)$. Somit ist $\mathcal{X}$ die orthogonale direkte Summe von $\mathrm{Bild}(VV^*)$ und $\mathrm{Bild}(\mathrm{id}_\mathcal{X} - VV^*)$ und VV^* bzw. $\mathrm{id}_\mathcal{X} - VV^*$ sind die Projektoren auf die Komponenten.
(iii) Da $V^*V = \mathrm{id}_\mathcal{H}$ ist, folgt

$$y \in \mathrm{Bild}\, V \quad \Leftrightarrow \quad y = VV^*y.$$

Also ist $\mathrm{Bild}\, V = \mathrm{Bild}(VV^*)$. Genauso folgt

$$y \in \mathrm{Kern}\, V^* \quad \Leftrightarrow \quad y = (\mathrm{id}_\mathcal{X} - VV^*)y.$$

Also ist $\mathrm{Kern}\, V^* = \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_\mathcal{X} - VV^*)$. Aus (ii) folgt nun $\mathcal{X} = \mathrm{Bild}\, V \oplus \mathrm{Kern}\, V^*$

2.2.9 Folg. (bijektive Isometrie)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Dann sind äquivalent:

(a) *V ist eine Isometrie von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{K}$.*

(b) *V^* ist eine Isometrie von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{H}$.*

(c) *V und V^* sind Isometrien.*

(d) *Es gilt $V^*V = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ und $VV^* = \mathrm{id}_{\mathcal{K}}$.*

(e) *V^* ist die Inverse zu V.*

Anmerkung. Ein wichtiger Spezialfall sind die isometrischen Abbildungen eines Hilbertraumes auf sich.

Beachte: Wenn der Raum $\mathcal{H}$ unendlichdimensional ist, so muß man in 2.2.10 (d) beide Gleichungen $U^*U = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ und $UU^* = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ fordern.

2.2.10 Bez. (unitärer Operator)
Eine bijektive isometrischr Abbildung eines Hilbertraumes auf sich heißt ein *unitärer Operator*. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nennt man U auch einen *orthogonalen* Operator.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) U ist unitär.

(b) U^* ist unitär.

(c) U und U^* sind Isometrien.

(d) $U^*U = UU^* = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$

(e) U ist bijektiv und $U^{-1} = U^*$.

Beweis. (der Folgerung 2.2.9) (a) $\Leftrightarrow$ (b): Dies folgt aus Bemerkung 2.2.8 (i) (a) und (d).

(b) $\Rightarrow$ (c)**:** Wenn V^* eine Isometrie ist, so ist, wie oben gezeigt, auch V^{**} eine Isometrie.

(c) $\Leftrightarrow$ (d)**:** Dies folgt aus Bemerkung 2.2.8 (i) (a) und (b).

(d) $\Leftrightarrow$ (e) ist offensichtlich.

(c) $\Rightarrow$ (a)**:** Nach Bemerkung 2.2.8 (iii) ist $\mathcal{K} = \mathrm{Bild}\, V \oplus \mathrm{Kern}\, V^*$ und nach Voraussetzung ist $\mathrm{Kern}\, V^* = 0$.

2.2.11 Bez. (partielle Isometrie)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume.

(i) Ein Operator $V \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ heißt *partielle Isometrie*, wenn es einen Unterraum $\mathcal{Y} \subset \mathcal{H}$ gibt, so daß

$$V|\mathcal{Y} : \mathcal{Y} \to \mathcal{K} \quad \text{isometrisch} \quad \text{und} \quad V|\mathcal{Y}^\perp = 0$$

ist.

Da $V|\mathcal{Y}$ isometrisch ist, ist auch $V|\mathcal{Y}^-$ isometrisch. Man kann also ohne Einschränkung $\mathcal{Y}$ als abgeschlossen vorraussetzen.

(ii) In diesem Fall ist $\mathrm{Kern}\, V = \mathcal{Y}^\perp$ und V^*V ist die orthogonale Projektion auf $\mathcal{Y}$ (siehe Bez. 2.2.1)

Beweis. (ii) Da $\mathcal{Y}$ ein abgeschlossener Unterraum ist, ist $\mathcal{H} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^\perp$. Es sei $P_{\mathcal{Y}}$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{Y}$.

Da $V|\mathcal{Y}^\perp = 0$ ist, ist $\mathcal{Y}^\perp \subset \mathrm{Kern}\, V$.

Es sei $x = y + z \in \mathrm{Kern}\, V$ mit $y \in \mathcal{Y}$ und $z \in \mathcal{Y}^\perp$. Aus

$$\|y\| = \|Vy\| = \|Vy + Vz\| = \|Vz\| = 0$$

folgt $\mathrm{Kern}\, V \subset \mathcal{Y}^\perp$. Also ist $\mathrm{Kern}\, V = \mathcal{Y}^\perp$.

Für $x = y + z \in \mathcal{H}$ mit $y \in \mathcal{Y}$ und $z \in \mathcal{Y}^\perp$ ist

$$\begin{aligned} \langle V^*Vx, x\rangle &= \|Vx\|^2 = \|Vy\|^2 = \|y\|^2 = \langle y, x\rangle \\ &= \langle P_{\mathcal{Y}}x, x\rangle. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $V^*Vx = P_{\mathcal{Y}}x$. Also ist V^*V ist die orthogonale Projektion auf $\mathcal{Y}$.

2.2.12 Satz (partielle Isometrie)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $V \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) *V ist eine partielle Isometrie.*

(b) *V^*V ist ein orthogonaler Projektor.*

(c) *VV^* ist ein orthogonaler Projektor.*

(d) *V^* ist eine partielle Isometrie.*

Beweis. (a) $\Leftrightarrow$ (b): Nach Bezeichnung 2.2.11 (ii) gilt (a) $\Rightarrow$ (b).

Wir zeigen (b) $\Rightarrow$ (a)*:* Es sei $\mathcal{Y} := \mathrm{Bild}\, V^*V$. Da V^*V ein orthogonaler Projektor ist, ist $\mathrm{Kern}\, V^*V = \mathcal{Y}^\perp$ und $\mathcal{H} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^\perp$. (siehe Bez. 2.2.1) Da

$$\begin{aligned} \|Vy\|^2 &= \langle V^*Vy, y\rangle = \langle y, y\rangle = \|y\|^2 \quad \text{für } y \in \mathcal{Y}, \\ \|Vz\|^2 &= \langle V^*Vz, z\rangle = 0 \quad \text{für } z \in \mathcal{Y}^\perp, \end{aligned}$$

ist, ist V eine partielle Isometrie.

(b) $\Leftrightarrow$ (c): Da

$$\langle V^*Vx, x\rangle = \|Vx\|^2$$

gilt, ist $\mathrm{Kern}\, V = \mathrm{Kern}\, V^*V$. Da V^*V ein Projektor ist, ist $\mathrm{Kern}\, V^*V = \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - V^*V)$. Also ist $V(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - V^*V) = 0$. Hieraus folgt nun

$$(VV^*)^2 = V(V^*V)V^* = V\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\, V^* = VV^*.$$

Nach Satz 2.2.3 (f) ist VV^* ein orthogonaler Projektor.

Vertauscht man in der Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) die Rollen von V^* und $V = V^{**}$, so erhält man (c) $\Rightarrow$ (b).

(c) $\Leftrightarrow$ (d): Man wende die Aussage (a) $\Leftrightarrow$ (b) auf V^* an.

2.2.3 Linksträger und Bildprojektion

2.2.13 Festst.
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{X})$. Dann gilt

(i) $\mathrm{Kern}\, T = (\mathrm{Bild}\, T^*)^\perp$

(ii) $\overline{\mathrm{Bild}}T^* = (\mathrm{Kern}\, T)^\perp$

(iii) $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Bild}}T^* \oplus \mathrm{Kern}\, T$ *ist eine orthogonale direkte Summe.*

Beweis. (i) Nach Definition des Adjungierten Operators folgt

$$\begin{aligned} (\mathrm{Bild}\, T^*)^\perp &= \{x \in \mathcal{H} \mid \langle x, T^*y\rangle = 0 \quad \text{für } y \in \mathcal{X}\} \\ &= \{x \in \mathcal{H} \mid \langle Tx, y\rangle = 0 \quad \text{für } y \in \mathcal{X}\} \\ &= \mathrm{Kern}\, T. \end{aligned}$$

(ii) Hieraus und Satz 1.2.19 (iii) folgt für den Abschluß von Bild T^*:

$$\overline{\operatorname{Bild}} T^* = (\operatorname{Bild} T^*)^{\perp\perp} = (\operatorname{Kern} T)^{\perp}.$$

(iii) Nach dem Zerlegungssatz 1.2.19 (i) erhält man die Orthogonalzerlegung

$$\mathcal{H} = \operatorname{Kern} T \oplus (\operatorname{Kern} T)^{\perp} = \operatorname{Kern} T \oplus \overline{\operatorname{Bild}} T^*.$$

2.2.14 Bem. (dichtes Bild)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Dann sind äquivalent:

(a) *T ist injektiv und* Bild T *ist dicht in $\mathcal{K}$.*
(b) *T^* ist injektiv und* Bild T^* *ist dicht in $\mathcal{H}$.*

2.2.15 Bez. (Rechtträger und Bildprojektion)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K}$. Zu der orthogonalen Zerlegung $\mathcal{H} = \operatorname{Kern} T \oplus (\operatorname{Kern} T)^{\perp}$ bzw. $\mathcal{K} = \overline{\operatorname{Bild}} T \oplus \operatorname{Kern} T^*$ gehören die Projektoren auf die Komponenten.

(i) Der orthogonale Projektor:

$$P_T = P_{\overline{\operatorname{Bild}} T} : \mathcal{K} \to \overline{\operatorname{Bild}} T = (\operatorname{Kern} T^*)^{\perp} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Kern} P_T = (\operatorname{Bild} T)^{\perp}$$

heißt der *Linksträger* oder die *Bildprojektion* von T. Es gilt $P_T T = T$.

(ii) Der orthogonale Projektor

$$P_{T^*} = P_{(\operatorname{Kern} T)^{\perp}} : \mathcal{H} \to (\operatorname{Kern} T)^{\perp} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Kern} P_T = \operatorname{Kern} T$$

heißt der *Rechstträger* von T. Es gilt $T P_{T^*} = T$.

Da $(\operatorname{Kern} T)^{\perp} = \overline{\operatorname{Bild}} T^*$ ist, ist der Rechtsträger von T die Bildprojektion von T^*. Die Bezeichnung P_{T^*} für den Rechtsträger von T ist also sinnvoll.

(iii) Für einen normalen Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ist $\operatorname{Kern} T = \operatorname{Kern} T^*$(siehe Bem. 2.1.8). Also sind Rechts- und Linksträger gleich . P_T heißt in diesem Fall der *Träger* von T.

2.2.16 Bem. (Vertauschung mit der Bildprojekt.)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $R, T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

(i) *Wenn R mit T und T^* vertauscht, dann vertauscht R mit den Bildprojektionen P_T und P_{T^*}.*
Weiterhin gilt $P_T P_R = P_R P_T$.

(ii) *Wenn T normal ist und $RT = TR$ ist, dann gilt $P_T R = R P_T$.*

Beweis. (i) 1. Aus $RT = TR$ folgt $R \overline{\operatorname{Bild}} T \subset \overline{\operatorname{Bild}} T$ und somit $P_T R P_T = R P_T$. Aus $RT^* = T^* R$ folgt $R \operatorname{Kern} T^* \subset \operatorname{Kern} T^* = (\operatorname{Bild} T)^{\perp}$. Also gelten die Gleichungen

$$P_T R P_T = R P_T,$$
$$(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T) R (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T) = R(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T).$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$P_T R P_T = P_T R.$$

Also ist $R P_T = P_T R$.

(ii) Adjungiert man die Gleichung $R P_T = P_T R$, so folgt $P_T R^* = R^* P_T$. Wir in 1. gezeigt, folgt aus diesen beiden Gleichungen $P_T P_R = P_R P_T$.

(iii) Aus $RT = TR$ folgt $R \overline{\operatorname{Bild}} T \subset \overline{\operatorname{Bild}} T$ und $R \operatorname{Kern} T \subset \operatorname{Kern} T$. Da T normal ist, gilt $\operatorname{Kern} T = \operatorname{Kern} T^* = (\operatorname{Bild} T)^{\perp}$. (siehe Bem. 2.1.8). Also gelten die Gleichungen

$$P_T R P_T = R P_T,$$
$$(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T) R (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T) = R(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T.$$

Wie in (i) folgt hieraus $R P_T = P_T R$.

Anmerkung. Es sei V ein Vektorraum und $T \in \hom(V)$. Ein Unterraum $V_0 \subset V$ heißt ein *invarianter* Unterraum von T, wenn $TV \subset V$ ist.
Noch hilfreicher ist eine Zerlegung $V = V_0 \oplus V_1$ in Unterräume, die unter T invariant sind.
Im Fall eines Hilbertraumes fragt man nach orthogonalen Zerlegungen in invariante Unterräume:

2.2.17 Bez. (reduzierender Unterraum)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$ ein Unterraum und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Man sagt $\mathcal{X}$ *reduziert* den Operator T, wenn

$$T\mathcal{X} \subset \mathcal{X} \quad \text{und} \quad T\mathcal{X}^{\perp} \subset \mathcal{X}^{\perp}$$

ist. Mit anderen Worten: $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}^{\perp}$ sind invariant unter T.

Man beachte, wenn $\mathcal{X}$ den Operator T reduziert, dann reduziert $\mathcal{X}$ auch den adjungierten Operator T^*:

$$T^*\mathcal{X} \subset \mathcal{X} \quad \text{und} \quad T^*\mathcal{X}^{\perp} \subset \mathcal{X}^{\perp}$$

und der adjungierte Operator der Einschränkung $T|\mathcal{X}$ ist die Einschränung $T^*|\mathcal{X}$ des adjungierten Operators T^*.

2.2.18 Bem. (reduzierender orth. Projektor)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und $Q \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ein orthogonaler Projektor. Dann sind äquivalent

(a) $QT = TQ$.
(b) $(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - Q)T = T(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - Q)$.
(c) $T \operatorname{Bild} Q \subset \operatorname{Bild} Q$ *und* $T \operatorname{Kern} Q \subset \operatorname{Kern} Q$. *D.h., der Unterraum* Bild Q *reduziert den Operator T.*
(d) $T \operatorname{Bild} Q \subset \operatorname{Bild} Q$ *und* $T^* \operatorname{Bild} Q \subset \operatorname{Bild} Q$.

In diesem Fall sagt man auch, der orthogonale Projektor Q reduziert den Operator T.

Beweis. (a) $\Leftrightarrow$ (b) ist offensichtlich.
(a) $\Leftrightarrow$ (c) Aus $SQ = QS$ folgt

$$S \operatorname{Bild} Q \subset \operatorname{Bild} Q \quad \text{und} \quad S \operatorname{Kern} Q \subset \operatorname{Kern} Q$$

Andererseits folgen hieraus die Gleichungen

$$SQ = QSQ \quad \text{und} \quad QS(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - Q) = 0$$

und somit $SQ = QSQ = SQ$.

(a) $\Leftrightarrow$ (d): Aus $SQ = QS$ folgt $S^*Q = QS^*$. Aus diesen Gleichungen folgt

$$S \operatorname{Bild} Q \subset \operatorname{Bild} Q \quad \text{und} \quad S^* \operatorname{Bild} Q \subset \operatorname{Bild} Q.$$

Andererseits folgen hieraus die Gleichungen

$$SQ = QSQ \quad \text{und} \quad S^*Q = QS^*Q$$

und somit $SQ = QSQ = (QS^*Q)^* = QS$.

Anmerkung. (Operatormatrizen) Man kann die Begriffe *invarianter* Unterraum und *reduzierender Unterraum* sehr prägnant mit 2×2-Operatormatrizen beschreiben.

Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist die direkte Summe aus dem abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{X}$ und dem senkrechten Raum $\mathcal{X}^\perp$. Man schreibe die Elemente von $\mathcal{H} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}^\perp$ als 2-tupel

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit } x_1 \in \mathcal{X} \text{ und } x_2 \in \mathcal{X}^\perp.$$

Zu dem Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}^\perp$ bilde man die vier Komponenten

$$\begin{aligned} T_{11} &:= P_{\mathcal{X}} T P_{\mathcal{X}} & T_{12} &:= P_{\mathcal{X}} T P_{\mathcal{X}^\perp} \\ T_{21} &:= P_{\mathcal{X}^\perp} T P_{\mathcal{X}} & T_{12} &:= P_{\mathcal{X}^\perp} T P_{\mathcal{X}^\perp} \end{aligned}$$

und schreibe diese in Form einer Operatormatrix $T = \left[\begin{smallmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{smallmatrix}\right]$.

Beachtet man, daß Operatoren nicht kommutieren, so gelten für Summe und Produkt von Operatormatrizen die üblichen Rechenregeln. Insbesondere gilt also

$$Tx = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}x_1 + T_{12}x_2 \\ T_{21}x_1 + T_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

Zu dem adjungierten Operator gehört die adjungierte Matrix: $T^* = \left[\begin{smallmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* \end{smallmatrix}\right]$.

Dies kann man folgendermaßen einsehen:

Rechnung ...

$\mathcal{X}$ ist genau dann invariant unter T, wenn $T_{21} = 0$ ist. D. h., $T = \left[\begin{smallmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{smallmatrix}\right]$ ist eine obere Dreiecksmatrix.

$\mathcal{X}$ reduziert den Operator T genau dann, wenn $T_{12} = 0$ und $T_{12} = 0$ sind. D.h., $T = \left[\begin{smallmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{smallmatrix}\right]$ ist eine Diagonalmatrix.

2.2.19 Satz (Monotonie der Bildprojektion)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $S, T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und $Q \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ein orthogonaler Projektor. Dann gilt

(i) *Aus $0 \le S \le T$ folgt $P_S \le P_T$.*

(ii) *Aus $-T \le S \le T$ folgt $P_S \le P_T$.*

Anmerkung. 1. Aus Satz 2.2.19 (ii) folgt natürlich (i) wir werden für (i) aber einen unabhängigen Beweis geben.

2. In Folgerung 2.5.18 wird mit anderen Mitteln eine schärfere Aussage hergeleitet.

Satz 2.2.19 (i) kann man auch leicht beweisen, wenn man die positive Wurzel $S^{1/2}$ verwendet (siehe Satz 2.5.2):

Aus $0 \le S \le T$ folgt $\|(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T)S(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T)\| = 0$. Mit der C^*-Gleichung folgt hieraus

$$\|(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T)S^{1/2}\|^2 = \|(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T)S(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T)\| = 0$$

und somit

$$S = (S^{1/2})^2 = P_T(S^{1/2})^2 = P_T S.$$

Beweis. (i) Aus der Reidschen Ungleichung 2.4.4 folgt

$$\|Sx\|^2 = \langle S^2x, x\rangle \le \|S\| \langle Sx, x\rangle \le \|S\| \langle Tx, x\rangle$$

für $x \in \mathcal{H}$. Also ist $\operatorname{Kern} T \subset \operatorname{Kern} S$ und folglich

$$\overline{\operatorname{Bild}} \, S = (\operatorname{Kern} S)^\perp \subset (\operatorname{Kern} T) = \overline{\operatorname{Bild}} \, T.$$

(siehe Feststt. 2.2.13). Nach Definition der Bildprojektion folgt mit Satz 2.2.4 $P_S \subset P_T$.

(ii) Es gelte

$$-T \le S \le T. \tag{$*$}$$

Multipliziert man die Ungleichung $(*)$ symmetrisch mit $\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T$ so folgt

$$0 \le (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T)S(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T) \le 0.$$

und somit

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T)S(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T) = 0 \tag{$**$}$$

Multipliziert man die Ungleichung $(*)$ symmetrisch mit $tP_T + t^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T)$, so folgt für $t > 0$ mit $(*)$:

$$-t^2T \le t^2S + P_TS(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T) + (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T)SP_T \le t^2T$$

Für $t \to 0$ erhält man

$$P_TS(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T) + (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_T)SP_T = 0 \tag{$***$}$$

Addiert man die Gleichung $(**)$ und $(***)$, so folgt

$$S = P_TSP_T \quad \text{und folglich} \quad S = P_TS = SP_T.$$

Also ist $P_S \le P_T$.

2.3 Nach unten beschränkte Operatoren

Wir untersuchen Operatoren T mit abgeschlossenem Bild. Eine engverwandte Frage ist, wie man einem beschränktem linearen Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ansehen kann, ob er eine beschränkte Inverse hat.

1. Ein *einfache* Antwort auf die Frage nach der Inversen ist, daß T injektiv und surjektiv sein muß. Aus der linearen Algebra weiß man, daß dann die Inverse T^{-1} existiert und linear ist. Wir werden später zeigen, daß die Inverse sogar beschränkt ist (siehe *Prinzip der offenen Abbildung*).

Für einen konkreten Operator T ist es i. allg. schwierig, die Surjektivität dadurch nachzuweisen, daß man die Gleichung $Tx = y$ für $y \in \mathcal{K}$ *explizit* löst, d.h. ein Lösungsverfahren angibt.

Die Untersuchung der homogenen Gleichung $Tx = 0$ ist meistens einfacher. Wenn diese nur die triviale Lösung hat, ist T injektiv. Wenn $\mathcal{H}$ endlichdimensional ist, reicht es aus, daß T und T^* injektiv sind, um zu schließen, daß T bijektiv ist. Im Fall $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{K} < \infty$ reicht es sogar zu zeigen, daß T injektiv ist (siehe Lineare Algebra).

Wenn $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ unendlichdimensional sind versagen die Schlußweisen aus der linearen Algebra, wie das Beispiel 2.3.2 zeigt. Wenn der adjungierte Operator T^* injektiv ist, dann liegt $\operatorname{Bild} T$ im Zielraum $\mathcal{K}$ i. allg. nur dicht. Wir werden die Forderung „T ist injektiv" soweit verschärfen, daß wir schließen können, T ist injektiv und $\operatorname{Bild} T$ ist abgeschlossen. Wenn $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen und dicht in $\mathcal{K}$ ist, so ist $\operatorname{Bild} T = \mathcal{K}$. Mit diesem Kriterium kann man häufig zeigen, daß ein Operator T bijektiv ist, ohne ein explizites Lösungsverfahren für die Gleichung $Tx = y$ zu kennen.

Dies Kriterium beinhaltet, daß man die Norm $\|Tx\|$ auf der Einheitssphäre $\|x\| = 1$ durch eine Konstante $c > 0$ nach unten abschätzen kann. Man sagt hierfür, T *ist nach unten beschränkt.*

Anmerkung: Diese Forderung ist auch notwendig. Wir werden später das *Prinzip der offenen Abbildung* kennen lernen, und daraus folgern, daß injektive Operatoren $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ mit abgeschlossenen Bild nach unten beschränkt sind. Wir erinnern, Beschränktheit nach oben besagt, daß T stetig ist. Die Beschränktheit nach unten besagt, daß $T : \mathcal{H} \to \operatorname{Bild} T$ offen ist.

2. Nach unten beschränkte Operatoren T haben abgeschlossenes Bild und und eine beschränkte Linksinverse. Unter allen Linksinversen zu T gibt es genau eine, die man mit $T^{(-)}$ bezeichnet, derart daß $\|TT^{(-)}\|$ minimal ist. Diese Linksinverse $T^{(-)}$ ist beschränkt und $TT^{(-)}$ ist der orthogonale Projektor auf $\operatorname{Bild} T$. Deshalb heißt $T^{(-)}$ auch die orthogonale Linksinverse von T.

3. Wenn T nicht injektiv ist, untersucht man, ob die Einschränkung $T|(\operatorname{Kern} T)^\perp$ nach unten beschränkt ist. Die optimale untere Schranke von $T|(\operatorname{Kern} T)^\perp$ heißt der *Minimalmodul* $\gamma(T)$ von T. Wenn $\gamma(T) > 0$ ist, so gibt es die orthogonale Linksinverse zu $T|(\operatorname{Kern} T)^\perp$, die man die *Pseudoinverse* von T nennt.

Wir werden jedoch den Minimalmodul und die Pseudoinverse unabhängig von den vorangehenden Entwicklungen herleiten und untersuchen. Das ist einmal schneller getan, als alle Zitate aufzubereiten. Der entscheidende Grund ist aber die Symmetrie in den Eigenschaften von T und T^*, die erst in dieser allgemeinen Situation gegeben ist. Es ist $\gamma(T) = \gamma(T^*)$ und die Adjungierte der Pseudoinversen von T ist die Pseudoinverse von T^*.

4. Allgemeiner betrachten wir am Ende dieses Abschnittes die Frage, wann sich ein Operator S über einen anderen Operator T faktorisieren läßt. D. h., wann gibt es einen beschränkten Operator A, so daß $S = AT$ ist und wie kann man unter den möglichen Lösungen eine optimale eindeutig charakterisieren? Auch hier ist eine Abschätzung zwischen $\|Sx\|$ und $\|Tx\|$ der Schlüssel.

Der Fall $S = \mathrm{id}$ ergibt die Frage nach der Linksinversen zu T und der Fall $S = P_{(\operatorname{Kern} T)^\perp}$ führt auf die Frage nach der Pseudoinversen von T. Ein anderer Spezialfall ist die Polarzerlegung 2.5.3 eines Operators. Solche Faktorisierungen helfen bei der Charakterisierung von Ordnungsidealen (siehe Satz 2.5.17) und Operatoridealen.

2.3.1 Inverse und Linksinverse

2.3.1 Bez. (nach unten beschränkt)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ heißt nach unten beschränkt, wenn es gibt ein $0 < c < \infty$ gibt, so daß

$$c\|x\| \leq \|Tx\| \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

Man nennt c eine *untere Schranke* von T.

2.3.2 Bsp. (nicht nach unten beschränkter Op)
Auf dem $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ definiere man einen beschränkten Operator T durch

$$T : (\xi_n)_n \mapsto (2^{-n/2}\xi_n)_n \quad \text{für } (\xi_n)_n \in \ell_2(\mathbb{N}_0).$$

Es ist $\|T\| = 1$. Da T ist injektiv und selbstadjungiert ist, folgt:

$$\overline{\operatorname{Bild}} T = (\operatorname{Kern} T^*)^\perp = \{0\}^\perp = \ell_2(\mathbb{N}_0).$$

(siehe Bem. 2.2.14). T ist aber nicht surjektiv, da z. Bsp.

$$y := (2^{-n/2})_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell_2(\mathbb{N}_0) \quad \text{aber} \quad y \notin \operatorname{Bild} T$$

ist. Als mögliche Lösung der Gleichung $Tx = y$ käme nur die Folge $(1, 1, \dots) \notin \ell_2(\mathbb{N}_0)$ in Frage.

2.3.3 Lemma (nach unten beschränkt)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Wenn T nach unten beschränkt ist, dann ist $\operatorname{Kern} T = \{0\}$ und $\operatorname{Bild} T$ ist abgeschlossen.

Anmerkung. Die allgemeinere Aussage lautet: Wenn der Minimalmodul $\gamma(T) > 0$ ist, dann ist $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen (siehe Lemma 2.3.11)

Beweis. Da T nach unten beschränkt ist, gibt es ein $c > 0$, derart daß

$$c\,\|x\| \leq \|Tx\| \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

T ist offensichtlich injektiv.

Wir zeigen, daß $\operatorname{Bild} T$ *abgeschlossen ist:* Es sei $(y_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\operatorname{Bild} T$ und $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Es gibt eine Folge $(x_n)_n$ in $\mathcal{H}$ mit $Tx_n = y_n$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|x_n - x_m\| \le c^{-1}\|T(x_n - x_m)\| = c^{-1}\|y_n - y_m\|.$$

Also ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}$. In dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ existiert der Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und es folgt

$$Tx = T \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

2.3.4 Festst. (Existenz des Inversen Op.)

Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

(i) *Dann sind äquivalent:*

(a) *T hat eine beschränkte Inverse.*
(b) *$\operatorname{Bild} T$ ist dicht in $\mathcal{K}$ und T ist nach unten beschränkt.*
(c) *T^* ist injektiv und T ist nach unten beschränkt.*

(ii) *Im Fall (i) gilt:*

$$\|T^{-1}\|^{-1} = \max\{c \mid \ c \text{ untere Schranke von } T\}.$$

(iii) *Im Fall (i) gilt: Die Adjungierte T^* ist nach unten beschränkt mit derselben unteren Schranke wie T.*

Anmerkung. 1. Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ein bijektiver Operator. Aus dem *Prinzip der offenen Abbildung* bzw. dem *Satz vom abgeschlossenen Graphen* folgt, daß die Inverse T^{-1} beschränkt ist.

Zu den äquivalenten Aussagen (a) - (d) in Festst. 2.3.4 kommen noch die folgenden beiden Aussagen hinzu:

(a') *T ist bijektiv.*
(b') *T^* ist bijektiv.*

2. Man kann auch den Operator T^*T oder TT^* für weitere Charakterisierungen heranziehen (siehe Festst. 2.3.7).

3. Zur Aussage (iii) siehe Folg. 2.3.13).

Beweis. (i) (a) $\Rightarrow$ (b): Da für alle $x \in \mathcal{H}$

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \le \|T^{-1}\|\|Tx\|$$

gilt, ist $c := \|T^{-1}\|^{-1}$ eine untere Schranke für T.

(b) $\Rightarrow$ (a): Da T nach unten beschränkt ist, ist $T : \mathcal{H} \to \operatorname{Bild} T$ injektiv. Es sei $S : \operatorname{Bild} T \to \mathcal{H}$ die Inverse. S ist linear und beschränkt, da nach Voraussetzung

$$\|Sy\| \le \frac{1}{c}\|TSy\| = \frac{1}{c}\|y\| \quad \text{für } y \in \operatorname{Bild} T.$$

ist. Es ist $\|S\| \le c^{-1}$.

Nach Lemma 2.3.3 ist $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen. Da nach Vorrausetzung $\operatorname{Bild} T$ in $\mathcal{K}$ dicht liegt, ist $\operatorname{Bild} T = \overline{\operatorname{Bild} T} = \mathcal{K}$. Also ist T invertierbar und S ist die beschränkte Inverse von T.

(b) $\Leftrightarrow$ (c): Nach Feststellung 2.2.13 (iii) ist

$$\mathcal{K} = \overline{\operatorname{Bild}} T \oplus \operatorname{Kern} T^*.$$

Somit gilt:

$$\overline{\operatorname{Bild}} T = \mathcal{K} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Kern} T^* = \{0\}$$

(ii) In dem Schluß (a) $\Rightarrow$ (b) wurde gezeigt, daß $\|T^{-1}\|^{-1}$ eine untere Schranke ist.

In dem Schluß (b) $\Rightarrow$ (a) wurde gezeigt, daß jede untere Schranke $c \le \|T^{-1}\|^{-1}$ ist.

(iii) Nach Satz 2.1.3 (v) ist $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Aus dieser Gleichung und (ii) folgt nun die Behauptung über die untere Schranke von T^*

Anmerkung. (beschränkte Inverse von $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$) Wenn $\dim \mathcal{H}$ endlich ist, so folgt für lineare $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ aus der Rangformel, daß T genau dann injektiv ist, wenn es surjektiv ist.

Das Beispiel 2.2.7 des Shift-Operators $S : \ell_2(\mathbb{N}_0) \to \ell_2(\mathbb{N}_0)$ zeigt, daß dieses Prinzip in unendlichdimensionalen Hilberträumen nicht mehr gilt. Da S eine Isometrie ist, ist S nach unten beschränkt. S ist aber nicht surjektiv.

Daher benötigt man in Feststellung 2.3.4 (b) bzw. (c) außer der Beschränktheit von T nach unten i. allg. noch eine weitere Bedingung.

Eine Ausnahme hiervon bilden die normalen Operatoren (siehe Folg. 2.3.5)

2.3.5 Folg. (nach unten beschr. normale Op.)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal. Dann sind äquivalent:

(a) *T hat eine beschränkte Inverse.*
(b) *T ist nach unten beschränkt.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) erhält man aus der obigen Feststellung 2.3.4 (a) und (c).

(b) $\Rightarrow$ (a): Da T nach unten beschränkt ist, ist T injektiv. Nach Bemerkung 2.1.8 ist $\operatorname{Kern} T = \operatorname{Kern} T^*$. Nach Feststellung 2.3.4 (c) existiert also $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

2.3.6 Bez. (Linksinverse)

Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ heißt linksinvertierbar – genauer: beschränkt linksinvertierbar, – wenn es einen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ so gibt, daß

$$AT = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

gilt. Der Operator A heißt dann eine *beschränkte Linksinverse von T.*

2.3.7 Festst. (Linksinverse)

Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

(i) *Dann sind äquivalent:*

(a) *T ist nach unten beschränkt.*
(b) *Es gibt ein $c > 0$, so daß $c\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \le T^*T$ ist.*
(c) *T^*T ist nach unten beschränkt.*
(d) *T^*T hat eine beschränkte Inverse.*
(e) *T hat eine beschränkte Linksinverse.*

(ii) *Im Fall (i) ist $T^{(-)} := (T^*T)^{-1}T^*$ eine beschränkte Linksinverse von T. Es ist*

$$\|T^{(-)}\|^{-1} = \max\{c \mid c\,\|x\| \le \|Tx\| \text{ für } x \in \mathcal{H}.\}$$

Man nennt $T^{(-)}$ die orthogonale Linksinverse *von T.*

Anmerkung. 1. T hat genau dann eine beschränkte Linksinverse, wenn der Minimalmodul $\gamma(T) > 0$ und $\operatorname{Bild} T^*$ dicht in $\mathcal{H}$ ist (siehe Lemma 2.3.11).

2. Die Linksinverse $T^{(-)}$ aus Feststellung 2.3.7(d) werden wir noch anders charakterisieren (siehe Bem. 2.3.9).

Beweis. (i) (a) $\Rightarrow$ (b) und (b) $\Rightarrow$ (c) Es gelte

$$c\|x\| \le \|Tx\| \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

Dann folgt

$$c^2\|x\|^2 \le \|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x\rangle \le \|T^*Tx\|\,\|x\|$$

und somit $c^2 \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \le T^*T$ und

$$c^2\|x\| \le \|T^*Tx\| \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

(c) $\Rightarrow$ (d): Da T^*T selbstadjungiert und nach unten beschränkt ist, hat T^*T eine beschränkte Inverse (siehe Folg. 2.3.5).

(d) $\Rightarrow$ (e): Der beschränkte Operator

$$T^{(-)} := (T^*T)^{-1}T^*.$$

ist eine Linksinverse zu T, denn es gilt

$$T^{(-)}T = (T^*T)^{-1}T^*T = \operatorname{id}_{\mathcal{H}}.$$

(e) $\Rightarrow$ (a): Es sei $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ eine beschränkte Linksinverse von T. Da

$$\|x\| = \|ATx\| \le \|A\|\,\|Tx\| \quad \text{für } x \in \mathcal{H}$$

gilt, ist $\|A\|^{-1}$ eine untere Schranke von T.

(ii) $T^{(-)} := (T^*T)^{-1}T^*$ ist eine beschränkte Linksinverse von T (vgl. auch (i)(d)).

Es sei c eine untere Schranke von T. Für $y \in \operatorname{Bild} T$, $x \in \mathcal{H}$ mit $y = Tx$ und $z \in (\operatorname{Bild} T)^\perp$ gilt

$$\begin{aligned}\|T^{(-)}(y+z)\|^2 &= \|T^{(-)}y\|^2 = \|x\|^2 \\ &\le c^{-2}\|Tx\|^2 = c^{-2}\|y\|^2 \\ &\le c^{-2}(\|y\|^2 + \|z\|^2) = c^{-2}\|y+z\|^2.\end{aligned}$$

Also ist $c \le \|T^{(-)}\|^{-1}$.

Im Beweis (i) (e) $\Rightarrow$ (a) wurde gezeigt, daß $\|T^{(-)}\|^{-1}$ eine untere Schranke von T ist. Also ist $\|T^{(-)}\|^{-1}$ die größte untere Schranke von T.

2.3.8 Bem. (Rechenregeln: Linksinverse)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume, $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ sei linksinvertierbar und $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ sei eine Linksinverse. Dann gilt:

(i) *Der Operator $TA : \mathcal{K} \to \operatorname{Bild} T$ ist idempotent mit $\operatorname{Bild} TA = \operatorname{Bild} T$ und $\operatorname{Kern} TA = \operatorname{Kern} A$. Es ist*

$$\mathcal{K} = \operatorname{Bild} T \oplus \operatorname{Kern} A$$

eine direkte Summe von abgeschlossenen Unterräumen, die aber nicht notwendig orthogonal sind.

(ii) *Für $C \in \mathfrak{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ ist auch*

$$B := A + C(\operatorname{id}_{\mathcal{K}} - TA)$$

eine Linksinverse von T. Jede Linksinverse B ist von dieser Gestalt, denn es gilt $B = A + B(\operatorname{id}_{\mathcal{K}} - TA)$.

Anmerkung. Wenn $\dim(\operatorname{Bild} t)^\perp = \infty$ ist, so kann man den Operator C in Bemerkung 2.3.8 (ii) auch unbeschränkt wählen, und erhält so eine unbeschränkte Linksinverse.

Beweis. (i) TA ist idempotent, da

$$(TA)^2 = T(AT)A = T\operatorname{id}_{\mathcal{H}} A = TA$$

gilt. Dann ist $(\operatorname{id}_{\mathcal{K}} - TA)$ ebenfalls idempotent und $\mathcal{K}$ ist die direkte Summe der abgeschlossenen Unterräume

$$\begin{aligned}\operatorname{Bild} TA &= \operatorname{Kern}(\operatorname{id}_{\mathcal{K}} - TA), \\ \operatorname{Bild}(\operatorname{id}_{\mathcal{K}} - TA) &= \operatorname{Kern} TA.\end{aligned}$$

Aus $T = (TA)T$, folgt $\operatorname{Bild} T = \operatorname{Bild} TA$ und aus $A = A(TA)$, folgt $\operatorname{Kern} A = \operatorname{Kern} TA$. Also ist $\mathcal{K} = \operatorname{Bild} T \oplus \operatorname{Kern} A$.

(ii) Es sei $B := A + C(\operatorname{id}_{\mathcal{K}} - TA)$. Aus $T = TAT$, folgt

$$BT = AT + C(\operatorname{id}_{\mathcal{K}} - TA)T = \operatorname{id}_{\mathcal{H}} + C(T - TAT) = \operatorname{id}_{\mathcal{H}}.$$

Also ist B eine Linksinverse von T.

Für eine beliebige Linksinverse B gilt

$$B = A + (B - \operatorname{id}_{\mathcal{H}} A) = A + B(\operatorname{id}_{\mathcal{K}} - TA).$$

2.3.9 Bem. (Charakterisierung von $T^{(-)}$)
Es sei $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume. $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ sei nach unten beschränkt und $T^{(-)}$ sei die orthogonale Linksinverse von T (siehe Festst. 2.3.7 (ii)).

Es sei $A \in \hom(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ eine linksinverse Abbildung zu T. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $A = T^{(-)}$
(b) $\operatorname{Kern} A \supset (\operatorname{Bild} T)^\perp$.
(c) $TA = P_{\operatorname{Bild} T}$.
(d) $\|TA\| \le 1$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) gilt nach Definition von $T^{(-)}$ (siehe Festst. 2.3.7 (ii)).

(b) $\Rightarrow$ (c): Da T nach unten beschränkt ist, ist $\operatorname{Bild} T$ ageschlossen (siehe Lemma 2.3.3). Für $y \in \operatorname{Bild} T$, $x \in \mathcal{H}$ mit $Tx = y$ und $z \in (\operatorname{Bild} T)^\perp$ gilt

$$TA(y+z) = TAy = Tx = y = P_{\operatorname{Bild} T}(y+z).$$

Also ist $TA = P_{\operatorname{Bild} T}$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Da $TA = P_{\operatorname{Bild} T}$ ein orthogonaler Projektor ist, ist $\|TA\| \le 1$ (siehe Festst. 2.2.2 (e)).

(d) $\Rightarrow$ (a) Da A ist eine Linksinverse von T ist, ist TA idempotent und $\operatorname{Bild} TA = \operatorname{Bild} T$ (siehe Bem. 2.3.8 (i)). Aus $\|TA\| \le 1$ folgt nun, daß TA ein orthogonaler Projektor ist (siehe Festst. 2.2.2 (e)). Also ist $TA = P_{\operatorname{Bild} T}$.

Da T nach unten beschränkt ist, hat T^*T eine beschränkte Inverse (siehe Festst. 2.3.7 (i)(d)). Aus der Gleichung

$$T^*TA = T^*P_{\operatorname{Bild} T} = T^*P_{(\operatorname{Kern} T)^\perp} = T^*$$

folgt nun $A = (T^*T)^{-1}T^* = T^{(-)}$. (siehe Festst. 2.3.7 (ii)).

Anmerkung. (Charakterisierungen von $T^{(-)}$) Es sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ nach unten beschränkt und $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen.

1. Wie für jeden orthogonalen Projektor gilt für $P_{\operatorname{Bild} T}$ die Minimumformel (siehe Lemma 1.2.13)

$$\|P_{\operatorname{Bild} T}\, y - y\| = \min_{z \in \operatorname{Bild} T} \|z - y\|$$

und $P_{\operatorname{Bild} T}\, y$ ist durch diese Gleichung eindeutig bestimmt.

Da $TT^{(-)} = P_T$ ist, ist $\tilde{x} := T^{(-)}y$ das eindeutig bestimmte Element in $\mathcal{H}$, für das

$$\|T\tilde{x} - y\| = \min_{x \in \mathcal{H}} \|Tx - y\|$$

ist.

2. Wenn $(x_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{H}$ ist, für die das Funktional

$$\mathcal{H} \ni x \mapsto \|Tx - y\|$$

gegen sein Minimum konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - y\| = \min_{x \in \mathcal{H}} \|Tx - y\|,$$

dann ist die Folge $(Tx_n)_n$ eine Cauchy-Folge (siehe Festst. 1.2.12). Da T nach unten beschränkt ist, ist auch $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Es ist also

$$T^{(-)}y = \tilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

3. Es sei A eine Linksinverse von T. Da alle Linksinversen auf $\operatorname{Bild} T$ übereinstimmen, ist

$$T^{(-)} := AP_T$$

2.3.2 Minimalmodul

Anmerkung. Wenn $T \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$ nicht injektiv ist, so zerlege man den Raum $\mathcal{H} = \operatorname{Kern} T \oplus (\operatorname{Kern} T)^\perp$ und wendet die obige Feststellung auf die injektive Abbildung $T_0 := T|(\operatorname{Kern} T)^\perp$ an. Es ist $\operatorname{Bild} T = \operatorname{Bild} T_0$.

Die Suche nach der größten unteren Schranke von T_0 führt zur Definition des Minimalmoduls $\gamma(T)$. Wir lassen auch den Fall zu, daß T_0 nicht nach unten beschränkt ist und setzen dann $\gamma(T) = 0$.

2.3.10 Def. (Minimalmodul)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Die Zahl

$$\begin{aligned}\gamma(T) &:= \max\{c \mid c\|x\| \le \|Tx\| \text{ für alle } x \in (\operatorname{Kern} T)^\perp\}\\ &= \inf\{\|Tx\| \mid x \in (\operatorname{Kern} T)^\perp, \|x\| = 1\}.\end{aligned}$$

heißt der Minimalmodul *von T. Dies ist eine sehr wörtliche Übertragung der englischen Bezeichnung für $\gamma(T)$:* minimal modulus = minimaler Betrag

Anmerkung. 1. Minimalmodul ist eine sehr wörtliche Übertragung der englischen Bezeichnung für $\gamma(T)$: *minimal modulus = minimaler Betrag*

2. Es sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$. Aus der Vollständigkeit von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ gilt:

$$\gamma(T) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Bild} T \quad \text{abgeschlossen.}$$

Wir zeigen hier die einfachere Richtung:

2.3.11 Lemma (positiver Minimalmodul)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Wenn $\gamma(T) > 0$ ist, dann ist $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen.

