4 Kompakte Operatoren

4.1 Kompakte Operatoren auf dem Hilbertraum

4.1.1 Folg. ($\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ kompakt $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ endlichdim.)
Die identische Abbildung eines Prähilbertraumes $\mathcal{X}$ ist genau dann kompakt, wenn $\mathcal{X}$ endlichdimensional ist.

Beweis. 1. Wenn $\dim \mathcal{X} = n \in \mathbb{N}$ ist, so ist $\mathcal{X} \cong \ell_2^n$ und bekanntlich ist die abgeschlossene Einheitskugel des ℓ_2^n kompakt.

2. Wenn $\dim \mathcal{X} = \infty$ ist, so gibt es eine orthonormale Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ für $n \neq m$ ist, enthält $(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\, e_n)_n$ keine konvergente Teilfolge. Also ist $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ nicht kompakt.

4.1.2 Satz (Approx. durch Op. von endl. Rang)
Es seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Prähilberträume und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ kompakt.

(i) *Es gibt eine Folge $(K_n)_n$ endlichrangiger Operatoren in $\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ die gegen K konvergiert.*

Man kann die approximierende