Beweis. Es sei $(y_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\operatorname{Bild} T$ und $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Es gibt eine Folge $(x_n)_n$ in $(\operatorname{Kern} T)^\perp$ mit $Tx_n = y_n$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|x_n - x_m\| \le \gamma(T)^{-1}\|T(x_n - x_m)\| = \gamma(T)^{-1}\|y_n - y_m\|.$$

Also ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in $(\operatorname{Kern} T)^\perp$. In dem abgeschlossenen Unterraum $(\operatorname{Kern} T)^\perp$ existiert der Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und es folgt

$$Tx = T \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

2.3.12 Festst. (Pseudoinverse)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ und $T \neq 0$.

(i) *Dann sind äquivalent:*

(a) $\gamma(T) > 0$.

(b) *Es gibt genau ein $A \in \operatorname{hom}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, so daß*

$$AT = P_{(\operatorname{Kern} T)^\perp} \quad \text{und} \quad A|(\operatorname{Bild} T)^\perp = 0$$

ist. Man nennt A die Pseudoinverse *von T.*

(c) *Es gibt einen beschränkten Operator $B \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, so daß $BT = P_{(\operatorname{Kern} T)^\perp}$ ist.*

Dann ist $0 < \|B\|^{-1} \le \gamma(T)$.

(ii) *Im Fall* (i) *gilt weiterhin: Die Pseudoinverse A ist beschränkt mit*

$$\|A\| = \gamma(T)^{-1} \quad \text{und} \quad TA = P_{\operatorname{Bild} T}.$$

Anmerkung. Wenn $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ injektiv und $\gamma(T) > 0$ ist, dann ist T nach unten beschränkt und die die orthogonale Linksinverse $T^{(-)}$ ist gleich der Pseudonversen von T (siehe Bem. 2.3.9).

Beweis. (i) (a) $\Rightarrow$ (b): Wenn es einen derartiges $A \in \operatorname{hom}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ gibt, dann gilt

$$Ay = x \quad \text{für } y \in \operatorname{Bild} T,\ x \in (\operatorname{Kern} T)^\perp \text{ mit } Tx = y$$

und $A : (\operatorname{Bild} T)^\perp \to 0$.

Nach Lemma 2.3.11 ist $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen und folglich $\mathcal{K} = \operatorname{Bild} T \oplus (\operatorname{Bild} T)^\perp$.

Wir prüfen, ob $A : \operatorname{Bild} T \to (\operatorname{Kern} T)^\perp$ wohldefiniert ist. Für $x \in (\operatorname{Kern} T)^\perp$ gilt $\|x\| \le \gamma(T)^{-1}\|Tx\|$. Wenn also $x_1, x_2 \in (\operatorname{Kern} T)^\perp$ sind, mit $Tx_1 = Tx_2$, so ist

$$\|x_1 - x_2\| \le \gamma(T)^{-1}\|Tx_1 - Tx_2\| = 0.$$

Daher ist $A : \operatorname{Bild} T \to (\operatorname{Kern} T)^\perp$ ein wohldefinierter Operator.

Wir schätzen die Norm von $A : \mathcal{K} \to (\operatorname{Kern} T)^\perp$ ab: Für $y \in \operatorname{Bild} T$, $x \in (\operatorname{Kern} T)^\perp$ mit $Tx = y$ und $z \in (\operatorname{Bild} T)^\perp$ gilt

$$\begin{aligned}\|A(y+z)\|^2 &= \|Ay\|^2 = \|x\|^2 \le \gamma(T)^{-2}\|Tx\|^2\\ &= \gamma(T)^{-2}\|y\|^2 \le \gamma(T)^{-12}(\|y\|^2 + \|z\|^2)\\ &= \gamma(T)^{-2}\|y+z\|^2.\end{aligned}$$

Also ist $\|A\| \le \gamma(T)^{-1}$.

Für dieser Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$gilt also

$$P_{(\operatorname{Kern} T)^\perp} = AT \quad \text{und} \quad A|(\operatorname{Bild} T)^\perp = 0$$

und A ist hierdurch eindeutig bestimmt.

Für $y \in \operatorname{Bild} T$, $x \in (\operatorname{Kern} T)^\perp$ mit $Tx = y$ und $z \in (\operatorname{Bild} T)^\perp$ gilt

$$TA(y+z) = Tx = y = P_{\operatorname{Bild} T}(y+z).$$

(b) $\Rightarrow$ (c) ist offensichtlich.
(c) $\Rightarrow$ (a) Für $x \in (\operatorname{Kern} T)^\perp$ gilt

$$\|x\| = \|BTx\| \le \|B\|\|Tx\|.$$

Also ist $0 < \|B\|^{-1} \le \gamma(T)$.

(ii) Im Beweis von (i)(b) haben wir $\|A\| \le \gamma(T)^{-1}$ gezeigt. Nach (i)(c) ist $\gamma(T)^{-1} \le \|A\|$. Also ist $\gamma(T)^{-1} = \|A\|$.
Für $y \in \operatorname{Bild} T$, $x \in (\operatorname{Kern} T)^\perp$ mit $Tx = y$ und $z \in (\operatorname{Bild} T)^\perp$ gilt

$$TA(y+z) = TAy = Tx = y = P_{\operatorname{Bild} T}(y+z).$$

Also ist $TA = P_{\operatorname{Bild} T}$.

2.3.13 Folg. (minmaler Modul von T^*)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Dann gilt

(i) *Es sei $\gamma(T) > 0$ ist und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ die Pseudoinverse von T. Dann ist $\gamma(T^*) = \gamma(T)$ und A^* ist die Pseudoinverse von T^*.*

(ii) *Es gilt immer $\gamma(T) = \gamma(T^*)$.*

Beweis. (i) Nach Feststellung 2.3.12 (ii) gilt für die Pseudoinverse A die Gleichung

$$TA = P_{\operatorname{Bild} T} = P_{(\operatorname{Kern} T^*)^\perp}.$$

und somit $A^*T^* = P_{(\operatorname{Kern} T^*)^\perp}$. Da

$$\operatorname{Kern} A^* = (\operatorname{Bild} A)^\perp \supset (\operatorname{Kern} T)^{\perp\perp} = \operatorname{Kern} T$$

gilt, ist A^* die Pseudoinverse von T^*.
Weiterhin folgt $\gamma(T^*) = \|A^*\|^{-1} = \|A\|^{-1} = \gamma(T)$.

(ii) Nach Teil (i) gilt: Wenn $\gamma(T) > 0$ oder $\gamma(T^*) > 0$ ist, so ist $\gamma(T^*) = \gamma(T)$. Also gilt immer $\gamma(T^*) = \gamma(T)$.

2.3.3 Faktorisierung eines Operators

2.3.14 Festst.
Es seien $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Es gelte $S^*S \le T^*T$, d.h.

$$\|Sx\| \le \|Tx\| \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

(i) *Dann gibt es genau einen linearen Operator $A \in \operatorname{hom}(\mathcal{K},\mathcal{G})$, so daß*

$$S = AT \quad \text{und} \quad A|(\operatorname{Bild} T)^\perp = 0$$

ist. Der so bestimmte Operator A ist beschränkt mit $\|A\| \le 1$.

(ii) *Im Fall $\mathcal{H} = \mathcal{G} = \mathcal{K}$ gilt weiterhin: Wenn $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit S, T vertauscht und $R(\operatorname{Bild} T)^\perp \subset (\operatorname{Bild} T)^\perp$ ist. dann vertauscht R mit A.*

(iii) *Im Fall $\mathcal{H} = \mathcal{G} = \mathcal{K}$ gilt: Wenn $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit S, T und T^* vertauscht, dann vertauscht R mit A.*

Beweis. (i) Wenn es ein derartiges A gibt, dann gilt $Ay = Sx$ für alle $x \in \mathcal{H}$ mit $Tx = y$. Wir definieren daher $A : \operatorname{Bild} T \to \operatorname{Bild} S$ durch

$$A : y \mapsto Sx \quad \text{für } x \in \mathcal{H},\ y \in \operatorname{Bild} T \text{ mit } y = Tx,$$

und $A : (\operatorname{Bild} T)^\perp \to 0$. Da $\mathcal{K} = \overline{\operatorname{Bild}} T \oplus (\operatorname{Bild} T)^\perp$ ist, müssen wir nur prüfen, ob A auf $\operatorname{Bild} T$ wohldefiniert ist. Für $x \in \mathcal{H}$ gilt

$$\|Sx\|^2 = \langle S^*Sx, x\rangle \le \langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2.$$

Wenn also $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ sind, mit $Tx_1 = Tx_2$, so ist $\|Sx_1 - Sx_2\| \le \|Tx_1 - Tx_2\| = 0$. Daher ist $A|\operatorname{Bild} T$ ein wohldefinierter Operator.
Wir schätzen die Norm von A ab. Es gilt

$$\begin{aligned}\|A(y+z)\|^2 &= \|Ay\|^2 = \|Sx\|^2 \le \|Tx\|^2 = \|y\|^2 \\ &\le \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y+z\|^2\end{aligned}$$

für $y = Tx \in \operatorname{Bild} T$ und $z \in (\operatorname{Bild} T)^\perp$. Also ist $\|A\| \le 1$.
Da $\operatorname{Bild} T \oplus (\operatorname{Bild} T)^\perp$ in $\mathcal{K}$ dicht ist und $\mathcal{H}$ vollständig ist, hat der beschränkte lineare Operator A genau eine stetige Fortsetzung zu einem Operator aus $\mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$. Wir bezeichnen diese eindeutige Fortsetzung wieder mit A.
Dieser Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ erfüllt also die Bedingungen

$$S = AT \quad \text{und} \quad A|(\operatorname{Bild} T)^\perp = 0$$

und ist hierdurch eindeutig bestimmt.

(ii) Es seien $\mathcal{H} = \mathcal{K}$. Für $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gelte

$$RS = SR, \quad \text{und} \quad RT = TR, \quad RT^* = T^*R.$$

Ohne Einschränkung sei $\|R\| \le 1$. Dann ist $R^*R \le \mathrm{id}_\mathcal{H}$ und folglich

$$(RS)^*(RS) = S^*(R^*R)S \le S^*S \le T^*T.$$

Nach (i) gibt es also genau einen Operator $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $RS = BT$ und $B|\operatorname{Bild} T = 0$.

Wir zeigen, daß $RA = B$ und $AR = B$ ist:

1. Da

$$RS = RAT \quad \text{und} \quad RA|(\operatorname{Bild} T)^{\perp} = 0$$

gilt, ist $RA = B$.

2. Da $R(\operatorname{Bild} T)^{\perp} \subset (\operatorname{Bild} T)^{\perp}$ ist, folgt

$$RS = SR = ATR = (AR)T,$$
$$AR(\operatorname{Bild} T)^{\perp} \subset A(\operatorname{Bild} T)^{\perp} = 0.$$

Also ist $RA = B$.

(iii) Aus $RT^* = T^*R$ folgt $R(\operatorname{Kern} T^*) \subset \operatorname{Kern} T^*$. Da $(\operatorname{Bild} T)^{\perp} = \operatorname{Kern} T^*$ ist, folgt die Behauptung aus (ii).

2.4 Ordnung auf den Operatoren

1. Nach Satz 2.1.1 ist die Norm eines Operators $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gleich der Norm der zugehörigen Sesquilinearform $b_T(x,y) := \langle x, Ty\rangle$. Man kann aber auch die Norm der zugehörigen quadratische Form $q_T(x) := \langle x, Tx\rangle$ betrachten:

$$\|q_T\| := \{|q_T(x)| \mid x \in \mathcal{H} \text{ und } \|x\| \le 1\}.$$

Offensichtlich gilt $\|q_T\| \le \|T\|$.

Auf reellen und auf komplexen Hilberträumen gilt für selbstadjungierte T immer $\|T\| = \|q_T\|$.

Der Raum $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ der selbstadjungierten Operatoren ist also linear isometrisch zum Raum der beschränkten quadratischen Formen auf $\mathcal{H}$.

2. Der Raum $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ hat nach Definition auch dieselbe Ordnung wie die quadratischen Formen. Letztere ist die Ordnung unter reellen Funktionen.

Dem identischen Operator $\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ entspricht die quadratische Form $\|\cdot\|^2$. Die beschränkten quadratischen Formen q bilden einen Ordnungseins-Raum (siehe Abschn. C) mit $\|\cdot\|^2$ als Ordnungseins:

$$\|q\| \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\|x\|^2 \le q(x) \le \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}.$$

Der Isomorphismus $T \mapsto q_T$ macht $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ zu einem Ordnungseins-Raum. Wir untersuchen diese Ordnung auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$.

3. Wir formulieren die Regeln für die Ordnung auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ ohne Bezugnahme auf die quadratischen Formen. Dies macht zunächst die Aussagen prägnanter und die Formeln werden kürzer!

Wichtiger ist aber, daß man mit Operatoren Regeln leicht formulieren kann, die sich mit quadratischen Formen nur äußerst umständlich beschreiben lassen. Dies betrifft alle Aussagen, in denen Produkte, Inverse, Potenzen und Wurzeln vorkommen.

Der wichtigste Grund, die Ordnung abstrakt als Ordnung unter Operatoren zu beschreiben, ist, daß das Produkt die Ordnung schon eindeutig festlegt. Wir werden zeigen:

Ein selbstadjungierter Operator T ist genau dann positiv, wenn er ein Quadrat ist:

$$T \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \textit{es existiert } S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}} \textit{ mit } T = S^2.$$

2.4.1 Ordnungseinsraum $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$

Anmerkung. Um die Ordnung auf den selbstadjungierten Operatoren zu beschreiben benutzen wir die Begriffe des *geordneten Vektorraumes* und des *Ordnungseins-Raumes*(siehe Abschn. C).

Anmerkung. 1. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt aus der Polarisationsformel

$$\|q_T\| \le \|T\| \le 2\|q_T\|.$$

Für beliebige $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kann man diese Abschätzung nicht verbessern, wie das folgend Beispiel zeigt:

2. Beispiel: In l_2^2 bilde man den Operator

$$T : x \mapsto \langle x, e_1\rangle e_2 \quad \text{mit} \quad T^* \ : x \mapsto \langle x, e_2\rangle e_1.$$

T ist nicht normal:

$$T^*T : x \mapsto \langle x, e_2\rangle e_2 \quad \text{und} \quad TT^* : x \mapsto \langle x, e_1\rangle e_1.$$

Es ist $\|T\| = 1$ und $\|q_T\| = \frac{1}{2}$.

3. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gibt es schiefsymetrische Operatoren $0 \ne S = -S^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Für dies ist $q_S = 0$.

Ein Beispiel hierfür ist der Operator $S = T - T^*$, wobei T der Operator aus dem obigen Beispiel (3.) ist. Betrachtet man S auf dem $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt, so ist $\|S\| = 1$ und $q_S = 0$.

4. Auf reellen und auf komplexen Hilberträumen gilt für selbstadjungierte T immer $\|T\| = \|q_T\|$.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt diese Gleichung auch für normale Operatoren T (siehe...)

2.4.1 Festst. (Norm der quadratischen Form) *Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann ist die Norm von T gleich der Norm der zugehörigen quadratische Form $q_T : x \mapsto \langle Tx, x\rangle$:*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \mid x \in \mathcal{H} \textit{ und } \|x\| \le 1\}$$

Beweis. Einerseits gilt immer

$$\|q_T\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle| \le \|T\|.$$

Andererseits erhält man für die hermitesche Sesquilinearform b_T mit der Polarisationsformel 1.1.4 (ii) und der Parallelogrammidentität 1.1.3 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle| &= \frac{1}{4}\big|\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\big| \\
&\le \|q_T\|\frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) \\
&= \|q_T\|\frac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \\
&= \|q_T\| \quad \text{für } x, y \in \mathcal{H} \text{ mit } \|x\| = \|y\| = 1.
\end{aligned}$$

Somit ist $\|T\| \le \|q_T\|$.

2.4.2 Satz (Ordnungseinsraum $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$) *Der Raum $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ der selbstadjungierten beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein Ordnungseinsraum mit der Ordnungseins $\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$:*

$$\mathrm{Ball}(\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}) = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}} \mid -\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \le T \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}\}$$

Anmerkung. Für $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt also

$$\|T\| = \min\{c \ge 0 \mid -c\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \le T \le c\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\}.$$

Beweis. Es sei $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Nach Feststellung 2.4.1 und der Definition der Ordnung 2.1.5 auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|T\| \le 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -\langle x, x\rangle \le \langle Tx, x\rangle \le \langle x, x\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{H} \\
&\Leftrightarrow \quad -\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \le T \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned}$$

2.4.3 Folg. (Norm und Ordnung auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$) *Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.*

(i) *Für ein $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(a) $0 \le T$.
(b) $\|c\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T\| \le c$ *für alle* $c \ge \|T\|$.
(c) $\big\|\|T\|\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T\big\| \le \|T\|$.
(d) *Es gibt ein* $c \ge \|T\|$, *so daß* $\|c\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T\| \le c$ *gilt.*

(ii) *Der positive Kegel $\mathcal{L}(\mathcal{H})_+$ ist abgeschlossen.*

(iii) *Es seien $(S_n)_n$ und $(T_n)_n$ konvergente Folgen in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Aus*

$$S_n \leq T_n \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad \text{folgt} \quad \lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} T_n.$$

(iv) *Die Ornung ist* archimedisch, *d.h., wenn $S \leq \frac{1}{n}T$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $S \leq 0$.*

Beweis. Die Folgerung ergibt sich sofort aus der Bemerkung C.2.3.

2.4.2 Produkt und Inverse positiver Operator.

Anmerkung. Die Ordnung unter den Operatoren und das Produkt von Operatoren harmonieren nur unter Einschränkungen.

1. Wenn $0 \leq S$ und $0 \leq T$ ist, so ist i.a. ST nicht selbstadjungiert. Wenn ST positiv ist, muß notwendigerweise $ST = (ST)^* = TS$ sein. Wir werden zeigen (siehe Satz 2.4.5))

$$0 \leq S,\ 0 \leq T,\ ST = TS \quad \Rightarrow \quad 0 \leq ST.$$

2. Man kann Ungleichungen i.a. nicht quadrieren, d.h. aus $0 \leq S \leq T \not\Rightarrow S^2 \leq T^2$. Ein Beispiel hierfür findet man bereits in den 2×2-Matrizen:

$$0 \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aber für die Quadrate gilt keine Abschätzung:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Wir werden aber sehen, daß die Ungleichungen für die Quadratwurzel erhalten bleiben (siehe Satz 2.5.10)

3. Zwei selbstadjungierte Operatoren S und T haben i.a. keine kleinste obere Schranke. Ein Beispiel hierfür findet man bereits in den 22-Matrizen:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Untere Schranken von S und T sind

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Annahme: Es gäbe eine größte untere Schranke M. Aus

$$0 \leq M \leq S, T \quad \text{folgt} \quad M = 0.$$

Da A indefinit ist, ist $A \not\leq 0 = M$ im Widerspruch zur Annahme.

Man kann zeigen: Wenn zwei $n{\times}n$-Matrizen S, T ein größte untere Schrank haben, dann gilt $S \leq T$ oder $T \leq S$ und die kleinere von beiden ist die größte untere Schranke.

2.4.4 Satz (Reidsche Ungleichung)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Wenn $0 \leq S$ und $ST = TS$ ist, dann gilt

$$|\langle STx, x\rangle| \leq \|T\| \langle Sx, x\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

Anmerkung. Unter den Voraussetzungen der Reidschen Ungleichung gilt:

1. Die Sesquilinearform $b_S(x, y) := \langle Sx, y\rangle$ ist ein beschränktes Semiskalarprodukt auf $\mathcal{H}$:

$$b_S(x, y) \leq \|S\| \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

2. Der Operator T hat bezüglich des Semiskalarproduktes b_S dieselbe adjungierte Abbildung T^* wie bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot\rangle$:

$$\begin{aligned} b_S(Tx, y) &= \langle STx, y\rangle = \langle TSx, y\rangle = \langle Sx, T^*y\rangle \\ &= b_S(x, T^*y). \end{aligned}$$

3. T ist auch bzüglich des Semiskalarproduktes b_S beschränkt und die entsprechend Norm ist kleiner oder gleich $\|T\|$.

$$\begin{aligned} |b_S(Tx, y)| &\leq b_S(Tx, Tx)^{\frac{1}{2}} b_S(y, y)^{\frac{1}{2}} \\ &= b_S(T^*Tx, x)^{\frac{1}{2}} b_S(y, y)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Aus der Reidschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} &\leq \|T^*T\|^{\frac{1}{2}} b_S(x, x)^{\frac{1}{2}} b_S(y, y)^{\frac{1}{2}}. \\ &= \|T\| b_S(x, x)^{\frac{1}{2}} b_S(y, y)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Beweis. 1. Zur Vereinfachung behandeln wir zunächst den Fall, daß $T = T^*$ ist. Nach Voraussetzung gilt

$$ST^{2^n} = T^{2^n} S \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Da $0 \le S$ ist, ist die Sesquilinearform $b_S(x,y) := \langle Sx, y\rangle$ positiv semidefinit. Wir wenden die Schwarzsche Ungleichung auf b_S an und erhalten

$$\begin{aligned} |\langle ST^{2^n} x, x\rangle|^{2^{-n}} &\le \langle ST^{2^n} x, T^{2^n} x\rangle^{2^{-(n+1)}} \langle Sx, x\rangle^{2^{-(n+1)}} \\ &\le \langle ST^{2^{n+1}} x, x\rangle^{2^{-(n+1)}} \langle Sx, x\rangle^{2^{-(n+1)}} \end{aligned}$$

für $n \in N_0$. Induktiv folgt also

$$|\langle STx, x\rangle| \le \langle ST^{2^n} x, x\rangle^{2^{-n}} \langle Sx, x\rangle^{1-2^{-n}}$$

für $n \in N$. Wenden wir nun die Schwarzsche Ungleichung auf das innere Produkt $\langle T^{2^n} x, Sx\rangle = \langle ST^{2^n} x, x\rangle$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |\langle STx, x\rangle| &\le \|T^{2^n}\|^{2^{-n}} \|x\|^{2^{-n}} \|Sx\|^{2^{-n}} \langle Sx, x\rangle^{1-2^{-n}} \\ &\le \|T\| \, \|x\|^{2^{-n}} \|Sx\|^{2^{-n}} \langle Sx, x\rangle^{1-2^{-n}} \end{aligned}$$

für $n \in N$. Für $n \to \infty$ folgt nun

$$|\langle STx, x\rangle| \le \|T\| \langle Sx, x\rangle. \qquad (*)$$

2. Nun sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $ST = TS$. Dann ist auch $ST^* = (TS)^* = (ST)^* = T^*S$. Wir wenden wieder die Schwarzsche Ungleichung auf die positiv semidefinite Sesquilinearform b_S an und erhalten mit $(*)$

$$\begin{aligned} |\langle STx, x\rangle| &\le \langle STx, Tx\rangle^{\frac12} \langle Sx, x\rangle^{\frac12} \\ &= \langle S(T^*T)x, x\rangle^{\frac12} \langle Sx, x\rangle^{\frac12} \\ &\le \big(\|T^*T\| \langle Sx, x\rangle\big)^{\frac12} \langle Sx, x\rangle^{\frac12} = \|T\| \langle Sx, x\rangle. \end{aligned}$$

2.4.5 Satz (Produkt vertauschender pos. Op.)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, R, S, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(i) *Wenn $0 \le S$, $0 \le T$ und $ST = TS$ gilt, dann ist*

$$0 \le ST.$$

(ii) *Wenn $\le S \le T$, und $RS = SR$, $RT = TR$ gilt, dann ist*

$$RS \le RT.$$

Beweis. (i) Es seien $0 \le S$, $0 \le T$ und $ST = TS$. Ohne Einschränkung sei $\|T\| \le 1$. Nach Satz 2.4.2 ist

$$0 \le T \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

und somit ist $\|\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T\| \le 1$. Aus der Reidschen Ungleichung folgt nun

$$\begin{aligned} |\langle S(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)x, x\rangle| &\le \|\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T\| \langle Sx, x\rangle \\ &\le \langle Sx, x\rangle. \end{aligned}$$

Da S und ST selbstadjungiert sind, ist also

$$0 \le \langle STx, x\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

(ii) Aus $0 \le T - S$ und $R(T-S) = (T-S)R$ folgt nach (i)

$$0 \le R(T-S) \quad \Leftrightarrow \quad RS \le RT.$$

2.4.6 Folg. (Potenzen vertauschender Operatoren)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, S, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Wenn $0 \le S \le T$ und $ST = TS$ ist, dann gilt

$$0 \le S^n \le T^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Die Ungleichung folgt aus der binomischen Formel

$$T^n - S^n = (T - S) \sum_{\nu=0}^{n-1} T^\nu S^{n-1-\nu} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

und Satz 2.4.5.

2.4.7 Satz (Inverse eines positiven Operators)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $0 \le T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(i) *Wenn T eine beschränkte Inverse $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ hat, so ist $0 \le T^{-1}$.*

(ii) *T hat genau dann eine beschränkte Inverse, wenn es ein $c > 0$ gibt, so daß $c\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \le T$ ist. D.h.*

$$c\|x\|^2 \le \langle Tx, x\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \|T^{-1}\|^{-1} &= \max\{c \ge 0 \mid c\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \le T\} && (*) \\ &= \max\{c \ge 0 \mid c\|x\| \le \|Tx\| \text{ für } x \in \mathcal{H}\}. && (**) \end{aligned}$$

Anmerkung. 1. Mit Hilfe des *Prinzips von der offenen Abbildung* kann man Satz 2.4.7(ii) verschärfen:

Es sei $0 \le T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Der Operator T ist genau dann bijektiv, wenn es ein $c > 0$ gibt, so daß $c\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \le T$ ist.

2. Weitere Eigenschaften invertierbarer positiver Operatoren findet man in Satz 2.5.7.

Beweis. (i) Da T bijektiv ist gilt

$$\langle T^{-1}x, x\rangle = \langle y, Ty\rangle \ge 0 \quad \text{für } x \in \mathcal{H}, y = T^{-1}x.$$

(ii) „$\Rightarrow$“: T sei nach unten beschränkt:

$$c\|x\|^2 \le \langle Tx, x\rangle \le \|Tx\| \le \|x\| \quad \text{für } x \in \mathcal{H}$$

Also ist $T^* = T$ injektiv. Nach Feststellung 2.3.4 (i) und (ii) hat T eine beschränkte Inverse und es ist $\|T^{-1}\| \le c^{-1}$.

„$\Leftarrow$“: Wenn $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ existiert, so folgt aus der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = \langle TT^{-1}x, x\rangle &\le \langle TT^{-1}x, T^{-1}x\rangle^{\frac12} \langle Tx, x\rangle^{\frac12} \\ &\le \|x\| \, \|T^{-1}\|^{\frac12} \langle Tx, x\rangle^{\frac12}. \end{aligned}$$

Also ist $\|T^{-1}\|^{-1} \|x\|^2 \le \langle Tx, x\rangle$ für $x \in \mathcal{H}$.

Damit ist die Gleichung $\|T^{-1}\|^{-1} = \max\{c \ge 0 \mid c\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \le T\}$ gezeigt.

Für $T \geq 0$ und $c > 0$ erhält man mit (i), Satz 2.4.5 und Folgerung 2.4.6:

$$\begin{aligned} & c^2 \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \leq T^2 \\ \Rightarrow \quad & 0 \leq (c^2 \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T^2)(c \operatorname{id}_{\mathcal{H}} + T)^{-1} = c \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T \\ \Rightarrow \quad & c \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \leq T \quad \Rightarrow \quad c \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \leq T. \end{aligned}$$

Also sind die beiden Maxima $(*)$ und $(**)$ gleich.

Man kann die Gleichit von $(*)$ und $(**)$ auch aus Feststellung 2.3.4 folgern.

2.4.3 Spektrum positiver und selbstadj Op.

Anmerkung. (Spektrum und Eigenwerte.) 1. Die Eigenwerte einer selbstadjungierten Matrix sind immer reell und es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. (siehe Lineare Algebra). Eine selbstadjungierte Matrix $A \in M_n$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nicht negativ sind.

Dagegen sind die Eigenwerte einer orthonormalen Matrix im allg. komplex und man findet erst im $\mathbb{C}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren. Allgemeiner zeigen die normalen Matrizen dieses Verhalten.

2. In einem unendlichdimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$ hat ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ nicht notwendig Eigenwerte. Man betrachtet statt dessen das Spektrum $\sigma(T)$ des Operators. Im allg. macht es nur Sinn, das Spektrum für Operatoren auf komplexen Banachräumen zu untersuchen. Das Haupthilfsmittel zur Untersuchung des Spektrums liefert die Theorie der komplex analytischen Funktionen, also die Funktionentheorie.

3. Eine einfache Ausnahme bilden die selbstadjungierten Operatoren, deren Spektrum immer reell ist. Für diese Klasse von Operatoren erhält man mit den Techniken des Hilbertraumes und Methoden der reellen Analysis wie Maß und Integrationstheorie viel stärkere Resultate, die sowohl auf reellen wie komplexen Hilberträumen gelten.

Daher definieren wir für diesen Fall:

2.4.8 Def. (Spektrum selbstadj. Operatoren)

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(i) *Die Menge*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \text{exist. } (\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}.$$

heißt die Resolventenmenge *von T.*

(ii) *Das Komplement der Resolventenmenge heißt das* Spektrum $\sigma(T)$ *von T:*

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \notin \rho(T)\}.$$

(iii) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} R(.,T) &: \rho(T) \to \mathcal{L}(E), \\ R(\lambda, T) &= (\lambda \operatorname{id}_E - T)^{-1} \end{aligned}$$

heißt die Resolvente *von T.*

Anmerkung. (Spektrum und Resolventenm.) 1. Das Spektrum einer selbstadjungierten Matrix $A \in M_n$ ist die Menge $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ der verschiedenen Eigenwerte von A. Feinheiten, wie die Vielfachheit eines Eigenwertes werden durch den Begriff Spektrum nicht erfaßt. Bekanntlich sind alle Eigenwerte reell. Die Resolventenmenge ist $\mathbb{K} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.

2. Man formuliert die Ergebnisse bevorzugt als Aussagen über das Spektrum. Das führt meistens zu kürzeren und einfacheren Formulierungen.

2.4.9 Lemma (Spektrum selbstadj. Op. reell)

Es sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum und $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann ist

$$|\operatorname{Im} \lambda| \, \|x\| \leq \|(\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T)x\| \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

Das Spektrum von T ist reell.

Beweis. Für $x \in \mathcal{H}$ ist

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \lambda| \, \|x\|^2 &= |\operatorname{Im}\langle(\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T)x, x\rangle| \\ &\leq \|(\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T)x\| \, \|x\| \end{aligned}$$

Für $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ ist also $\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T$ nach unten beschränkt:

$$|\operatorname{Im}\lambda|\,\|x\| \leq \|(\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T)x\| \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

und normal. Nach Folgerung 2.3.5 existiert die Inverse $(\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

2.4.10 Festst. (Resolventenmenge offen)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T = T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann ist die Resolventenmenge $\rho(T)$ offen $\mathbb{K}$.

Beweis. 1. *Wir zeigen, daß $\rho(T) \cap \mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}$ ist.* Es sei $\mu \in \rho(T) \cap \mathbb{R}$ und ohne Einschränkung sei $\mu = 0$ (siehe Bem. 2.4.14). Da T invertierbar ist, ist auch T^2 invertierbar in $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Nach Satz 2.4.7 (ii) gibt es ein $c > 0$, so daß

$$c^2 \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \leq T^2$$

ist. Für $0 \leq \lambda < c$ ist

$$(c^2 - \lambda^2) \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \leq T^2 - \lambda^2 \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$$

und folglich existiert $(T^2 - \lambda^2 \operatorname{id}_{\mathcal{H}})^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ (siehe Satz 2.4.7 (ii)).

Aus der Gleichung $(T + \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}})(T - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}}) = T^2 - \lambda^2 \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$ folgt nun

$$(T + \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}})(T - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}})(T^2 - \lambda^2 \operatorname{id}_{\mathcal{H}})^{-1} = \operatorname{id}_{\mathcal{H}}.$$

Da alle Faktoren kommutieren, existiert die Inverse $(T \pm \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}})^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

Insgesamt gilt: Wenn $\mu = 0 \in \rho(T)$ ist, so gibt es ein $c > 0$ derart, daß das offene Intervall $(-c, c) \subset \rho(T)$ ist.

2. Nach Lemma 2.4.9 ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R} \setminus \sigma(T)$ offen in $\mathbb{R}$ ist, ist $\sigma(T)$ eine abgeschlossen Teilmenge von $\mathbb{R}$. Also ist $\rho(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$ offen in $\mathbb{K}$.

Anmerkung. Mit einer analogen Überlegung folgt auch, daß für einen normalen Operator die Resolventenmenge offen ist. Mit der Neumannschen Reihe zeigt man, daß die Resolventenmenge grundsätzlich offen ist (siehe Satz E.1.3).

2.4.11 Lemma (Inverse eines pos. Op)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $0 \leq T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Wenn T invertierbar ist, so ist $T^{-1} \in \operatorname{BAlg}(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\|T\| \leq 1$. Da $T^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ existiert, gibt es nach Satz 2.4.7 (ii) ein $c > 0$, so daß $c \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \leq T$ ist. Aus $c \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \leq T \leq \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$ folgt

$$0 \leq \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T \leq (1 - c) \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$$

und $\|\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T\| \leq (1 - c) < 1$. Entwickelt man die Inverse in eine Neumansche Reihe (siehe Satz B.2.7), so folgt

$$\begin{aligned} T^{-1} &= (\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - (\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T))^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T)^n \in \operatorname{BAlg}(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}}). \end{aligned}$$

2.4.12 Festst. (Inverse in C^*-Algebra)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ habe eine Inverse $T^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann liegt $T^{-1} \in C^*(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$.

Beweis. Wenn T invertierbar ist, so ist auch T^*T invertierbar und nach Lemma 2.4.11 ist $(T^*T)^{-1} \in \operatorname{BAlg}(T^*T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}}) \subset C^*(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$. Also ist

$$T^{-1} = (T^*T)^{-1}T^* \in C^*(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}}).$$

2.4.13 Bem. (Resolvente in $\operatorname{BAlg}(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T = T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und $\lambda \in \rho(T)$. Dann ist die Resolvente $R(\lambda, T) = (\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T)^{-1} \in \operatorname{BAlg}(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$.

Anmerkung. Für invertierbare normale $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ist die Inverse T^{-1} i. allg. nicht in $\operatorname{BAlg}(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$, wohl aber in der erzeugten C^*-Algebra $C^*(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$ (siehe Bsp. E.3.5).

Beweis. Nach Feststellung 2.4.12 ist die Resolvente

$$R(\lambda, T) \in C^*(\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}}) = C^*(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}}).$$

Da $T = T^*$ ist, ist $C^*(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}}) = \operatorname{BAlg}(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$.

Anmerkung. Wir untersuchen zunächst das Spektrum positiver Operatoren. Die Beweise sind hierfür etwas kürzer und die Aussagen werden häufig in dieser Form gebraucht.

Den allgemeinen Fall selbstadjungierter Operatoren $T = T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ führen wir auf den positiven Fall zurück, indem wir $aT + b \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$ mit $a = \pm 1$ und passendem b betrachten, so daß dieser verschobene Operator positiv wird. Dabei wird das Spektrum entsprechend transformiert:

2.4.14 Bem. (Verschiebung des Spektrums)
Für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sigma(aT + b \operatorname{id}_{\mathcal{H}}) = a\sigma(T) + b.$$

Beweis.

2.4.15 Lemma (Charakterisierung positiver Op.)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T = T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann sind äquivalent:

(a) $T \geq 0$.
(b) *Für alle $\lambda > 0$ existiert $(\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} + T)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b:) Für $\lambda > 0$ ist

$$\lambda \|x\|^2 \leq \langle (\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} + T)x, x\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{H}.$$

Nach Satz 2.4.7 (ii) existiert $(\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} + T)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Es ist sicher $\|T\| \operatorname{id}_{\mathcal{H}} + T \geq 0$ (siehe Satz 2.4.2). Man bilde

$$\lambda_0 := \inf\{\lambda \mid \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} + T \geq 0\}$$

Annahme: $\lambda_0 > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung $(\lambda_0 \operatorname{id}_{\mathcal{H}} + T)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Nach Satz 2.4.7 (ii) gibt es ein $c > 0$ so daß

$$c \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \leq \lambda_0 \operatorname{id}_{\mathcal{H}} + T$$

ist. D.h. $(\lambda_0 - c) \operatorname{id}_{\mathcal{H}} + T \geq 0$ im Widerspruch zur Wahl von λ_0. Also ist $\lambda_0 \leq 0$ und somit ist $T \geq 0$.

2.4.16 Satz (Spektrum eines pos. Op.)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ eine positiver Operator.

(i) *Das Spektrum $\sigma(T)$ liegt im Intervall $[0, \|T\|]$.*

(ii) *Es ist $\|T\| \in \sigma(T)$.*

(iii) *Die größte untere Schranke von T ist der kleinste Wert im Spektrum:*

$$\begin{aligned} \min \sigma(T) &= \max\{c \geq 0 \mid c \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \leq T\} \\ &= \max\{c \geq 0 \mid c\|x\| \leq \|Tx\| \text{ für } x \in \mathcal{H}\} \end{aligned}$$

Anmerkung. Wenn $0 \leq T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ nicht injektiv ist, so betrachte man statt der größten unteren Schranke den Minimalmodul $\gamma(T)$ (siehe Abschn. 2.3.2).

Es sind $0 \in \sigma(T)$ und der Minmalmodul $\gamma(T) \in \sigma(T)$. Es gilt

$$\sigma(T) \subset \{0\} \cup [\gamma(T), \|T\|].$$

Für den Minmalmodul gilt:

$$\gamma(T) = \max\{c \geq 0 \mid cP_{(\text{Kern } T)^\perp} \leq T\}.$$

Beweis. Es sei $0 \leq T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

(i) 1. Nach Lemma 2.4.9 ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

2. Für $\lambda < 0$ ist $T - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$ invertierbar in $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und somit $\lambda \notin \sigma(T)$ (siehe Lemma 2.4.15). Also ist $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

3. Es sei $\lambda > \|T\|$: Nach Satz 2.4.2 ist $\|T\| \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T \geq 0$. Also ist $\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T$ nach unten beschränkt:

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T &= (\lambda - \|T\|) \operatorname{id}_{\mathcal{H}} + (\|T\| \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T) \\ &\geq (\lambda - \|T\|) \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Nach Satz 2.4.7 (ii) existiert $(\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und $\lambda \notin \sigma(T)$.

Insgesamt folgt $\sigma(T) \subset [0, \|T\|]$.

(ii) Nach Satz 2.4.2 ist

$$\|T\| = \min\{c \geq 0 \mid 0 \leq T \leq c \operatorname{id}_{\mathcal{H}}\},$$

Es ist also $\|T\| \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T \geq 0$ und für alle $\varepsilon > 0$ ist

$$\varepsilon \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \not\leq \|T\| \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T.$$

Da der positive Operator $\|T\| \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T$ nicht nach unten beschränkt ist, ist er nicht invertierbar (siehe Satz 2.4.7 (ii)). D. h., $\|T\| \in \sigma(T)$.

(iii) Es sei $c_0 = \max\{c \geq 0 \mid c \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \leq T\}$.

1. Dann ist $0 \leq T - c_0 \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$ und für alle $\varepsilon > 0$ ist

$$\varepsilon \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \not\leq T - c_0 \operatorname{id}_{\mathcal{H}}.$$

Da der positive Operator $T - c_0 \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$ nicht nach unten beschränkt ist, ist er nicht invertierbar (siehe Satz 2.4.7 (ii)). Also ist $c_0 \in \sigma(T)$.

2. Wenn $\lambda \in \sigma(T)$, so ist (siehe Satz 2.4.7 (ii)):

$$\varepsilon \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \not\leq T - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

D. h., für alle $\varepsilon > 0$ ist

$$(\lambda + \varepsilon) \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \not\leq T.$$

Folglich ist $c_0 \leq \lambda$.

Insgesamt folgt also $c_0 = \min \sigma\{\lambda \mid \lambda \in (T)\}$.

2.4.17 Satz (Spektrum selbstadj. Op.)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T = T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$

(i) *die Zahlen*

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &:= \inf\{\langle Tx, x\rangle \mid x \in \mathcal{H},\ \|x\| = 1\} \\ \lambda_{\max} &:= \sup\{\langle Tx, x\rangle \mid x \in \mathcal{H},\ \|x\| = 1\} \end{aligned}$$

liegen im Spektrum $\sigma(T)$ und es gilt

$$\sigma(T) \subset [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}].$$

Insbesondere liegt $\sigma(T) \subset \big[-\|T\|, \|T\|\big]$ und mindestens einer Werte $-\|T\|, \|T\|$ liegt im Spektrum.

(ii) *Das Spektrum $\sigma(T)$ ist kompakt.*

Anmerkung. Man vergleiche den obigen Satz 2.4.17 und seinen Beweis mit den Resultaten über das Spektrum beliebiger beschränkter Operatoren auf Banachräumen (siehe Satz E.1.3 und Satz E.1.5).

Beweis. (i) Der Operator $T_0 := T - \lambda_{\min} \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$ ist positiv und seine größte untere Schranke ist $c_0 = 0$:

$$0 = \inf\{\langle (T - \lambda_{\min} \operatorname{id}_{\mathcal{H}})x, x\rangle \mid x \in \mathcal{H},\ \|x\| = 1\}.$$

Nach Folgerung 2.4.16 (iii) ist

$$0 = \min\{c \geq 0 \mid c \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \leq T_0\} = \min \sigma(T_0).$$

Aus $\sigma(T_0) = \sigma(T) - \lambda_{\min}$ folgt nun $\lambda_{\min} = \min \sigma(T)$.

Da $T_1 := \lambda_{\max} \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T \geq 0$ ist, folgt ebenso, daß

$$0 = \min \sigma(T_1)$$

ist. Aus $\sigma(T_1) = \lambda_{\max} - \sigma(T)$ folgt nun $\lambda_{\max} = \max \sigma(T)$.

Nach Satz 2.4.2 ist $\|T\| = \max\{|\lambda_{\min}|, |\lambda_{\max}|\}$

(ii) Nach Feststellung 2.4.10 ist das Spektrum eines selbstadjungierten Operators abgeschlossen. Das Spektrum $\sigma(T)$ ist beschränkt und somit kompakt.

2.5 Wurzel und Betrag

2.5.1 Wurzel eines positiven Operators

Anmerkung. (Potenzreihe der Wurzelfunktion) Wie in der reellen Analysis werden wir die Quadratwurzel aus einem positiven Operator mit Hilfe der Binomialreihe berechnen. Hier ist die bekannte Gestalt der Binomialreihe für den Exponenten $\frac{1}{2}$.

1. Die Binomialkoeefizienten $\binom{\lambda}{n}$ mit gebrochenem $\lambda \in R$ sind definiert als $\binom{\lambda}{0} = 1$ und

$$\binom{\lambda}{n} := \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\lambda-\nu}{\nu+1} = \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(n-1))}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Die Wurzelfunktion hat um den Punkt 1 die Taylorreihe

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} x^n \\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} \cdots \qquad \text{für } |x| \le 1.\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist $R = 1$. Sie konvergiert auch in den Endpunkten des Konvergenzintervalls $[-1, 1]$.

Insbesondere gilt

$$0 = \sqrt{1-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} 1^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left|\binom{1/2}{n}\right|.$$

Die Wurzelreihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf dem Intervall $[-1, 1]$.

Wir zählen in dem folgenden Lemma die Eigenschaften der Wurzelreihe auf, die wir für die Konstruktion im Satz 2.5.2 benötigen.

2.5.1 Lemma (Wurzelreihe)

(i) *Die Funktion $\sqrt{1-x}$ hat die Potenzreihenentwicklung*

$$\sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{für } |x| \le 1.$$

(ii) *Für die Koeffizienten gilt*

$$c_0 = 1 \quad \text{und} \quad c_n < 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(iii) *Insbesondere gilt*

$$0 = \sqrt{1-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

Die Reihe konvergiert absolut in der sup-Norm auf dem Intervall $[-1, 1]$.

(iv) *Aus der Cauchyschen Produktformel*

$$1 - x = \sqrt{1-x}^{\,2} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \Big) x^n$$

folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ -1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n = 2, 3 \ldots, \end{cases}$$

2.5.2 Satz (Wurzel eines positiven Op.)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $0 \le T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

(i) *Es gibt einen eindeutig bestimmten positiven Operator $S \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit $S^2 = T$.*

Man bezeichnet $T^{1/2} = \sqrt{T} := S$ und nennt $T^{1/2}$ die Wurzel von T.

(ii) *Wenn ein Operator $R \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit T vertauscht, dann vertaucht R auch mit der Wurzel $T^{1/2}$:*

$$RT = TR \quad \Rightarrow \quad RT^{1/2} = T^{1/2} R.$$

Beweis. 1. Es sei zunächst $0 \le T \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

Wir zeigen: Setzt man in die Potenzreihe $\sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (siehe Lemma 2.5.1) für x den Operator $\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T$ ein, so erhält man eine absolut konvergente Reihe in $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Der durch diese Reihe definierte Operator $S \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ist positiv und erfüllt $S^2 = T$:

Nach Satz 2.4.2 folgt aus $0 \le T \in \mathrm{Ball}(\mathcal{H})$, daß $0 \le T \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ ist. Also ist $0 \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ und somit

$$\|\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T\| \le 1.$$

Nach Lemma 2.5.1 (iii) konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \, \|\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T\|^n < \infty.$$

absolut und die Reihe

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)^n \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$$

konvergiert in der Norm.

Wir zeigen, daß $S > 0$ ist: Nach Definition von S und Lemma 2.5.1 (iii) folgt

$$\begin{aligned}\langle Sx, x\rangle &= c_0 \langle x, x\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{c_n}_{<0} \underbrace{\langle (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)x, x\rangle}_{0 \le \cdot \le \langle x, x\rangle} \\ &\ge \underbrace{\Big(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big)}_{= \sqrt{1-1} = 0} \langle x, x\rangle = 0\end{aligned}$$

Wir zeigen $S^2 = T$: Für das Quadrat von S gilt

$$\begin{aligned}S^2 &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)^n \Big)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_n c_k (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)^{n+k}\end{aligned}$$

Da die Reihe absolut konvergent ist, kann man die Doppelsume wie in der Cauchyschen Produktformel umsortieren:

$$S^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)^n.$$

Aus den Summenformeln für die Koeffizienten (siehe Lemma 2.5.1 (iv)) folgt

$$S^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T) = T.$$

2. *Wir zeigen die Vertauschungsrelation für S:* Es sei $R \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und es gelte $RT = TR$. Induktiv folgt dann

$$RT^n = TRT^{n-1} = \cdots = T^n R \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Da R linear und stetig ist, gilt

$$RS = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu R T^\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu T^\nu R = SR.$$

3. Im Fall, daß $\|T\| > 1$ bilde man

$$T_1 := \|T\|^{-1}T$$

und wie in (1.)

$$S_1 := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T_1)^n.$$

und setze $S := \|T\|^{1/2}S_1$.

Dann ist $0 \le S$ und $S^2 = T$. Jeder Operator $R \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$, der mit T vertauscht, vertauscht nach (2.) auch mit dem so konstruierten Operator S.

4. *Wir zeigen nun die Eindeutigkeit der positiven Wurzel:* Es sei S die oben in (1.) bzw. (3.) konstruierte Wurzel. Annahme: Es sei $0 \le R \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit $R^2 = T$. Da $RT = R^3 = TR$ ist, ist nach (2.) bzw (3.) $RS = SR$. Nach Satz 2.1.6 ist

$$0 \le (S-R)S(S-R) \quad \text{und} \quad 0 \le (S-R)R(S-R).$$

Addiert man diese beiden Ungleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &\le (S-R)S(S-R) + (S-R)R(S-R) \\ &= (S-R)(S+R)(S-R) \\ &= (S^2-R^2)(S-R) = 0. \end{aligned}$$

Da die beiden Summanden positiv sind, folgt

$$(S-R)S(S-R) = 0 \quad \text{und} \quad (S-R)R(S-R) = 0.$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, so folgt

$$(S-R)^3 = (S-R)S(S-R) - (S-R)R(S-R) = 0$$

und $(S-R)^4 = 0$. Aus der C^*-Gleichung (siehe Feststellung 2.1.2 (iii)) folgt nun

$$\|S-R\|^4 = \|(S-R)^2\|^2 = \|y(S-R)^4\| = 0.$$

Also ist $R = S$.

Anmerkung. (erzeugte B-Algebra $\mathrm{BAlg}(T)$**)** Für einen Operator T bilden die Polynome $p(T)$ ohne *konstanten* Term eine Algebra $\mathrm{Alg}(T)$. Der Normabschluß $\mathrm{BAlg}(T)$ von $\mathrm{Alg}(T)$ ist eine Banachunteralgebra von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Man beachte, daß i. allg. $\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ nicht in $\mathrm{BAlg}(T)$ liegt. (siehe Bez. B.2.5).

2.5.3 Bem. ($T^{1/2} \in \mathrm{BAlg}_{\mathbb{R}}(T)$)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $0 \le T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann liegt die Wurzel $T^{1/2} \in \mathrm{BAlg}_{\mathbb{R}}(T)$. D. h., man kann $T^{1/2}$ durch Polynome $P(T)$ mit reellen Koeffizienten und ohne konstanten Term approximieren.

Beweis. 1. Im Fall $0 \le T \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ ist $0 \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ und somit

$$0 \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)^n \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

(siehe Folg. 2.4.6). Da die Wurzelreihe absolut konvergent ist folgt mit Lemma 2.5.1 (iii)

$$T^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n((\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)^n - \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$$

Da $(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)^n - \mathrm{id}_{\mathcal{H}} = \sum_{\nu=1}^{n} (-T)^\nu \in \mathrm{Alg}(T)$ ist, ist $T^{1/2} \in \mathrm{BAlg}(T)$.

2. Der allgemeinen Fall folgt nun aus (i) und der Eindeutigkeit der Wurzel:

$$T^{1/2} = \|T\|^{1/2}\big(\|T\|^{-1}T\big)^{1/2} \in \mathrm{BAlg}(T).$$

2.5.4 Folg. (Einige Potenzgesetze)
(i) *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. $0 \le T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ habe eine beschränkte Inverse $T^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann ist $T^{1/2}$ invertierbar und es gilt*

$$\big(T^{-1}\big)^{1/2} = \big(T^{1/2}\big)^{-1}.$$

Wir bezeichnen den gemeinsamen Wert mit $T^{-1/2}$.

(ii) *Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\big(T^n\big)^{1/2} = \big(T^{1/2}\big)^n = \big(T^{-1/2}\big)^{-n} = \big(T^{-n}\big)^{-1/2}.$$

Wir bezeichnen den gemeinsamen Wert mit $T^{n/2}$.

Beweis. (i) Es sei $0 \le T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ habe eine Inverse $T^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Nach Satz 2.4.7 (i) ist T^{-1} positiv und nach Satz 2.5.2 gibt es die eindeutig bestimmte positive Wurzel

$$(T^{-1})^{1/2}.$$

Der Operator $T^{1/2}$ vertauscht mit T^{-1} und somit vertauschen $T^{1/2}$ und $(T^{-1})^{1/2}$. Es ist

$$\big(T^{1/2}(T^{-1})^{1/2}\big)^2 = TT^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}^2$$

und ebenso $\big((T^{-1})^{1/2}T^{1/2}\big)^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}^2$ Da die positive Wurzel nach eindeutig bestimmt ist, folgt

$$T^{1/2}(T^{-1})^{1/2} = (T^{-1})^{1/2}T^{1/2} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}.$$

Also ist $(T^{1/2})^{-1} = (T^{-1})^{1/2}$.

(ii) Nach Satz 2.4.5 sind für $n \in \mathbb{N}$:

$$(T^n)^{1/2} \quad \text{und} \quad (T^{1/2})^n$$

positive Wurzeln aus T^n. Aus der Eindeutigkeit der Wurzel folgt $(T^n)^{1/2} = (T^{1/2})^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aus Teil (i) folgt nun für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (T^{-1/2})^n &= ((T^{1/2})^{-1})^n \\ &= (T^{1/2})^{-n} = ((T^{1/2})^n)^{-1} = ((T^n)^{1/2})^{-1} \\ &= (T^n)^{-1/2} = ((T^n)^{-1})^{1/2} = (T^{-n})^{1/2}. \end{aligned}$$

Invertiert man diese Gleichungen nochmal, so erhält man für $-n$ die analogen Gleichungen:

$$(T^{-1/2})^{-n} = (T^{1/2})^n = (T^n)^{1/2} = (T^{-n})^{-1/2} \qquad (*)$$

Also gilt $(*)$ für $\pm n$. Für $n = 0$ ist $(*)$ sicher richtig. Also gilt $(*)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Anmerkung. Man kann nun $T^{1/4} := (T^{1/2})^{1/2}$ und induktiv $T^{2^{-n}}$ bilden und entsprechende Potenzgesetze herleiten. Wir unterlassen dies an dieser Stelle, da wir später mit dem Spektralsatz einen einfacheren Zugang zur Potenzfunktion erhalten. Wir leiten nur noch einige Regeln für die 4-te Wurzel her, die wir im Beweis zu Satz 2.5.10 benötigen.

2.5.5 Lemma (4-te Wurzel)
(i) *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $0 \le T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Der Operator $T^{1/4} := (T^{1/2})^{1/2}$ ist der eindeutig bestimmte positive Operator, für den $(T^{1/4})^4 = T$ gilt.*

(ii) *Hat T eine beschränkte Inverse $T^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ so ist $T^{1/4}$ invertierbar und es gilt $(T^{1/4})^{-1} = (T^{-1})^{1/4}$. Wir bezeichnen den gemeinsamen Wert mit $T^{-1/4}$.*

Es gilt also $(T^{-1/4})^2 = T^{-1/2}$.

Beweis. (i) Es sei $0 \le T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und $T^{1/4} := (T^{1/2})^{1/2}$. Offensichtlich gilt

$$(T^{1/4})^4 = \left((T^{1/4})^2\right)^2 = \left(T^{1/2}\right)^2 = T.$$

Wir zeigen die Eindeutigkeit: Wenn $0 \le S \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und $S^4 = (S^2)^2 = T$ ist, so folgt aus der Eindeutigkeit der Wurzel $S^2 = T^{1/2}$ und weiter $S = (T^{1/2})^{1/2}$ (siehe Satz 2.5.2) (i).

(ii) $T^{1/4}$ vertauscht mit T^{-1} und somit vertauschen $T^{1/4}$ und $(T^{-1})^{1/4}$. Es ist

$$\left(T^{1/4}(T^{-1})^{1/4}\right)^4 = TT^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}^4$$

und ebenso $\left((T^{-1})^{1/4}T^{1/4}\right)^4 = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}^4$ Da die positive 4-te Wurzel nach (i) eindeutig bestimmt ist, folgt

$$T^{1/4}(T^{-1})^{1/4} = (T^{-1})^{1/4}T^{1/4} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,.$$

Also ist $(T^{1/4})^{-1} = (T^{-1})^{1/4}$.

2.5.2 Monotonie: Wurzel und Inverse

2.5.6 Festst.
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $S, T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und es existiere $T^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $0 \le S \le T$.
(b) $0 \le T^{-1/2}ST^{-1/2} \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.
(c) $0 \le S^{1/2}T^{-1}S^{1/2} \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.
(d) $\|T^{-1/2}S^{1/2}\| \le 1$

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Nach Vorraussetzung ist $0 \le T - S$. Nach den Rechenregeln für $T^{-1/2}$ (siehe Folg. 2.5.4 und Satz 2.1.6 (ii)) folgt

$$0 \le T^{-1/2}(T-S)T^{-1/2} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T^{-1/2}ST^{-1/2}.$$

und somit $T^{-1/2}ST^{-1/2} \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.
(b) $\Rightarrow$ (c): Aus

$$0 \le (S^{1/2}T^{-1/2})^*(S^{1/2}T^{-1/2}) = T^{-1/2}ST^{-1/2} \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

folgt nach Satz 2.1.6 (iv)

$$0 \le S^{1/2}T^{-1}S^{1/2} = (S^{1/2}T^{-1/2})(S^{1/2}T^{-1/2})^* \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,.$$

(c) $\Rightarrow$ (d): Aus

$$0 \le (S^{1/2}T^{-1/2})(S^{1/2}T^{-1/2})^* = S^{1/2}T^{-1}S^{1/2} \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,.$$

folgt nach Satz 2.1.6 (ii)

$$\|T^{-1/2}S^{1/2}\| \le 1$$

2.5.7 Satz (Monotonie der Inversen)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und S, $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Wenn $0 \le S \le T$ ist, und S eine Inverse $S^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ hat, dann existiert $T^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und es gilt

$$0 \le T^{-1} \le S^{-1}.$$

Beweis. 1. Nach Satz 2.4.7 (ii) gibt es ein $c > 0$, so daß

$$c\|x\|^2 \le \langle Sx, x\rangle \le \langle Tx, x\rangle \quad \text{für } x \in \mathcal{H}$$

gilt. Nach Satz 2.4.7 (i) hat T eine beschränkte Inverse T^{-1}. Nach Satz 2.4.7 ist $0 \le T^{-1}$.
2. Aus $0 \le S \le T$ folgt mit Feststellung 2.5.6 (c):

$$0 \le S^{1/2}T^{-1}S^{1/2} \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,.$$

Multipliziert man von beiden Seiten mit $S^{-1/2}$, so folgt aus den Rechenregeln für $S^{-1/2}$ (siehe Folg. 2.5.4) und Satz 2.1.6 (i))

$$0 \le T^{-1} \le S^{-1}.$$

Anmerkung. Das folgende Lemma ist ein Spezialfall von Satz 2.5.10. Seine Folgerung 2.5.9 wird aber zum Beweis dieses Satzes gebraucht.

2.5.8 Lemma
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $ST = TS$. Dann gilt

$$0 \le S \le T \quad \Rightarrow \quad 0 \le S^{1/2} \le T^{1/2}.$$

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ ist $\varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \le T^{1/2} + S^{1/2} + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ und folglich existiert $(T^{1/2} + S^{1/2} + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})^{-1} \ge 0$ (siehe Satz 2.4.7).

Da $S^{1/2}$ und $T^{1/2}$ vertauschen gilt

$$\begin{aligned}(T^{1/2} + S^{1/2} + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})&(T^{1/2} - S^{1/2} + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})\\ &= (T - S) + 2\varepsilon T^{1/2} + \varepsilon^2\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \ge 0\end{aligned}$$

Multipliziert man mit dem positiven Operator $(T^{1/2} + S^{1/2} + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})^{-1}$ so folgt nach Satz 2.4.5

$$T^{1/2} - S^{1/2} + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \ge 0 \quad \text{für } \varepsilon > 0.$$

Da $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ archimedisch geordnet ist, ist $T^{1/2} - S^{1/2} \ge 0$.

2.5.9 Folg.
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $0 \le T \in \mathcal{L}\mathcal{H})$. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$T^{1/2} \le (T + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})^{1/2} \le T^{1/2} + \varepsilon^{1/2}\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,.$$

Beweis. 1. Es sei $0 \le T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\varepsilon > 0$.

Aus $0 \le T \le T + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ folgt $T^{1/2} \le (T + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})^{1/2}$ (siehe Lemma 2.5.8).

2. Die zweite Abschätzung folgt mit einem analogen Schluß: Da

$$0 \le (T + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \le (T + 2\varepsilon^{1/2}T^{1/2} + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})$$

folgt mit Lemma 2.5.8

$$\begin{aligned}(T + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})^{1/2} &\le (T + 2\varepsilon^{1/2}T^{1/2} + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})^{1/2}\\ &= (T^{1/2} + \varepsilon^{1/2}\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}).\end{aligned}$$

2.5.10 Satz (Monotonie der Wurzel)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Die Quaratwurzel $\mathcal{L}(\mathcal{H})_+ \ni T \mapsto T^{1/2}$ ist monoton wachsend. D.h., für $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt:

$$0 \le S \le T \quad \Rightarrow \quad 0 \le S^{1/2} \le T^{1/2}.$$

Beweis. 1. *Wir behandeln zunächst den Fall $0 \le S \le T$ und $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$:* Wir zeigen in diesem Fall die Abschätzung:

$$\|T^{-1/4}S^{1/2}\|^2 = \|T^{-1/4}S^{1/2}T^{-1/4}\| \le 1.$$

Nach Feststellung 2.5.6 (d), (a) folgt hieraus

$$S^{1/2} = (S^{1/4})^2 \le (T^{1/4})^2 = T^{1/2}.$$

Da $0 \le S \le T$ ist, ist nach Feststellung 2.5.6 (d)

$$\|S^{1/2}T^{-1/2}\| = \|T^{-1/2}S^{1/2}\| \le 1.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir hiermit[3]:

$$\begin{aligned}&\|T^{-1/4}S^{1/2}T^{-1/4}\|^{2^n}\\ &\quad= \|(T^{-1/4}S^{1/2}T^{-1/4})^{2^n}\|\\ &\quad= \|T^{-1/4}(S^{1/2}T^{-1/2})^{2^n-1}S^{1/2}T^{-1/4}\|\\ &\quad\le \|T^{-1/4}\|\,\|(S^{1/2}T^{-1/2})^{2^n-1}\|\,\|S^{1/2}\|\,\|T^{-1/4}\|\\ &\quad= \|T^{-1/2}\|\,\|S^{1/2}\|\,\|S^{1/2}T^{-1/2}\|^{2^n-1}\\ &\quad\le \|T^{-1/2}\|\,\|S^{1/2}\|\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ folgt hieraus

$$\|T^{-1/4}S^{1/2}T^{-1/4}\| \le \lim_{n\to\infty}\left(\|T^{-1/2}\|\,\|S^{1/2}\|\right)^{2^{-n}} \le 1.$$

2. Für $\varepsilon > 0$ und $0 \le T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist $0 \le T + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ invertierbar (siehe Satz 2.4.7). Es sei $0 \le S \le T$. Nach Teil 1. des Beweises gilt dann:

$$(S + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})^{1/2} \le (T + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})^{1/2}.$$

Nach Folgerung 2.5.9 folgt

$$S^{1/2} \le (S + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})^{1/2} \le (T + \varepsilon\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})^{1/2} \le T^{1/2} + \varepsilon^{1/2}\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir $S^{1/2} \le T^{1/2}$.

Anmerkung. Es sei $0 \le t \in \mathbb{R}$. Die Wurzel $t^{1/2}$ ist die eindeutig bestimmte nichtnegative Nullstelle s der Funktion $x \mapsto x^2 - t$. Das Newtonverfahren zur Bestimmung dieser Nullstelle ergibt das Iterationsverfahren

$$\begin{aligned}s_0 &:= 1\\ s_{n+1} &:= \frac{1}{2}\Big(s_n + \frac{t}{s_n}\Big) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Da die Parabel $x^2 - t$ strikt konvex ist, konvergiert die Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ strikt monoton fallend gegen einen Grenzwert $s \ge 0$. Für diesen gilt $s^2 - t = 0$.

Da dies Verfahren zur Approximation der Wurzel bereits im Altertum bekannt war, nennt man es auch das *Babylonische Wurzelziehen*.

Die folgende Bemerkung zeigt, daß dies Iterationsverfahren auch für positive Operatoren gegen die Wurzel konvergiert. Zur Vereinfachung betrachten wir nur den Fall $0 \le T \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

Mit Hilfe dieser Approximation der Wurzel kann man ebenfalls zeigen, daß die Wurzelfunktion für Operatoren monoton wachsend ist (siehe Satz 2.5.10)

2.5.11 Bem. (Babylonisches Wurzelziehen)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zu $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $0 \le T \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ bilde man iterativ:

$$\begin{aligned}f_0(T) &:= \mathrm{id}_{\mathcal{H}},\\ f_{n+1}(T) &:= \frac{1}{2}\big(f_n(T) + f_n(T)^{-1}T\big) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Die Funktionen $f_n : T \mapsto f_n(T)$ für $0 \le T \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ haben die folgenden Eigenschaften:

(i) *f_{n+1} ist wohldefiniert, da für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$2^{-n}\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \le f_n, \quad \text{und} \quad 0 \le (f_n)^{-1}.$$

[3] Man beachte bei der folgenden Rechnung: Aus der C^*-Identität folgt

$$\|A\|^{2^n} = \|A^{2^n}\| \quad \text{für } A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

(ii) *Die Folge $(f_n)_n$ ist monoton fallend:*

$$f_n - f_{n+1} = (2f_n)^{-1}(f_n - f_{n-1})^2 \geq 0.$$

(iii) *Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert, da*

$$0 \leq f_n - f_{n+1} \leq 2^{-(n+1)} \operatorname{id}_{\mathcal{H}}.$$

(iv) *Es ist* $f_0(T) + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(T) - f_{n-1}(T)) = \lim_{n\to\infty} f_n(T) = T^{1/2}$.

Beweis. Man beachte, daß alle Funktionswerte $f_n(T)$, $f_m(T)$ miteinander und mit T vertauschen.

(i) Aus $2^{-0} \operatorname{id}_{\mathcal{H}} = f_0$ folgt induktiv

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}(f_n + (f_n)^{-1}T) \geq \frac{1}{2}f_n \geq 2^{-(n+1)} \operatorname{id}_{\mathcal{H}}.$$

(ii) Fur $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
f_n - f_{n+1} &= f_n - 2^{-1}(f_n + (f_n)^{-1}T) \\
&= (2f_n)^{-1}\big((f_n)^2 - T\big) \qquad (*) \\
&= (2f_n)^{-1}\big[(2f_{n-1})^{-2}\big((f_{n-1})^2 + T\big)\big)^2 - T\big] \\
&= (2f_n)^{-1}\big[(2f_{n-1})^{-2} \\
&\qquad \cdot \big\{\big((f_{n-1})^2 + T\big)^2 - 4(f_{n-1})^2 T\big\}\big] \\
&= (2f_n)^{-1}\big[(2f_{n-1})^{-1}\big((f_{n-1})^2 - T\big)\big]^2
\end{aligned}$$

Die Formel (*) gilt auch für $n = 0$. Wendet man $(*)$ für $n-1$ an, so erhält man:

$$f_n - f_{n+1} = (2f_n)^{-1}\big[f_n - f_{n-1}\big]^2$$

Hieraus folgt mit der Abschätzung (i):

$$f_n - f_{n+1} \leq 2^{n-1}\big[f_n - f_{n-1}\big]^2. \qquad (**)$$

(iii) Es ist $f_0 - f_1 \leq 2^{-1} \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$. Aus $(**)$ folgt nun induktiv:

$$f_n - f_{n+1} \leq 2^{-(n+1)} \operatorname{id}_{\mathcal{H}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Da nach (iii) $\|f_n - f_{n-1}\| \leq 2^{-n}$ ist, konvergiert die Teleskopsumme

$$R = f_0(T) + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(T) - f_{n-1}(T)) = \lim_{n\to\infty} f_n(T).$$

(iv) Nach Definition der Folge $(f_n)_n$ ist

$$f_n(T)f_{n+1}(T) = \frac{1}{2}\big(f_n(T)^2 + T\big)$$

und folglich $R^2 = \dfrac{1}{2}\big(R^2 + T\big)$ und somit $R^2 = T$. Da R nach (i) positiv ist, ist R die eindeutig bestimmte Quadratwurzel $T^{1/2}$.

Anmerkung. Wir geben noch eine weiteren Beweis für die Monotonie der Quadratwurzel (siehe Satz 2.5.10):

Beweis. **(von Satz 2.5.10)** Der Beweis beruht darauf, daß die in Beispiel 2.5.11 definierte Funktion

$$f_n : T \mapsto f_n(T),$$

in der Variablen T $(0 \leq T \leq \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$, monoton wachsend ist. Dann ist auch die Grenzfunktion $T^{1/2} = \lim_{n\to\infty} f_n(T)$ monoton wachsend. Den allgemeinen Fall $0 \leq S \leq T$ kann man durch Skalieren auf die Situation $0 \leq T \leq \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$ zurückführen.

1. Wir beschränken uns darauf, die Monotonie der f_n für invertierbare T zu zeigen. Hierzu führen wir die Hilfsfunktionfunktion

$$g_n : T \mapsto f_n(T)^{-1}T$$

ein. Es ist $f_0(T) = \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$ und $f_{n+1} = 1/2(f_n + g_n)$.

Nach Beispiel 2.5.11(i) existiert $f_n(T)^{-1}$. Da T invertierbar ist, ist auch $g_n(T)$ invertierbar. Für die Inverse gibt es eine Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
g_n(T)^{-1} &= T^{-1}f_n(T) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(T^{-1}f_{n-1}(T) + f_{n-1}(T)^{-1}\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(g_{n-1}(T)^{-1} + f_{n-1}(T)^{-1}\big).
\end{aligned}$$

Wir beweisen induktiv die folgende

Behauptung: Es seien $0 \leq S \leq T \leq \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$ mit Inversen S^{-1}, $T^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
g_{n-1}(S) &\leq g_{n-1}(T). && (*_n) \\
f_n(S) &\leq f_n(T), && (**_n)
\end{aligned}$$

Fall $n = 1$: $g_0(S) = S \leq T = g_0(T)$,

$$f_1(S) = \tfrac{1}{2}(\operatorname{id}_{\mathcal{H}} + g_0(S)) \leq \tfrac{1}{2}(\operatorname{id}_{\mathcal{H}} + g_0(T)) = f_1(T).$$

Schluß $(1, \ldots, n) \Rightarrow n+1$: Aus den Voraussetzungen $(*_n)$ und $(**_{n-1})$ folgt mit Satz 2.5.7:

$$\begin{aligned}
g_{n-1}(S) \leq g_{n-1}(T) &\quad\Rightarrow\quad g_{n-1}(S)^{-1} \geq g_{n-1}(T)^{-1}, \\
f_{n-1}(S) \leq f_{n-1}(T) &\quad\Rightarrow\quad f_{n-1}(S)^{-1} \geq f_{n-1}(T)^{-1}.
\end{aligned}$$

Addiert man die rechten Seiten, so folgt mit der Rekursionsformel für $(g_n)^{-1}$ und Satz 2.5.7 die gewünschte Aussage $(*_{n+1})$:

$$g_n(S)^{-1} \geq g_n(T)^{-1} \quad\Rightarrow\quad g_n(S) \geq g_n(T)$$

Aus $*_{n+1}$ und der Voraussetzung $(**_n)$ folgt mit der Rekursionsformel für f_n die Behauptung $(**_{n+1})$:

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(S) &= \tfrac{1}{2}\big(f_n(S) + g_n(S)\big) \\
&\leq \tfrac{1}{2}\big(f_n(T) + g_n(T)\big) = f_{n+1}(T)
\end{aligned}$$

2. Für $\varepsilon > 0$ und $0 \leq T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ist $0 \leq T + \varepsilon \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$ invertierbar (siehe Satz 2.4.7). Es sei $0 \leq S \leq T$. Nach Teil 1. des Beweises gilt dann:

$$(S + \varepsilon \operatorname{id}_{\mathcal{H}})^{1/2} \leq (T + \varepsilon \operatorname{id}_{\mathcal{H}})^{1/2}.$$

Nach Folgerung 2.5.9 folgt

$$S^{1/2} \leq (S+\varepsilon \operatorname{id}_{\mathcal{H}})^{1/2} \leq (T+\varepsilon \operatorname{id}_{\mathcal{H}})^{1/2} \leq T^{1/2} + \varepsilon^{1/2} \operatorname{id}_{\mathcal{H}}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir $S^{1/2} \leq T^{1/2}$.

2.5.3 Polarzerlegung

2.5.12 Lemma (Kern von T, T^*T und $(T^*T)^{1/2}$)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern} T &= \operatorname{Kern}(T^*T)^{1/2} = \operatorname{Kern} T^*T, \\ \overline{\operatorname{Bild}}\, T^* &= \overline{\operatorname{Bild}}(T^*T)^{1/2} = \overline{\operatorname{Bild}}\, T^*T. \end{aligned}$$

Beweis. Es ist sicher $\operatorname{Kern} T \subset \operatorname{Kern} T^*T$. Da

$$\|Tx\| = \langle T^*Tx, x\rangle = \|(T^*T)^{1/2}x\| \quad \text{für } x \in \mathcal{H}$$

ist, gilt andererseits

$$\operatorname{Kern} T = \operatorname{Kern}(T^*T)^{1/2} \supset \operatorname{Kern} T^*T.$$

Die zweite Gleichung folgt nun aus Feststellung 2.2.13.

2.5.13 Satz (Polarzerlegung)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$.

(i) *Es gibt genau einen positiven Operator in $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, den man mit $|T| \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ bezeichnet, und eine partielle Isometrie $V \in \mathfrak{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, so daß folgendes gilt:*

$$T = V|T| \quad \text{und} \quad V^*V = P_{|T|}.$$

Dabei ist $P_{|T|}$ die Bildprojektion von $|T|$.

(ii) *Weiterhin gilt:*

1. *$|T| = (T^*T)^{1/2}$ und $|T| = V^*T$.*
2. *V^*V ist die orthogonale Projektion auf $\overline{\operatorname{Bild}}\, T^*$.*
3. *VV^* ist die orthogonale Projektion auf $\overline{\operatorname{Bild}}\, T$*

(iii) *Im Fall $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ gilt weiterhin: Wenn $R \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit T und T^* vertauscht, dann gilt*

$$VR = RV \quad \text{und} \quad R|T| = |T|R.$$

(iv) *Wenn $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ die Polarzerlegung $T = V|T|$ hat, so hat T^* die Polarzerlegung*

$$T^* = V^*(V|T|V^*)$$

Es gilt $V|T|V^* = |T^*|$

(v) *Wenn T normal ist, dann ist V normal und V vertauscht mit T, T^*, $|T|$ und P_T.*

Beweis. (i) Man setze $|T| = (T^*T)^{1/2}$. Da $T^*T = |T|^2$ ist, gibt es nach Feststellung 2.3.14 genau einen Operator $V \in \mathfrak{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, so daß

$$T = V|T| \quad \text{und} \quad V|(\operatorname{Bild} T)^{\perp} = 0$$

ist. *Wie zeigen, daß V ein partielle Isometrie ist:* Da

$$\|V|T|x\|^2 = \|Tx\|^2 = \||T|x\|^2 \quad \text{für } x \in \mathcal{H}$$

gilt, ist $V : \overline{\operatorname{Bild}}\,|T| \to \mathcal{H}$ isometrisch. Es ist $V : (\overline{\operatorname{Bild}}\,|T|)^{\perp} \to 0$. Also ist V^*V der orthogonale Projektor auf $\overline{\operatorname{Bild}}\,|T|$.

Wir zeigen die Eindeutigkeit der Polarzerlegung: Es gelte $T = WB$ und $W^*W = P_B$, wobei $W \in \mathfrak{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ eine partielle Isometrie ist und $0 \le B \in \mathfrak{L}(Hr)$. Aus

$$T^*T = BW^*WB = BP_BB = B^2$$

und der Eindeutigkeit der positiven Wurzel folgt $B = (T^*T)^{1/2} = |T|$. Aus der Gleichung

$$W|T|x = Tx = V|T|x \quad \text{für } x \in \mathcal{H}$$

folgt $W|\overline{\operatorname{Bild}}\,|T| = V|\overline{\operatorname{Bild}}\,|T|$. Da $W^*W = P_{|T|} = V^*V$ gilt, ist $\operatorname{Kern} W = (\overline{\operatorname{Bild}}\,|T|)^{\perp} = \operatorname{Kern} V$. Also ist $W = V$.

(ii) 1. $|T| = (T^*T)^{1/2}$ haben wir in (i) gezeigt. Es ist $V^*T = VV^*|T| = P_{|T|}|T| = |T|$.
2. Da $V^*V = P_{\overline{\operatorname{Bild}}\,|T|}$ ist, folgt (siehe Lemma 2.5.12)

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild} V^*V &= \overline{\operatorname{Bild}}\,|T| = (\operatorname{Kern}|T|)^{\perp} = (\operatorname{Kern} T^*T)^{\perp} \\ &= (\operatorname{Kern} T)^{\perp} = \overline{\operatorname{Bild}}\, T^*. \end{aligned}$$

3. Da V eine partielle Isometrie ist, ist $V^*V = P_{\operatorname{Bild} V^*}$. Mit $V|T| = T$ folgt nun

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild} VV^* &= V \operatorname{Bild} V^* = V \operatorname{Bild} V^*V = V\, \overline{\operatorname{Bild}}\,|T| \\ &= \overline{\operatorname{Bild}}\, V|T| = \overline{\operatorname{Bild}}\, T. \end{aligned}$$

(iii) Wenn $R \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit T und T^* vertauscht, dann vertauscht R mit der Wurzel $(T^*T)^{1/2} = |T|$ (siehe Satz 2.5.2 (ii)) Nach Feststellung 2.3.14 (iii) vertauscht R mit V.

(iv) Es sei $T = V|T|$ die Polarzerlegung von T. Da $V^*V = P_{|T|}$ ist, gilt

$$T^* = |T|V^* = V^*(V|T|V^*). \tag{$*$}$$

Der Operator $V|T|V^*$ ist positiv und für sein Quadrat gilt

$$(V|T|V^*)^2 = (V|T|)P_{|T|}(|T|T^*) = TT^*.$$

Aus der Eindeutigkeit der positiven Wurzel folgt $V|T|V^* = |T^*|$. Nach (ii) ist

$$\begin{aligned} VV^* &= P_{\overline{\operatorname{Bild}}\,T} = P_{(\operatorname{Kern} T^*)^{\perp}} = P_{(\operatorname{Kern} TT^*)^{\perp}} \\ &= P_{(\operatorname{Kern}|T^*|)^{\perp}} = P_{\overline{\operatorname{Bild}}\,|T^*|} \end{aligned}$$

D.h. VV^* ist der orthogonale Projektor auf $\overline{\operatorname{Bild}}\, V|T|V^*$ und somit ist $(*)$ die Polarzerlegung von T^*.

(v) Wenn $T^*T = TT^*$ ist, so gilt $|T| = |T^*|$. aus den Polarzerlegungen

$$\begin{aligned} T &= V|T^*| \quad \text{mit} \quad V^*V = P_{|T|} \\ T^* &= V^*|T^*| \quad \text{mit} \quad V^*V = P_{|T^*|} \end{aligned}$$

folgt nun $V^*V = P_{|T|} = P_{|T^*|} = VV^*$. Also ist V normal.

2.5.14 Folg. (unitäre Polarzerlegung)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

(i) *Wenn T injektiv ist und $\operatorname{Bild} T$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, dann ist die partielle Isometrie V in der Polarzerlegung $T = V|T|$ ein unitärer Operator.*

(ii) *Wenn T normal ist, so gibt es genau einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

$$T = U|T| \quad \textit{und} \quad U|\operatorname{Kern}|T| = \mathrm{id}_{\operatorname{Kern}|T|}.$$

Dieser Operator U vertauscht mit allen Operatoren, die mit T und T^* vertauschen. Insbesondere vertauscht U mit T, T^* und $|T|$.

Beweis. (i) Nach Voraussetung ist $\overline{\operatorname{Bild}} T^* = \mathcal{H} = \overline{\operatorname{Bild}} T$ (siehe Festst. 2.2.13). Nach Satz 2.5.13 (ii) ist also

$$V^*V = P_{\overline{\operatorname{Bild}} T^*} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \quad \text{und} \quad VV^* = P_{\overline{\operatorname{Bild}} T} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}.$$

D. h., V ist unitär.

(ii) Es sei $T = V|T|$ die Polarzerlegung von T. Da T normal ist, ist

$$\mathcal{Y} := \overline{\operatorname{Bild}} T^* = (\operatorname{Kern} T)^{\perp} = (\operatorname{Kern} T^*)^{\perp} = \overline{\operatorname{Bild}} T$$

(siehe Bem. 2.1.8) und weiterhin

$$\mathcal{Y} = \overline{\operatorname{Bild}}\,|T| = \overline{\operatorname{Bild}}\,|T*|.$$

(siehe Lemma 2.5.12). Nach Satz 2.5.13 (ii) sind also

$$V|\mathcal{Y} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y} \quad \text{und} \quad V^*|\mathcal{Y} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$$

bijektive Isometrien und es gilt $(V|\mathcal{Y})^{-1} = V^*|\mathcal{Y}$.

1. Wir bilden den Operator

$$\begin{aligned} &U : \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^{\perp} \to \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^{\perp} \\ &\quad U : y + z \mapsto Vy + z \quad \text{für } y \in \mathcal{Y} \text{ und } z \in \mathcal{Y}^{\perp}. \end{aligned}$$

Der inversen Operator ist

$$U^{-1} : y + z \mapsto V^*y + z \quad \text{für } y \in \mathcal{Y} \text{ und } z \in \mathcal{Y}^{\perp}.$$

U ist eine bijektive Isometrie:

$$\begin{aligned} \|U(y+z)\|^2 &= \|Vy + z\|^2 = \|Vy\|^2 + \|z\|^2 \\ &= \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y+z\|^2 \end{aligned}$$

und somit ist U unitär. Nach Konstruktion gilt $T = U|T|$ und U ist offensichtlich eindeutig bestimmt.

2. Wenn $\mathbb{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit T und T^* vertauscht, dann gilt $R\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$ und $R\mathcal{X}^{\perp} \subset \mathcal{X}^{\perp}$ und $RV = VR$ (siehe Bem. 2.2.16 (ii) und Satz 2.5.13 (iii)). Nach Konstruktion von U gilt also $RU = UR$.

2.5.15 Satz (Zerlegung in $\pm$-Anteile)

(i) *Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann gibt es eindeutig bestimmte positive Operatoren T_+ und T_- in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, derart daß*

$$T = T_+ - T_- \quad \textit{und} \quad T_+T_- = T_-T_+ = 0$$

ist.

(ii) *Weiterhin gilt $|T| = T_+ + T_-$ und*

$$T = (P_+ - P_-)|T|$$

ist die Polarzerlegung von T, wobei $P_{\pm} := P_{T_{\pm}}$ die Bildprojektionen von $T_{\pm}$ sind.

Beweis. 1. *Wir geben eine Lösung an:* Dazu setzen wir

$$T_{\pm} := \tfrac{1}{2}(|T| \pm T) \quad \text{und} \quad P_{\pm} := P_{T_{\pm}}.$$

Man beachte, daß die Operatoren $|T| = (T^2)^{1/2}, T, T_{\pm}, P_{\pm}$ vertauschen (siehe Satz 2.5.2 und Bem. 2.2.16). Dann ist $T = T_+ - T_-$ und

$$T_+T_- = \tfrac{1}{4}(|T| + T)(|T| - T) = T^2 - T^2 = 0.$$

Hieraus folgt $\langle T_+x, T_-y\rangle = 0$ für $x, y \in \mathcal{H}$. Also ist

$$\overline{\operatorname{Bild}} T_+ \perp \overline{\operatorname{Bild}} T_- \quad \text{und} \quad P_+P_- = 0.$$

(siehe Satz 2.2.5 (ii)). Aus den Gleichungen $P_+T_- = 0$ und $P_-T_+ = 0$ folgt

$$\begin{aligned} T_+ &= \ \ P_+T = P_+|T| = P_+|T|P_+ \geq 0, \\ T_- &= -P_-T = P_-|T| = P_-|T|P_- \geq 0. \end{aligned}$$

2. *Eindeutigkeit der Zerlegung $T = T_+ - T_-$ folgt aus der Eindeutigkeit der Polarzerlegung $T = (P_+ - P_-)|T|$, die wir zugleich mit herleiten.*

Es seien $0 \leq \widetilde{T}_{\pm} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ derart, daß

$$T = \widetilde{T}_+ - \widetilde{T}_- \quad \text{und} \quad \widetilde{T}_+\widetilde{T}_- = 0$$

ist. Es seien $\widetilde{P}_{\pm}$ die Bildprojektionen von $\widetilde{T}_{\pm}$. Aus $\widetilde{T}_+\widetilde{T}_- = 0$ folgt, wir oben gezeigt;

$$\overline{\operatorname{Bild}}\,\widetilde{T}_+ \perp \overline{\operatorname{Bild}}\,\widetilde{T}_- \quad \text{und} \quad \widetilde{P}_+\widetilde{P}_- = 0.$$

Nach Satz 2.2.5 (ii) ist also

$$\operatorname{Bild}(\widetilde{P}_+ + \widetilde{P}_-) = \overline{\operatorname{Bild}}\,\widetilde{T}_+ \oplus \overline{\operatorname{Bild}}\,\widetilde{T}_-.$$

Da $\widetilde{T}_{\pm} = (\widetilde{T}_+ + \widetilde{T}_-)P_{\pm}$ ist:

$$\overline{\operatorname{Bild}}\,\widetilde{T}_+ \oplus \overline{\operatorname{Bild}}\,\widetilde{T}_- \subset \overline{\operatorname{Bild}}(\widetilde{T}_+ + \widetilde{T}_-)$$

Da $(\widetilde{T}_+ + \widetilde{T}_-) = (\widetilde{P}_+ + \widetilde{P}_-)(\widetilde{T}_+ + \widetilde{T}_-)$ ist:

$$\overline{\operatorname{Bild}}(\widetilde{T}_+ + \widetilde{T}_-) \subset \operatorname{Bild}(\widetilde{P}_+ + \widetilde{P}_-).$$

Da nun

$$\begin{aligned} T &= (\widetilde{P}_+ - \widetilde{P}_-)(\widetilde{T}_+ + \widetilde{T}_-), \\ (\widetilde{P}_+ - \widetilde{P}_-)^2 &= \widetilde{P}_+ + \widetilde{P}_- = P_{\widetilde{T}_+ + \widetilde{T}_-} \end{aligned} \tag{$**$}$$

gilt, ist dies die Polarzerlegung von T. Aus der Eindeutigkeit der Polarzerlegung folgt $\widetilde{T}_+ + \widetilde{T}_- = |T|$ (siehe Satz 2.5.13)

Addiert und Subtrahiert man die beiden Gleichungen

$$\widetilde{T}_+ - \widetilde{T}_- = T \quad \text{und} \quad \widetilde{T}_+ + \widetilde{T}_- = |T|$$

so folgt

$$\widetilde{T}_{\pm} = \tfrac{1}{2}(|T| \pm T). \tag{$*$}$$

3. Die Formel $(*)$ ergibt also die eindeutige Zerlegung von T den positiven und negativen Anteil und die Formel $(**)$ die Polarzerlegung von T.

2.5.4 Ordnungsideale

Ordnungsideale sind ein wichtiges Hilfmittel bei der Untersuchung von algebraischen Idealen und Linksidealen in C^*-Unteralgebren von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

2.5.16 Bez. (Ordnungsideal $\mathcal{L}(\mathcal{H})_T$)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. $0 \le T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Wir bezeichnen das Intervall mit den Endpunkten $-T$ und T mit

$$[-T,T] := \{S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid -T \le S \le T.$$

Die Menge

$$\mathcal{L}(\mathcal{H})_T := \bigcup_{n=1}^{\infty} [-nT, nT]$$

heißt das von T erzeugte Ordnungsideal in $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{sa}}$.

Offensichtlich ist $\mathcal{L}(\mathcal{H})_T$ ein $\mathbb{R}$-linearer Teilraum von $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{sa}}$.

Anmerkung. (Struktur eines Ordnungsideals) 1. Wir zeigen in Folgerung 2.5.18, daß jedes Element $S \in [-T,T]$ eine eindeutige Darstellung der Form $S = T^{1/2}AT^{1/2}$ mit $A \in [-P_T, P_T]$ hat.

Es gilt also kurz $\mathcal{L}(\mathcal{H})_T = T^{1/2}\,\mathcal{L}(\mathcal{H})_{\text{sa}}T^{1/2}$

2. Die Abbildung

$$\mathcal{L}(\mathcal{H})_{P_T} \ni A \mapsto T^{1/2}AT^{1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_T$$

ist also ein bijektiver, linearer Ordnungsisomorphismus.

Man beachte, daß $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{P_T} \cong \mathcal{L}(P_T(\mathcal{H}))_{\text{sa}}$ ist.

2.5.17 Satz (Faktorisierung positiver Op.)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und S, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Es gelte $0 \le S \le T$.

(i) *Dann gibt es genau einen positiven Operator $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so daß*

$$S = T^{1/2}BT^{1/2} \quad \text{und} \quad B|\operatorname{Kern} T = 0$$

ist.

(ii) *Für diesen so bestimmten Operator gilt $0 \le B \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.*

Der Operator B vertauscht mit jedem Operator R, der mit S und T vertauscht.

Beweis. (i) 1. Da $S^{1/2}S^{1/2} \le T^{1/2}T^{1/2}$ gilt, gibt es nach Feststellung 2.3.14 genau ein $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit

$$S^{1/2} = AT^{1/2} \quad \text{und} \quad A|(\operatorname{Bild} T^{1/2})^{\perp} = 0. \qquad (*)$$

Man setze $B := A^*A$. Dann gilt

$$S = S^{1/2}S^{1/2} = (AT^{1/2})^*(AT^{1/2}) = T^{1/2}BT^{1/2}.$$

Da $T \ge 0$ ist, gilt

$$(\operatorname{Bild} T^{1/2})^{\perp} = \operatorname{Kern} T^{1/2} = \operatorname{Kern} T = (\operatorname{Bild} T)^{\perp}$$

und folglich $B|(\operatorname{Kern} T) = 0$.

2. *Wir zeigen, daß B eindeutig bestimmt ist:* Es sei $0 \le C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}$ und C erfülle ebenfalls die Bedingungen (i):

$$S = T^{1/2}CT^{1/2} \quad \text{und} \quad C|(\operatorname{Bild} T)^{\perp} = 0.$$

Dann ist $\operatorname{Kern} C^{1/2} = \operatorname{Kern} C \supset \operatorname{Kern} T = \operatorname{Kern} T^{1/2}$ und somit

$$C^{1/2}|(\operatorname{Bild} T^{1/2})^{\perp} = 0. \qquad (**)$$

Da $S^{1/2}S^{1/2} \le (C^{1/2}T^{1/2})^*(C^{1/2}T^{1/2})$ ist, gibt es nach Feststellung 2.3.14 genau ein $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so daß $(***)$:

$$S^{1/2} = V(C^{1/2}T^{1/2}) \quad \text{und} \quad V|(\operatorname{Bild} C^{1/2}T^{1/2})^{\perp} = 0$$

ist.

Nach $(**)$ ist $VC^{1/2}|(\operatorname{Bild} T^{1/2})^{\perp} = 0$. Der Operator $VC^{1/2}$ erfüllt also auch $(*)$. Aus der Eindeutigkeit von A folgt nun $VC^{1/2} = A$.

Wir zeigen in (3.)*, daß V^*V die orthogonale Projektion auf $\overline{\operatorname{Bild}}\, C^{1/2}$ ist.* Wenn wir dies gezeigt haben, folgt die Eindeutigkeit von B:

$$C = C^{1/2}V^*VC^{1/2} = A^*A = B.$$

3. Da

$$\|C^{1/2}T^{1/2}x\|^2 = \|S^{1/2}x\|^2 = \|VC^{1/2}T^{1/2}x\|^2$$

gilt, ist

$$V : \overline{\operatorname{Bild}}\, C^{1/2}T^{1/2} \to \mathcal{H} \quad \text{isometrisch}$$
$$V : (\overline{\operatorname{Bild}}\, C^{1/2}T^{1/2})^{\perp} \to 0.$$

D.h. V ist eine partielle Isometrie und V^*V ist der orthogonale Projektor auf $\overline{\operatorname{Bild}}\, C^{1/2}T^{1/2}$.

Nach $(**)$ ist

$$\overline{\operatorname{Bild}}\, C^{1/2} = \overline{\operatorname{Bild}}\, C^{1/2}|\,\overline{\operatorname{Bild}}\, T^{1/2}. = \overline{\operatorname{Bild}}\, C^{1/2}T^{1/2}$$

Also ist V^*V der orthogonale Projektor auf $\overline{\operatorname{Bild}}\, C^{1/2}$

(ii) Nach Feststellung 2.3.14 ist $\|B\| = \|A\|^2 \le 1\}$ und somit $0 \le B \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

Wenn $RS = SR$ und $RT = TR$ so ist auch $R^*S = SR^*$ und $R^*T = TR^*$. Nach Satz 2.5.2 vertauschen R und R^* mit $S^{1/2}$ und $T^{1/2}$. Nach Feststellung 2.3.14 vertauschen R und R^* mit A und also auch mit A^*. Somit vertauscht R mit $A^*A = B$.

2.5.18 Folg. (Faktorisierung: Ordnungsintervall)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und S, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Es gelte $-T \le S \le T$.

(i) *Nach Satz 2.5.17 gibt es genau einen selbstadjungierten Operator $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so daß*

$$S = T^{1/2}BT^{1/2} \quad \text{und} \quad B|\operatorname{Kern} T = 0$$

ist.

(ii) *Für diesen so bestimmten Operator gilt $\|B\| \le 1$.*

Der Operator B vertauscht mit jedem Operator R, der mit S und T vertauscht.

3 Spektralsatz für normale Operatoren

1. Für einen Operator T auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ bilde man die von ihm erzeugte unitale C^*-Algebra

$$C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) := \mathrm{BAlg}(T, T^*, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}),$$

also die kleinste unitale Banach-Unteralgebra von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, die T und T^* enthält. Diese Algebra ist ein nützliches Hilfmittel bei der Untersuchung von T.

2. $C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$ ist genau dann kommutativ, wenn T normal ist. Der Spektralsatz für normale Operatoren besagt:

*Die Algebra $C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$ ist auf natürliche Weise isometrisch *-isomorph zu der Algebra $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ der stetigen komplexen Funktionen auf dem Spektrum von T.*

Wir werden den Satz in Abschnitt 3.5 beweisen.

3. Wir geben im Abschnitt 3.1 für zwei wichtige Spezialfälle des Spektralsatzes 3.5.1 unabhängige einfachere Beweise. Dies ist einerseits der Fall eines selbstadjungierten Operators (siehe Satz 3.1.2) und andererseits der Fall eines unitären Operators (siehe Satz 3.1.3).

In beiden Fällen kann man die besondere Lage des Spektrums und eine Entsprechung von Polynomen einer Variablen mit einer dichten Unteralgebra von $C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$ ausnutzen.

$T = T^*$: Das Spektrum $\sigma(T)$ ist reell. Nach dem Satz von Weierstraß liegen die Polynome dicht in den stetigen Funktionen auf dem Spektrum.

Andererseits liegen die Polynome $p(T)$ dicht in $C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$. Die Isomorphei folgt nun aus dem spektrale Abbildungssatz E.1.2 für Polynome einer Variablen.

$U^* = U^{-1}$: Das Spektrum liegt in der Einheitskreislinie $\mathbb{T}$. Den trigonometrischen Polynomen $p(\zeta)$ auf $\mathbb{T}$ entsprechen die Operatoren $p(U)$. Diese Polynome liegen dicht in $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ bzw. $C^*(U, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$. Aus dem spektralen Abbildungssatz E.1.2 für Polynome einer Variablen folgt sofort der entsprechende Abbildungssatz für trigonometrische Polynome und damit das Resultat.

Der allgemein gültige spektrale Abbildungssatz E.1.2 für Polynome einer Variablen führt also in beiden Fällen zum Ziel. Dieser Satz folgte unmittelbar aus der Zerlegung eines Polynoms einer komplexen Variablen in Linearfaktoren.

4. Für beliebige normale Operatoren T kommt man mit Polynomen einer Variablen nicht aus. Erst Polynome der Form $p(T, T^*)$ bilden eine dichte Unteralgebra. Der Beweis des entsprechenden spektralen Abbildungssatzes 3.4.4 für Polynome der Form $p(\zeta, \overline{\zeta})$ beruht nicht mehr auf algebraischen Eigenschaften der Polynome in zwei Variablen sondern folgt aus den besonderen Eigenschaften der Ideale und Charaktere der C^*-Algebra $C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$.

5. Alle Beweise benutzen zusätzlich die C^*-Gleichung $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.

Alle Aussagen dieses Kapitels gelten sinngemäß für beliebige C^*-Algebren. Die Beweise müß man hierfür geringfügig erweitern, da man vorerst nicht auf das Abschnitt 2 über Operatoren auf dem Hilbertraum zurückgreifen kann. In den Anmerkungen zu den jeweiligen Sätzen wird dies genauer erklärt.

3.1 Spektralsatz für selbstadjungierte und unitäre Operatoren

3.1.1 Bem. (Spektralradius normaler Op)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Für einen normalen Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ist der Spektralradius von T gleich der Norm von T:

$$\mathrm{r}(T) = \|T\|.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus der C^*-Gleichung (siehe Festst. 2.1.2) und der Formel für den Spektralradius (siehe Satz E.1.5).

Für selbstadjungierte $S \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|S^{2^n}\| = \|S^{2^{n-1}}\|^2 = \cdots = \|S^2\|^{2^{n-1}} = \|S\|^{2^n}.$$

Wenn T normal ist, folgt:

$$\begin{aligned}\|T^{2^n}\|^2 &= \|(T^{2^n})^* T^{2^n}\| = \|(T^*)^{2^n} T^{2^n}\| \\ &= \|(T^*T)^{2^n}\| = \|T^*T\|^{2^n} = \|T\|^{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Aus der Formel für den Spektralradius folgt nun

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\|T^{2^n}\|} = \|T\|.$$

3.1.2 Satz (Spektralsatz für selbstadj. Op.)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T = T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

(i) *Das Spektrum von T ist eine kompakte Teilmenge des Intervalls $\big[-\|T\|, \|T\|\big] \subset \mathbb{R}$.*

(ii) *Es gibt genau einen *-Homorphismus $\Psi : C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ mit*

$$\Psi(T) = \zeta \quad \text{und} \quad \Psi(\mathrm{id}_{\mathcal{H}}) = \mathbb{1}_{\sigma(T)},$$

wobei $\zeta : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ die identische Funktion bezeichnet.
Ψ ist isometrisch und bijektiv.

(iii) *Zur Abkürzung bezeichne $\widehat{S} = \Psi(S)$. Es gilt der spektrale Abbildungsatz:*

$$\sigma(S) = \{\widehat{S}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\} \quad \text{für } S \in \mathcal{A}.$$

Das Spektrum von S sind die Funktionwerte von $\widehat{S}$.

Beweis. (i) 1. *Wir konstruieren zunächst einen *-Homomorphismus* $\Psi : \mathrm{Alg}(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$. $\mathrm{Alg}(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$ besteht aus den Polynomen $p(T)$ mit $p \in \mathbb{C}[\zeta]$. Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[\zeta]$ bilde man die Einschrankung $\widehat{p} := p|\,\sigma(T)$. Aus dem spektralen Abbildungssatz E.1.2

$$\widehat{p}(\sigma(T)) = \sigma(p(T))$$

und der Spektralradiusformel für normale Operatoren (siehe Bem. 3.1.1) folgt

$$\|\widehat{p}\|_{\sup} := \max_{\lambda\in\sigma(T)} |\widehat{p}(\lambda)| = \mathrm{r}(p(T)) = \|p(T)\|.$$

Für zwei Polynome $p, q \in \mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}]$ mit $p(T) = q(T)$ ist also

$$\begin{aligned}\|\widehat{p} - \widehat{q}\|_{\sup} &= \|\widehat{p - q}\|_{\sup} \\ &= \|(p-q)(T)\| = \|p(T) - q(T)\| = 0.\end{aligned}$$

Die Abbildung $\Psi : \mathrm{Alg}(T, \mathrm{id}_E) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ mit

$$p(T) \mapsto \widehat{p} \quad \text{für } p \in \mathbb{C}[\zeta]$$

ist wohldefiniert und isometrisch. Ψ ist ein *-Homomorphismus:

$$\begin{aligned} p(T) + q(T) = (p+q)(T) &\mapsto \widehat{p+q} = \widehat{p} + \widehat{q}, \\ p(T) \cdot q(T) = (p \cdot q)(T) &\mapsto \widehat{p \cdot q} = \widehat{p} \cdot \widehat{q}, \\ (p(T))^* = \overline{p}(T) &\mapsto \widehat{\overline{p}}. \end{aligned}$$

wobei $\overline{p}$ das Polynom mit den konjugiert komplexen Koeffizienten ist. Es ist $\Psi(\mathrm{id}_E) = \mathbb{1}_{\sigma(T)}$ und $\Psi(T) = \zeta$.

2. Da $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ mit der Norm $\|\cdot\|_{\sup}$ vollständig ist, hat Ψ genau eine stetige Fortsetzung auf $C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$, die wir wieder mit Ψ bezeichnen.

Diese Forsetzung $\Psi : C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ ist ein isometrischer *-Homomorphismus.

Da Ψ isometrisch ist, ist $\mathrm{Bild}\,\Psi$ abgeschlossen. Nach dem Satz von Weierstraß liegen die Polynome $\widehat{p}$ mit $p \in \mathbb{C}[\zeta]$ dicht in $C(\sigma(T), \mathbb{C})$. Das Bild von Ψ ist also dicht und abgeschlossen, d.h., Ψ bijektiv.

3. *Wir zeigen die Eindeutigkeit von* Ψ. Es sei $\widetilde{\Psi} : C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$ ein *-Homomorphismus mit $\widetilde{\Psi}(T) = \zeta$. Für $\lambda \in \sigma(T)$ ist die Abbildung $\chi : C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \to \mathbb{C}$ mit

$$\chi : S \mapsto \widetilde{\Psi}(S)(\lambda) \quad \text{für } S \in C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$$

ein Charakter von $C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$ mit $\chi(T) = \lambda$. Für Polynome $p \in \mathbb{C}[\zeta]$ gilt also

$$\chi(p(T))(\lambda) = \widehat{p}(\lambda) = \Psi(p(T))(\lambda).$$

Nach Bemerkung B.4.9) ist $\|\chi\| = 1$. Da χ und Ψ stetig sind und auf der dichten Teilmenge $\mathrm{Alg}(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$ übereinstimmen folgt

$$\chi(S) = \Psi(S)(\lambda) \quad \text{für } S \in C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}). \qquad (*)$$

Für $S \in C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$ gilt also

$$\widetilde{\Psi}(S)(\lambda) = \Psi(S)(\lambda).$$

Da dies für alle $\lambda \in \sigma(T)$ gilt, ist $\widetilde{\Psi} = \Psi$.

(ii) Da $\Psi : \mathcal{A} \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ ein bijektiver Isomorphismus von unitalen Banachalgebren ist, haben einander entsprechende Elemente dasselbe Spektrum in bezug auf die jeweilige Algebra.

Das Spektrum einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge besteht gerade aus den Funktionswerten.

Nach Feststellung 2.4.12 ist jede unitale C^*-Unteralgebra eine volle Unteralgebra und folglich ist

$$\sigma_{\mathcal{A}}(S) = \sigma_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(S) \quad \text{für } S \in \mathcal{A}.$$

(siehe Bez. E.2.1). Insgesamt folgt

$$\sigma(S) = \sigma_{\mathcal{A}}(S) = \sigma_{C(\sigma(T), \mathbb{C})}(\widehat{S}) = \widehat{S}(\sigma(T)).$$

Anmerkung. (zum Beweis von Satz 3.1.2 (ii)) 1. Der Beweis zu Teil (i) von Satz 3.1.2 benutzt nur, daß $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine unitale C^*-Algebra ist und macht keinen keinen Gebrauch davon, daß die Elemente Operatoren auf dem Hilbertraum sind, d.h. der Beweis gilt unverändert für jede abstrakte unitale C^*-Algebra.

2. Im Beweis zu Teil (ii) von Satz 3.1.2 wurde aber die Feststellung 2.4.12 benutzt, daß jede unitale C^*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine volle Unteralgebra ist. Wenn man den Beweis etwas anders führt, erhält man nicht nur einen Beweis zu Teil (ii) von Satz 3.1.2 sondern auch einen neuen Beweis, daß unitale C^*-Unteralgebren voll sind. Der folgende Beweis benutzt nur die C^*-Gleichung und Satz 3.1.2 (i).

(a) *Wir zeigen: Ist $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra, $T = T^* \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_0 := C^*(T, \mathbb{1}_{\mathcal{A}})$, so ist $\sigma_{\mathcal{A}}(T) = \sigma_{\mathcal{A}_0}(T)$:*

Beweis. Man wende Satz 3.1.2 (i) auf die unitale C^*-Algebra $\mathcal{A}$ an: Es gibt es einen isometrischen, bijektiven *-Homorphismus $\Psi : \mathcal{A}_0 \to C(\sigma_{\mathcal{A}}(T), \mathbb{C})$ wobei $\Psi(T) = \zeta$ die identische Funktion auf $\sigma_{\mathcal{A}}(T)$ ist. Also haben die Elemente $T \in \mathcal{A}_0$ und $\zeta = \Psi(T)$ dasselbe Spektrum in bezug auf die jeweilige Algebra. Das Spektrum einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge besteht gerade aus den Funktionswerten. Somit ist

$$\sigma_{\mathcal{A}_0}(T) = \sigma_{C(\sigma_{\mathcal{A}}(T), \mathbb{C})}(\zeta) = \sigma_{\mathcal{A}}(T).$$

(b) *Wir zeigen: Ist $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra, $T = T^* \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_0 := C^*(T, \mathbb{1}_{\mathcal{A}})$, so ist $\sigma_{\mathcal{A}}(T) = \sigma_{\mathcal{A}_0}(T)$:*

Beweis. Wenn $T^{-1} \in \mathcal{A}$ existiert, so existiert $(T^*T)^{-1} = T^{-1}(T^*)^{-1}$ Da T^*T selbstadjungiert ist, folgt aus (a) $(T^*T)^{-1} \in C^*(T^*T, \mathbb{1}_{\mathcal{A}})$. Hieraus folgt

$$T^{-1} = (T^*T)^{-1}T^* \in C^*(T^*T, \mathbb{1}_{\mathcal{A}})T^* \subset C^*(T, \mathbb{1}_{\mathcal{A}}).$$

Für die Resolventenmengen gilt also:

$$\rho_{\mathcal{A}}(T) = \rho_{\mathcal{A}_0}(T).$$

Also sind auch die Komplemente gleich: $\sigma_{\mathcal{A}}(T) = \sigma_{\mathcal{A}_0}(T)$.

(c) Nun kann man den Beweis zu Teil (ii) von Satz 3.1.2 wie angegeben führen. Man ersetze nur den Verweis auf Feststellung 2.4.12 durch die obige Aussage (b).

3.1.1 Spektralsatz für unitäre Op.

3.1.3 Satz (Spektralsatz für unitäre Op.)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(i) *Das spektrum von U ist eine kompakte Teilmenge der Einheitskreislinie $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$.*

(ii) *Es gibt genau einen *-Homorphismus $\Psi : C^*(U, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \to C(\sigma(U), \mathbb{C})$ mit*

$$\Psi(U) = \zeta \quad \textit{und} \quad \Psi(\mathrm{id}_{\mathcal{H}}) = \mathbb{1}_{\sigma(U)},$$

wobei $\zeta : \sigma(U) \to \mathbb{C}$ die identische Funktion bezeichnet.
Ψ ist isometrisch und bijektiv.

(iii) Zur Abkürzung bezeichne $\widehat{S} = \Psi(S)$. *Es gilt der spektrale Abbildungsatz:*

$$\sigma(S) = \{\widehat{S}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(U)\} \quad \textit{für } S \in \mathcal{A}.$$

Das Spektrum von S sind die Funktionwerte von $\widehat{S}$.

3.2 Ideale in C^*-Algebren

3.2.1 Festst. (Approximative Eins)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{A} := C^*(T^*T)$ die von T^*T erzeugte C^*-Algebra. Man beachte, daß i. allg $\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \notin \mathcal{A}$ ist.

Dann gibt es eine Folge $(U_n)_n$ selbstadjungierter Elemente in $\mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften

1. $0 \le U_n \le U_{n+1} \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ *für* $n \in \mathbb{N}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - TU_n\| = 0$.

Beweis. Nach Lemma 2.4.15 ist $(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + nT^*T)$ für $n \in \mathbb{N}$ invertierbar und nach Lemma 2.4.11 liegt die Inverse in $C^*(T^*T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$. Wir setzen zu Abkürzung $S := T^*T$ und definieren

$$U_n := nS(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + nS)^{-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich liegt $U_n \in \mathcal{A}$.

1. Nach Satz 2.4.7 ist $(n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + S)^{-1} \ge 0$. Aus

$$\begin{aligned} nS(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + (n+1)S) &= nS + n(n+1)S^2 \\ &\le (n+1)S + n(n+1)S^2 = (n+1)S(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + nS) \end{aligned}$$

folgt nun mit Satz 2.4.5

$$\begin{aligned} U_n = nS((\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + nS)^{-1} \\ &\le (n+1)S(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + (n+1)S)^{-1} = U_{n+1}. \end{aligned}$$

Ebenso folgt aus $0 \le nS \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}} + nS$, daß $0 \le U_n = nS(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + nS)^{-1} \le \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ und $\|\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - U_n\| \le 1$ ist.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$0 \le S(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - U_n) = S(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + nS)^{-1} \le \frac{1}{n}\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

und somit $\|S - SU_n\| \le \frac{1}{n}$.

3. Mit der C^*-Gleichung folgt nun

$$\begin{aligned} \|T - TU_n\|^2 &= \|(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - U_n)T^*T(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - U_n)\| \\ &\le \|(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - U_n)\|\,\|T^*T(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - U_n)\| \le \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - TU_n\| = 0$.

Anmerkung. 1. Feststellung 3.2.1 (2.) gilt in jeder C^*-Algebra. Man modifiziere den Beweis geringfügig und setze $U_n := nS^2(\mathbb{1} + nS^2)^{-1}$. Aus dem Spektralsatz 3.1.2 (i) für selbstadjungierte Operatoren folgt, daß U_n wohldefiniert ist und $\|S - SU_n\|^2 \le \frac{1}{n}$ gilt. Punkt 3. des Beweises kann unverändert übernommen werden.

2. Damit gilt auch der folgende Satz in jeder C^*-Algebra.

3.2.2 Satz (abgeschlossenes Ideal in C^*-Alg.)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{A}$ eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Jedes abgeschlossene zweiseitige Ideal $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter der Involution *. Das Ideal $\mathcal{J}$ ist also eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$.

Anmerkung. (selbsadjungierte Menge) Eine Teilmenge von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, die mit T auch T^* enthält, wird in der Literatur auch selbstadjungiert genannt. Jede abgeschlossene zweiseitige Ideal einer C^*-Algebra ist also selbstadjungiert.

Beweis. Es sei $\mathcal{J}$ ein zweiseitige Ideal in $\mathcal{A}$. Für $T \in \mathcal{J}$ ist $T^*T \in \mathcal{J}$ und folglich ist $C^*(T) \subset \mathcal{J}$. Nach Feststellung 3.2.1 gibt es eine Folge $(U_n)_n$ in $C^*(T)$ mit $U_n = U_n^*$ und $T = \lim\limits_{n\to\infty} U_nT$. Dann gilt für die adjungierten Operatoren

$$T^* = \lim_{n\to\infty} T^*U_n \in \mathcal{J}.$$

Anmerkung. 1. Wenn $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal in einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist, so ist die Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ mit der Quotientennorm eine Banachalgebra (siehe Satz B.4.11). Da das Ideal abgeschlossen unter der $*$-Operation ist, erhält man durch die Vorschrift

$$[T] = T + \mathcal{J} \mapsto (T + \mathcal{J})^* = T + \mathcal{J} = [T^*]$$

eine Involution auf der Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. Man bezeichnet diese Involution wieder mit $[T]^* := [T^*]$ und rechnet die üblichen Eigenschaften nach:

$$\begin{aligned} [\alpha T]^* &= \overline{\alpha}[T^*] \\ [S + T]^* &= [S]^* + [T]^* \\ [ST]^* &= [T]^*[S]^* \end{aligned}$$

für $S, T \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Man sieht leicht, daß diese Involution auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ isometrisch ist.

2. Mit Hilfe von Feststellung 3.2.1 erhält man für die Quotientennorm

$$\big\|[T]\big\| = \inf\{\|T - TU\| \mid U \in \mathcal{J} \text{ und } 0 \le U \le \mathbb{1}\}.$$

Mit dieser Gleichung sieht man, daß die Quotientennorm die C^*-Bedingung erfüllt. D. h., $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ ist eine *abstrakte* C^*-Algebra.

3. Beispiele zeigen, das man diese Quotientenalgebra i. allg. nicht auf natürliche Weise irgenwie durch Operatoren in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ realisieren kann. Die Situation ist ganz anders im Fall des Quotientenraumes eines Hilbertraumes (siehe Bem. B.2.9)

3.3 Polynomialer Funktionalkalkül

3.3.1 Ziel

Das Ziel der nächsten Abschnitte 3.4 und 3.5 ist es, den spektralen Abbildungssatz für den polynomialen Funktionalkalkül eines normalen Operators T zu zeigen (siehe Folg. 3.4.4). Hieraus erhält man dann einen isometrischen *-Isomorphismus $\operatorname{Alg}(T, T^*, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \hookrightarrow C(\sigma(T), \mathbb{C})$, bei dem einem Polynom $p(T, T^*)$ dessen Einschränkung $\widehat{p} := p|\,\sigma(T)$ entspricht.

Mit dem Approximationsatz von Weierstraß folgt dann Satz 3.5.1:

Die von einem normalen Operator erzeugte C^*-Algebra $C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$ ist isometrisch *-isomorph zur Algebra $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ der stetigen Funktionen auf dem Spektrum von T.

3.3.2 Bem. (Polynome $p(T, T^*)$)

(i) *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal. Man bilde die selbstadjungierten Operatoren*

$$R := \operatorname{Re} T = \frac{T + T^*}{2} \quad \textit{und} \quad S := \operatorname{Im} T = \frac{T - T^*}{2i}$$

Da T normal ist, vertauschen R und S.

(ii) *Für ein Polynom $q \in \mathbb{C}[\xi, \eta]$ der Gestalt*

$$q(\xi, \eta) = \sum_{\iota, \varkappa = 1}^{n} \alpha_{\iota,\varkappa} \xi^{\iota} \eta^{\varkappa}$$

mit komplexen Koeffizinten $\alpha_{\iota,\varkappa}$ und reellen Variablen $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ bilde man den Operator

$$q(R, S) := \sum_{\iota, \varkappa = 1}^{n} \alpha_{\iota,\varkappa} R^{\iota} S^{\varkappa}$$

Die Abbildung

$$\mathbb{C}[\xi, \eta] \ni q \mapsto q(R, S) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \qquad (*)$$

ist ein komplexer Algebrenhomomorphismus. Die Polynome in den rellen Variablen (ξ, η) bilden eine *-Algebra mit der Involution $q \mapsto \overline{q}$, die man durch

$$\overline{q}(\xi, \eta) = \sum_{\iota, \varkappa = 1}^{n} \overline{\alpha}_{\iota,\varkappa} \xi^{\iota} \eta^{\varkappa}$$

erklärt. Die Abbildung $(*)$ ist ein *-Homomorphismus.

(iii) *Praktischer ist es, die Polynome $q(R, S)$ in T und T^* auszudrücken. Dazu bilde man die komplexe Variable $\zeta := \xi + i\eta \in \mathbb{C}$. Setzt man $\xi = \frac{1}{2}(\zeta + \overline{\zeta})$ und $\eta = \frac{1}{2i}(\zeta - \overline{\zeta})$ in ein Polynom $q(\xi, \eta)$ ein, so erhält man ein Polynom p in den Variablen ζ und $\overline{\zeta}$:*

$$\begin{aligned} q(\tfrac{1}{2}(\zeta + \overline{\zeta}), \tfrac{1}{2i}(\zeta - \overline{\zeta})) &= \sum_{\iota, \varkappa = 1}^{n} \alpha_{\iota,\varkappa} \big(\tfrac{\zeta + \overline{\zeta}}{2}\big)^{\iota} \big(\tfrac{\zeta - \overline{\zeta}}{2i}\big)^{\varkappa} \\ &= \sum_{\mu,\nu}^{n} \gamma_{\mu\nu} \zeta^{\mu} \overline{\zeta}^{\nu} =: p(\zeta, \overline{\zeta}). \end{aligned}$$

Die Bezeichnung $p(\zeta, \overline{\zeta})$ sinnvoll, da die Koeffizienten $\gamma_{\mu\nu}$ eindeutig bestimmt sind. Es gilt

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{\partial^{\mu} \overline{\partial}^{\nu}}{\mu! \nu!} q(\xi, \eta),$$

wobei, wie in der Funktionentheorie üblich, $\partial := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \xi} - i \frac{\partial}{\partial \eta})$ und $\overline{\partial} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta})$ bedeutet.

Man bezeichnet diese Art Polynome immer mit $p(\zeta, \overline{\zeta})$, um sie von den üblichen Polynomen in einer komplexen Variablen ζ zu unterscheiden.

Man bezeichnet mit $\mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}]$ den Raum der Polynome in den komplexen Variablen $(\zeta, \overline{\zeta})$. Die Algebren $\mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}]$ und $\mathbb{C}[\xi, \eta]$ sind *-isomorph. Üblicherweise identifiziert man die beiden.

Die Involution auf $\mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}]$ ist:

$$p(\zeta, \overline{\zeta}) \mapsto \overline{p(\zeta, \overline{\zeta})} = \overline{p}(\overline{\zeta}, \zeta),$$

wobei $\overline{p}$ die konjugiert komplexen Koeffizienten $\overline{\gamma}_{\mu,\nu}$ hat.

(iv) *Man kann den *-Homomorphismus aus Punkt (ii) nun auch für Polynome $p \in \mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}]$ aufschreiben:*

$$p(\zeta, \overline{\zeta}) = \sum_{\mu,\nu}^{n} \gamma_{\mu\nu} \zeta^{\mu} \overline{\zeta}^{\nu} \mapsto p(T, T^*) := \sum_{\mu,\nu}^{n} \gamma_{\mu\nu} T^{\mu} (T^*)^{\nu}.$$

Für $q(\xi, \eta) = p(\zeta, \overline{\zeta})$ ist $q(\operatorname{Re} T, \operatorname{Im} T) = p(T, T^*)$.

3.3.3 Bez. (Polynom. Funktionalkalkül $p(T, T^*)$)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal. Der *-Homomorphismus $\mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}] \to C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$ mit

$$p(\zeta, \overline{\zeta}) \mapsto p(T, T^*),$$

der in Bemerkung 3.3.2 (iv) erklärt wurde, heißt der *Polynomiale Funktionalkalkül* für den normalen Operator T.

3.4 Charaktere und Spektrum

3.4.1 Festst. (Charaktere sind *-Homomorphism.) *Es sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra. Jeder Charakter χ von $\mathcal{A}$ ist ein *-Homorphismus. d.h.,*

$$\chi(T^*) = \overline{\chi(T)} \quad \text{für } T \in \mathcal{A}.$$

Beweis. *Es reicht zu zeigen: Für $T = T^*$ ist $\chi(T) = \operatorname{Re}\chi(T)$.*

Es sei $\chi(T) = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Für den Parameter $s \in \mathbb{R}$ betrachte man $T_s := T + is\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$. Aus

$$\begin{aligned}\alpha^2 + (\beta+s)^2 = |\chi(T_s)|^2 \leq \|T_s\|^2 = \|T_s^* T_s\| \\ = \|T^2 + s^2\mathbb{1}_{\mathcal{A}}\| \leq \|T^2\| + s^2\end{aligned}$$

folgt

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta s \leq \|T^2\| \quad \text{für } s \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist $\operatorname{Im}\chi(T) = \beta = 0$.

Anmerkung. (anderer Beweis von Festst. 3.4.1) $\operatorname{Kern}\chi$ ist ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{A}$. Also liegt mit S auch $S^* \in \operatorname{Kern}\chi$. Aus $\chi(\chi(T)\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T) = 0$ folgt also

$$\begin{aligned}\overline{\chi(T)} - \chi(T^*) &= \chi(\overline{\chi(T)}\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T^*) \\ &= \chi((\chi(T)\operatorname{id} - T)^*) = 0.\end{aligned}$$

3.4.2 Festst. ($\sigma(T)$ und Charakt. von $C^*(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$) *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ normal und $\mathcal{A} := C^*(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$.*

(i) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *$\lambda \in \sigma(T)$.*

(b) *Es gibt in $\mathcal{A}$ ein abgeschlossenes echtes Ideal $\mathcal{J}_\lambda$ mit $\lambda\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T \in \mathcal{J}_\lambda$.*

(c) *Es gibt einen Charakter $\chi_\lambda \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ mit $\chi_\lambda(T) = \lambda$.*

In diesem Fall sind χ_λ und $\mathcal{J}_\lambda$ eindeutig bestimmt und es gilt $\mathcal{J}_\lambda = \operatorname{Kern}\chi_\lambda$.

(ii) *Die Abbildung*

$$\Sigma_{\mathcal{A}} \ni \chi \mapsto \chi(T) \in \sigma_{\mathcal{A}}(T)$$

ist bijektiv.

Beweis. (i) *Wir zeigen die Äquivalenzen:*

(a) ⇒ (b): Ohne Einschränkung sei $\lambda = 0$. Sonst betrachte man den Operator $T_\lambda := \lambda\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T$ und den Punkt $0 \in \sigma(T_\lambda)$. Es ist $C^*(T_\lambda, \operatorname{id}_{\mathcal{H}}) = C^*(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$.

Es sei $\mathcal{J}_0$ der Abschluß des echten Ideals

$$T\mathcal{A} := \{TA \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Nach Satz B.4.10 ist $\mathcal{J}_0$ ist ein echtes Ideal.

(b) ⇒ (c): Nach Satz 3.2.2 ist $\mathcal{J}_0$ eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Also liegt mit T auch $T^* \in \mathcal{J}_0$.

Da die Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}_0$ ist eine unitale Banachalgebra. Da sie von den Nebenklassen $T + \mathcal{J}_0 = [0]$, $T^* + \mathcal{J}_0 = [0]$ und $\operatorname{id}_{\mathcal{H}} + \mathcal{J}_0 = [\operatorname{id}_{\mathcal{H}}]$ erzeugt wird, ist $\mathcal{A}/\mathcal{J}_0 = \mathbb{C}[\operatorname{id}_{\mathcal{H}}]$. Die Abbildung $\iota : \mathcal{A}/\mathcal{J}_0 \to \mathbb{C}$ mit

$$\iota : \lambda[\operatorname{id}_{\mathcal{H}}] \mapsto \lambda \in \mathbb{C}$$

ist ein isometrischer *-Algebrenisomorphismus. Die Komposition mit der Quotientenabbildung $\varkappa : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}_0$ ergibt einen Charakter $\chi_0 := \iota \circ \varkappa$ von $\mathcal{A}$ mit $\chi_0(T) = 0$.

Aus der Konstruktion folgt

$$\operatorname{Kern}\chi_0 = \mathcal{J}_0. \tag{$*$}$$

(c) ⇒ (a): Wenn $R \in \mathcal{A}$ eine Inverse $R^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ hat, so ist $R^{-1} \in \mathcal{A}$ (siehe Festst. 2.4.12) und folglich

$$\chi(R)\chi(R^{-1}) = \chi(\operatorname{id}_{\mathcal{H}}) = 1.$$

Wenn also $\lambda = \chi(T)$ ist, so hat $\lambda\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T$ keine Inverse in $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, d.h., $\lambda \in \sigma(T)$.

Wir zeigen die Eindeutigkeit von χ_λ und $\mathcal{J}_\lambda$: Aus ($*$) folgt $\operatorname{Kern}\chi_\lambda = \mathcal{J}_\lambda$.

Nach Bemerkung B.4.9 ist jeder Charakter χ von $\mathcal{A}$ beschränkt und folglich durch seine Einschränkung auf eine dichte Teilmenge eindeutig bestimmt. Nach Definition von $C^*(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$ liegen die Polynome $p(T, T^*)$, $p \in \mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}]$ dicht.

Aus $\chi(T) = \lambda$ folgt $\chi(T^*) = \overline{\lambda}$ (siehe Festst. 3.4.1) und

$$\chi(p(T, T^*)) = p(\lambda, \overline{\lambda}) = \chi_\lambda(p(T, T^*)) \quad \text{für } p \in \mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}].$$

Also ist $\chi = \chi_\lambda$.

(ii) folgt aus (i) und der Eindeutigkeit des Charakters χ_λ.

3.4.3 Festst.
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ normal und $\mathcal{A} := C^*(T, \operatorname{id}_{\mathcal{H}})$. Für $S \in \mathcal{A}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) *$\mu \in \sigma(S)$.*

(b) *Es gibt ein $\chi \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ mit $\mu = \chi(S)$.*

Beweis. (a) ⇒ (b): Es sei $\mathcal{I}$ der Abschluß des echten Ideals

$$(\mu\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - S)\mathcal{A} := \{(\mu\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - S)A \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Nach Satz B.4.10 ist $\mathcal{I}$ ist ein echtes Ideal und folglich ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ eine unitale Banachalgebra. Das Element $[T] = T + \mathcal{I}$ hat nach Bezeichnung E.2.2 nichtleeres Spektrum. Es sei $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}([T])$.

Da $[\lambda\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T]$ nicht invertierbar ist, ist $[\lambda\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T]\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ein echtes Ideal von $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Das Urbild

$$\{A \in \mathcal{A} \mid [A] \in [\lambda\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T]\mathcal{A}/\mathcal{I}\}.$$

ist ein echtes Ideal von $\mathcal{A}$. Nach Satz B.4.10 ist der Abschluß $\mathcal{J}_\lambda$ dieses Urbildes ein echtes Ideal von $\mathcal{A}$. $\mathcal{J}_\lambda$ enthält $\lambda\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T$ und $\mu\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - S$. Nach (i) gibt es einen Charakter $\chi_\lambda \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{J}_\lambda = \operatorname{Kern}\chi_\lambda$. Insbesondere ist $\chi_\lambda(\mu\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - S) = 0$.

(b) ⇒ (a): Wenn $R \in \mathcal{A}$ eine Inverse $R^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ hat, so ist $R^{-1} \in \mathcal{A}$ (siehe Festst. 2.4.12) und folglich

$$\chi(R)\chi(R^{-1}) = \chi(\operatorname{id}_{\mathcal{H}}) = 1.$$

Wenn also $\mu = \chi(S)$ ist, so hat $\mu\operatorname{id}_{\mathcal{H}} - S$ keine Inverse in $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, d.h., $\mu \in \sigma(S)$.

3.4.4 Folg. (Spektr. Abbildungssatz für $p(T, T^*)$) *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ normal.*

Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}]$ gilt der spektrale Abbildungssatz

$$\sigma(p(T, T^*)) = \{p(\lambda, \overline{\lambda}) \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Beweis. Es sei $\mathcal{A} := C^*(T, \mathrm{id}_{\mathcal{H}})$.

1. Nach Feststellung 3.4.3 gibt es zu $\mu \in \sigma(p(T, T^*))$ einen Charakter $\chi \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ mit $\chi(p(T, T^*)) = \mu$. Nach Feststellung 3.4.2 ist $\lambda = \chi(T) \in \sigma(T)$. Nach Feststellung 3.4.1 ist $\overline{\lambda} = \chi(T^*)$ und folglich ist $\mu = \chi(p(T, T^*)) = p(\lambda, \overline{\lambda})$.

2. Nach Feststellung 3.4.2 gibt es zu $\lambda \in \sigma(T)$ einen Charakter $\chi_\lambda \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ mit $\lambda = \chi_\lambda(T)$. Nach Feststellung 3.4.1 ist $\overline{\lambda} = \chi(T^*)$.

Aus Feststellung 3.4.3 folgt nun

$$p(\lambda, \overline{\lambda}) = \chi(p(T, T^*)) \in \sigma(p(T, T^*)).$$

3.5 Spektralsatz für normale Op.

3.5.1 Satz (Spektralsatz für normale Op.) *Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ normal und $\mathcal{A} := C^*(T, \mathrm{id}_\mathcal{H})$.*

(i) *Es gibt genau einen *-Homorphismus $\Psi : \mathcal{A} \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ mit*

$$\Psi(T) = \zeta \quad \text{und} \quad \Psi(\mathrm{id}_\mathcal{H}) = \mathbb{1}_{\sigma(T)},$$

wobei $\zeta : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ die identische Funktion bezeichnet.

Ψ ist isometrisch und bijektiv.

(ii) *Zur Abkürzung bezeichne $\widehat{S} = \Psi(S)$. Es gilt der spektrale Abbildungsatz:*

$$\sigma(S) = \{\widehat{S}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\} \quad \text{für } S \in \mathcal{A}.$$

Das Spektrum von S sind die Funktionwerte von $\widehat{S}$.

Beweis. (i) 1. *Wir konstruieren zunächst einen *-Homorphismus $\Psi : \mathrm{Alg}(T, T^*, \mathrm{id}_\mathcal{H}) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$.*

$\mathrm{Alg}(T, T^*, \mathrm{id}_\mathcal{H})$ besteht aus den Polynomen $p(T, T^*)$ mit $p \in \mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}]$. Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}]$ bilde man die Einschränkung $\widehat{p} \in \mathbb{C}(\sigma(T), \mathbb{C})$ mit

$$\widehat{p} : \lambda \mapsto p(\lambda, \overline{\lambda}) \quad \text{für } \lambda \in \sigma(T).$$

Aus dem spektralen Abbildungssatz 3.4.4

$$\widehat{p}(\sigma(T)) = \sigma(p(T, T^*))$$

und der Spektralradiusformel für normale Operatoren (siehe Bem. 3.1.1) folgt

$$\|\widehat{p}\|_{\sup} := \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\widehat{p}(\lambda)| = \mathrm{r}(p(T, T^*)) = \|p(T, T^*)\|.$$

Für zwei Polynome $p, q \in \mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}]$ mit $p(T, T^*) = q(T, T^*)$ ist also $\widehat{p} = \widehat{q}$.

Die Abbildung $\Psi : \mathrm{Alg}(T, \mathrm{id}_E) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ mit

$$p(T, T^*) \mapsto \widehat{p} \quad \text{für } p \in \mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}]$$

ist wohldefiniert und isometrisch. Ψ ist ein *-Homomorphismus:

$$\begin{aligned} p(T, T^*) + q(T, T^*) = (p + q)(T, T^*) &\mapsto \widehat{p + q} = \widehat{p} + \widehat{q}, \\ p(T, T^*) \cdot q(T, T^*) = (p \cdot q)(T, T^*) &\mapsto \widehat{p \cdot q} = \widehat{p} \cdot \widehat{q}, \\ (p(T, T^*))^* = \overline{p}(T^*, T) &\mapsto \overline{\widehat{p}}. \end{aligned}$$

Es ist $\Psi(\mathrm{id}_E) = \mathbb{1}_{\sigma(T)}$ und $\Psi(T) = \zeta$.

2. Da $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ mit der Norm $\|\cdot\|_{\sup}$ vollständig ist, hat Ψ genau eine stetige Fortsetzung auf $C^*(T, \mathrm{id}_\mathcal{H})$, die wir wieder mit Ψ bezeichnen.

Diese Forsetzung $\Psi : C^*(T, \mathrm{id}_\mathcal{H}) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ ist ein isometrischer *-Homomorphismus.

Nach dem Satz von Weierstraß liegen die Polynome $\widehat{p}$ mit $p \in \mathbb{C}[\zeta, \overline{\zeta}]$ dicht in $C(\sigma(T), \mathbb{C})$. Also ist die Fortsetzung Ψ surjektiv.

3. Nach Feststellung 3.4.2 gibt es zu $\lambda \in \sigma(T)$ genau einen Charakter χ_λ mit $\chi_\lambda(T) = \lambda$. Nach Feststellung 3.4.1 ist $\overline{\lambda} = \chi(T^*)$ und folglich

$$\chi_\lambda(p(T, T^*)) = p(\lambda, \overline{\lambda}) = \widehat{p}(\lambda) = \Psi(p(T, T^*))(\lambda).$$

Da die Polynome dicht in $C^*(T, \mathrm{id}_\mathcal{H})$ dicht liegen und χ_λ und Ψ stetig sind, folgt

$$\chi_\lambda(S) = \Psi(S)(\lambda) = \widehat{S}(\lambda) \quad \text{für } S \in C^*(T, \mathrm{id}_\mathcal{H}). \qquad (*)$$

4. *Wir zeigen die Eindeutigkeit von Ψ.* Für $\lambda \in \sigma(T)$ ist die Punktauswertung $\delta_\lambda : C(\sigma(T), \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ mit

$$\delta_\lambda : f \mapsto f(\lambda) \quad \text{für } f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$$

ein unitaler *-Homomorphismus.

Ist $\widetilde{\Psi} : C^*(T, \mathrm{id}_E) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ ein unitaler *-Homomorphismus mit $\widetilde{\Psi}(T) = \zeta$, so ist die Komposition $\chi := \delta_\lambda \circ \widetilde{\Psi}$ ein Charakter mit $\chi(T) = \zeta(\lambda) = \lambda$. Aus Feststellung 3.4.2 folgt $\chi = \chi_\lambda$. Aus Gleichung $(*)$ folgt nun

$$\widetilde{\Psi}(S)(\lambda) = \chi_\lambda(S) = \Psi(S)(\lambda) \quad \text{für } \lambda \in \sigma(T).$$

Da dies für alle $S \in C^*(T, \mathrm{id}_E)$ gilt, ist $\widetilde{\Psi} = \Psi$.

(ii) Da $\Psi : \mathcal{A} \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ ein bijektiver Isomorphismus von unitalen Banachalgebren ist, haben einander entsprechende Elemente dasselbe Spektrum in bezug auf die jeweilige Algebra.

Das Spektrum einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge besteht gerade aus den Funktionswerten.

Nach Feststellung 2.4.12 ist jede unitale C^*-Unteralgebra eine volle Unteralgebra und folglich ist

$$\sigma_\mathcal{A}(S) = \sigma_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})}(S) \quad \text{für } S \in \mathcal{A}.$$

(siehe Bez. E.2.1). Insgesamt folgt

$$\sigma(S) = \sigma_\mathcal{A}(S) = \sigma_{C(\sigma(T), \mathbb{C})}(\widehat{S}) = \widehat{S}(\sigma(T)).$$

4 Kompakte Operatoren

4.1 Kompakte Operatoren auf dem Hilbertraum

4.1.1 Folg. ($\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ **kompakt** $\Rightarrow \mathcal{H}$ **endlichdim.)**
Die identische Abbildung eines Prähilbertraumes $\mathcal{X}$ ist genau dann kompakt, wenn $\mathcal{X}$ endlichdimensional ist.

Beweis. 1. Wenn $\dim \mathcal{X} = n \in \mathbb{N}$ ist, so ist $\mathcal{X} \cong \ell_2^n$ und bekanntlich ist die abgeschlossene Einheitskugel des ℓ_2^n kompakt.

2. Wenn $\dim \mathcal{X} = \infty$ ist, so gibt es eine orthonormale Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ für $n \neq m$ ist, enthält $(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\, e_n)_n$ keine konvergente Teilfolge. Also ist $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ nicht kompakt.

4.1.2 Satz (Approx. durch Op. von endl. Rang)
Es seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Prähilberträume und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ kompakt.

(i) *Es gibt eine Folge $(K_n)_n$ endlichrangiger Operatoren in $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ die gegen K konvergiert.*

Man kann die approximierende Folge $(K_n)_n$ so wählen, daß $\|K_n\| \leq \|K\|$ ist.

(ii) Konstruktion einer approximierende Folge: *Es seien $(e_n)_n \in \mathbb{N}$ eine orthonormale Basis des separablen Unterraumes* $\mathrm{Bild}(K)$ *und* $P_n = P_{\mathrm{lin}\{e_1,\ldots,e_n\}}$ *der orthogonale Projektor auf die lineare Hülle von $e_1, \ldots, e_n$. Für $K_n := KP_n$ gilt dann*

$$\lim \|K - P_n K\| = 0.$$

(iii) *Wenn $\mathcal{Y}$ ein Hilbertraum ist, dann ist K genau dann kompakt, wenn K durch Operatoren aus $\mathcal{F}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ aproximiert werden kann.*

Beweis. (i) *Es reicht die stärkste Behauptung* (ii) *zu zeigen.*

(ii) Da $K(\mathrm{Ball}\,\mathcal{X})$ separabel ist, hat $\mathrm{Bild}\,K$ eine orthonormale Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (siehe Bem. A.3.2 und Satz 1.5.9). Es sei P_n der orthogonale Projektor auf $\mathrm{lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$ (siehe Bsp. 2.1.16). Für $y \in \overline{\mathrm{Bild}\,K}$ ist (siehe Satz 1.5.6 und Satz 1.5.3)

$$\|(\mathrm{id}_{\mathcal{Y}} - P_n)y\| = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |\langle e_\nu, y\rangle|^2 \downarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Nach dem Satz von Dini A.3.8 konvergiert die Folge der Funktionen $\|(\mathrm{id}_{\mathcal{Y}} - P_n)(\cdot)\|$ auf der kompakten Menge $\overline{K(\mathrm{Ball}\,\mathcal{X})}$ gleichmäßig gegen 0. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|(\mathrm{id} - P_n)K\| = 0.$$

Es ist $\mathrm{Rang}\, P_n K \leq n$.

(iii) Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Nach Satz B.3.4 ist der Grenzwert einer konvergenten Folge $(K_n)_n$ aus $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ kompakt.

4.1.3 Satz (adjungierte Op. K^* kompakt)
Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume. Ein Operator $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ist genau dann kompakt, wenn K^* kompakt ist.

Beweis. 1. Es sei $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ kompakt. Nach Satz 4.1.2 gibt es eine Folge $(K_n)_n$ in $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ die gegen K konvergiert.Da

$$\|K^* - K_n^*\| = \|K - K_n\|$$

ist, ist K^* kompakt.

2. Wenn K^* kompakt ist, so ist nach Teil 1. auch $K = K^{**}$ kompakt.

Anmerkung. 1. Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt. Wählt man die Projektoren $(P_n)_n$ wie in Satz 4.1.2 (ii), dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \|K - P_n K P_n\| = 0$. Man kann also kompakte selbstadjungierte (bzw. positive) Operatoren durch kompakte (bzw. positive) Operatoren $K_n \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ approximieren.

2. In Satz 4.3.1 erhalten wir eine optimale Approximation durch endlichrangige Operatoren in der erzeugten C^*-Algebra.

4.1.4 Satz (erzeugte C^*-Algebra $C^*(T) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

(i) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *K ist kompakt.*

(b) *K^*K ist kompakt.*

(c) *Alle Operatoren der erzeugten C^*-Algebra $C^*(T)$ sind kompakt.*

(ii) *Wenn $\dim \mathcal{H} = \infty$ und K kompakt ist, so ist $C^*(T)$ nicht unital.*

Beweis. (i) (a)$\Rightarrow$(b) ist klar nach Satz B.3.2.

(b)$\Rightarrow$(a): Es sei (x_n) eine Folge in $\mathrm{Ball}(\mathcal{H})$ und $(K^*Kx_{n_k})_k$ eine Konvergente Teilfolge. Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}\|Kx_{n_k} - Kx_{n_l}\|^2 &= \langle K^*Kx_{n_k} - K^*Kx_{n_l}, x_{n_k} - x_{n_l}\rangle \\ &\leq 2\|K^*Kx_{n_k} - K^*Kx_{n_l}\|\end{aligned}$$

folgt, daß $(Kx_{n_k})_k$ eine Cauchyfolge ist. Da $\mathcal{K}$ vollständig ist, konvergiert diese Folge.

(a)$\Rightarrow$(c): Nach Satz 4.1.3 ist K^* kompakt. Nach Satz B.3.2 sind alle Elemente der erzeugten Algebra $\mathrm{Alg}(T, T^*)$ kompakt. Da Grenzwerte kompakter Operatoren wieder kompakt sind, sind alle Elemente von $C^*(T)$ kompakt.

(ii) Wenn $\dim \mathcal{H} = \infty$ ist, so ist $\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ nicht kompakt.

4.1.5 Bem. ($(e_n)_n$ ONFolge $\Rightarrow \|Ke_n\| \to 0$)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein Kompakter Operator $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ bildet orthonormale Folge $(e_n)_n$ in Nullfolgen ab:

$$\lim_{n\to\infty} \|Ke_n\| = 0.$$

Anmerkung. Im folgenden Abschnitt zeigen wir, daß auch die Umkehrung gilt.

Beweis. *Wir zeigen, daß jede konvergente Teilfolge $(Ke_{n_k})_k$ gegen 0 konvergiert. Nach Bemerkung A.3.5 ist dann* $\lim_{n\to\infty} Ke_{n_k} = 0$.

Es sei $y = \lim_{k\to\infty} Ke_{n_k}$.

$$\begin{aligned}\|Ke_{n_k}\|^2 &= \langle Ke_{n_k} - y, Ke_{n_k}\rangle + \langle y, Ke_{n_k}\rangle \\ &\le \|K\|\,\|Ke_{n_k} - y\| + |\langle y, Ke_{n_k}\rangle| \qquad (*)\end{aligned}$$

Aus der Besselschen Ungleichung (siehe Satz 1.5.3):

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle y, Ke_{n_k}\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle K^*y, e_{n_k}\rangle|^2 \le \|K^*y\|^2$$

folgt, das $\lim_{n\to\infty} \langle y, Ke_{n_k}\rangle = 0$ ist. Also konvergiert die rechte Seite von Gleichung $(*)$ gegen 0.

4.1.1 Vollstetige Operatoren

Anmerkung. (schwach konvergente Folgen) 1. Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Folge $(x_n)_n$ in $\mathcal{H}$ heißt schwach konvergent gegen $\tilde{x} \in \mathcal{H}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle \tilde{x}, y\rangle \quad \text{für alle } y \in \mathcal{H}$$

gilt.

2. Für Hilberträume gilt der Satz von Banach-Steinhaus: *Eine schwach konvergente Folge ist beschränkt.*
Es ist also keine Einschränkung, wenn wir im nächsten Satz nur beschränkte schwach konvergente Folgen betrachten.

3. Für Prähilberträume erklärt man die schwache Konvergenz nur für beschränkte Folgen:
Es sei $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum. Eine *beschränkte* Folge $(x_n)_n$ in $\mathcal{X}$ heißt schwach konvergent gegen $\tilde{x} \in \mathcal{X}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle \tilde{x}, y\rangle \quad \text{für alle } y \in \mathcal{X}$$

gilt.

4. Wenn eine beschränkte Folge in einem Pähilbertraum $\mathcal{X}$ schwach konvergiert, dann konvergiert die Folge auch in der Vervollständigung $\mathcal{X}^\sim$ schwach. Allgemeiner gilt:

5. Es sei $M \subset \mathcal{H}$ und die lineare Hülle $\operatorname{lin} M$ sei dicht in $\mathcal{H}$. Wenn für eine beschränkte Folge (x_n) in $\mathcal{H}$ und $\tilde{x} \in \mathcal{H}$ folgendes gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle \tilde{x}, y\rangle \quad \text{für alle } y \in M,$$

dann konvergiert $(x_n)_n$ schwach gegen $\tilde{x}$.
Der Beweis ergibt sich sofort mit der Dreieecksungleichung.

6. Orthonormale Folgen sind schwache Nullfolgen:

Beweis. Aus der Besselschen Ungleichung 1.5.3:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle y, e_{n_k}\rangle|^2 \le \|y\|^2$$

folgt, das $\lim_{n\to\infty} \langle y, e_{n_k}\rangle = 0$.

4.1.6 Bez. (vollstetige Op.)

Es seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Prähilberträume. $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ heißt *vollstetig*, wenn K beschränkte schwache Nullfolgen in Nullfolgen abbildet:

$$\begin{aligned}&(x_n)_n \text{ in } \operatorname{Ball}\mathcal{X} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0 \text{ für } y \in \mathcal{X} \\ &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|Kx_n\| = 0.\end{aligned}$$

4.1.7 Bem. (Kompakte Op. vollstetig)

Es sei $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Prähilberträume. Jeder kompakte Operator $K \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ist vollstetig.

Beweis. Es sei K kompakt und $(x_n)_n$ eine eine Folge in $\operatorname{Ball}(\mathcal{H})$, die schwach gegen 0 konvergiert. Es seien $\mathcal{H} := \mathcal{X}^\sim$ und $\mathcal{K} := \mathcal{Y}^\sim$ die Vervollständigungen. Die eindeutige stetige Forsetzung bezeichnen wir mit K. Nach Bemerkung B.3.3 ist die Fortsetzung kompakt.

Nach Anmerkung 5. konvergiert die Folge $(x_n)_n$ in $\mathcal{H}$ schwach gegen 0.

Wir zeigen, daß jede konvergente Teilfolge $(Kx_{n_k})_k$ gegen 0 konvergiert. Nach Bemerkung A.3.5 ist dann $\lim_{n\to\infty} Kx_{n_k} = 0$.

Es sei $y = \lim_{k\to\infty} Kx_{n_k}$. Für den Grenzwert y folgt dann:

$$\begin{aligned}\|Kx_{n_k}\|^2 &= \langle Kx_{n_k} - y, Kx_{n_k}\rangle + \langle y, Kx_{n_k}\rangle \\ &\le \|K\|\,\|Kx_{n_k} - y\| + |\langle K^*y, x_{n_k}\rangle| \to 0.\end{aligned}$$

4.1.8 Bem. (Grenzwerte von Folgen vollst. Op.)
Es seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Prähilberträume und $(K_n)_n$ eine konvergente Folge vollstetiger Operatoren in $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$:

$$\lim_{n\to\infty} \|K - K_n\| = 0.$$

Dann ist der Grenwert K vollstetig.

Beweis. Es sei $(x_n)_n$ eine schwache Nullfolge in Ball $\mathcal{X}$. Nach Voraussetzung gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine vollstetigen Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ mit $\|K - L\| < \varepsilon$. Da L vollstetig ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\|Lx_n\| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Also ist

$$\|Kx_n\| \leq \|(K - L)x_n\| + \|Lx_n\| \leq 2\varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

4.1.9 Festst. (vollstetige Op.)
Es seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Prähilberträume und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

(i) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *K ist vollstetig*

(b) *Für jede orthonormale Folge $(e_n)_n$ ist*

$$\lim_{n\to\infty} \|Ke_n\| = 0.$$

(c) *Es gibt eine Folge $(K_n)_n$ endlichrangiger Operatoren in $\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ die gegen K konvergiert.*
Man kann die approximierende Folge $(K_n)_n$ so wählen, daß $\|K_n\| \leq \|K\|$ ist.

(ii) *Es sei $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. In den beiden Fällen*

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
2. *K ist* symmetrisch *(siehe* Bez. 2.1.9 (iii)*),*

ist die folgende Aussage (d) äquivalent zu (a)–(c):

(d) *Für jede orthonormale Folge $(e_n)_n$ ist*

$$\lim_{n\to\infty} \langle Ke_n, e_n\rangle = 0.$$

Anmerkung. Aus Satz B.3.4 folgt nun:

4.1.10 Folg. (kompakt $\Leftrightarrow$ vollstetig)
Für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und einen Prähilbertraum $\mathcal{X}$ gilt: $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{H})$ ist genau dann vollstetig, wenn K kompakt ist.

Beweis. (i) (a) $\Rightarrow$ (b): Aus der Besselschen Ungleichung 1.5.3 folgt, daß jede orthonormale Folge eine schwache Nullfolge ist.

(b) $\Rightarrow$ (c): *Wir konstruieren induktiv eine orthonormale Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{X}$ und die orthogonalen Projektoren*

$$P_n := P_{\mathrm{lin}\{e_0,\dots,e_{n-1}\}} \quad \textit{und} \quad Q_n := \mathrm{id}_{\mathcal{X}} - P_n$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$\|KQ_n\| \leq \|KQ_ne_n\| + \tfrac{1}{n} \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Man wähle $e_0 \in \mathcal{X}$ mit $\|e_0\| = 1$. Es seien $e_0, \dots, e_n$ bereits gewählt, so daß $(*)$ gilt. Nach Definition der Norm, gibt es einen Einheitsvektor $e_{n+1} \in Q_{n+1}\mathcal{X} = \{e_0, \dots, e_n\}^\perp$ mit

$$\|KQ_{n+1}\| \leq \|KQ_{n+1}e_{n+1}\| + \tfrac{1}{n+1}.$$

Da nach Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} \|Ke_n\| = 0$ und $Q_ne_n = e_n$ ist, folgt

$$\|KQ_ne_n\| = \|Ke_n\| \to 0.$$

Aus Gleichung $(*)$ folgt nun $\lim_{n\to\infty} \|KQ_n\| = 0$.

Der Operator $K_n := KP_n = K(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - Q_n)$ hat endlichen Rang und

$$\lim_{n\to\infty} \|K - K_n\| = \lim_{n\to\infty} \|KQ_n\| = 0.$$

Für die Norm gilt: $\|K_n\| = \|KP_n\| \leq \|K\|\|P_n\| = \|K\|$.

(c) $\Rightarrow$ (a) ergibt sich sofort aus Bemerkung 4.1.8.

(ii) (b) $\Rightarrow$ (d) gilt offensichtlich immer.

(d) $\Rightarrow$ (c): In den beiden angegebenen Fällen ist die Norm der quadratischen Form $q_T : x \mapsto \langle Tx, x\rangle$ äquivalent zur Operatornorm $\|T\|$ (siehe...).
Führt man den Schluß (b) $\Rightarrow$ (c) analog mit der äquivalenten Norm $\|q_T\|$ durch, so erhält man (d) $\Rightarrow$ (c).

4.1.2 Beispiele

Anmerkung. Ein quasinilpotenter kompakter Operator heißt auch Volterra-Operator. Der Prototyp eines solchen Operators in $L^2([0,1])$ hat die Form

$$(Vf)(s) = \int_0^s k(s,t)f(s)\,dt \quad \text{für } f \in L^2([0,1]).$$

Der *kern* $k(t,s)$ verhält sich wie eine untere Dreiecksmatrix mit 0 auf der Diagonalen. Im Fall

$$k(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } s < t \\ 0 & \text{für } t \leq s \end{cases}$$

ist Vf die Stammfunktion, die wir in den beiden folgenden Beispielen genauer untersuchen:

4.1.11 Bsp. (Volterra-Operator auf $C([0,1])$)
Auf $C([0,1],\mathbb{C})$ mit der $\|\cdot\|_{\sup}$-Norm erklären wir eine linearen Operator V durch die Stammfunktion

$$(Vf)(t) := \int_0^t f(\tau)\,d\tau \quad \text{für } t \in [0,1]$$

und $f \in C([0,1])$. V hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $\|V\| = 1$ und V ist kompakt.

(ii) V ist quasinilpotent: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|V^n\|} = 0$.

V ist injektiv und $0 \in \sigma(V)$ ist ein approximativer Eigenwert.

Beweis. (i) Aus

$$\|Vf\|_{\sup} = \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right| \leq \|f\|_{\sup}.$$

folgt $\|V\| \leq 1$. Da $\|V\mathbb{1}_{[0,1]}\|_{\sup} = 1$ ist , ist $\|V\| = 1$.

Wir prüfen die Voraussetzungen für den Satz von Arzela-Ascoli nach: Die Familie $V(\operatorname{Ball} C([0,1]))$ ist gleichstetig:

$$|f(s) - f(t)| = \left|\int_s^t f(\tau)\,d\tau\right| \leq \|f\|_{\sup}|t-s|.$$

und beschränkt. Nach dem Satz A.3.7 ist $V(\operatorname{Ball} C([0,1]))$ relativ kompakt und somit V ein kompakter Operator.

(ii) Für die n-ten Stammfunktion $V^n f$ gilt die Taylorformel mit Integralrestglied:

$$\begin{aligned}(V^n f)(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} (V^{(-n+k)}f)(0)\frac{(t-a)^k}{k!} \\ &\quad + \int_0^t f(\tau)\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau \quad \text{für } t \in [0,1]. \qquad (*)\end{aligned}$$

Die Taylorkoeffizienten verschwinden alle. Man schätzt ab:

$$|(V^n f)(t)| \leq \|f\|_{\sup} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau = \|f\|_{\sup}\frac{t^n}{n!}.$$

Hieraus folgt $\|V^n\| \leq \frac{1}{n!}$ und somit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|V^n\|} = 0$.

Für $e_n(t) := e^{2\pi i n t}$ ist

$$Ve_n = \frac{e_n - \mathbb{1}_{[0,1]}}{2\pi i n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und folglich $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ve_n\|_{\sup} = 0$. Die Folge (e_n) ist ein approximativer Eigenvektor.

Anmerkung. Es sei $\mathcal{X}$ der Prähilbertraum $C([0,1])$ versehen mit dem Standardskalarprodukt $\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(s)\overline{g(s)}\,ds$ (siehe Bsp. 1.2.4). Die Vervollständigung von $\mathcal{X}$ ist der Raum $L^2([0,1])$. Die Einbettung

$$I : (C([0,1]), \|\cdot\|_{\sup}) \to L^2([0,1])$$

ist kontrahierend mit $\|I\| = 1$. Wir untersuchen den Volterra-Operator aus Beispiel 4.1.11 als Operator auf $\mathcal{X}$ bzw. $L^2([0,1])$.

4.1.12 Bsp. (Volterra-Operator auf $L^2([01])$)
Es sei $V : C([0,1]) \to C([0,1])$ der Operator aus Beispiel 4.1.11.

(i) Faßt man V als Operator $\tilde{V} : \mathcal{X} \to C([0,1])$ auf, so ist $\tilde{V}$ kompakt.

(ii) $\tilde{V}$ hat eine eindeutige stetige Fortsetzung zu einem kompakten Operator $\tilde{V} : L^2([0,1]) \to C([0,1])$.

(iii) Es sei I die stetige Einbettung von $(C([0,1]))$ in $L^2([0,1])$. Die Komposition

$$K = I\tilde{V} : L^2([0,1]) \to C([0,1]) \to L^2([0,1])$$

ist ein kompakter Operator von $L^2([0,1])$ in sich.

(iv) K ist quasinilpotent: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|K^n\|} = 0$, injektiv und $0 \in \sigma(K)$ ist ein approximativer Eigenwert.

Insbesondere bilden die Basisvektoren $e_n(t) := e^{2\pi i n t}$ ($n \in \mathbb{N}$) (siehe Satz 1.5.13) eine approximative Eigenvektorfolge:. $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ke_n\| = 0$.

Beweis. (i) *Wir prüfen die Voraussetzungen für den Satz von Arzela-Ascoli nach:* Für $0 \leq s \leq t \leq 1$ folgt mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}|(Kf)(t) - (Kf)(s)| &= \left|\int_s^t 1\cdot f(\tau)\,d\tau\right| \\ &\leq \left(\int_s^t 1^2\cdot d\tau\right)^{1/2}\left(\int_s^t |f(\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2} \leq \sqrt{t-s}\,\|f\|_{L^2}\end{aligned}$$

Also ist die Familie $\tilde{V}(\operatorname{Ball}\mathcal{X})$ gleichstetig. Für $s = 0$ folgt $\|\tilde{V}\| \leq 1$. Mit dem Satz von Arzela-Ascoli A.3.7 folgt, daß $\tilde{V}(\operatorname{Ball}\mathcal{X})$ relativ kompakt in $(C([0,1]), \|\cdot\|_{\sup})$ ist.

Folglich ist der Operator $\tilde{V} : \mathcal{X} \to C([0,1])$ kompakt.

(ii) Nach Bemerkung B.3.3 (ii) hat der kompakte Operator $\tilde{V}$ genau eine stetige Fortsetzung auf die vollständige Hülle von $\mathcal{X}$, die wir weiterhin mit $\tilde{V} : L^2([0,1]) \to \mathbb{C}([0,1])$ bezeichnen. $\tilde{V}$ ist kompakt.

(iii) Da die identische Abbildung, aufgefaßt als Abbildung $C([0,1]) \to \mathcal{X} \subset L^2([0,1])$, beschränkt ist, ist $K = I \circ \tilde{V} : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ kompakt.

(iv) Für K^n gilt die Formel $(*)$. Schätzt man in $(*)$ die rechte Seite mit der Schwarzschen Ungleichung ab:

$$\begin{aligned}|(K^n f)(t)| &\leq \|f\|_{L^2}\left(\int_0^t \left(\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\right)^2 d\tau\right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{L^2}\left(\int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau\right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{L^2}\left(\frac{t^n}{n!}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

so folgt

$$\|K^n\| \leq \frac{1}{\sqrt{n!}}$$

und somit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|K^n\|} = 0$.

Für $e_n(t) := e^{2\pi int}$ ist

$$Ke_n = \frac{e_n - \mathbb{1}_{[0,1]}}{2\pi in} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und somit $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ke_n\|_{L^2} = 0$. Die orthonormale Folge (e_n) ist ein approximativer Eigenvektor. (vgl. hierzu Bem. 4.1.5).

Wir zeigen, daß K injektiv ist: Da $K : L^2([0,1]) \to C([01,])$ stetig ist, gilt für $f \in \operatorname{Kern} K$ die Formel

$$\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, f\rangle = (Kf)(t) = 0 \quad \text{für } t \in [0,1].$$

Die lineare Hülle der Funktionen $\{\mathbb{1}_{[0,t]} \mid t \in [0,1]\}$ sind die rechtsseitig stetigen Treppenfunktionen. Da die Treppenfunktionen dicht in $L^2([0,1])$ liegen (siehe Bem. 1.4.6), ist

$$\langle g, f\rangle = 0 \quad \text{für } g \in L^2([0,1])$$

und folglich $f = 0$.

4.2 Spektrum kompakter Operatoren

Anmerkung. Die Ergebnisse diese Abschnittes sind nicht typisch für Hilbertraume bzw. Prähilberträume. Mit den gleichen Beweisideen und etwas mehr Aufwand lassen sich die Aussagen für Banachräume beweisen. Wir benutzen lediglich, daß es zu jedem endlichdimensionalen Raum eine stetigen Projektor auf diesen Raum gibt. Das gilt auch für normierte Räume (vgl. [, Werner Satz IV.6.2]).

Anmerkung. (Rieszsches Lemma) Es seien E ein normierter und F ein abgeschlossener Teilraum. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_0 \in E \setminus F$ mit

$$1 = \operatorname{dist}(x_0, F) \leq \|x_0\| < 1 + \varepsilon$$

Beweis. Da F abgeschlossen ist, ist $\operatorname{dist}(x, F) > 0$ für $x \in E \setminus F$. Man beachte, daß die Distanzfunktion $x \mapsto \operatorname{dist}(x, F)$ eine Halbnorm auf E ist. Man wähle ein $x \in E \setminus F$ mit $\operatorname{dist}(x, F) = 1$ und dazu ein $y \in F$ mit

$$1 = \operatorname{dist}(x, F) \leq \|x - y\| < 1 + \varepsilon$$

und setze $x_0 := x - y$.

4.2.1 Festst.

Es seien $\mathcal{X}$ ein Prähilbertaraum und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ kompakt. Dann gilt

(i) *Der Kern $\operatorname{Kern}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ ist endlichdimensional.*

(ii) *Der Minimalmodul $\gamma(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K) > 0$.*

(iii) *Das Bild $\operatorname{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ ist abgeschlossen.*

(iv) *Wenn $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K$ injektiv ist, dann existiert eine beschränkte Inverse $(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$.*

Beweis. (i) Auf $N := \operatorname{Kern}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ ist $\mathrm{id}_N = K|N$ kompakt. Nach Folgerung 4.1.1 ist $\dim N < \infty$.

(ii) Da N endlichdimensional ist, ist $\mathcal{X} = N \oplus N^\perp$. Wenn $\gamma((\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K) = 0$ ist, so gibt es eine Folge $(x_n)_n$ in $N^\perp$ mit

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_n\| = 0.$$

Da K kompakt ist, hat $(Kx_n)_n$ eine konvergente Teilfolge. Ohne Einschränkung existiert also $y := \lim\limits_{n\to\infty} Kx_n$. Dann konvergiert aber auch die Folge $(x_n)_n$ gegen den gleichen Grenzwert:

$$y = \lim_{n\to\infty} Kx_n = \lim_{n\to\infty} x_n \in N^\perp.$$

$$\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1.$$

Da

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)y = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_n = 0$$

ist, folgt $y \in N \cap N^\perp$, d.h., $y = 0$ im Widerspruch zu $\|y\| = 1$.

(iii) Zu $y \in \overline{\operatorname{Bild}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ gibt es eine Folge $(x_n)_n$ in $\mathcal{X}$ mit $y = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_n$. Da konvergente Folgen beschränkt sind und nach (ii) $c := \gamma(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K) > 0$ ist, ist die Folge $(x_n)_n$ beschränkt:

$$\|x_n\| \leq c^{-1} \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \|(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_\nu\| < \infty.$$

Da K kompakt ist, hat $(Kx_n)_n$ eine konvergente Teilfolge. Ohne Einschränkung existiert $z = \lim_{n\to\infty} Kx_n$. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y + \lim_{n\to\infty} Kx_n = y + z$$

und es ist

$$y = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_n = (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)(y+z).$$

Also ist $y \in \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ und $\mathrm{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ ist abgeschlossen.

(iv) Wenn $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K$ injektiv ist, dann ist nach (iii) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K$ nach unten beschränkt. Wenn $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K$ surjektiv ist, so existiert die Inverse und ist stetig.

Wir zeigen, daß die Annahme, $\mathrm{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K) \neq \mathcal{X}$ *zu einem Widerspruch führt.* Dazu bilden wir die Folge der Räume $\mathcal{X}_0 := \mathcal{X}$, $\mathcal{X}_1 := \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ und $\mathcal{X}_{n+1} = (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)\mathcal{X}_n$. Da $(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ injektiv ist, ist $\mathcal{X}_n \supsetneqq \mathcal{X}_{n+1}$.

Nach (iii) ist $\mathcal{X}_1 := \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{X}_0 := \mathcal{X}$. $\mathcal{X}_1$ ist invariant unter K:

$$K\mathcal{X}_1 = K(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)\mathcal{X}_0 = (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)K\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_1.$$

Wendet man (iii) auf den Prähilbertraum $\mathcal{X}_1$ und den kompakten Operator $K_1 := K|\mathcal{X}_1$, so folgt, daß $\mathcal{X}_2 = (\mathrm{id}_{\mathcal{X}_1} - K_1)\mathcal{X}_1$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{X}_1$ ist. Induktiv fogt, daß alle Räume $\mathcal{X}_n$ abgschlossen sind.

Nach dem Rieszschen Lemma gibt es eine Folge $(x_n)_n$ mit folgenen Eigenschaften:

$$x_n \in \mathcal{X}_n \setminus \mathcal{X}_{n+1} \quad \text{und} \quad 1 = \mathrm{dist}(x_n, \mathcal{X}_{n+1}) \leq \|x_n\| \leq 2.$$

Für $m < n$ ist $(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_m + Kx_n \in \mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}_{m+1}$ und folglich

$$\|Kx_m - Kx_n\| = \|x_m - \big((\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_m + Kx_n\big)\| \geq 1,$$

Die Folge $(Kx_n)_n$ enthält also keine konvergente Teilfolge, im Widerspruch zur Kompaktheit von K.

4.2.2 Folg.
Es sei $\mathcal{X}$ ein Hilbertraum und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt.

(i) *Jedes $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenwert.*

(ii) *Das Spektrum von K ist endlich oder abzählbar unendlich.*

(iii) *Für jede Aufzählung $\sigma(K) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $(\lambda_n)_n$ eine Nullfolge.*

Kurz gesagt, $\sigma(K)$ ist endlich oder eine Nullfolge.

Beweis. (i) Wenn $\mu \neq 0$ und $\mu\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - K$ injektiv ist, so ist μ in der Resolventenmenge $\rho(K)$ (siehe Feststellung 4.2.1). Folglich sind alle $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ Eigenwerte von K.

(ii) *Wir zeigen, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Teilmenge $S_k := \{\lambda \in \sigma(K) \mid |\lambda| \geq \frac{1}{k}\}$ endlich ist. Dann ist $\sigma(K) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ höchstens abzählbar unendlich.*

Annahme: Es gibt ein $c > 0$ und eine Folge $(\lambda_n)_n$ in $\sigma(K)$, derart daß für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lambda_m \neq \lambda_n \text{ für } m \neq n \quad \text{und} \quad |\lambda_n| \geq c.$$

Da die λ_n paarweise verschieden sind, ist jede endliche Summe der Eigenräume $N_n := \mathrm{Kern}(\lambda_n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - K)$ eine direkte Summe. Die Räume $\mathcal{X}_0 = \{0\}$ und

$$\mathcal{X}_n := \bigoplus_{\nu=1}^{n} N_\nu$$

sind endlichdimensional, also abgeschlossen (siehe Satz 1.2.8). Da $\mathcal{X}_n \subsetneqq \mathcal{X}_{n+1}$ ist, gibt es nach dem Lemma von Riesz Vektoren $x_n \in \mathcal{X}_n \setminus \mathcal{X}_{n-1}$ mit

$$1 = \mathrm{dist}(x_n, \mathcal{X}_{n-1}) \leq \|x_n\| \leq 2.$$

Es sei $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Da $(\lambda_n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - K)x_n \in \mathcal{X}_{n-1}$ und $K\mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}_{n-1}$ ist, folgt

$$\begin{aligned}\|Kx_n - Kx_m\| &= \|\lambda x_n - \big((\lambda_n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - K)x_n + Kx_m\big)\| \\ &\geq |\lambda_n|\,\mathrm{dist}(x_n, \mathcal{X}_{n-1}) \geq c.\end{aligned}$$

Die Folge $(Kx_n)_n$ enthält also keine konvergente Teilfolge, im Widerspruch zur Kompaktheit von K.

4.3 Kompakte normale Operatoren

4.3.1 Satz (Spektralsatz für kpt. normal Op.)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $K \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ kompakt und normal.

(i) *Wenn $1 \leq \operatorname{Rang} K < \infty$ ist, dann ist das Spektrum endlich: $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.*

(ii) *Wenn $\operatorname{Rang} K = \infty$ ist, dann ist das Spektrum abzählbar unendlich: $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dabei sind die λ_n paarweise verschieden und bilden eine Nullfolge.*

(iii) *Die Punkte $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ sind Eigenwerte und die Eigenräume $N_\lambda := \operatorname{Kern}(\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - K)$ sind endlichdimensional.*

Die orthogonalen Projektoren $P_\lambda := P_{N_\lambda}$ haben endlichen Rang.

Man setze $N_0 := \operatorname{Kern} K$ und $P_0 := P_{N_0}$ den orthogonalen Projektor auf N_0. Wenn K injektiv ist, so ist $P_0 = 0$.

(iv) *Für je zwei zwei verschieden Eigenwerte λ, μ sind die Eigenräume senkrecht zueinander:*

$$N_\lambda \perp \mathbb{N}_\mu \quad \text{und} \quad P_\lambda P_\mu = 0 \quad \text{für } \lambda \neq \mu.$$

(v) *Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist die orthogonale direkte Summe der Eigenräume von K. D.h. für $x \in \mathcal{H}$ gilt*

$$x = \sum_{\lambda \in \sigma(K)} P_\lambda x \quad \text{und} \quad \|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \sigma(K)} \|P_\lambda x\|^2.$$

Man schreibt hierfür $\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(K)}^{\ell_2} N_\lambda$.

(vi) *Der Operator K hat eine Entwicklung in eine Reihe*

$$K = \sum_{\lambda \in \sigma(K)} P_\lambda K.$$

Die Reihe konvergiert in der Operatornorm: Für endliche Mengen F_0, F mit $F_0 \subset F \subset \sigma(K)$ gilt

$$\|K - \sum_{\lambda \in F} P_\lambda K\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(K) \setminus F_0\}.$$

Im allgm. ist die Reihe nicht absolut konvergent.

(vii) *Für eine Aufzählung $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ ist also $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} N_{\lambda_n}$,*

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \quad \text{und} \quad \|K - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu P_\nu\| = |\lambda_{n+1}| \to 0,$$
$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \quad \text{und} \quad \|Kx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2.$$

A Metrische Räume

Wir erinnern an einige Resultate über metrische Räume.

A.1 Vervollständigung

Sehr viele Konstruktionen in der Analysis beruhen auf dem folgenden Fortsetzungssatz.

A.1.1 Satz (Fortsetzung gleichm.-stetiger Abb.)
Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $M \subset X$ dicht und $f : M \to Y$ gleichmäßig stetig.

Wenn Y vollständig ist, dann hat f genau eine ***stetige*** *Fortsetzung $\widetilde{f} : X \to Y$.*

$\widetilde{f}$ ist ebenfalls gleichmäßig-stetig.

A.1.2 Bem. (Eigenschaften der Fortsetzung)
Offensichtlich gilt:

(i) *f Lipschitz-stetig $\Rightarrow \widetilde{f}$ Lipschitz-stetig mit der gleichen Lipschitz-Konstante.*

(ii) *f isometrisch $\Rightarrow \widetilde{f}$ isometrisch.*

(iii) *Für Funktionen gilt: f beschränkt $\Rightarrow \widetilde{f}$ beschränkt und $\|f\|_{\sup} = \|\widetilde{f}\|_{\sup}$.*

A.1.3 Def. (Vervollständigung)
Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $j : X \to Y$ eine ***isometrische*** *Abbildung.*

Das Paar (Y, j) heißt ***Vervollständigung*** *von X, wenn*

(i) *Y* ***vollständig*** *ist,*

(ii) *das Bild $j(X)$* ***dicht*** *in Y ist.*

A.1.4 Bem. (Eindeutigkeit der Vervollständ.)
Es seien (X, d_X), (Y_1, d_1), (Y_2, d_2) metrische Räume und $j_1 : X \to Y_1$, $j_2 : X \to Y_2$ isometrische Abbildungen.

Wenn (Y_1, j_1) und (Y_2, j_2) ***Vervollständigungen*** *von X sind, dann gibt es genau eine isometrische, bijektive Abbildung*

$$j_{1,2} : Y_1 \to Y_2,$$

so daß $j_2 = j_{1,2} \circ j_1$ gilt.

Dann gilt $j_1 = j_{1,2}^{-1} \circ j_2$

Anmerkung. Die Vervollständigung ist also bis auf eine Isometrie eindeutig bestimmt. Im allgemeinen fixiert man eine Vervollständigung $(X^\sim, j)$ von X und identifiziert $X = j(X)$. D.h. j ist die Inklusion $X \subset X^\sim$

A.1.5 Bem. (dichter Teilraum)
Ein metrischer Raum und eine dichte Teilmenge des Raumes haben die gleiche Vervollständigung.

Wenn $M \subset X$ dicht ist und $(X^\sim, j)$ eine Vervollständigun von X, so ist $j(M) \subset X^\sim$ dicht. Folglich ist $(X^\sim, j|M)$ eine Vervollständigung von M.

A.1.6 Bem. (Konstruktion Vervollständigung)
Mit dem Cantorschen Verfahren kann man jeden metrischen Raum vervollständigen. Zur Bildung der Vervollständigung benutzt man aber auch gerne die folgenden Methoden.

(i) *In einem vollständigen metrischen Raum (X, d) ist der Abschluß M^- einer Teilmenge $M \subset X$ ein vollständiger metrischer Raum $(M^-, d|_{M^-})$.*

(ii) *Gegeben sei eine isometrische Abbildung $j : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ in einen vollständigen Raum (Y, d_Y). Dann erhält man eine Vervollständigung $(X^\sim, j)$ von X, indem man $X^\sim$ als Abschluß von $j(X)$ in Y definiert.*

Durch geeignete Wahl von j und Y kann man häufig weitere Eigenschaften der Vervollständigung $X^\sim$ leichter herleiten als mit der Cantorschen Konstuktion.

A.2 Separable Räume

A.2.1 Bem. (separable metrische Räume)

(i) *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* ***separabel****, wenn es eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge in (X, d) gibt.*

(ii) *Die Separabilität eines Raumes benutzt man gerne, um mit den abzählbar vielen Elementen einer dichten Teilmenge D eine Konstruktion mittels vollständiger Induktion durchzuführen.*

(iii) *Jede Teilmenge M eines separablen metrischen Raumes ist separabel.*

(iv) *Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes heißt* ***zerstreut****, wenn es ein $\rho > 0$ so gibt, daß $d(x, y) > \rho$ für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt.*

(v) *Eine zerstreute Teilmenge eines separablen metrischen ist höchstens abzählbar.*

Beweis. (iii) Es sei $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X. Man wähle zu $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sofern vorhanden, ein $y_{n,k} \in M$ mit $d(x_n, y_{n,k}) < \frac{1}{k}$ und andernfall ein beliebiges $y_{n,k} \in M$ beliebig.

Dann ist die Menge $\{y_{n,k} \mid (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ eine höchsten abzählbare, dichte Teilmenge von M.

A.3 Kompakte metrische Räume

A.3.1 Def. und Satz (kompakter metr. Raum)

Ein metrischer Raum (M, d) heißt kompakt, wenn er eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften hat:

(a) ***Eigenschaft von Heine-Borel:*** *Jede offene Überdeckung von M enthält eine endliche Überdeckung von M.*

(b) *Jede abzählbare offene Überdeckung von M enthält eine endliche Überdeckung von M.*

(c) ***Cantorsche Durchschnittssatz:*** *Jede fallende Folge $(F_n)_n$ nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von M hat nichtleeren Durchscnitt.*

(d) ***folgenkompakt:*** *Jede Folge in M hat eine konvergente Teilfolge.*

(e) *M ist vollständig und jede zerstreute Teilmenge von M ist endlich.*

(f) ***vollständig und präkompakt:***

1. *M ist vollständig.*
2. *Zu $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n \in M$ derart, daß*

$$\min_{\nu=1,\dots,n} \|x - x_\nu\| < \varepsilon \quad \text{für } x \in M.$$

A.3.2 Bem. (kompakte Räume separabel)

Kompakte metrische Räume sind separabel.

Beweis. Man bilde zu $\varepsilon = \frac{1}{k}$ ein ε-Netz $N_k := \{x_1^k, \dots, x_{n_k}^k\}$. Dann ist

$$N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$$

eine abzählbar dichte Teilmenge in M. Also ist M separabel (siehe Bem. A.2.1).

A.3.3 Bez. (präkompakt oder totalbeschränkt)

Ein metrischer Raum M heißt präkompakt, wenn M eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften hat:

(a) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n \in M$ derart, daß

$$\min_{\nu=1,\dots,n} \|x - x_\nu\| < \varepsilon \quad \text{für } x \in M.$$

Man nennt $\{x_1, \dots, x_n\}$ ein ε-Netz von M. Statt präkompakt sagt man auch *totalbeschränkt.*

(b) Jede zerstreute Teilmenge von M ist endlich.

(c) Jede Folge in M besitzt eine Teilfolge, die eine Cauchyfolge ist.

(d) Die Vervollständigung $M^\sim$ ist kompakt.

A.3.4 Bez. (relativkompakt)

Es sei M ein metrischer Raum. Eine Teilmenge K heißt relativkompakt, wenn K eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften hat:

(a) der Abschluß $\overline{K}$ ist ein kompakter metrischer Raum.

(b) Jede Folge in K hat eine Teilfolge, die in M konvegiert.

A.3.5 Bem. (Häufungswert einer konv. Folge)

Es seien M ein metrischer Raum, $(x_n)_n$ eine Folge in M und $c \in M$.

(i) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

(b) *c ist der einzige Häufungswert der Folge $(x_n)_n$.*

(c) *Jede Teilfolge von $(x_n)_n$ enthält eine Teilfolge, die gegen c konvergiert.*

(ii) *Wenn M kompakt ist, ist auch die folgende Bedingung äquivalent zu* (a)–(c)*:*

(d) *Jede konvergente Teilfolge von $(x_n)_n$ konvergiert gegen c.*

A.3.6 Lemma (gleichstetig und glm. Konvergenz)

Es sei M ein kompakter metrischer Raum und $(f_n)_n$ eine Folge gleichstetiger Funktionen in $C(M, \mathbb{K})$.

Wenn die Folge $(f_n)_n$ auf einer dichten Teilmenge von M punktweise konvergiert, dann konvergiert die Folge gleichmäßig auf M.

Anmerkung. Mit Lemma A.3.6 und dem Cantorschen Diagonalprinzip folgt der Satz von Arzela-Ascoli:

A.3.7 Satz (Arzela und Ascoli)

Es sei M ein kompakter metrischer Raum. Für eine Familie K in $(C(M, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\sup})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) *K ist relativ kompakt.*

(ii) *Die Familie K ist punktweise beschränkt und gleichstetig, d. h.:*

1. $\sup_{f\in K} |f(x)| < \infty$ *für $x \in M$.*
2. *Für $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für } f \in K,\ y \in M \text{ mit } d(x, y) < \delta.$$

A.3.8 Satz (Dini)

Es seien M ein kompakter metrischer Raum und $(f_n)_n$ eine monoton fallende Folge in $C(M, \mathbb{R})$.

Wenn die Folge $(f_n)_n$ punktweise gegen 0 konvergiert, dann konvergiert sie gleichmäßig gegen 0, d.h.

$$f_n(x) \downarrow 0 \quad \text{für } x \in M \quad \Rightarrow \quad \|f_n\|_{\sup} \downarrow 0.$$

B Normierte Räume, Algebren

In diesem Anhang sammeln wir einige Definitionen und Sätze zu Banachräumen, Operatoren auf Banachräumen und Banachalgebren, die im Hauptteil für *Operatoren auf dem Hilbertraum* benötigt werden. Hier sind die Aussagen versammelt, die nicht an den Hilbertraum gebunden sind und für die es im Fall des Hilbertraumes auch keine einfacheren Beweise gibt.

Die Kapitelüberschrift *„Normierte Räume und Algebren"* soll signalisieren, daß dieses Kapitel nicht sehr in die Tiefe geht und daß die meisten Resultate über allgemeine Banachräume hier nicht angesprochen werden.

B.1 Banachräume

B.1.1 Grenzwerte in normierten Räumen

B.1.1 Def. (Halbnorm, Norm)
Ein Funktional p auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit den folgenden Eigenschaften

(i) $0 \le p(x)$

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,

(iii) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ *(subadditiv),*

heißt eine Halbnorm auf V. Gilt zusätzlich

(i') $0 < p(x)$ *für alle $x \in V$, $x \neq 0$,*

so heißt p eine Norm auf V.

Normen werden üblicherweise mit $\|\cdot\|$ bezeichnet.

B.1.2 Bez. (normierte Raum, Banach-Raum)
Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum E mit einer *fixierten Norm* $\|\cdot\|$ heißt ein normierter Raum. Auf einem normierten Raum definiert man den Abstand $d(x,y)$ zweier Punkte $x, y \in V$ durch

$$d(x,y) := \|x - y\|.$$

Die Funktion $d : E \times E \to [0, \infty)$ ist eine **Metrik** auf E.

Wenn E in dieser Metrik vollständig ist, so heißt der normierte Raum E ein **Banachraum**.

B.1.3 Satz (Rechenregeln Grenzwerte)
Für einen normierten Raum E gelten die üblichen Rechenregeln für Grenzwerte:

(i) *Es seien $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ konvergente Folgen in E und $(\lambda_n)_n$ konvergent in $\mathbb{K}$ Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_n x_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

(ii) *Aus der Dreicksungleichung*

$$\big|\, \|x\| - \|x\| \,\big| \le \|x - y\|$$

folgt, daß die Norm Lipschitz-stetig ist. Die Normen einer Cauchyfolge in E bilden eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$.

Beweis. Wie im $\mathbb{K}^n$, vgl. Analysis Vorlesung.

B.1.4 Folg. (Abschluß lin. Teilraum)
In einem normierten Raum gilt:

(i) *Der Abschluß eines linearen Teilraumes ist ein linearer Teilraum.*

(ii) *Der Abschluß einer konvexen Teilmenge ist konvex.*

B.1.5 Bsp. (normierte Räume)
(i) In der Analysis II wurde gezeigt, das der $\mathbb{K}^n$ mit der Norm

$$\|(\xi_\nu)_\nu\|_2 := \Big(\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu|^1\Big)^{\frac{1}{2}}$$

vollständig ist.

Da n-dimensionale euklidische bzw. unitäre Räume isometrisch zum l_2^n sind, sind alle endlichdimensionalen Prähilberträume vollständig (vgl. Beispiel 1.2.7 (ii))

(ii) In der Analysis wurde gezeigt, das auf dem $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind. *Zu jeder Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{K}^n$ gibt es zwei Konstanten $0 < c \le C < \infty$, so daß*

$$c\|x\|_2 \le \|x\| \le C\|x\|_2 \quad \textit{für } x \in \mathbb{K}^n.$$

(iii) Ein Prähilbertraum ist mit der vom inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erzeugten Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ein normierter Raum.

(iv) Der Raum $C([0,1], \mathbb{K})$ der stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_{\sup} := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

ist ein Banachraum

B.1.2 Dualer Raum

B.1.6 Def. (beschränkte Linearform)
Es sei E ein normierter Raum über $\mathbb{K}$

(i) *Eine Linearform $\varphi : E \to \mathbb{K}$ heißt beschränkt, wenn es ein $0 \le c$ so gibt, daß*

$$|\varphi(x)| \le c\|x\| \quad \textit{für alle } x \in E.$$

(ii) *Man definiert die Norm von φ als*

$$\|\varphi\| := \sup\{|\varphi(x)| \mid \|x\| \le 1.$$

(iii) *Der Raum der beschränkten Linearformen auf E heißt der **duale Raum** und wird mit E^* bezeichnet.*

B.1.7 Bem. (Formeln für die Norm)
Es sei E ein normierter Raum über $\mathbb{K}$

(i) *Für die Norm einer beschränkten Linearform* φ *gelten die folgenden Formeln:*

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &= \sup\{|\varphi(x)| \mid \|x\| \le 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| \mid \|x\| < 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| \mid \|x\| = 1\} \\ &= \sup\Big\{\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \mid x \neq 0\Big\}. \\ &= \inf\{c \mid |\varphi(x)| \le c\|x\| \quad \text{für } x \in E\}\end{aligned}$$

(ii) *Für die reelle Linearform* $\operatorname{Re}\varphi$ *gilt*

$$\|\operatorname{Re}\varphi\| = \|\varphi\|.$$

B.1.8 Festst. (stetige Linearform)
Es sei E *ein normierter Raum über* $\mathbb{K}$ *und* $\varphi : E \to \mathbb{K}$ *eine Linearform. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) φ *ist beschränkt.*
(b) φ *ist Lipschitz-stetig.*
(c) φ *ist stetig.*
(d) φ *ist stetig im Nullpunkt.*
(e) *Es gibt einen Punkt* $x_0 \in E$ *in dem* φ *stetig ist.*

Beweis. Man vergleiche die entsprechenden Aussagen für den Raum $\mathcal{L}(E, F)$ der beschränkten linearen Operatoren (siehe Festst. B.2.3).

B.1.9 Festst. (E^* Banachraum)
Es sei E *ein normierter Raum über* $\mathbb{K}$. *Der duale Raum* E^* *ist ein vollständiger normierter* $\mathbb{K}$*-Vektorraum. D.h.,* E^* *ist ein Banachraum.*

Beweis. Man vergleiche die entsprechenden Aussagen für den Raum $\mathcal{L}(E, F)$ der beschränkten linearen Operatoren (siehe Satz B.2.4 (ii)).

B.1.3 Beschränkte Sesquilinearformen

B.1.10 Def. (beschränkte Sesquilinearform)
Es seien E, F *normierte Räume.*

(i) *Eine Sesquilinearform* $b : E \times E \to \mathbb{K}$ *heißt beschränkt, wenn es ein* $0 \le c < \infty$ *gibt, so daß*

$$|b(x, y)| \le \|x\|\,\|y\| \quad \text{für } x \in E,\ y \in F.$$

(ii) *Man definiert die Norm einer beschränkten Sesquilinearform* b *als*

$$\|b\| := \sup\{|b(x, y)| \mid \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\}.$$

(iii) *Wir bezeichnen mit* $B(E, F; \mathbb{K})$ *den normierten Raum aller beschränkten Sesquilinearformen auf* $E \times F$.

B.1.11 Bem. (stetige Sesquilinearform)
Es seien E, F *normierte Räume und* $b : E \times F \to \mathbb{K}$ *eine Sesquilinearform.*

(i) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) b *ist beschränkt*
(b) b *ist stetig*
(c) b *ist stetig in* 0.

(ii) *Eine Sesquilinearform ist gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen.*

Anmerkung. Es seien E und F Banachräume und $b : E \times F \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform. Für die Stetigkeit von b reicht es, das b getrennt stetig (= partiell stetig) ist (siehe Satz von Banach-Steinhaus):
Wenn die Linearformen

$$b(\cdot, y) \quad \text{und} \quad \overline{b(x, \cdot)} \quad \text{für } y \in F \text{ und } x \in E$$

stetig sind, dann ist b *beschränkt.*

B.2 Beschränkte Operatoren

Anmerkung. Lineare Abbildungen heißen auch lineare Operatoren oder kurz Operatoren. Für $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W bezeichnen wir mit $\hom_{\mathbb{K}}(V,W) = \hom(V,W)$ den Raum aller $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen von V in W.

B.2.1 Def. (beschränkter linearerOperator)
Es seien E, F normierte Räume über $\mathbb{K}$.

(i) *Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ heißt beschränkt, wenn es ein $0 \le c$ so gibt, daß*

$$\|Tx\| \le c\,\|x\| \quad \text{für alle } x \in E.$$

(ii) *Man definiert die Norm von T als*

$$\|T\| := \sup\{\, \|Tx\| \mid \|x\| \le 1\}.$$

(iii) *Der Raum der beschränkten linearen Abbildungen von E in F wird mit $\mathcal{L}(E,F)$ bezeichnet. Im Falle $E = F$ schreiben wir $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$.*

B.2.2 Bem. (Formeln für die Norm)
(i) *Für die Norm einer beschränkten Operators T gelten die folgenden Formeln:*

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\, \|Tx\| \mid \|x\| \le 1\} \\ &= \sup\{\, \|Tx\| \mid \|x\| < 1\} \\ &= \sup\{\, \|Tx\| \mid \|x\| = 1\} \\ &= \inf\{c \mid \|Tx\| \le c\,\|x\| \text{ für } x \in E\} \\ &= \sup\Big\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x \ne 0\Big\}.\end{aligned}$$

(ii) *Für zwei beschränkte Operatoren $S \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$, $T \in \mathcal{L}(E_2,E_3)$ ist die Komposition $TS \in \mathcal{L}(E_1,E_3)$ und es gilt*

$$\|TS\| \le \|T\|\,\|S\|.$$

B.2.3 Festst. (stetiger linearer Operator)
Es sei E, F normierte Räume über $\mathbb{K}$ und $T : E \to F$ eine linearer Operator.
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) *T ist beschränkt.*
(b) *T ist Lipschitz-stetig.*
(c) *T ist stetig.*
(d) *T ist stetig im Nullpunkt.*
(e) *Es gibt einen Punkt $x_0 \in E$ in dem T stetig ist.*

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Da T linear ist, gilt

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \le \|T\|\,\|x_1 - x_2\|.$$

(b)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(d)$\Rightarrow$(e) sind klar.
(e)$\Rightarrow$(a): Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\|Tx - Tx_0\| \le \varepsilon \quad \text{für } x \in E \text{ mit } \|x - x_0\| \le \delta.$$

Für $y \in E$, $y \ne 0$ setze man $x := x_0 + \dfrac{\delta}{\|y\|} y$. Da $\|x - x_0\| = \delta$ ist, folgt

$$\|Ty\| = \frac{\|y\|}{\delta}\|Tx - Tx_0\| \le \frac{\varepsilon}{\delta}\|y\|.$$

Also ist $\|T\| \le \dfrac{\varepsilon}{\delta}$.

B.2.4 Satz (Banachraum $\mathcal{L}(E,F)$)
(i) *Es seien E ein normierter Raum und F ein Banachraum. Dann ist $\mathcal{L}(E,F)$ vollständig, also ein Banachraum.*

(ii) *Für einen Banachraum E ist $\mathcal{L}(E)$ eine Banachalgebra.*

Beweis. Es sei $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(E,F)$.

1. *Wir zeigen zunächst, daß die Folge $(T_n)_n$ punktweise gegen eine lineare Abbildung $T \in \hom_{\mathbb{K}}(E,F)$ konvergiert.* Da für $x \in E$

$$\|T_m x - T_n x\| \le \|T_m - T_n\|\,\|x\|$$

gilt, ist die Folge $(T_n x)_n$ ein Cauchyfolge in F. Da F vollständig ist, existiert punktweise der Grenzwert

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x \in F \quad \text{für alle } x \in E$$

Aus den Rechenregeln B.1.3 für Grenzwerte folgt, daß die so definierte Abbildung $T : E \to F$ linear ist.

2. *Wir zeigen, daß T beschränkt ist, und daß die Folge $(T_n)_n$ in der Norm gegen T konvergiert.*
Für $S \in \mathcal{L}(E,F)$ folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\big|\|T_n - S\| - \|T_m - S\|\big| \le \|T_n - T_m\|,$$

daß die Folge $(\|T_n - S\|)_n$ eine Cauchyfolge ist.
Für $S = 0$ erhält man

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \le \lim_{n\to\infty} \|T_n\|\,\|x\|.$$

Das bedeutet, daß $T \in \mathcal{L}(E,F)$ ist.
Für $S = T_m$ erhält man

$$\|Tx - T_m x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x - T_m x\| \le \lim_{n\to\infty} \|T_n - T_m\|\|x\|.$$

Das bedeutet, daß $\|T - T_m\| \le \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T_m\|$ ist. Hieraus folgt nun

$$\lim_{m\to\infty} \|T - T_m\| \le \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \|T_n - T_m\| = 0.$$

B.2.5 Bez. (erzeugte Banachalgebra $\mathrm{BAlg}_{\mathbb{K}}(T)$)
(i) Es sei E ein Banachraum. Für $T \in \mathcal{L}(E)$ sei

$$\mathrm{Alg}(T) := \mathrm{lin}\{T^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

die von T erzeugte Algebra.
Man beachte, daß i. allg. $\mathrm{id}_E = T^0$ kein Element von $\mathrm{Alg}(T)$ ist. Die Elemente von $\mathrm{Alg}(T)$ sind von der Form $P(T)$, wobei P ein Polynom über $\mathbb{K}$ ohne konstanten Term ist.

(ii) Es sei $\mathrm{BAlg}_{\mathbb{K}}(T)$ der Abschluß von $\mathrm{Alg}(T) \subset \mathcal{L}(T)$ in der Norm. $\mathrm{BAlg}_{\mathbb{K}}(T)$ ist dann die von $T \in \mathcal{L}(T)$ erzeugte Banachalgebra.
Man beachte, daß i. allg. $\mathrm{id}_E = T^0$ kein Element von $\mathrm{BAlg}_{\mathbb{K}}(T)$ ist. Die Elemente von $\mathrm{BAlg}_{\mathbb{K}}(T)$ kann man in der Norm durch Elemente der Form $P(T)$ approximieren, wobei P ein Polynom über $\mathbb{K}$ ohne konstanten Term ist.

(iii) Ebenso erklärt man die unitalen Algebra

$$\operatorname{Alg}(\mathrm{id}_E, T) := \operatorname{lin}\{T^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

und ihren Abschluß $\operatorname{BAlg}_{\mathbb{K}}(\mathrm{id}_E, T)$.

B.2.6 Festst. (Fortsetzung dicht definierter Op) *Es seien E ein normierter Raum , X ein dichter linearer Teilraum von E und F ein Banachraum.*

Jeder beschränkte lineare Operator $T \in \mathcal{L}(X, F)$ hat eine eindeutige stetige Fortsetzung $\widetilde{T} : E \to F$.

$\widetilde{T}$ ist linear und beschränkt mit $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Anmerkung. I. allg. kann man wenig mehr über die Fortsetzung $\widetilde{T}$ sagen.

Man beachte: Wenn T injektiv ist, kann $\widetilde{T}$ einen Kern $\widetilde{T} \neq \{0\}$ haben.

Beweis.

B.2.1 Neumannsche Reihe

Anmerkung. (geometrische Reihe) Für Zahlen $t \in \mathbb{K}$ gilt die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \quad \text{für } |t| < 1.$$

Die geometrische Reihe Reihe ist absolut konvergent. Auf analoge Weise kann man auch die Inverse von Operatoren bilden. Diese Reihe nennt man nach Carl Neumann (1832-1925) die Neumansche Reihe.

B.2.7 Satz (Neumannsche Reihe) *Es seien E, F Banachräume. $T \in \mathcal{L}(E, F)$.*

(i) *Wenn $T \in \mathcal{L}(E)$ und $\|T\| < 1$ ist, dann existiert der inverse Operator $(\mathrm{id}_E - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Man kann die Inverse mit der Neumannschen Reihe berechnen:*

$$(\mathrm{id}_E - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Diese Reihe ist in der Norm absolut konvergent.

(ii) *Es sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$ invertierbar mit $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Dann ist jeder Operator $S \in \mathcal{L}(E, F)$ mit $\|T - S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ invertierbar und es gilt*

$$S^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(T^{-1}(T - S)\big)^n T^{-1}.$$

Diese Reihe ist in der Norm absolut konvergent:

$$\begin{aligned} \|S\|^{-1} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T^{-1}(T - S)\|^n \|T^{-1}\| \\ &= \frac{1}{\|T^{-1}\|^{-1} - \|T - S\|} < \infty. \end{aligned}$$

(iii) *Wenn $\|T - S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, dann gilt*

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{\|T^{-1}\|^{-1} - \|T - S\|} \|T - S\|.$$

(iv) *Die Gruppe $\mathrm{GL}(E)$ der invertierbaren Operatoren in $\mathcal{L}(E)$ ist offen. Die Bildung der Inversen $T \to T^{-1}$ ist stetig und gleichmäßig stetig auf Teilmengen der Form $\{T \in \mathrm{GL}(E) \mid \|T^{-1}\| \leq r\}$ mit $0 < r < \infty$.*

Beweis. (i) Nach Bemerkung B.2.2 (ii) gilt $\|T^n\| \leq \|T\|^n$. Mit der geometrischen Reihe folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|} < \infty.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$ in der Norm. Es gilt

$$(\mathrm{id}_E - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=1}^{\infty} T^n = \mathrm{id}_E .$$

Ebenso folgt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n (\mathrm{id}_E - T) = \mathrm{id}_E$.

Da $\mathrm{id}_E - T$ eine beschränkte Rechts- und Linksinverse hat, existiert $(\mathrm{id}_E - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

(ii) Man schreibe S in der Form

$$S = T - (T - S) = T\big(\operatorname{id}_E - T^{-1}(T - S)\big)$$

Da nach Voraussetzung

$$\|T^{-1}(T - S)\| \le \|T^{-1}\|\|(T - S)\| < 1$$

ist, existiert die Inverse S^{-1} und hat die in (i) angegebene Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \big(\operatorname{id}_E - T^{-1}(T - S)\big)^{-1} T^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(T^{-1}(T - S)\big)^n T^{-1}. \end{aligned}$$

(iii) Sind $S, T \in \mathrm{GL}(E)$ und ist $\|T - S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, so folgt

$$\begin{aligned} \|S^{-1} - T^{-1}\| &= \|S^{-1}(T - S)T^{-1}\| \\ &\le \|S^{-1}\|\|T - S\|\|T^{-1}\|. \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung (ii) für $\|S^{-1}\|$ folgt:

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \le \frac{\|T^{-1}\|}{\|T^{-1}\|^{-1} - \|T - S\|}\|T - S\|.$$

(iv) Nach Teil (ii) ist $\mathrm{GL}(E)$ offen und nach (iii) ist die Inversenbildung stetig.

Wenn $\|T^{-1}\| \le r$ und $\|T - S\| \le \frac{1}{2r}$ ist, so ist $\|T - S\| \le \frac{1}{2r} \le \frac{1}{2}\|T^{-1}\|^{-1}$. Aus (iii) folgt nun:

$$\begin{aligned} \|S^{-1} - T^{-1}\| &\le \frac{\|T^{-1}\|}{\|T^{-1}\|^{-1} - \|T - S\|}\|T - S\| \\ &\le 2\|T^{-1}\|^2\|T - S\| \le 2r^2\|T - S\|. \end{aligned}$$

Also ist die Inversenbildung gleichmäßig stetig auf der Menge $\{T \in \mathrm{GL}(E) \mid \|T^{-1}\| \le r\}$.

B.2.2 Quotientenraum und Homomorphiesatz

Anmerkung. (Quotientenraum eines Vektorraumes) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V_0 ein Unterraum von V. Die Nebenklassen $[x] := x + V_0$ bilden mit der Verknüpfung

$$[x + y] := x + y + V_0 \quad \text{und} \quad \alpha[x] := \alpha x + V_0$$

eine Vektorraum V/V_0, den man den Quotientenraum von V nach (oder modulo) V_0 nennt.

B.2.8 Satz (Quotientenraum vollständig) *Es sei E ein normierter Raum und E_0 ein abgeschlossener Unterraum.*

(i) *Der Vektorraum E/E_0 ist mit der Norm*

$$\|[x]\| := \inf_{y \in E_0} \|x + y\| \quad \textit{(Quotientennorm)}$$

ein normierter Raum. Der Raum E/E_0 versehen mit der Quotientennorm heißt der Quotientenraum des normierten Raumes E nach (oder modulo) E_0.

(ii) *Wenn E ein Banachraum ist, so ist E/E_0 vollständig.*

Anmerkung. 1. Die Quotientennorm $\|[x]\|$ ist der Abstand des Punktes x zu der Menge E_0:

$$\operatorname{dist}(x, E_0) := \inf_{y \in E_0} \|x - y\|.$$

$p : x \mapsto \operatorname{dist}(x, E_0)$ eine Halbnorm auf E.

Wenn also E_0 abgeschlossen ist, so ist

$$\operatorname{dist}(x, E_0) = \inf_{y \in E_0} \|x - y\| > 0 \quad \text{für } x \in E \setminus E_0$$

und $[x] \mapsto \|[x]\|$ ist eine Norm auf E/E_0.

2. Wenn E_0 nicht abgeschlossen ist, so ist der Abschluß $\overline{E_0} = \operatorname{Kern} p$.

Beweis. (i)

(ii)

Anmerkung. Für Hilberträume betrachtet man üblicherweise an Stelle eines Quotientenraumes den senkrechten Raum:

B.2.9 Bem. (Quotient eines Hilbertaumes) *Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{H}_0$ ein abgeschlossener Unterraum. Der Quotienten $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$ ist auf natürliche Weise isometrisch isomorph zu $\mathcal{H}^\perp$. Insbesondere ist $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$ ein Hilbertraum.*

Beweis. Nach Feststellung 1.2.12 und Lemma 1.2.13 gibt es zu $x \in \mathcal{H}$ genau einen Punkt $x_0 \in \mathcal{H}_0$, so daß

$$\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, \mathcal{H}_0) = \|x + \mathcal{H}_0\| \qquad (*)$$

ist. Die so definierte Abbildung $x \mapsto x - x_0$ ist die orthogonale Projektion $P_{\mathcal{H}_0^\perp}$ von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_0^\perp$ (siehe Bez. 2.2.1). Aus dem Homorphiesatz folgt $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0 \cong \mathcal{H}_0^\perp$ und die Gleichung $(*)$ besagt, daß dies eine Isometrie ist.

B.3 Kompakte Operatoren

B.3.1 Def. (Kompakte Operatoren)

Es seien E, F normierte Räume. Ein linearer Operator $K \in \hom(E, F)$ heißt kompakt, wenn das Bild der Einheitskugel relativ kompakt ist:

$$\overline{K(\operatorname{Ball} E)} \quad \textit{kompakt in } F.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{K}(E, F)$ den Raum der kompakten Operatoren von E nach F.

Anmerkung. Es ist sinnvoll, den Begriff kompakte Operatoren für normierte Räume zu erklären, da sehr viele Resultate über kompakte Operatorem bereits für normierte Räume gelten.

B.3.2 Satz (Operatoren-Ideal $\mathcal{K}(E, F)$)

Es seien E, F normierte Räume. Dann gilt

(i) *$\mathcal{K}(E, F)$ ist ein linearer Teilraum von $\mathcal{L}(E, F)$.*

Insbesondere sind kompakte lineare Operatoren beschränkt.

(ii) *Für normierte Räume E_1, F_1, beschränkte Operatoren $S \in \mathcal{L}(E_1, E)$, $T \in \mathcal{L}(F, F_1)$ und $K \in \mathcal{K}(E, F)$ ist die Komposition*

$$E_1 \xrightarrow{S} E \xrightarrow{K} F \xrightarrow{T} F_1$$

kompakt.

Man sagt hierfür: $\mathcal{K}(E, F)$ ist ein Operatoren-Ideal *und schreibt*

$$\mathcal{L}(F, F_1) \circ \mathcal{K}(E, F) \circ \mathcal{L}(E_1, E) \subset \mathcal{K}(E_1, F_1).$$

B.3.3 Bem. (Stetige Fortsetzung kompakt. Op.)

Es seien E, F normierte Räume und $K in \mathcal{K}(E, F)$

(i) *die stetige Fortsetzung $K^{\sim} : E^{\sim} \to F^{\sim}$ auf die Vervollständigungen ist wieder kompakt.*

(ii) *Es ist $\operatorname{Bild} K^{\sim} \subset F$. Man kann also $K^{\sim}$ auch als Operator von $E^{\sim}$ in F aufassen.*

B.3.4 Satz (F vollständig. $\Rightarrow \mathcal{K}(E, F)$ vollständ.)

Es seien E ein normierter Raum, F ein Banachraum.

Dann ist der Raum $\mathcal{K}(E, F)$ der kompakten Operatoren ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{L}(E, F)$.

D.h., wenn $(K_n)_n$ ein Folge kompakter Operatoren ist, die in der Norm gegen einen Operator K konvergiert, dann ist K kompakt.

B.3.5 Bez. (Ideal der Op. von endlichem Rang)

Es seien E, F normierte Räume.

(i) Die beschränkten Operatoren $K \in \mathcal{L}(E, F)$ von endlichem Rang bilden ein Operatoren-Ideal $\mathcal{F}(E, F)$.

(ii) Es ist $\mathcal{F}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$.

(iii) Für einen Banachraum F ist der Abschluß von $\mathcal{F}(E, F)$ in $\mathcal{K}(E, F)$.

Anmerkung. In vielen Fällen ist $\mathcal{F}(E, F)$ in $\mathcal{K}(E, F)$ dicht, d.h. man kann Kompakte Operatoren durch beschränkte Operatoren von endlichem Rang approximieren.

Es gibt aber Banachräume ohne diese *Approximationseigenschaft*. Ein Beispiel ist der Raum $\mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N})$.

B.4 Banachalgebren

Anmerkung. (Algebren) 1. Eine $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{A}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer assoziativen und distributiven Multiplikation:

$$(ab)c = a(bc)$$
$$a(b+c) = ab + bc \quad \text{und} \quad (b+c)a = ba + ca,$$

die mit der Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{K}$ vertauscht:

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \qquad \text{für } a, b, c \in \mathcal{A}.$$

2. $\mathcal{A}$ heißt unital, wenn es ein Einslelement $e \in \mathcal{A}$ gibt:

$$ea = ae = a \quad \text{für } a \in \mathcal{A}.$$

dieses Einelement ist dann eindeutig bestimmt.

3. Zu einer *nicht-unitalen* Algebra kann man immer eine Eins adjungieren. Man bildet

$$\mathcal{A}_e := \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}$$

und erklärt die Multiplikation durch

$$(\lambda e + a)(\mu e + b) = \lambda\mu e + (\lambda b + \mu a + ab$$

für $a, b \in \mathcal{A}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. $\mathcal{A}$ ist ein zweiseitige Ideal in $\mathcal{A}_e$ und offensichtlich ist $\mathcal{A}_e$ die kleinste unitale Algebra, die $\mathcal{A}$ als Unteralgebra enthält.

4. Es sei $\mathcal{A}$ eine unitale Algebra. Ein Element $a \in \mathcal{A}$ heißt *invertierbar*, wenn a eine Linksinverse $b \in \mathcal{A}$ und eine Rechtsinverse $c \in \mathcal{A}$ hat:

$$ba = e \quad \text{und} \quad ac = e.$$

Dann ist $b = c$. Man bezeichnet den gemeinsamen Wert mit a^{-1}.

Die invertierbaren Elemente von $\mathcal{A}$ bilden eine Gruppe $\mathrm{G}(\mathcal{A})$. Man nennt $\mathrm{G}(\mathcal{A})$ auch die Einheitengruppe von $\mathcal{A}$.

5. Bekannte Beispiele sind die klassischen Matrizengruppen $\mathrm{GL}(n) := \mathrm{G}(M_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

B.4.1 Invertierbare El. einer B-Algebra

B.4.1 Bez. (normierte Algebra)
Ein $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{A}$ heißt normierte Algebra, wenn $\mathcal{A}$ ein normierter Raum ist und die Norm *submultiplikativ* ist:

$$\|ab\| \le \|a\|\,\|b\| \quad \text{für } a, b \in \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$ heißt unitale normierte Algebra, wenn $\mathcal{A}$ ein Einselement e hat und $\|e\| = 1$ ist.

Anmerkung. (normierte Algebra) 1. Zu einer nicht-unitalen normierten Algebra kann man immer eine Eins adjungieren. Man bildet die unitale Algebra

$$\mathcal{A}_e := \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}$$

und erklärt die Norm durch

$$\|\lambda e + a\| := |\lambda| + \|a\| \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{K},\ a \in \mathcal{A}. \tag{$*$}$$

Man rechnet leicht nach, daß $\mathcal{A}_e$ mit dieser Norm eine normierte unitale Algebra ist, die $\mathcal{A}$ als Unteralgebra enthält.

Unter zusätzlichen Vorraussetzungen an $\mathcal{A}$ gibt es andere, bessere Möglichkeiten, die Norm auf $\mathcal{A}_e$ zu wählen. Z. Bsp. setzt man für C^*-Algebren $\|\lambda e + a\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|\lambda x + ax\|$.

2. Der Fall komplexer normierter Algebren ist einfacher zu behandeln, wie man schon am Beispiel der Algebra der $n{\times}n$-Matrizen sieht.

Man kann eine reelle normierte Algebra immer isometrisch und isomorph in eine komlexe normiert Algebra einbetten. Wir werden uns auf die Untersuchung komplexer normierter Algebren beschränken.

B.4.2 Def. (Banachalgebra)
Ein komplexe normierte Algebra $\mathcal{A}$ heißt Banachalgebra, wenn $\mathcal{A}$ in der Norm vollständig ist.

B.4.3 Bsp. (Banachalgebren)
(i) $C([0,1], \mathbb{C})$ ist mit der Norm $\|\cdot\|_{\sup}$ eine unitale Banachalgebra.

Entsprechendes gilt für einen kompakten Hausdorffraum K und den Raum $C(K, \mathbb{C})$ der stetigen komplexen Funktionen auf K.

(ii) Der Raum $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ der stetigen komplexen Funktionen f auf $\mathbb{R}$, die *im Unendlichen verschwinden*, d.h.,

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)| = \lim_{t\to-\infty} |f(t)| = 0,$$

ist mit der Norm $\|\cdot\|_{\sup}$ eine nicht-unitale Banachalgebra. Adjungiert man eine Eins $\mathbb{1}$ und versieht $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})_{\mathbb{1}} := \mathbb{C} \oplus C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit der Norm

$$\|\lambda\mathbb{1} + f\| = \sup_{\|g\| \le 1} \|\lambda g + fg\|_{\sup}$$

so ist $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})_{\mathbb{1}}$ isometrisch isomorph zu der Algebra der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, die im Unendlichen einen Grenzwert haben:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = \lambda.$$

Der abstrakten Eins $\mathbb{1}$ entspricht dabei die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$.

(iii) Für einen komplexen Banachraum E ist $\mathcal{L}(E)$ eine unitale Banachalgebra.

Weitere Beispiel bilden die abgeschlossenen Unteralgebren von $\mathcal{L}(E)$. Wir sprechen von einer unitalen Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{L}(E)$, wenn $\mathrm{id}_E \in \mathcal{A}$ ist.

B.4.4 Bem. (Produkt stetig)
In einer normierten Algebra ist das Produkt stetig und gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen.

Beweis.

Anmerkung. Eine unitale Banachalgebra $\mathcal{A}$ kann man immer als abgeschlossene Unteralgebra der Algebra aller beschränkten Operatoren auf $\mathcal{A}$ auffassen, indem man sie durch die sogenante *links-reguläre Darstellung*

$$L : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}) \quad \text{mit} \quad L_a : x \mapsto ax \quad \text{für } x \in \mathcal{A}.$$

in die Banachalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ einbettet:

B.4.5 Bem. (links-reguläre Darstellung)
(i) *Es sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra mit Eins $e \in \mathcal{A}$. Die* Linksmultiplikation $L : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ *mit*

$$L_a : x \mapsto ax \quad \text{für } x \in \mathcal{A}.$$

ist ein isometrischer, unitaler Algebrenisomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$:

$$L_{ab} = L_a L_b, \quad L_e = \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \quad \text{und} \quad \|L_a\| = \|a\|.$$

(ii) *Ein Element $a \in \mathcal{A}$ ist genau dann invertierbar in $\mathcal{A}$, wenn der Linksmultiplikator L_a eine Inverse $(L_a)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ hat.*

In diesem Fall gilt $(L_a)^{-1} = L_{(a^{-1})}$ und $a^{-1} = (L_a)^{-1}e$. Wir schreiben für die Inverse kurz: $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$.

Es gilt also $\mathrm{G}(A) \cong \mathrm{GL}(\mathcal{A}) \cap L_{\mathcal{A}}$.

Beweis. (i) Offensichtlich gilt $L_{ab} = L_a L_b$ und $L_e = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. Aus

$$\|L_a x\| \leq \|a\| \, \|x\| \quad \text{für } x \in \mathcal{A}$$

folgt $\|L_a\| \leq \|a\|$.

Aus $L_a e = a$ folgt andererseits $\|a\| \leq \|L_a\|$. Insgesamt ist also $\|L_a\| = \|a\|$.

(ii) Wenn a eine Inverse $a^{-1} \in \mathcal{A}$ hat, so ist

$$L_a L_{a^{-1}} x = aa^{-1}x = x \quad \text{und} \quad L_{a^{-1}} L_a x = a^{-1}ax = x$$

für $x \in \mathcal{A}$. D.h., $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$.

Wenn L_a eine Inverse $(L_a)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ hat, so sei $b := (L_a)^{-1}e$.

Dann gilt $ab = L_a(L_a)^{-1}e = e$. Da L_a injektiv ist, folgt aus

$$L_a(ba - e) = aba - a = (ab - e)a = 0,$$

daß $ba = e$ ist. Insgesamt folgt also $a^{-1} := b$.

Anmerkung. (Rechtsmultiplikation) 1. Die Rechtsmultiplikation $R_a : x \mapsto xa$ ist ein *Anti*-Isomorphismus, d.h., $R_{ab} = R_b R_a$, was weniger praktisch ist.

Wenn $\mathcal{A}$ unital ist, so ist $\|R_a\| = \|a\|$.

2. Da das Produkt von $\mathcal{A}$ assoziativ ist, vertauschen die Operatoren L_a und R_b:

$$L_a R_b x = a(xb) = (ax)b = R_b L_a x$$

für $a, b, x \in \mathcal{A}$.

3. Für eine unitale Banachalgebra $\mathcal{A}$ gilt:

Ein Operator $T \in \mathrm{hom}(\mathcal{A})$ ist genau dann eine Linksmultiplikation mit einem Element aus $\mathcal{A}$, wenn T mit allen Rechtsmultiplikatoren vertauscht:

$$TR_x = R_x T \quad \text{für alle } x \in \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad T = L_{Te}.$$

B.4.6 Bem. (volle Unteralgebra)

(i) *Eine unitale Unteralgebra $\mathcal{B}$ einer unitalen Banachalgebra heißt voll, wenn $\mathrm{G}(\mathcal{B}) = \mathrm{G}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$*

(ii) *Zum Beispiel ist die linksreguläre Darstellung $L_{\mathcal{A}}$ eine volle Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.*

B.4.7 Satz (Einheitengruppe $\mathrm{G}(\mathcal{A})$ offen)

In einer unitalen Banachalgebra $\mathcal{A}$ gilt:

(i) *Die Gruppe $\mathrm{G}(\mathcal{A})$ der invertierbaren Elememte in $\mathcal{A}$ ist offen.*

Insbesondere ist die offene Kugel um e mit Radius 1 in $\mathrm{G}(\mathcal{A})$.

$$U := \{a \in \mathcal{A} \mid \|a - e\| < 1\} \subset \mathrm{G}(\mathcal{A}).$$

(ii) *Die Bildung der Inversen $T \to T^{-1}$ ist stetig und gleichmäßig stetig auf Teilmengen der Form $\{a \in \mathrm{G}(\mathcal{A}) \mid \|a^{-1}\| \leq r\}$ mit $0 < r < \infty$.*

Anmerkung. (zum Beweis) Wir zitieren den Satz B.2.7 über die Neumansche Reihe für die Gruppe $\mathrm{GL}(E)$, E ein Banachraum. Mit Hilfe der regulären Linksdarstellung B.4.5 können wir dieses Resultat auf $\mathrm{GL}(\mathcal{A}) \cap L_{\mathcal{A}}$ anwenden. Instruktiver ist es, den Beweis von Satz B.2.7 noch einmal für eine beliebige unitale Banachalgebra zu wiederholen.

Beweis. (i) Nach Satz B.2.7 (ii) ist $\mathrm{G}(\mathcal{A})$ offen.

Nach Satz B.2.7 (ii) ist die Kugel $U \subset \mathrm{G}(\mathcal{A})$.

(ii) Nach Satz B.2.7 (iii) ist die Inversenbildung stetig. Wenn $\|a^{-1}\| \leq r$ und $\|a - b\| \leq \frac{1}{2r}$ ist, so ist $\|a - b\| \leq \frac{1}{2r} \leq \frac{1}{2}\|a^{-1}\|^{-1}$. Aus Satz B.2.7 (iii) folgt nun:

$$\begin{aligned} \|b^{-1} - a^{-1}\| &\leq \frac{\|a^{-1}\|}{\|a^{-1}\|^{-1} - \|a - b\|} \|a - b\| \\ &\leq 2\|a^{-1}\|^2 \|a - b\| \leq 2r^2 \|a - b\|. \end{aligned}$$

Also ist die Inversenbildung gleichmäßig stetig auf der Menge $\{a \in \mathrm{G}(\mathcal{A}) \mid \|a^{-1}\| \leq r\}$.

B.4.8 Bez. (Charakter einer unitalen Algebra)

Es sei $\mathcal{A}$ eine komplexe, kommutative, unitale Banachalgebra. Ein Charakter χ von $\mathcal{A}$ ist ein unitaler Algebrenhomorphismus

$$\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \chi(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = 1.$$

Anmerkung. (Spektrum: kommutative unitale B-Alg.) Die Menge der Charaktere von $\mathcal{A}$ heißt das Spektrum von $\mathcal{A}$ und wird mit $\Sigma_{\mathcal{A}}$ bezeichnet (siehe Bez. E.3.1).

B.4.9 Bem. (Charakter einer B-Algebra stetig)

Es sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra.

Dann ist jeder Charakter $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ beschränkt mit $\|\chi\| = 1$.

Beweis. Es seien $T \in \mathcal{A}$ mit $\|T\| = 1$ und $t \in \mathbb{K}$ mit $|t| < 1$. Nach Satz B.2.7 ist $(\mathbb{1}_{\mathcal{A}} - tT)$ invertierbar und die Inverse hat die Entwicklung in eine normkonvergente Neumannsche Reihe:

$$(\mathbb{1}_{\mathcal{A}} - tT)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n T^n \in \mathcal{A}.$$

Da

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{1}_{\mathcal{A}} - tT)\chi((\mathbb{1}_{\mathcal{A}} - tT)^{-1}) &= \chi\big((\mathbb{1}_{\mathcal{A}} - tT)(\mathbb{1}_{\mathcal{A}} - tT)^{-1}\big) \\ &= \chi(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = 1 \end{aligned}$$

gilt, ist

$$0 \neq \chi(\mathbb{1}_{\mathcal{A}} - tT) = 1 - t\chi(T) \quad \text{für } |t| < 1.$$

Folglich ist $|\chi(T)| \leq 1$ und somit $\|\chi\| \leq 1$.

Da $\chi(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = 1$ gilt, ist $\|\chi\| \geq 1$. Also ist insgesamt $\|\chi\| = 1$.

B.4.10 Satz (Abschluß eines echten Ideals)

Ist $\mathcal{J}$ ein echtes zweiseitige Ideal einer unitalen Banachalgebra, so ist der Abschluß $\overline{\mathcal{J}}$ wieder ein echtes zweiseitige Ideal.

Beweis. Da das Produkt in einer Banachalgebra stetig ist, ist der Abschluß eines Ideals wieder ein Ideal (siehe Bem. B.4.4).

Ein echtes Ideal enthält nicht die Eins und daher auch keine invertierbaren Elemente. D.h., die offene Kugel U um e mit Radius 1

$$U := \{a \in \mathcal{A} \mid \|a - e\| < 1\}$$

liegt im Komplement von $\mathcal{J}$. Dann ist auch $\overline{\mathcal{J}} \cap U = \emptyset$.

B.4.2 Ideale und Homomorphismen

B.4.11 Satz (Quotient einer Banachalgebra)
Es sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes echtes Ideal in $\mathcal{A}$.

(i) *Die Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ mit der Quotientennorm*

$$\|[a]\| = \inf_{x\in\mathcal{J}} \|a+x\| \quad \text{für } [a] \in \mathcal{A}/\mathcal{J}$$

ist eine Banachalgebra.

(ii) *Wenn $\mathcal{A}$ unital ist, so ist $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ unital.*

Beweis. (i) Nach Satz B.2.8 ist $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ versehen mit der Quotientennorm ein Banachraum.

Wir zeigen, daß $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ eine normierte Algebra ist: Für $a, b \in \mathcal{A}$ ist

$$\begin{aligned}\big\|[a]\big\|\,\big\|[b]\big\| &= \inf_{x\in\mathcal{J}} \|a+x\| \inf_{y\in\mathcal{J}} \|b+y\| \\ &= \inf_{x,y\in\mathcal{J}} \|a+x\|\,\|b+y\| \geq \inf_{x,y\in\mathcal{J}} \|(a+x)(b+y)\| \\ &= \inf_{x,y\in\mathcal{J}} \|ab+ay+xb+xy\| \\ &\geq \inf_{z\in\mathcal{J}} \|ab+z\| = \big\|[ab]\big\|.\end{aligned}$$

(ii) Es sei $e \in \mathcal{A}/\mathcal{J}$ das Einselement. Nach Satz B.2.7 gilt für die offene Kugel U um e:

$$U := \{a \in \mathcal{A} \mid \|a-e\| < 1\} \subset \mathrm{G}(\mathcal{A}).$$

Da $\mathcal{J}$ ein echtes Ideal ist, ist $\mathcal{J} \cap U = \emptyset$ und somit

$$\|e+x\| \geq 1 \quad \text{für } x \in \mathcal{J}.$$

Also ist $\big\|[e]\big\| = \|e\| = 1$.

C Geordnete normierte Räume

C.1 Geordnete Vektorräume

C.1.1 Bez. (geordnete Vektorräume)

(i) Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißt ein *geordneter* Vektorraum, wenn V eine Ordnung $\le$ hat (siehe Definition F.1.1) die die folgenden Regeln erfüllt:

1. $x \le y \Rightarrow x + z \le y + z$ *für alle* $z \in V$.
2. $0 \le x$ *und* $0 \le \lambda \in \mathbb{R}_+ \;\Rightarrow\; 0 \le \lambda x$.

(ii) In einem geordneten Vektorraum V nennt man

$$V_+ := \{x \in V \mid 0 \le x \in V\}$$

den *positiven Kegel* von V und die Elemente $x \in V_+$ positiv oder auch nichtnegativ.

V_+ ist ein *spitzer Kegel* in V, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} V_+ + V_+ \subset V_+ \quad \text{und} \quad \mathbb{R}_+ \cdot V_+ \subset V_+ \quad & \textit{(Kegel)} \\ V_+ \cap (-V_+) = \{0\} \quad & \textit{(spitz)}. \end{aligned}$$

(iii) Meisten verlangt man noch, das V *positiv erzeugt* ist, d. h. jedes Element von V ist Differenz zweier positiver Elemente:

3. *Zu* $x \in V$ *gibt es* $0 \le y \in V$ *und* $0 \le z \in V$*, so daß* $x = y - z$ *ist.*

V ist genau dann positiv erzeugt, wenn

$$V = V_+ - V_+$$

gilt. Man nennt dann V_+ einen *erzeugenden* kegel.

(iv) Umgekehrt kann man mit Hilfe eines spitzen Kegels eine Vektorraumordnung einführen

Eine Teilmenge $K \subset V$ heißt Kegel, wenn $K + K \subset K$ und $\mathbb{R}_+ K \subset K$ ist. K heißt spitz, wenn $K \cap (-K) = \{0\}$ ist.

Ist K ein spitzer Kegel in V, so definiert man eine Ordnung auf V durch

$$x \le y : \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in K.$$

Mit dieser Ordnung ist V ein geordneter Vektorraum, d.h. es gelten C.1.1 (i) (1.) und (2.). und es ist $V_+ = K$.

C.2 Ordnungseins-Räume

C.2.1 Bsp. (Ordnung auf $C([0,1],\mathbb{R})$)

Die Vektorraum $C([0,1],\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen ist mit der üblichen punktweisen Ordnung ein geordneter Vektorraum. Die Ordnung von $C([0,1]\mathbb{R})$ hat viele spezielle Eigenschaften, die andere geordnete Vektorräume i.a. nicht haben.

Was man häufiger wiederfindet, ist die Art, wie die sup-Norm und die Ordnung auf $C([0,1],\mathbb{R})$ zusammenhängen. Für die abgeschlossene Einheitskugel gilt

$$\operatorname{Ball}(C([0,1],\mathbb{R}) = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid -\mathbb{1} \le f \le \mathbb{1}\}$$

wobei $\mathbb{1} = 1_{[0,1]}$ sei. Man kann die Norm durch die Ordnung ausdrücken:

$$\|f\| = \min\{c \mid -c\mathbb{1} \le f \le c\mathbb{1}\} \qquad (*)$$

und auch die Ordnung durch die Norm:

$$0 \le f \quad \Leftrightarrow \quad \big\| \|f\|\mathbb{1} - f \big\| \le \|f\|. \qquad (**)$$

Anmerkung. Den obigen Zusammenhang $(*)$ bzw. $(**)$ zwischen Norm und Ordnung findet man auch in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, in allen C^*-Algebren und noch in vielen anderen Situationen. Wir führen hierfür eine Bezeichnung ein.

C.2.2 Bez. (Ordnungseinsraum)

Es sei E ein reeller normierter Raum und ein geordneter Vektorraum. E heißt ein *Ordnungseins-Raum*[4] oder *einsgeordneter* normierter Raum, wenn es ein Element $u \in E$ gibt, so daß

$$\operatorname{Ball}(E) = \{x \in E \mid -u \le x \le u\}$$

ist. Dieses Element u ist offensichtlich eindeutig bestimmt und heißt *die Ordnungseins*des geordneten Banachraumes E.

Anmerkung. 1. Beispiel: Ein Beispiel eines Ordnungseins-Raumes bilden die stetigen reellen Funktionen $C(K,\mathbb{R})$ auf einem kompakten Hausdorffraum K. $C(K,\mathbb{R})$ versieht man mit der sup-Norm $\|\cdot\|_{\sup}$, die Ordnung ist die punktweise Ordnung der reellen Funktionen und als Ordnungseins wählt man die Funktion $\mathbb{1} := 1_K$.

2. Beispiel: Jeder lineare Teilraum F von $C(K,\mathbb{R})$, der die Eins enthält, ist ebenfalls ein Ordnungseins-Raum. Der Unterraum F ist i.a. weder eine Unteralgebra noch ein Unterverband von $C(K,\mathbb{R})$.

3. Das obige Beispiel (2.) ist das typische Beispiel eines Ordnungsein-Raumes, denn mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach kann man folgendes zeigen:

Darstellungssatz(Ordnungseins-Räume) *Zu jedem Ordnungseins-Raum* $(E, \|\cdot\|, u)$ *gibt es einen kompakten Hausdorffraum* K *und eine lineare,isometrische und ordnungsisomorphe unitale Abbildung* $\Phi : E \to C(K,\mathbb{R})$*. D.H. es gilt für alle* $x \in E$*:*

$$\begin{aligned} &\|\Phi x\| = \|x\| \\ &\Phi(x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 0 \\ &\Phi(u) = \mathbb{1} \end{aligned}$$

Dieser Darstellungssatz ist einerseits ein mächtiges Hilfsmittel, andererseits bewahrt die Darstellung Φ nicht unbeding weitere interessante Strukturen, die E haben kann. Aus diesem Grunde behandelt man Ordnungseinsräume besser abstrakt und geht nicht immer über den Darstellungssatz. Der Darstellungssatz sagt uns aber, welche Regeln wir im Hinblick auf die Norm und die Ordnung zu erwarten haben.

4. So paßt in dem uns interessierenden Fall $E = \mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ das Produkt ST von kommutierenden Operatoren S, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ nicht mit dem Produkt $\Phi(S)\Phi(T)$ der stetigen Funktionen $\Phi(S)$, $\Phi(T) \in C(K,\mathbb{R})$ zusammen. Z. B. gilt die Schwarzsche Ungleichung $\Phi(T)^2 \le \Phi(T^2)$, dies ist aber keine Gleichung.

Anmerkung. Die Definition eines Ordnungseins-Raumes kann man noch etwas abschwächen. Man kann auf die Vorraussetzung, daß der positive Kegel E_+ spitz ist, verzichten, denn dies folgt bereits aus der Kopplung C.2.2 von Norm und Ordnung:

Beweis: Es sei $\pm x \in E_+$. Da E_+ ein Kegel ist, ist $\pm nx \in E_+$ für $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$u - nx \in E_+ \quad \text{und} \quad nx \in E_+.$$

Es gilt also $-u \le 0 \le nx \le u$. Nach Definition C.2.2 eines Ordnungsein-Raumes ist $nx \in \operatorname{Ball} E$. D.h., $\|x\| \le \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist der Kegel E_+ spitz.

[4] Ordnungseins engl: order unit, Ordnungseins-Raum engl: order unit space

Anmerkung. Die rechte Seite von $(**)$ besagt, daß die Funktionswerte von f in dem Streifen zwichen 0 und $\|f\|$ liegen. Man könnte ebensosogut einen größeren positiven Streifen wählen. Die folgende Bemerkung C.2.3 (i) besagt, daß dies Prinzip in jedem Ordnungseinsraum gilt.

C.2.3 Bem. (Ordnungseinsraum)

Es Sei E ein Ordnungseins-Raum (siehe Bez.C.2.2) mit der Ordnungseins $u \in E_+$.

(i) *Für $x \in E$ sind die folgenen Aussagen äquivalent:*

(a) $0 \leq x$.
(b) $\|cu - x\| \leq c$ *für alle* $c \geq \|x\|$.
(c) $\big\| \|x\| u - x \big\| \leq \|x\|$.
(d) *Es gibt ein $c \geq \|x\|$, so daß $\|cu - x\| \leq c$ gilt.*

(ii) *Der positive Kegel E_+ ist abgeschlossen.*

(iii) *Es seien $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ konvergente Folgen in E. Aus*

$$x_n \leq y_n \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad \text{folgt} \quad \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

(iv) *Die Ornung ist* archimedisch. *D.h., wenn $x \leq \frac{1}{n} y$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $x \leq 0$.*

Beweis. (i) (a) ⇒ (b) Wir zeigen zugleich (d) ⇒ (a). Ohne Einschränkung sei $x \neq 0$. Für $c \geq \|x\|$ gilt dann:

$$0 \leq x \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{x}{c} \quad \Leftrightarrow \quad u - \frac{x}{c} \leq u.$$

Da $\frac{x}{c} \in \mathrm{Ball}(E)$ ist, ist $-u \leq \frac{x}{c} \leq u$ und folglich $-u \leq 0 \leq u - \frac{x}{c}$. Insgesamt gilt also:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \quad &\Leftrightarrow \quad -u \leq u - \frac{x}{c} \leq u \\ &\Leftrightarrow \quad \|u - \frac{x}{c}\| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \|cu - x\| \leq c. \end{aligned}$$

(b) ⇒ (c) und (c) ⇒ (d) sind offensichtlich.

(ii) Es sei $(x_n)_n$ eine konvergente Folge in E_+, $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Da $0 \leq x_n$ ist, gilt nach (i)

$$\big\| \|x_n\| u - x_n \big\| \leq \|x_n\|.$$

Da $\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$ ist, folgt

$$\big\| \|x\| u - x \big\| \leq \|x\|.$$

Nach (i) Ist $0 \leq x \in E_+$.

(iii) Es seien $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ und $x_n \leq y_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist nach (iii)

$$y - x = \lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) \geq 0.$$

(iv) folgt aus (iii).

D Summierbare Familien

In unendlichdimensionalen normierten Räumen gibt es, anders als in $\mathbb{K}$, unbedingt summierbare Reihen, die nicht absolut konvergent sind. Unbedingt summierbar besagt, daß man die Reihe beliebig umordnen kann. D. h. es kommt auf die Reihenfolge der Summanden nicht an.

Für diese Situation gibt es eine adäquate Terminologie. Man löst sich von der Konvention, daß die Summanden mit den natürlichen Zahlen indiziert sind und läßt beliebige Indexmengen zu, die nicht geordnet sind. Die zu treffende Definition einer unendlichen Summe ist invariant gegen bijektive Transformationen (Umordnungen) der Indexmenge.

Diese Indexmengen können auch überabzählbar sein. In normierten Räumen sind dann nur höchstens abzählbar viele Summanden ungleich Null. Die neue Definition erfordert aber nicht, daß man diese Summanden explizit angibt und irgendwie durchnummeriert. Man kann dies aber tun und dann auf die Ergebnisse über Reihen aus Analysis I, II zurückgreifen.

D.1 Def. (summierbare Familie)

Es sei E ein normierter Raum, I eine Menge und $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ ein Element von E^I. Wir nennen $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ kurz eine Familie in E.

Die Familie $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ heißt summierbar mit Summe $y \in E$, wenn folgendes gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $F_0 \subset I$, so daß für jede größere endliche Menge $F \subset I$ gilt:

$$\Big\| \sum_{\alpha\in F} x_\alpha - y \Big\| < \varepsilon.$$

Man schreibt dann $y = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ und sagt, die Summe $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ ist ***unbegingt konvergent****.*

Anmerkung. (i) Wenn I endlich ist, kann man die *Epsolontik* natürlich weglassen

(ii) Es sei I abzählbar, $I = \{\alpha_n \mid n \in I\}$ eine Aufzählung. Dann ist für eine summierbare Familie $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ die Reihe $\sum_{n=1}^\infty x_{\alpha_n}$ konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\alpha_n} = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

Die Umkehrung gilt nicht, auch nicht in $\mathbb{R}$ (vgl. Bemerkung D.10).

(iii) Die Indexmenge I darf aber auch überabzählbar sein. In diesem Fall sind aber höchsten abzählbar viele Summanden $\neq 0$. Man könnte die Nullsummanden wegglassen, meist ist es aber bequemer, auch überabzählbar viele Summanden zuzulassen.

D.2 Festst. (summ. Fa. abzählbar)

Es sei $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine summierbare Familie. Dann ist die Menge

$$I' := \{\alpha \in I \mid x_\alpha \neq 0\}$$

höchstens abzählbar.

Beweis. (summ. Fa. abzählbar) Es sei $x := \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine endliche Menge $F_n \subset I$, so daß

$$\|x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\| < \frac{1}{n} \quad \text{für endliches } F,\ F_n \subset F \subset I.$$

Da für $\beta \notin F_n$

$$\|x_\beta\| \le \|x - \sum_{\alpha\in F_n\cup\{\beta\}} x_\alpha\| - \|x - \sum_{\alpha\in_n F} x_\alpha\| < \frac{2}{n}$$

gilt, ist $I' \subset \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Also ist I' höchstens abzählbar.

D.3 Bem. (Rechenregeln)

Es seien E, F und G normierte Räume.

(i) *Gegeben seien endlich viele disjunkte Indexmengen I_ν und summierbare Familien $(x_\alpha)_{\alpha\in I_\nu}$ für $\nu = 1,\dots,n$. Es sei $I := \bigcup_{\nu=1}^{n} I_\nu$.*

Dann gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\alpha\in I_\nu} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

(ii) *Gegeben seien endich viele summierbare Familien $(x_{\nu,\alpha})_{\alpha\in I}$ für $\nu = 1,\dots,n$. Dann ist die Famlie $\big(\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu,\alpha}\big)_{\alpha\in I}$ summierbar, und es gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\alpha\in I} x_{n,\alpha} = \sum_{\alpha\in I}\sum_{\nu=1}^{n} x_{n,\alpha}.$$

(iii) *Es sei $T \in L(E,F)$ eine beschränkte lineare Abbildung. Für eine summierbare Familie $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ in E ist die Familie $(Tx_\alpha)_{\alpha\in I}$ summierbar in F und es gilt*

$$T\Big(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha\Big) = \sum_{\alpha\in I} Tx_\alpha.$$

(iv) *Es sei $b : E \times F \to G$ eine stetige bilineare oder sesquilineare Abbildung. Für summierbare Familien $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ in E und $(y_\beta)_{\beta\in J}$ in F ist die Familie $\big(b(x_\alpha, y_\beta)\big)_{(\alpha,\beta)\in I\times J}$ summierbar in G und es gilt*

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} b(x_\alpha, y_\beta) = b\Big(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha, \sum_{\beta\in J} y_\alpha\Big).$$

D.4 Satz (Cauchy-Kriterium)

Es sei E ein ***Banachraum****. Eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ ist genau dann summierbar, wenn sie die folgende Cauchy-Bedingung erfüllt:*

(C) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $F_0 \subset I$, so daß für alle endlichen Mengen F, G mit $F_0 \subset F \subset G \subset I$ gilt:*

$$\Big\| \sum_{\alpha\in G\setminus F} x_\alpha \Big\| < \varepsilon.$$

Anmerkung. Man kann die Cauchy-Bedingung noch etwas einfacher formulieren:

(C') *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $F_0 \subset I$, so daß für alle endlichen Mengen F mit $F_0 \subset F \subset I$ gilt:*

$$\Big\| \sum_{\alpha\in F\setminus F_0} x_\alpha \Big\| < \varepsilon.$$

Bedingung (C') ist ein Spezialfall der Cauchy-Bedingung (C). Wenn (C') für $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ erfüllt ist, folgt (C) mit der Dreiecksungleichung:

$$\Big\| \sum_{\alpha \in G \setminus F} x_\alpha \Big\| \leq \Big\| \sum_{\alpha \in G \setminus F_0} x_\alpha \Big\| + \Big\| \sum_{\alpha \in F \setminus F_0} x_\alpha \Big\| < \varepsilon$$

für alle endlichen Mengen F, G mit $F_0 \subset F \subset G \subset I$.

Beweis. ((Cauchy-Kriterium)) 1. Aus der Dreiecksungleichung folgt, daß eine summierbare Familie die Cauchy-Bedingung erfüllt.

2. Wir zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist. Für $n \in \mathbb{N}$ wähle man endliche Mengen $F_n \subset I$, so daß für endliches F, $F_n \subset F \subset I$ gilt:

$$\Big\| \sum_{\alpha \in F \setminus F_n} x_\alpha \Big\| < \tfrac{1}{n}.$$

Ohne Einschränkung gelte $F_n \subset F_{n+1}$. Die Folge der $y_n := \sum_{\alpha \in F_n} x_\alpha$ ist eine Cauchy-Folge, da

$$\|y_n - y_m\| = \Big\| \sum_{\alpha \in F_n \setminus F_m} x_\alpha \Big\| < \tfrac{1}{m} \quad \text{für } m < n.$$

Es sei $y := \lim_{n \to \infty} y_n$. Da für endliches F mit $F_m \subset F \subset I$ gilt

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{\alpha \in F} x_\alpha - y \Big\| &\leq \Big\| \sum_{\alpha \in F} x_\alpha - y_m \Big\| + \|y_m - y\| \\ &= \Big\| \sum_{\alpha \in F \setminus F_m} x_\alpha \Big\| + \|y_m - y\| < \tfrac{2}{m}. \end{aligned}$$

Also ist die Familie $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ summierbar und $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = y$.

Anmerkung. (zu obigen Beweis) Offensichtlich ist $x_\alpha = 0$ für $\alpha \notin I' := \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ und $y = \sum_{\alpha \in I'} x_\alpha$.

D.5 Festst. (nichtnegat. summierbare Familie)

Eine Familie $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ nichtnegativer Zahlen in $\mathbb{R}$ ist genau dann summierbar, wenn

$$\sup_F \sum_{\alpha \in F} \lambda_\alpha < \infty$$

ist, wobei sich das Supremum über alle endlichen $F \subset I$ erstreckt. Dann ist

$$\sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha = \sup_F \sum_{\alpha \in F} \lambda_\alpha.$$

Wenn eine Familie nichtnegativer Zahlen nicht summierbar ist, setzen wir wie bei Reihen

$$\sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha = \infty.$$

D.6 Bez. (absolut summierbare Familien)

Eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ in E heißt **absolutsummierbar**, wenn $\sum_{\alpha \in I} \|x_\alpha\| < \infty$.

D.7 Festst. (abs. summ. in Banachraum)

In einem Banachraum ist jede absolut summierbare Familie summierbar:

$$\sum_{\alpha \in I} \|x_\alpha\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \text{ existiert.}$$

Beweis. ((absolut summierbare Familien)) Wir zeigen, daß eine absolut summierbare Familie das Cauchy-Kriterium D.4 (C') erfült.

Nach Voraussetzung gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $F_0 \subset I$, so daß

$$\sum_{\alpha \in F \setminus F_0} \|x_\alpha\| < \varepsilon \quad \text{für } F \text{ endlich, } F_0 \subset F_0 \subset I.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt nun

$$\Big\| \sum_{\alpha \in F \setminus F_0} x_\alpha \Big\| \leq \sum_{\alpha \in F \setminus F_0} \|x_\alpha\| < \varepsilon.$$

D.8 Bsp. (summ., nicht abs. summ. Familie)

Man betrachte in dem Hilbertraum $l_2(\mathbb{N})$ mit der Standardbasis $(e_n)_n$ das Element $x = \left(\frac{1}{n}\right)_n$. Nach Beispiel 1.5.4 (iii) ist die Familie $\left(\frac{1}{n} e_n\right)_n$ summierbar mit Summe x. Da $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$ ist, ist diese Familie aber nicht absolutsummierbar.

D.9 Festst. (Teilfamilien summierbar)

Es seien E ein ***Banachraum*** *und und $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine summierbare Fammilie in E. Für alle $J \subset I$ ist dann die Familie $(x_\beta)_{\beta \in J}$ summierbar.*

Beweis. ((Teilfamilien summierbar)) Wir zeigen, daß die Familie $(x_\beta)_{\beta \in J}$ die Cauchy-Bedingung D.4 (C') erfüllt.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle ein endliches $F_0 \subset I$, so daß für alle endlichen Mengen F mit $F_0 \subset F \subset I$ gilt:

$$\Big\| \sum_{\alpha \in F \setminus F_0} x_\alpha \Big\| < \varepsilon.$$

Man setze $K_0 := F_0 \cap J$. Für endliche Mengen K mit $K_0 \subset K \subset J$ bilde man die endliche Menge $F := K \cup F_0$. Dann folgt $F_0 \subset F \subset I$ und somit

$$\Big\| \sum_{\beta \in K \setminus K_0} x_\beta \Big\| = \Big\| \sum_{\alpha \in F \setminus F_0} x_\alpha \Big\| < \varepsilon.$$

D.10 Bem. (summierbare Familien im $\mathbb{K}^n$)

Im Fall $E = \mathbb{K}$ oder allgemeiner, wenn $\dim E < \infty$ ist, ist eine Familien genau dann summierbar, wenn sie absolut summierbar ist.

Anmerkung. Die obige Eigenschaft charakterisiert die endlichdimensionalen Banachräume. Nach dem Satz von Dvoresky und Rogers gibt es in jedem unendlichdimensionalen Banachraum eine summierbare Folge, die nicht absolut summierbar ist.

Beweis. **((summierbare Familien im $\mathbb{K}^n$))** 1. Die Familie $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in I}$ sei summierbar in $\mathbb{K}$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bilde man

$$J_+ := \{\beta \in I \mid \lambda_\beta \geq 0\} \quad \text{und} \quad J_- := \{\beta \in I \mid \lambda_\beta < 0\}.$$

Nach Feststellung D.9 sind die beiden Familien $(\lambda_\beta)_{\beta\in J_\mp}$ summierbar. Also ist die Familie $(\|(\lambda_\alpha\|)_{\alpha\in I}$ summierbar in $\mathbb{R}$.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind also die Familien $(\operatorname{Re}\lambda_\alpha)_{\alpha\in I}$ und $(\operatorname{Im}\lambda_\alpha)_{\alpha\in I}$ absolut summierbar.

2. Die Familie $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ sei summierbar in $\mathbb{K}^n$ in der Norm $\|\cdot\|_2$ des Standardskalarproduktes. Dann sind nach 1. die Koordinaten absolut summierbar sind und folglich

$$\sum_{\alpha\in I} \|x_\alpha\|_2 < \infty.$$

Da auf dem $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind (siehe Analysis II), ist die Familie in jeder Norm absolut summierbar.

Ein endlichdimensionaler normierter Raum ist isomorph zum $\mathbb{K}^n$.

D.11 Festst. (Aufspaltung in Doppelsummen)
Es seien E ein Banachraum und $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine summierbare Familie in E.

Es seien $(I_\beta)_{\beta\in J}$ paarweise disjunkte Teilmengen von I, so daß $I := \bigcup_{\beta\in J} I_\beta$. Dann ist die Familie $\big(\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha\big)_{\beta\in J}$ summierbar und es gilt

$$\sum_{\beta\in J}\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

Beweis. **((Aufspaltung in Doppelsummen))** Es sei $x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha$. Nach Feststellung D.9 existieren für jedes $\beta \in J$ die Teilsummen $y_\beta := \sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $F_0 \subset I$, so daß

$$\|x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\| < \varepsilon \quad \text{für alle endlichen } F \text{ mit } F_0 \subset F \subset I.$$

Es sei $G_0 := \{\beta \mid I_\beta \cap F_0 \neq \emptyset\}$.

Für endliches G mit $G_0 \subset G \subset J$ sei $n := |G|$ die Anzahl der Elemente von G. Zu $\beta \in G$ gibt es endliche $K_\beta \subset I_\beta$, so daß

$$\|y_b - \sum_{\alpha\in K} x_\alpha\| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{für endliche } K \text{ mit } K_\beta \subset K \subset I_\beta.$$

Ohne Einschränkung sei $F_0 \cap I_\beta \subset K_\beta$. Da $G_0 \subset G$ ist, folgt

$$F_0 \subset \bigcup_{\beta\in G} K_\beta =: F$$

und somit

$$\begin{aligned}\|x - \sum_{\beta\in G} y_\beta\| &= \|x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha + \sum_{\beta\in G}\big(\sum_{\alpha\in K_\beta} x_\alpha - y_\beta\big)\| \\ &\leq \|x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\| + \sum_{\beta\in G}\|\sum_{\alpha\in K_\beta} x_\alpha - y_\beta\| \\ &< \varepsilon + k\frac{\varepsilon}{k} = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

D.12 Folg. (Doppelsummen)
Es seien E ein normierter Raum und $(x_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta)\in I\times J}$ eine summierbare Familie in E.

Dann ist die Familie $\big(\sum_{\alpha\in I} x_{\alpha,\beta}\big)_{\beta\in J}$ summierbar und es gilt

$$\sum_{\beta\in J}\sum_{\alpha\in I} x_{\alpha,\beta} = \sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_{\alpha,\beta}.$$

E Spektraltheorie

E.1 Spektrum und Resolvente eines Op.

E.1.1 Def. (Spektrum eines Operators in $\mathcal{L}(E)$)

(i) *Es seien E ein komplexer Banachraum und $T \in \mathcal{L}(E)$. Die Menge*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \textit{exist. } (\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}.$$

heißt die Resolventenmenge *von T.*

(ii) *Das Komplement der Resolventenmenge heißt das* Spektrum $\sigma(T)$ *von T:*

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \notin \rho(T)\}.$$

(iii) *Die Abbildung*

$$R(.,T) : \rho(T) \to \mathcal{L}(E),$$
$$R(\lambda, T) = (\lambda \operatorname{id}_E - T)^{-1}$$

heißt die Resolvente *von T.*

Anmerkung. (Bezeichnung der Resolvente) Wir schreiben auch kurz $R(\lambda) := R(\lambda, T)$.

Üblich sind auch auch die Schreibweisen $R_\lambda(T)$ bzw. $R_T(\lambda)$ für die Resolvente.

In der älteren Literatur wird die Resolvente häufig mit entgegengesetztem Vorzeichen definiert.

Anmerkung. (Spektraltheorie komplex) 1. Das Spektrum einer Matrix $A \in \hom(\mathbb{K}^n)$ besteht aus den Eigenwerten von A. Feinheiten, wie die Vielfachheit eines Eigenwertes werden durch den Begriff Spektrum nicht erfaßt.

2. Das Beispiel der Matrizen $A \in \hom(\mathbb{K}^n)$ zeigt, daß man nur im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zu brauchbaren Aussagen gelangt. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann das Spektrum leer sein. Dagegen gibt es im komplexen immer Eigenwerte und mit Hilfe der Eigenwerte und der zugehörigen Hauptvektorräume konstruiert man die Jordansche Normalform von A (siehe Lineare Algebra).

3. In der linearen Algebra behandelt man reellen Matrizen $A \in \hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$, in dem man sie auf dem $\mathbb{C}^n$ operieren läßt. D. h., man komplexifiziert den $\mathbb{R}^n$ zum $\mathbb{C}^n$ und untersucht die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von A auf den $\mathbb{C}^n$. Für einige spezielle Klassen von Banachräumen und Operatoren kann man auf ähnliche Weise durch Komplexifizierung Aussagen über das Spektrum gewinnen.

4. Für die Spektraltheorie allgemeiner Operatoren ist es aber sinnvoll, sich auf den Fall komplexer Banachräume zu beschränken.

Anmerkung. (Spektrum einer Matrix) In der linearen Algebra erhält man die Resultate über Eigenwerte und Normalformen einer Matrix A, indem man die Beziehungen zwischen den Polynomen $p \in \mathbb{C}[\zeta]$ und den Matrizen $p(A)$ untersucht.

1. Man bildet die von A und der Identität erzeugte unitale Algebra

$$\operatorname{Alg}(A, \operatorname{id}) := \{p(A) \mid p \in \mathbb{C}[\zeta]\}$$

und den surjektiven Algebrenhomorphismus

$$\Phi : \mathbb{C}[\zeta] \ni p \mapsto p(A) \in \operatorname{Alg}(A, \operatorname{id}),$$

wobei $\Phi(1) = \operatorname{id}$ und $\Phi(\zeta) = A$ ist.

2. Der Kern eines Algebrenhomorphismus ist ein Ideal in der Algebra der Polynome. Diese Ideal hat die folgende Gestalt:

Da $\operatorname{Alg}(A, \operatorname{id})$ endliche Dimension hat, sind die Potenzen $\{A^0, A^1, A^2, \dots\}$ linear abhängig. Das Minimalpolynom m_A von A ist das normierte Polynom kleinsten Grades, das A annulliert: $m_A(A) = 0$.

Der Kern des Algebrenhomorphismus Φ besteht aus den Vielfachen des Minimalpolynoms:

$$\operatorname{Kern} \Phi = \mathbb{C}[\zeta] m_A.$$

Alle Polynome q einer Nebenklassen $p + \mathbb{C}[\zeta] m_A$ erzeugen dasselbe Element $q(A) \in \operatorname{Alg}(A, \operatorname{id})$. Nach dem Isomorphissatz gilt also:

Satz *Die Quotientenalgebra $\mathbb{C}[\zeta]/m_A$ ist isomorph zur Algebra* $\operatorname{Alg}(A, \operatorname{id})$.

3. Für beliebige Operatoren auf unendlichdimensionalen Banachräumen gibt es kein zu 2 analoges Resultat, aber Teilaussagen gelten weiter. Ein erster Schritt in dieser Richtung ist der spektrale Abbildunggssatz für Polynome E.1.2.

E.1.2 Satz (Spektr. Abbildungssatz für Polyn.)

Es sei E ein komplexer Banachraum und $T \in \mathcal{L}(E)$.

(i) *Es sei $p \in \mathbb{C}[\zeta]$ ein Polynom der Form*

$$p(\zeta) = \prod_{\varkappa=1}^{k} (\lambda_\varkappa - \zeta)^{n_\varkappa},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ die Nullstellen mit den Vielfachheiten $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ sind.

Der Operator $p(T)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \rho(T)$ sind.

(ii) *Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[\zeta]$ gilt der spektrale Abbildungssatz:*

$$\sigma(p(T)) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Also kurz: $\sigma(p(T) = p(\sigma(T))$.

Beweis. (i) Es sei $p(\zeta) = \prod_{\varkappa=1}^{k} (\lambda_\varkappa - \zeta)^{n_\varkappa}$. Wenn alle Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ in der Resolventenmenge $\rho(T)$ liegen, so existiert die Inverse

$$\big(p(T)\big)^{-1} := \prod_{\varkappa=1}^{k} (\lambda_\varkappa \operatorname{id}_E - T)^{-n_\varkappa} \in \mathcal{L}(E).$$

Wenn $\big(p(T)\big)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ existiert, so gilt für $\iota = 1, \dots, k$:

$$\operatorname{id}_E = (\lambda_\iota \operatorname{id}_E - T) \cdot \Big((\lambda_\iota \operatorname{id}_E - T)^{n_\iota - 1} \prod_{\substack{\varkappa=1 \\ \varkappa \neq \iota}}^{k} (\lambda_\varkappa \operatorname{id}_E - T)^{n_\varkappa} \big(p(T)\big)^{-1} \Big).$$

Also hat $\lambda_\iota \operatorname{id}_E - T$ eine Rechtsinverse und, da alle Faktoren kommutieren, auch eine Linksinverse. D.h., $\lambda_\iota \in \rho(T)$.

(ii) Es sei $\mu \in \mathbb{C}$. Man zerlege das Polynom $\mu - p(\zeta)$ in Linearfaktoren:

$$\mu - p(\zeta) = \prod_{\varkappa=1}^{k} (\lambda_\varkappa - \zeta)^{n_\varkappa}.$$

Nach Teil (i) gilt:

$$\mu \in \rho(p(T)) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \rho(T).$$

Für das Komplement $\sigma(p(T)) = \mathbb{C} \setminus \rho(p(T))$ gilt also:

$$\mu \in \sigma(p(T)) \quad \Leftrightarrow \quad \text{exist. ein } \lambda_\iota \in \sigma(T) \text{ mit } \mu - p(\lambda_\iota) = 0.$$

Anmerkung. (Nullstellen des Minimalpolynoms) Es sei $A \in M_n$ eine Matrix. Aus dem spektralen Abbildungssatz E.1.2 und der Minimalität des Polynoms m_A erhält man die folgende Beschreibung des Spektrums von A.

Satz *Die Nullstellenmenge des Minimalpolynoms m_A ist das Spektrum von A:*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid m_A(\lambda) = 0\}.$$

E.1.3 Satz (Resolvente analytisch)

Es seien E ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(E)$

(i) *Dann gilt*

1. *Die Resolventenmenge $\rho(T)$ ist offen.*
2. *Die Resolvente $R(.,T) : \rho(T) \to \mathcal{L}(E)$ ist eine analytische Funktion.*
3. *Das Spektrum $\sigma(T)$ ist kompakt.*

Genauer gilt:

(ii) *Für $\lambda \in \rho(T)$ ist*

$$\{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - \lambda| < \|R(\lambda,T)\|^{-1}\} \subset \rho(T).$$

(iii) *Die Resolvente $R : \mu \mapsto (\mu \operatorname{id}_E - T)^{-1}$ hat eine Enwicklung in eine Potenzreihe:*

$$R(\mu,T) = \sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda,T)^{n+1}(\lambda-\mu)^n,$$

die für $|\mu - \lambda| < \|R(\lambda,T)\|^{-1}$ in der Norm absolut konvergiert.

(iv) *Die Resolvente hat um den Punkt ∞ die Laurententwicklung*

$$R(\lambda,T) = \sum_{n=1}^{\infty} T^{n-1}\lambda^{-n} \quad \text{für } |\lambda| > \|T\|.$$

Die Reihe ist in der Norm absolut konvergent.

Das Spektrum liegt in der abgeschlossenen Kreisscheibe um 0 mit Radius $\|T\|$:

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|T\|.$$

Anmerkung. 1. Der genaue Konvergenzradius der Laurententwicklung in Satz E.1.3 (iii) ist gleich dem Spektralradius $r(T)$ von T (siehe Satz E.1.5).

2. Die Aussagen folgen leicht aus Satz B.2.7. Es ist aber instruktiver, diesen wichtigen Spezialfall noch einmal zu rechnen.

Beweis. (i) folgt aus (ii) – (iv).

(ii) Man schreibe $\mu \operatorname{id}_E - T$ in der Form

$$\mu \operatorname{id}_E - t = (\lambda \operatorname{id}_E - T)\big(\operatorname{id}_E - R(\lambda,T)(\lambda-\mu)\big) \qquad (*)$$

Da nach Vorausetzung

$$\|R(\lambda,T)(\lambda-\mu)\| \le 1$$

ist, existiert nach Satz B.2.7 (i) die Inverse $R(\mu,T) \in \mathcal{L}(E)$. Also ist die Resolventenmenge $\rho(T)$ offen.

(iii) *Mit der Neumanschen Reihe erhält man die Entwicklung der Resolvente in eine Potenzreihe um einen Punkt $\lambda \in \rho(T)$.* Mit Satz B.2.7 (i) folgt aus $(*)$

$$(\mu \operatorname{id}_E - T)^{-1} = R(\lambda,T)\sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda,T)^n(\lambda-\mu)^n,$$

für $|\mu - \lambda| < \|(\lambda \operatorname{id}_E - T)^{-1}\|^{-1}$.

Die Reihe konvergiert absolut in der Norm:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \|R(\lambda,T)^{n+1}\|\,|\lambda-\mu|^n &\le \sum_{n=0}^{\infty} \|R(\lambda,T)\|^{n+1}|\lambda-\mu|^n \\ &= \frac{1}{\|R(\lambda,T)\|^{-1} - |\lambda-\mu|} < \infty\end{aligned}$$

(iv) *Wir zeigen die Laurententwicklung der Resolvente um den Punkt ∞.* Für $|\lambda| > \|T\|$ ist

$$\lambda \operatorname{id}_E - T = \lambda(\operatorname{id}_e - \lambda^{-1}T) \quad \text{und} \quad \|\lambda^{-1}T\| < 1.$$

Nach Satz B.2.7 existiert also $(\lambda \operatorname{id}_E - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ und hat die Entwicklung in eine Neumannsche Reihe:

$$(\lambda \operatorname{id}_E - T)^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}T)^n = \sum_{n=1}^{\infty} T^{n-1}\lambda^{-n}.$$

Das Spektrum $\sigma(T)$ liegt also in der abgeschlossenen Kreisscheibe um 0 mit Radius $\|T\|$. Da die Resolventenmenge $\rho(T)$ offen ist, ist $\sigma(T)$ abgeschlossen und folglich kompakt.

E.1.4 Bem. (Cauchysche Integralsatz)

Es sei E ein komplexer Banachraum, $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to E$ eine komplex analytische Abbildung, d.h. f hat um jeden Punkt $\zeta_0 \in G$ eine Enwicklung in eine in der Norm konvergente Potenzreihe

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\zeta-\zeta_0)^n \quad \text{für } |\zeta - \zeta_0| < R$$

mit Konvergenzradius $R > 0$. Dabei sind die Koeffizienten $x_n \in E$.

Dann gilt für jeden geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg Γ in G, der null-homolog ist, der Cauchysche Integralsatz:

$$\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Anmerkung. Wir benutzen den Cauchysche Integralsatz im Beweis des folgenden Satzes E.1.5 für zwei sehr einfache Wege:

- Γ_R sei der Rand einer abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius R , die in G liegt.
- $\Gamma_R - \Gamma_r$ sei der Rand eines abgeschlossenen Kreisringes mit Innenradius r und Außenradius R, der in G liegt. In diesem Fall gilt also

$$\int_{\Gamma_R} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\Gamma_r} f(\zeta)\,d\zeta.$$

E.1.5 Satz (Spektrum nicht leer und kompakt)
Es sei E ein komplexer Banachraum, $\dim E > 0$ und $T \in \mathfrak{L}(E)$.

(i) *Das Spektrum $\sigma(T)$ ist nicht leer und kompakt. Für den Spektralradius*

$$\mathrm{r}(T) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$$

gilt $\mathrm{r}(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \le \|T\|$.

(ii) *Die Resolvente hat die Laurententwicklung*

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=1}^{\infty} T^{n-1}\lambda^{-n} \quad \text{für } |\lambda| > \mathrm{r}(T).$$

Die Reihe ist in der Norm absolut konvergent

Beweis. 1. Nach Satz E.1.3 (iv) ist das Spektrum $\sigma(T)$ kompakt und liegt in der abgeschlossenen Kreisscheibe um 0 mit Radius $\|T\|$. Die Resolvente hat um den Punkt ∞ die Laurententwicklung

$$R(\lambda, T) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T^{\nu}\lambda^{-\nu-1} \quad \text{für } |\lambda| > \|T\|. \tag{$*$}$$

Die Reihe ist in der Norm absolut konvergent.

2. *Wir zeigen, daß das Spektrum nicht leer ist:* Für $R > \|T\|$ konvergiert die Laurentreihe $(*)$ auf der Kreislinie $|\lambda| = r$ gleichmäßig in der Norm. Man kann also die Reihe gliedweise über diese Kreislinie Γ_R integrieren und erhält

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \lambda^n R(\lambda, T)\, d\lambda &= \sum_{\nu=0}^{\infty} T^{\nu}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \lambda^{n-1-\nu}\, d\lambda \\ &= T^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Wenn $\sigma(T) = \emptyset$ ist, so ist $\rho(T) = \mathbb{C}$ und die Resolvente ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ erklärte analytische Funktion. Aus dem Cauchyschen Integralsatz E.1.4 folgt dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \lambda^n R(\lambda, T)\, d\lambda = 0.$$

Insbesondere wäre $\mathrm{id}_E = T^0 = 0$ und somit $\dim E = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

3. *Wir zeigen die Formel für den Spektralradius:* Da die Resolvente $R(\lambda, T)$ im Gebiet $\{\lambda \mid |\lambda| > \mathrm{r}(T)\}$ analytisch ist, folgt

$$T^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \lambda^n R(\lambda, T)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \lambda^n R(\lambda, T)\, d\lambda$$

für $\mathrm{r}(T) < r < R$ und $\|T\| < R$. Da $R(., T)$ normstetig ist, ist es auf der kompakten Kreislinie beschränkt:

$$M(r) := \max\{\|R(\lambda, T)\| \mid |\lambda| = r\} < \infty.$$

Aus der Integraldarstellung von T^n folgt die Abschätzung

$$\|T^n\| \le r^n M(r)\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} d|\lambda| = r^{n-1}M(r).$$

Somit erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \le r \quad \text{für } r > \mathrm{r}(T).$$

Es ist also $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \le \mathrm{r}(T)$.

Wenn $\lambda \in \sigma(T)$ ist, so ist $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ (siehe Satz E.1.2) und folglich

$$|\lambda| \le \sqrt[n]{\|T^n\|} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Anmerkung. (Vorzeichen der Resolvente) 1. In der älteren Literatur wird häufig für die Resolvente das entgegengesetzte Vorzeichen gewählt und die Funktion $\lambda \mapsto (T - \lambda\,\mathrm{id}_E)^{-1}$ als Resolvente bezeichnet.

Unsere Definition E.1.1 (iii) der Resolvente ist die heute übliche. Die Spektraltheorie allgemeiner Operatoren beruht weitgehend auf funktionentheoretischen Methoden. Bei dieser Wahl des Vorzeichens hat man die beste Entsprechung von Formeln aus der Funktionentheorie mit analogen Formeln der Spektraltheorie.

Man sieht das am Beispiel der Cauchyschen Integralformel für einen Kreis. Für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| < r$ gilt bekanntlich:

$$\zeta^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} \frac{\lambda^n}{\lambda - \zeta}\, d\lambda \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Man kann hierin ζ durch $T \in \mathfrak{L}(E)$ mit $\mathrm{r}(T) < r$ ersetzen (siehe Punkt 3 des obigen Beweises):

$$T^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} \lambda^n(\lambda\,\mathrm{id}_E - T)^{-1}\, d\lambda \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Letztendlich ergibt sich die Wahl des Vorzeichens aus der Orientierung der komplexen Ebene. Diese besagt anschaulich, daß die Einheitskreislinie entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

E.1.1 Rechenregeln: Spektralradius

Anmerkung. Die algebraischen Verknüpfungen $S + T$ und ST harmonierenden nicht besonders mit der bildung des Spektrums, sofern S und $T \in \mathfrak{L}(E)$ nicht vertauschen.

E.1.6 Bem. (Spektrum von ST und TS)
Es sei $\mathcal{A}$ eine unitale Algebra $S, T \in \mathcal{A}$.

(i) *Für $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \ne 0$ ist $\lambda 1\!\!1_{\mathcal{A}} - ST$ genau dann invertierbar in $\mathcal{A}$, wenn $\lambda 1\!\!1_{\mathcal{A}} - TS$ invertierbar ist.*

(ii) *Für das Spektrum und den Spektralradius gelten:*

$$\sigma(ST) \cup \{0\} = \sigma(TS) \cup \{0\} \quad \textit{und} \quad \mathrm{r}(ST) = \mathrm{r}(TS).$$

Beweis. (i) Es existiere $R := (\lambda 1\!\!1_{\mathcal{A}} - ST)^{-1} \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&(\lambda 1\!\!1_{\mathcal{A}} - TS)\lambda^{-1}(1\!\!1_{\mathcal{A}} + TRS) \\ &\quad = 1\!\!1_{\mathcal{A}} + TRS - \lambda^{-1}TS - \lambda^{-1}TSTRS \\ &\quad = 1\!\!1_{\mathcal{A}} - \lambda^{-1}TS + \lambda^{-1}T(\lambda 1\!\!1_{\mathcal{A}} - ST)RS = 1\!\!1_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Analog gilt $\lambda^{-1}(1\!\!1_{\mathcal{A}} + TRS)(\lambda 1\!\!1_{\mathcal{A}} - TS) = 1\!\!1_{\mathcal{A}}$.

(ii) Nach (ii) ist

$$\rho(ST) \setminus \{0\} = \rho(TS) \setminus \{0\}$$

und somit $\sigma(ST) \cup \{0\} = \sigma(TS) \cup \{0\}$. Für die Spektralradien folgt hieraus

$$\mathrm{r}(ST) = \max_{\lambda\in\sigma(ST)} |\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma(TS)} |\lambda| = \mathrm{r}(TS).$$

E.1.7 Festst. (Rechenregeln: Spektralradius)
Es seien E ein Banachraum und $S, T \in \mathfrak{L}(E)$.

(i) *Für $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{r}(\alpha T) = |\alpha| \, \mathrm{r}(T)$*

(ii) *Wenn $ST = TS$ ist, gilt*

$$\mathrm{r}(S+T) \le \mathrm{r}(S) + \mathrm{r}(T) \quad \textit{(subadditiv)}$$

(iii) *Wenn $ST = TS$ ist, gilt*

$$\mathrm{r}(ST) \le \mathrm{r}(S)\,\mathrm{r}(T) \quad \textit{(submultiplikativ).}$$

(iv) $\mathrm{r}(T^n) = \mathrm{r}(T)^n$ *für $n \in \mathbb{N}$.*

(v) $\mathrm{r}(ST) = \mathrm{r}(TS)$.

Anmerkung. (Gegenbeispiel:Spektralradius) 1. Der Spektralradius ist i. alg. weder subadditiv noch submultiplikativ, wie die folgenden Beispiele zeigen:

2. Es sei $A = \left[\begin{smallmatrix} 0,1 \\ 0,0 \end{smallmatrix}\right]$. Da $A^2 = 0$ ist, ist $\mathrm{r}(A) = 0$ und ebenso $\mathrm{r}(A^*) = 0$. Anderserseits ist

$$A + A^* = \left[\begin{smallmatrix} 0,1 \\ 1,0 \end{smallmatrix}\right] \quad \text{und} \quad A^*A = \left[\begin{smallmatrix} 0,0 \\ 0,1 \end{smallmatrix}\right].$$

und somit

$$\mathrm{r}(A + A^*) = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{r}(A^*A) = 1.$$

Beweis. (i) Da $\sigma(\alpha T) = \alpha\,\sigma(T)$ ist, folgt $\mathrm{r}(\alpha T) = |\alpha|\,\mathrm{r}(T)$

(ii) Für den Spektralradius gilt $\mathrm{r}(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$. (siehe Satz E.1.5). D.h., zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für $l \ge k_0$

$$\|S^l\| \le (\mathrm{r}(S) + \varepsilon)^l \quad \text{und} \quad \|T^l\| \le (\mathrm{r}(T) + \varepsilon)^l$$

gilt. Man wähle eine $1 \le c < \infty$, so daß für $1 \le l \le k_0 - 1$

$$\|S^l\| \le c(\mathrm{r}(S) + \varepsilon)^l \quad \text{und} \quad \|T^l\| \le c(\mathrm{r}(T) + \varepsilon)^l$$

ist. Da S und T vertauschen gilt für $(S+T)^n$ die binomische Formel. Für $n \ge 2k_0$ kann man nun abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|(S+T)^n\| &= \Big\|\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} S^\nu T^{n-\nu}\Big\| \\
&\le \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \|S^\nu\|\,\|T^{n-\nu}\| \\
&\le \sum_{\nu=0}^{k_0-1} \binom{n}{\nu} c(\mathrm{r}(S)+\varepsilon)^\nu (\mathrm{r}(T)+\varepsilon)^{n-\nu} \\
&\quad + \sum_{\nu=k_0}^{n-k_0} \binom{n}{\nu} (\mathrm{r}(S)+\varepsilon)^\nu (\mathrm{r}(T)+\varepsilon)^{n-\nu} \\
&\quad + \sum_{\substack{\nu= \\ n-k_0+1}}^{n} \binom{n}{\nu} (\mathrm{r}(S)+\varepsilon)^\nu c(\mathrm{r}(T)+\varepsilon)^{n-\nu} \\
&\le c \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (\mathrm{r}(S)+\varepsilon)^\nu (\mathrm{r}(T)+\varepsilon)^{n-\nu} \\
&= c\big((\mathrm{r}(S)+\varepsilon) + (\mathrm{r}(T)+\varepsilon)\big)^n.
\end{aligned}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ gilt also die Abschätzung

$$\mathrm{r}(S+T) = \lim \sqrt[n]{\|(S+T)^n\|} \le (\mathrm{r}(S)+\varepsilon) + (\mathrm{r}(T)+\varepsilon)$$

und somit $\mathrm{r}(S+T) \le \mathrm{r}(S) + \mathrm{r}(T)$.

(iii) Da S und T vertauschen, folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{r}(ST) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(ST)^n\|} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|S^n T^n\|} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|S^n\|\,\|T^n\|} = \mathrm{r}(S)\,\mathrm{r}(T).
\end{aligned}$$

(iv) Nach dem spektralen Abbildungssatz für Polynome (siehe Satz E.1.2) ist $\sigma(T^n) = (\sigma(T))^n$ und folglich $\mathrm{r}(T^n) = \mathrm{r}(T)^n$.

(v) Aus $\|(ST)^{n+1}\| \le \|S\|\,\|(TS)^n\|\,\|T\|$ folgt

$$\mathrm{r}(ST) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\|(ST)^{n+1}\|} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(ST)^n\|} \le \mathrm{r}(TS)$$

Analog folgt $\mathrm{r}(TS) \le \mathrm{r}(ST)$. (Für einen anderen Beweis siehe siehe Bemerkung E.1.6

E.1.8 Festst. (Radikal einer kommutat. B-Alg.)
Es seien E Banachraum und $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene, kommutative, unitale Unteralgebra von $\mathfrak{L}(E)$.

(i) *Der Spektralradius ist eine* submultiplikative *Halbnorm auf $\mathcal{A}$. Der Kern dieser Halbnorm ist das* Radikal *von $\mathcal{A}$.*

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) := \{S \in \mathcal{A} \mid r(S) = 0\}.$$

(ii) *Das Radikal $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ ist ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$.*

1. *Die Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ ist mit der Quotientennorm eine unitale Banachalgebra.*

2. *Es sei $\widehat{T} := T + \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ die Nebenklasse von $T \in \mathcal{A}$. Die Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ ist mit der Spektralnorm*

$$\|\widehat{T}\|_\sigma := \mathrm{r}(T)$$

eine unitale normierte Algebra. Es gilt $\mathrm{r}(\widehat{T}) = \|\widehat{T}\|_\sigma$.

Beweis. (i) Auf einer kommutativen Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathfrak{L}(E)$ ist das Funktional $\mathcal{A} \ni T \mapsto \mathrm{r}(T)$ eine Halbnorm.

(ii)

E.2 Spektrum bezgl. einer Unteralgebra

Anmerkung. (Spektrum bezügl. einer B–Unteralg.)

1. Die Definition des Spektrums eines Operators $T \in \mathcal{L}(E)$ und die Eigenschaften aus Satz E.1.3 und Satz E.1.5 des Spektrums beruhen nur darauf, daß $\mathcal{L}(E)$ eine unitale Banachalgebra ist. Sie gelten entsprechend für Elemente einer beliebigen unitalen komplexen Banachalgebra $\mathcal{A}$.

2. Für eine unitale Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit Einselement e definiert man die Resolventenmenge eines Elementes $x \in \mathcal{A}$ als

$$\rho_{\mathcal{A}}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda e - a)^{-1} \in \mathcal{A}\}$$

und das Spektrum $\sigma_{\mathcal{A}} := \mathbb{C} \setminus \rho_{\mathcal{A}}(x)$.

Nach Bemerkung B.4.5 gilt für die Linksmultiplikation $L_a \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ die Beziehung $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ und folglich ist

$$\rho_{\mathcal{A}}(a) = \rho(L_a) \quad \text{und} \quad \sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma(L_a).$$

Man kann also eine *abstrakte* unitale Banachalgebra immer als Unteralgebra der Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ der beschränkten Operatoren auffassen und statt $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ das Spektrum des Multiplikationsoperators L_A untersuchen.

3. Insbesondere untersucht man das Spektrum $\sigma_{\mathcal{A}}(T)$ von $T \in \mathcal{L}(E)$ im Bezug auf eine abgeschlossen unitale Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E)$, die T enthält. Wenn E unendlichdimensional ist, kann $\sigma(T) \subsetneq \sigma_{\mathcal{A}}(T)$ sein (siehe Bsp. E.3.5).

4. Wenn $\dim E = n \in \mathbb{N}$ ist, so hängt das Spektrum $\sigma_{\mathcal{A}}(T)$ nicht von der Wahl der unitalen Unteralgebra $\mathcal{A}$ mit $T \in \mathcal{A}$ ab. Es gilt nämlich:

Satz *Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $T \in \hom V$. Wenn T invertierbar ist, so gibt es ein Polynom $P \in \mathbb{K}[\zeta]$ mit* Grad $P \leq n-1$ *derart, daß*

$$T^{-1} = P(T)$$

ist.

Beweis. Es sei

$$m_A(\zeta) = \zeta^k + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

das Minimalpolynom von T. Es ist $m_A \in \mathbb{K}[\zeta]$. Wenn T invertierbar ist, dann ist 0 kein Eigenwert von A, also keine Nullstelle von m_A. Also ist $\alpha_0 = m_A(0) \neq 0$. Aus $m_A(T) = 0$ folgt

$$T(\alpha_0^{-1}(T^{k-1} + \alpha_{k-1}T^{k-2} + \cdots + \alpha_1 \operatorname{id}_V)) = \operatorname{id}_V .$$

Also ist T^{-1} ein Polynom in T. Entsprechendes gilt für $(\lambda \operatorname{id} - T)^{-1}$ mit $\lambda \in \rho(T)$.

E.2.1 Bez. (Spektrum bezgl. einer Unteralg.)

Es seien E ein komplexer Banachraum, $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene unitale Unteralgebra von $\mathcal{L}(E)$

(i) Die unitale Unteralgebra $\mathcal{A}$ heißt *voll* in $\mathcal{L}(E)$, wenn folgendes gilt:

Wenn $T \in \mathcal{A}$ ist, und $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ exisitiert, dann ist $T^{-1} \in \mathcal{A}$.

(ii) Wenn $\mathcal{A}$ nicht voll ist, gibt es also Operatoren $T \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \rho(T)$, so daß $(\lambda \operatorname{id}_E - T)^{-1} \notin \mathcal{A}$ ist. (siehe Bsp. E.3.5). Daher definieren wir:

Für $T \in \mathcal{A}$ heißt die Menge

$$\rho_{\mathcal{A}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \text{exist. } (\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - T)^{-1} \in \mathcal{A}\}.$$

die *Resolventenmenge* von T bezüglich $\mathcal{A}$.

Das Komplement der Resolventenmenge heißt das *Spektrum* von T bezüglich $\mathcal{A}$:

$$\sigma_{\mathcal{A}}(T) := \mathbb{C} \setminus \rho_{\mathcal{A}}(T).$$

E.2.2 Bez. (Spektrum: Element einer B-Alg.)

(i) Für eine unitale Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit Einselement e definiert man die Resolventenmenge eines Elementes $x \in \mathcal{A}$ als

$$\rho_{\mathcal{A}}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda e - a)^{-1} \in \mathcal{A}\}$$

und das Spektrum $\sigma_{\mathcal{A}}(a) := \mathbb{C} \setminus \rho_{\mathcal{A}}(a)$.

(ii) Nach Bemerkung B.4.5 gilt für die Linksmultiplikation $L_a \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ die Beziehung $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ und folglich ist

$$\rho_{\mathcal{A}}(a) = \rho(L_a) \quad \text{und} \quad \sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma(L_a).$$

Anmerkung. 1. Man kann eine *abstrakte* unitale Banachalgebra als volle Unteralgebra der Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ der beschränkten Operatoren auffassen und das Spektrum $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ auf das Spektrum des Multiplikationsoperators L_a zurückführen.

2. Für einen Banachraum E ist umgekehrt $\mathcal{L}(E)$ eine unitale Banachalgebra und das Spektrum eines Operators ist ein Spezialfall von Bezeichnung E.2.2 (i).

Da wir in diesem Kapitel das Spektrum von Operatoren und nicht die Struktur *abstrakter* Banachalgebren untersuchen, verwenden wir den Standpunkt 1.

3. Als Hilfmittel brauchen wir die von einem Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ erzeugte unitale Banachalgebra $\operatorname{BAlg}(T, \operatorname{id}_E)$ und Quotientenalgebren dieser Algebra. Dies erlaubt uns, zwei wichtige Hilfmittel

- *Charaktere* und *maximale Ideale*

aus der Theorie der kommutativen Banachalgebren anzuwenden.

Die Theorie der Spektren, Charaktere und maximaler Ideale für abstrakte kommutative Banachalgebren nennt man Gelfand-Theorie. Hierbei benötigt man an einer entscheidenden Stelle des Beweises das Zornsche Lemma.

Im Fall einer Algebra, die wie $\operatorname{BAlg}(T, \operatorname{id}_E)$ von einem Element T erzeugt wird, hat man eine eineindeutige Entsprechung zwischen dem Spektrum von T, also komplexen Zahlen, und den Charakteren der Algebra, bzw. den maximalen Idealen der Algebra. Dies erlaubt es., die Resultate in diesem Fall direkt zu konstruieren.

E.2.3 Bem. ($\sigma_{\mathcal{A}}(T) \neq \emptyset$ und kompakt)

Es seien E ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(E)$. Es sei $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene unitale Unteralgebra von $\mathcal{L}(E)$, die T enthält.

(i) *Die Resolventenmenge $\rho_{\mathcal{A}}(T)$ ist offen.*

(ii) *Das Spektrum $\sigma_{\mathcal{A}}(T) \neq \emptyset$ und kompakt. Der Spektralradius*

$$\mathrm{r}_{\mathcal{A}}(T) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(T)$$

ist gleich $\mathrm{r}(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$.

Beweis. (i) Es sei $\lambda \in \rho_{\mathcal{A}}(T)$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit

$$|\mu - \lambda| < \|(R(\lambda, T)\|^{-1}.$$

Nach Satz E.1.3 (ii) gilt dann

$$(\mu \operatorname{id}_E - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda, T))^{(n+1)}(\lambda - \mu)^n,$$

und die Reihe konvergiert absolut in der Norm. Folglich ist $R(\mu, T) \in \mathcal{A}$ und $\rho_{\mathcal{A}}(T)$ ist offen.

(ii) Offensichtlich gilt $\sigma_{\mathcal{A}}(T) \supset \sigma(T) \neq \emptyset$ und $r_{\mathcal{A}}(T) \geq \mathrm{r}(T)$.

Andererseits gilt nach Satz E.1.5 (ii)

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=1}^{\infty} T^{n-1}\lambda^{-n} \quad \text{für } |\lambda| > \mathrm{r}(T).$$

Da die Reihe in der Norm absolut konvergiert, ist

$$R(\lambda, T) \in \mathcal{A} \quad \text{für } |\lambda| > \mathrm{r}(T).$$

Also ist $\mathrm{r}_{\mathcal{A}}(T) \leq \mathrm{r}(T)$.

$\sigma_{\mathcal{A}}(T)$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

E.3 Charaktere und Spektrum

Anmerkung. (Charakter) Ein Charakter χ von $\mathcal{A}$ ist ein unitaler Algebrenhomorphismus

$$\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \chi(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = 1.$$

(siehe Bez. B.4.8 und Bem. B.4.9).

E.3.1 Bez. (Spektrum einer unitalen Algebra)

Es sei $\mathcal{A}$ eine komplexe, kommutative, unitale Banachalgebra.

Die Menge der Charaktere von $\mathcal{A}$ heißt das Spektrum von $\mathcal{A}$ und wird mit $\Sigma_{\mathcal{A}}$ bezeichnet.

Anmerkung. 1. Das Spektrum $\Sigma_{\mathcal{A}}$ versieht man mit der sogenanten schwach*-Topologie oder Gelfand-Topologie und spricht dann vom *Gelfandraum* $\Sigma_{\mathcal{A}}$. Leider gibt es für diesen wichtigen Raum kein allgemein verwendetes Symbol. Andere Bezeichnungen sind $Sp_{\mathcal{A}} = \Delta_{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}$ u.s.w.

2. Wir interessieren uns in diesem Abschnitt nur für Algebren $\mathcal{A}$, die von einem Element $T \in \mathcal{A}$ erzeugt werden, d.h., die Polynome $p(T)$ liegen dicht in $\mathcal{A}$. Nach Satz E.3.2 gibt es in diesem Fall eine eineindeutige Entsprechung zwischen $\Sigma_{\mathcal{A}}$ und $\sigma_{\mathcal{A}}(T) \subset \mathbb{C}$. Da dies auch einen Homöomorphismus zwischen $\sigma_{\mathcal{A}}(T)$ und dem Gelfandraum $\Sigma_{\mathcal{A}}$ ergibt, benötigen wir die Gelfand-Topologie vorläufig nicht.

E.3.2 Satz (Charaktere und Spektrum)

Es sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra, die von einem Element $T \in \mathcal{A}$ erzeugt wird, d.h. $\mathcal{A} = \mathrm{BAlg}(T, \mathbb{1}_{\mathcal{A}})$.

(i) *Zu $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(T)$ gibt es genau einen Charakter $\chi_\lambda \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ mit $\chi_\lambda(T) = \lambda$.*

(ii) *Für $S \in \mathcal{A}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\mu \in \sigma_{\mathcal{A}}(S)$.

(b) *Es gibt ein $\chi \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ mit $\mu = \chi(S)$.*

(iii) *Insbesondere ist die Abbildung*

$$\Sigma_{\mathcal{A}} \ni \chi \mapsto \chi(T) \in \sigma_{\mathcal{A}}(T)$$

bijektiv.

Beweis. (i) Es sei $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}$.

1. *Wir konstruieren zunächst einen Algebrenhomomorphismus $\chi_\lambda : \mathrm{Alg}(T, \mathrm{id}_E) \to \mathbb{C}$ durch die Vorschrift:*

$$\chi_\lambda : p(T) \mapsto p(\lambda) \quad \textit{für } p \in \mathbb{C}[\zeta]$$

und zeigen, daß χ_λ wohldefiniert und kontrahierend ist.

Wenn für zwei Polynome $p, q \in \mathbb{C}[\zeta]$ die Operatoren $p(T)$ und $q(T)$ übereinstimmen, so folgt aus dem spektralen Abbildungssatz E.1.2

$$(p(\lambda) - q(\lambda) = (p - q)(\lambda) \in \sigma((p - q)(T)) = \{0\}.$$

Die Linearform $\chi_\lambda : \mathrm{Alg}(T, \mathrm{id}_E) \to \mathbb{C}$ ist also wohldefiniert und multiplikativ:

$$\begin{aligned}\chi_\lambda(p(T)q(T)) &= \chi_\lambda((p \cdot q)(T)) = (p \cdot q)(\lambda)\\ &= p(\lambda)q(\lambda) = \chi_\lambda(p(T))\chi_\lambda(q(T))\end{aligned}$$

für $p, q \in \mathbb{C}[\zeta]$.

Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[\zeta]$ gilt der spektrale Abbildungssatz $p(\sigma(T)) = \sigma(p(T))$ (siehe Satz E.1.2) und somit ist

$$|\chi_\lambda p(T)| = |p(\lambda)| \leq \mathrm{r}(p(T) \leq \|p(T)\|.$$

Da $\chi_\lambda(\mathrm{id}_E) = 1$ ist, ist $\|\chi_\lambda\| = 1$.

2. *Stetige Fortsetzung von χ_λ:* Da nach Voraussetzung $\mathrm{Alg}(T, \mathbb{1}_{\mathcal{A}})$ dicht in $\mathcal{A}$ ist, hat χ_λ genau eine stetige Fortsetzung auf $\mathcal{A}$, die wir wieder mit χ_λ bezeichnen. Diese stetige Fortsetzung ist linear und multiplikativ.

3. *Eindeutigkeit von χ_λ:* Da alle Charaktere stetig sind (siehe Bem. B.4.9) folgt aus der Konstruktion, daß es genau einen unitalen Algebrenhomomorphismus $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit $\chi(T) = \lambda$ gibt.

(ii) Es seien $S \in \mathcal{A}$.

(a)$\Rightarrow$(b): Es sei $\mu \in \sigma_{\mathcal{A}}(S)$. Da $S_\mu := \mu\mathbb{1} - S \notin \mathcal{G}(\mathcal{A})$ liegt, ist

$$S_\mu\mathcal{A} := \{S_\mu A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

ein echtes Ideal von $\mathcal{A}$. Nach Satz B.4.10 ist der Abschluß $\mathcal{J} := (R\mathcal{A})^-$ auch ein echtes Ideal von $\mathcal{A}$.

Die Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ ist eine unitale Banachalgebra, die von der Nebenklasse $T + \mathcal{J}$ erzeugt wird (siehe Satz B.4.11). Nach Bemerkung E.2.3 gibt es ein λ im Spektrum von $T + \mathcal{J}$ und nach Teil (i) hierzu einen Charakter $\widetilde{\chi} : \mathcal{A}/\mathcal{J} \to \mathbb{C}$ mit $\widetilde{\chi}(T + \mathcal{J}) = \lambda$.

Für den Charakter $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit

$$\chi(U) := \widetilde{\chi}(U + \mathcal{J}) \quad \text{für } U \in \mathcal{A},$$

gilt dann $\mu - \chi(S) = \chi(\mu\mathbb{1} - S) = \chi(R) = 0$.

(b)$\Rightarrow$(a): Wenn $\mu \in \rho_{\mathcal{A}}(S)$ ist, so existiert die Inverse $R_\mu := (\mu\mathbb{1}_{\mathcal{A}} - S)^{-1} \in \mathcal{A}$. Für jeden Charakter $\chi \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ gilt

$$\chi(\mu\mathbb{1}_{\mathcal{A}} - S)\chi(R_\mu) = \chi(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = 1$$

und somit $\mu - \chi(S) = \chi(\mu\mathbb{1}_{\mathcal{A}} - S) \neq 0$. D.h.

$$\{\chi(S) \mid \chi \in \Sigma_{\mathcal{A}}\} \subset \sigma_{\mathcal{A}}(S).$$

(iii) folgt aus (i) und (ii).

E.3.3 Festst. (Spektraltranformation in $C(\sigma(T))$)

Es seien E ein komplexer Banachraum, $T \in \mathcal{L}(E)$ und $\mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E)$ die von T erzeugte abgeschlossen unitale Unteralgebra von $\mathcal{L}(E)$.

(i) *Es gibt genau einen Algebrenhomomorphismus* $\Psi : \mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ *mit*

$$\Psi : \mathrm{id}_E \mapsto \mathbb{1}_{\sigma(T)} \quad \text{und} \quad \Psi : T \mapsto \zeta,$$

wobei $\zeta : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ *die identische Funktion ist.*

Ψ *ist kontrahierend:* $\|\Psi\| = 1$.

(ii) *Es gilt*

$$\|\widehat{S}\|_{\max} = r(S) \quad \text{für } S \in \mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E).$$

(iii) *Zur Abkürzung bezeichne* $\widehat{S} := \Psi(S)$.

Für $S \in \mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E)$ *gilt* $\widehat{S}(\lambda) = \chi_\lambda(S)$ *und*

$$\{\widehat{S}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\} \subset \sigma(S).$$

Die Funktionswerte von $\widehat{S}$ *liegen im Spektrum von* S.

Anmerkung. Man beachte, die Aussage iii von Feststellung E.3.3 besagt, daß die Funktionswerte von $\widehat{S}$ in dem Spektrum $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(S)$ liegen.

Aus Satz E.3.2 (ii) folgt leicht, daß Funktionswerte von $\widehat{S}$ in der größeren Menge $\sigma_{\mathrm{BAlg}(T,\mathrm{id}_E)}$ liegen. (siehe Bez. E.2.1):

Beweis. (i) 1. *Wir konstruieren zunächst einen Algebrenhomomorphismus* $\Psi : \mathrm{Alg}(T, \mathrm{id}_E) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$:

Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[\zeta]$ gilt der spektrale Abbildungssatz $p(\sigma(T)) = \sigma(p(T))$ (siehe Satz E.1.2) und somit ist

$$\|p\|_{\sup} := \max_{\lambda \in \sigma(T)} |p(\lambda)| = \mathrm{r}(p(T)) \le \|p(T)\|. \qquad (*)$$

Wenn für zwei Polynome $p, q \in \mathbb{C}[\zeta]$ $p(T) = q(T)$ ist, so folgt für die Einschränkungen $p|\,\sigma(T) = q|\,\sigma(T)$.

Die Abbildung Ψ mit

$$\mathrm{Alg}(T, \mathrm{id}_E) \ni p(T) \mapsto p|\,\sigma(T) \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$$

ist also wohldefiniert. Ψ ist offensichtlich linear und multiplikativ:

$$\begin{aligned} p(T) + q(T) = (p+q)(T) &\mapsto (p+q)|\,\sigma(T) \\ &= p|\,\sigma(T) + q|\,\sigma(T), \\ p(T) \cdot q(T) = (p \cdot q)(T) &\mapsto (p \cdot q)|\,\sigma(T) \\ &= p|\,\sigma(T) \cdot q|\,\sigma(T) \end{aligned}$$

Es ist $\Psi(\mathrm{id}_E) = \mathbb{1}_{\sigma(T)}$ und $\Psi(T) = \zeta$.

Aus $(*)$ und $\Psi(\mathrm{id}_E) = \mathbb{1}_{\sigma(T}$ folgt $\|\Psi\| = 1$.

2. Da $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ mit der Norm $\|\cdot\|_{\sup}$ vollständig ist, hat Ψ genau eine stetige Fortsetzung auf $\mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E)$, die wir wieder mit Ψ bezeichnen.

Diese Forsetzung $\Psi : \mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ ist ein Algebrenhomomorphismus mit $\|\Psi\| = 1$.

3. *Wir zeigen die Eindeutigkeit von* Ψ. Für $\lambda \in \sigma(T)$ ist die Punktauswertung

$$\begin{aligned} &\delta_\lambda : C(\sigma(T), \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \\ &\delta_\lambda : f \mapsto f(\lambda) \quad \text{für } f \in C(\sigma(T), \mathbb{C}) \end{aligned}$$

ein unitaler Algebrenhomorphismus.

Ist $\widetilde{\Psi} : \mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ ein unitaler Algebrenhomorphismus mit $\widetilde{\Psi}(T) = \zeta$, so ist die Komposition $\chi := \delta_\lambda \circ \widetilde{\Psi}$ ein Charakter mit $\chi(T) = \zeta(\lambda) = \lambda$. Aus Satz E.3.2 (i) folgt $\chi = \chi_\lambda$. Somit gilt

$$\widetilde{\Psi}(S)(\lambda) = \chi_\lambda(S) = \Psi(S)(\lambda) \quad \text{für } \lambda \in \sigma(T).$$

Da dies für alle $S \in \mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E)$ gilt, ist $\widetilde{\Psi} = \Psi$.

(ii) Zu $S \in \mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E)$ gibt es eine Folge $(p_n)_n$ von Polynomen mit

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n(T) - S\| = 0.$$

Nach Konstruktion von Ψ ist $\Psi(p_n(T)) = p_n|\,\sigma(T)$. Aus dem spektralen Abbildungssatz E.1.2 folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(p_n(T)) &= \max |\sigma(p_n(T))| = \max |p_n(\sigma(T))| \\ &= \|\Psi(p_n(T))\|_{\sup}. \end{aligned}$$

Da der Spektralradius subadditiv und kleiner als die Norm ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(p_n(T)) - \mathrm{r}(S) &\le \mathrm{r}(p_n(T) - S) \\ &\le \|p_n(T) - S\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

(siehe Festst. E.1.7(ii) und Satz E.1.5 (i)). Da Ψ kontrahierend ist, gilt

$$\begin{aligned} \|\Psi(p_n(T)\|_{\sup} - \|\widehat{S}\|_{\sup} &\le \|\Psi(p_n(T) - S)\| \\ &\le \|p_n(T) - S\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\mathrm{r}(S) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{r}(p_n(T)) = \lim_{n\to\infty} \|\Psi(p_n(T)\|_{\sup} = \|\widehat{S}\|_{\sup}.$$

(iii) *Wir zeigen zuerst* $\widehat{S}(\sigma(T)) \subset \sigma(S)$:

Es seien $\lambda \in \sigma(T)$, $S \in \mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E)$ und $\mu = \widehat{S}(\lambda)$.

Nach Definition von $\mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E)$ gibt es eine Folge $(p_n)_n$ von Polynomen mit

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n(T) - S\| = 0.$$

Nach dem spektralen Abbildungssatz E.1.2 ist $\mu_n := \Psi(p_n(T))(\lambda) = p_n(\lambda) \in \sigma(p_n(T))$. Da Ψ kontrahierend ist, folgt

$$|\mu_n - \mu| \le \|\Psi(p_n(T) - \Psi(S)\| \le \|p_n(T) - S\|$$

und somit $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \mu$. Also ist

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(S) &= \lim_{n\to\infty} p_n(T) = \lim_{n\to\infty} \mu_n = \widehat{S}(\lambda), \\ \lim_{n\to\infty} &\|(\mu_n \,\mathrm{id}_E - p_n(T)) - (\mu \,\mathrm{id}_E - S)\| = 0. \end{aligned}$$

Annahme: $\mu \in \rho(S)$. Da die Gruppe $\mathrm{GL}(E)$ der invertierbaren Operatoren offen in $\mathcal{L}(E)$ ist (siehe Satz B.2.7(iv)), gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\mu_n \,\mathrm{id}_E - p_n(T) \in \mathrm{GL}(E)$ für $n \ge n_0$ ist. Dies ist ein Widerspruch zu $\mu_n \in \sigma(p_n(T))$.

Also ist $\mu \in \sigma(S)$.

Anmerkung. In Feststellung E.3.3 (ii) gilt sogar das Gleichheitszeichen

$$\widehat{S}(\sigma(T) = \sigma(S) \quad \text{für } S \in \mathrm{BAlg}(T). \tag{$**$}$$

Dazu beweise man den Spektralabbildungssatz für rationale Funktionen

$$\frac{p}{q} \quad \text{mit } p, q \in \mathbb{C}[\zeta] \text{ und } q(\lambda \neq 0 \text{ für } \lambda \in \sigma(T).$$

Die rationalen Funktionen $p(T)q(T)^{-1}$ erzeugen die unitale Banachalgebra $\mathrm{BRat}(T)$. Es ist $\mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{BRat}(T)$ und $\mathrm{BRat}(T)$ ist eine volle Unteralgebra von $\mathcal{L}(E)$.

Da Satz E.3.2 singngemäß auch für $\mathrm{BRat}(T)$ gilt, kann man Feststellung E.3.3 $\mathrm{BRat}(T)$ zeigen. Mit Satz E.3.2 (ii) (*für die Algebra* $\mathrm{BRat}(T)$) folgt nun die Gleichung ($**$) für $S \in \mathrm{BRat}(T)$.

E.3.4 Folg. (Spektralhomomoph. isometrisch)

Es seien E ein komplexer Banachraum, $T \in \mathcal{L}(E)$ und $\Psi : \mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E) \to C(\sigma(T), \mathbb{C})$ der spektralhomomorphismus. Dann sind äquivalent:

(a) *Ψ ist isometrisch.*

(b) *$r(S) = \|S\|$ für $S \in \mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E)$.*

(c) *$\|S^2\| = \|S\|^2$ für $S \in \mathrm{BAlg}(T, \mathrm{id}_E)$.*

E.3.5 Bsp. (Spektrum des zweiseitigen Shiftop.)

Auf dem komplexen $\ell_2(\mathbb{Z})$ erklärt man den zweiseitigen Vorwärtsshiftoperator U durch

$$U : \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e_n \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_{n-1} e_n$$

oder kurz

$$U : (\xi_n)_{(n \in \mathbb{Z})} \mapsto (\xi_{n-1})_{(n \in \mathbb{Z})}.$$

Es gilt

(i) U ist ein unitärer Operator. Der adjungierte Operator $U^* = U^{-1}$ ist der zweitige Rückwärtsshift

$$U : (\xi_n)_{(n \in \mathbb{Z})} \mapsto (\xi_{n+1})_{(n \in \mathbb{Z})}.$$

(ii) Das Spektrum von U ist der volle Einheitskreis

$$\sigma(U) = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}.$$

(iii) U hat keine Eigenwerte.

(iv) Die Inverse U^{-1} liegt nicht in der von U erzeugten unitalen abgeschlossenen Unteralgebra $\mathrm{BAlg}(U, \mathrm{id}_{\ell_2(\mathbb{Z})})$

Das Spektrum U bezüglich der Unteralgebra $\mathrm{BAlg}(U, \mathrm{id}_{\ell_2(\mathbb{Z})})$ ist die abgeschlossene Einheitskreisscheibe (siehe Bez. E.2.1):

$$\sigma_{\mathrm{BAlg}(U, \mathrm{id}_{\ell_2(\mathbb{Z})})} = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\}.$$

Beachte : Für $|\lambda| < 1$ ist $\sum_{n=-\infty}^{0} \lambda^{-n} e_n \in \ell_2(\mathbb{Z})$ und

$$(\lambda \, \mathrm{id}_{\ell_2(\mathbb{Z})} - U) \sum_{n=-\infty}^{0} \lambda^{-n} e_n = e_1,$$

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $\mathcal{A} := \mathrm{BAlg}(U, \mathrm{id}_{\ell_2(\mathbb{Z})})$

(i)

(ii) Da U normal ist, ist $\mathrm{r}(U) = \|U\| = 1$.

(iii)

(iv) Für $|\lambda| < 1$ ist

$$(\lambda \, \mathrm{id}_{\ell_2(\mathbb{Z})} - U) \sum_{n=-\infty}^{0} \lambda^{-n} e_n = e_1,$$

oder anschaulich:

$$\begin{aligned} &(\dots, \lambda^2, \lambda^1, 1, 0, 0, \dots) \\ &\mapsto (\dots, \lambda^3, \lambda^2, \lambda, 0, 0, \dots) - (\dots, \lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1, 0, \dots) \\ &\qquad = (\dots, 0, 0, 0, 1, 0, \dots). \end{aligned}$$

Für die Operatoren $S \in \mathrm{BAlg}(U, \mathrm{id}_{\ell_2(\mathbb{Z})})$ ist $Se_1 \in \mathrm{lin}\{e_1, e_2, \dots\}$. Folglich ist $(\lambda \, \mathrm{id}_{\ell_2(\mathbb{Z})} - U)^{-1} \notin \mathrm{BAlg}(U, \mathrm{id}_{\ell_2(\mathbb{Z})})$ und somit $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}$.

Die offene Einheitkreisscheibe liegt in $\sigma_{\mathcal{A}}$. Da das Spektrum abgeschlossen ist, liegt die abgeschlossene Einheitkreisscheibe im Spektrum.

Da andererseits $\mathrm{r}_{\mathcal{A}}(U) = \mathrm{r}(U) = 1$ ist, ist $\sigma_{\mathcal{A}}$ die Einheitkreisscheibe im Spektrum.

(v)

E.3.6 Bsp. (zweiseitiger Shift auf $L^2([01])$)

Man kann den zweiseitigen Shiftoperator auch auf dem $L^2[0,1]$ untersuchen:

Die Funktionen $e_n : t \mapsto e^{2\pi i n t}$ bilden eine Orthonormalbasis des $L^2[0,1]$ (siehe Abschn. 1.5.1) und so sind $L^2[0,1] \cong \ell_2(\mathbb{Z})$ isometrisch isomorph. (siehe Satz 1.5.12). Der entsprechende Shiftoperator auf dem $L^2[0,1]$ verschiebt die Fourierkoeffizienten. Dies tut auch der Multiplikationsoperator M_{e_1}:

$$(M_{e_1} f)(t) = e^{2\pi i t} f(t) \quad \text{für } f \in C([0,1], \mathbb{C}) \text{ und } t \in [0,1].$$

Es ist $M_{e_1} e_n = e_{n+1}$ und somit

$$M_{e_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_{n-1} e_n.$$

Für $|\lambda| \neq 1$ ist

$$r_\lambda := \frac{1}{\lambda - e_1} \in C([0,1], \mathbb{C})$$

und folglich ist $R(\lambda, M_{e_1}) = M_{r_\lambda}$. Das Spektrum des Multiplikationsoperators M_{e_1} besteht aus allen Funktionswerten:

$$\sigma(M_{e_1}) = \{e^{2\pi i t} \mid t \in [0,1]\}$$

F Mengenlehre

F.1 Zornsches Lemma

F.1.1 Def. (Präordnung, Ordnung)

1. Ein binäre Relation $\leq$ auf einer Menge X heißt eine Präordnung, wenn sie ***reflexiv*** *und* ***transitiv*** *ist:*

(i) $x \leq x$

(ii) $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Die Relation $\leq$ heißt eine Ordnung, wenn sie zusätzlich ***antisymetrisch*** *ist:*

(iii) $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$

Wir nennen dann X kurz eine prägeordnete Menge bzw. eine geordnete Menge.

In den Lehrbüchern ist die Terminologie ist hier nicht einheitlich: Man findet für eine Relation mit den Eigenschaften I-III auch die Bezeichnung *teilweise Ordnung*

2. Eine (prä)geordnete Menge X heißt ***linear geordnet*** *oder* total georndet, *wenn für je zwei Elemente $x, y \in X$ eine der Relationen $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt.*

3. Ein Element $s \in X$ heißt eine ***obere Schranke*** *einer Teilmenge $M \subset X$, wenn $x \leq s$ für alle $x \in M$ gilt.*

M heißt ***nach oben beschränkt****, wenn M eine obere Schranke $s \in X$ hat.*

4. Eine (prä)geordnete MengeX heißt ***induktiv*** *geordnet, genauer nach oben induktiv geordnet, wenn jede total geordnete Teilmenge $M \subset X$ eine obere Schranke hat.*

5. Ein Element m einer (prä)geordneten Menge heißt ***maximal****, wenn aus $m \leq x$ stets $x \leq m$ folgt.*

Anmerkung. 1. Ein geordnete Menge kann mehrere verschieden maximale Elemente haben. Man unterscheide die Begriffe *maximales Element* und *grӧstes Element*:

Ein Element m einer geordneten Menge heißt **größtes** Element oder **Maximum**, wenn $x \leq m$ für alle $x \in X$ gilt.

2. Ebenso definiert man untere Schranken, nach unten induktiv geordnet Mengen und minimale Elemente. Mit diesen Begriffen gilt das Zornsche Lemma analog für nach unten induktiv geordnete Mengen. Formal erhält man dies, wenn man die Relation $\leq$ durch die Relation $\geq$ ersetzt, die ebenfalls eine (Prä)ordnung ist.

Beispiel: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind nach unten induktiv geordnet. $\mathbb{N}$ verfügt mit dem *Prinzip der vollständigen Induktion* über eine viel stärkere Eigenschaft.

3. Einen Ersatz für das *Prinzip der vollständigen Induktion* bietet das Zornsche Lemma. Man formuliert dies üblicherweise für nach oben induktiv (prä)geordnete Mengen.

F.1.2 Satz (Zornsches Lemma)

Jede induktiv (prä)geordnete Menge hat mindestens ein maximales Element.

Anmerkung. (zum Beweis des Zornschen Lemmas) Das Zornsche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom der Mengenlehre.

Anmerkung. Häufig wird das Zornsche Lemma nur für geordnete Mengen formuliert. Hieraus folgt sofort die Aussage für prägeordnete Mengen. Dazu betrachte man auf einer prägeordneten Menge X die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y \quad \text{und} \quad y \leq x.$$

Die Menge $X/\sim$ der Äquivalenzklassen ist dann geordnet. Ist X induktiv geordnet, so ist auch $X/\sim$ induktiv geordnet. Aus dem Zornschen Lemma für $X/\sim$ folgt nun, daß X ein maximales Element hat.

F.1.3 Bsp. (Basis eines Vektorraumes)

Mit Hilfe des Zornschen Lemmas beweist man, daß jeder Vektorraum $V \neq \{0\}$ eine Basis hat.

Dazu betrachte man die Menge $\mathcal{X}$ aller nichtleeren, linear unabhängigen Teilmengen L von V. Man ordne $\mathcal{X}$ durch die Inklusion.

$$K \leq L : \quad \Leftrightarrow \quad K \subset L.$$

Behauptung: $\mathcal{X}$ ist induktiv geordnet:

Wenn $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ linear geordnet ist, so bilde man

$$S := \bigcup_{L \in \mathcal{M}} L \in \mathcal{X}.$$

Wir zeigen, daß S ist eine linear unabhängige Teilmenge von V ist.

Zu endlich vielen $x_1, \dots, x_n \in S$ gibt es Elemente $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{M}$ mit $x_\nu \in L_\nu$. Da $\mathcal{M}$ linear geordnet ist, ist eines der Elemente $L_1, \dots, L_n$ das größte, dies sei L_{n_0}. Also liegen $x_1, \dots, x_n \in L_{n_0}$ und sind folglich linear unabhängig.

Also ist S eine obere Schranke von $\mathcal{M}$.

Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element $B \in \mathcal{X}$. Da B eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V ist, ist B eine Basis von V.

F.2 Mächtigkeit von Mengen

S Symbolverzeichnis

Allgemeine Bezeichnungen

$\mathbb{C}$ Körper der komplexen Zahlen
$\mathbb{K}$ wahlweise $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, Abschn. 1.1
$\mathbb{R}$ Körper der reellen Zahlen

Variable, Räume, Abbildungen ...

$\langle x, y\rangle$ Inneres Produkt, Def. 1.1.7
$\mathcal{A}$ Algebra, Banachalgebra $\mathcal{A}$, Def. B.4.2
$\overline{\varphi}$ konjugierte eines linearen Funktionals
b Sesquilinearform, Bilinearform

Funktorielle Bezeichnungen

$\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ Charakter der Algebra$\mathcal{A}$, Bez. B.4.8
$\gamma(T)$ Minimalmodul des Operators T, Def. 2.3.10
$\rho(T)$ Resolventenmenge von $T \in \mathfrak{L}(E)$, Def. E.1.1
$\rho_{\mathcal{A}}(a)$ Resolventenmenge von $a \in \mathcal{A}$, Bez. E.2.2
$\rho_{\mathcal{A}}(T)$ Resolventenmenge von $T \in \mathcal{A}$, Bez. E.2.1
$\sigma(T)$ Spektrum von $T \in \mathfrak{L}(E)$, Def. E.1.1
$\Sigma_{\mathcal{A}}$ Spektrum der unitalenB- Algebra $\mathcal{A}$, Bez. E.3.1
$\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ Spektrum von $a \in \mathcal{A}$, Bez. E.2.2
$\sigma_{\mathcal{A}}(T)$ Spektrum von $T \in \mathcal{A}$, Bez. E.2.1
$C^*\{T\}$ von T erzeugte C^*-Algebra, Abschn. 2
$\mathrm{G}(\mathcal{A})$ Einheitengruppe der Algebra $\mathcal{A}$, Satz B.4.7
$L_{\mathcal{A}}$ links-regulare Darstellung der Algebra $\mathcal{A}$, Bem. B.4.5
L_a Linksmultiplikation mit $a \in \mathcal{A}$, Bem. B.4.5
P_+ Träger P_{T_+} des positiven Anteils, Satz 2.5.15
P_- Träger P_{T_-} des negativen Anteil, Satz 2.5.15
$\mathrm{r}(T)$ Spektralradius von $T \in \mathfrak{L}(E)$, Satz E.1.5
$\mathrm{r}_{\mathcal{A}}(T)$ Spektralradius von $T \in \mathcal{A}$, Bem. E.2.3
$R(\cdot, T)$ Resolvente von $T \in \mathfrak{L}(E)$, Def. E.1.1
$R_{\mathcal{A}}$ rechts-regulare Darstellung der Algebra $\mathcal{A}$, Bem. B.4.5
R_a Rechtssmultiplikation mit $a \in \mathcal{A}$, Bem. B.4.5
$P_{(\mathrm{Kern}\, T)^\perp}$ Rechtsträger von T, Bez. 2.2.15
$P_{\overline{\mathrm{Bild}\, T}}$ Linksträger von T, Bildprojektion, Bez. 2.2.15
P_{T^*} Rechtsträger von T, Bez. 2.2.15
P_T Linksträger von T, Bildprojektion, Bez. 2.2.15
$|T|$ Betrag von T, Satz 2.5.13
$\mathrm{Alg}(\mathrm{id}_E, T)$ von T erzeugte unitale Algebra, Bez. B.2.5
$\mathrm{Alg}(T)$ von T erzeugte Algebra, Bez. B.2.5
$\mathrm{BAlg}_{\mathbb{K}}(\mathrm{id}_E, T)$ von T in $\mathfrak{L}(E)$ erzeugte unitale Banachalgebra, Bez. B.2.5
$\mathrm{BAlg}_{\mathbb{K}}(T)$ von T in $\mathfrak{L}(E)$ erzeugte Banachalgebra, Bez. B.2.5
$\mathrm{Im}\, T$ Imaginärteil von T, $\mathrm{Im}\, T = -i/2(T - T^*)$, Def. 2.1.4
$\mathrm{Re}\, T$ Realteil von T, $\mathrm{Re}\, T = 1/2(T + T^*)$, Def. 2.1.4
b_T Sesquilinearform $\langle x, Ty\rangle$ zum Operator T, Satz 2.1.1
T^* adjungierter Operator zu T, Festst. 2.1.2
$T^{(-)}$ Linksinverse von T, Festst. 2.3.7
T^{**} biadjungierter Operator zu T, Satz 2.1.3
T_+ positiver Anteil eines selbstadj. Op, Satz 2.5.15
T_- negativer Anteil eines selbstadj. Op, Satz 2.5.15

Spezielle Räume

$C([a, b], \mathbb{K})$ Banachraum der stetigen $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$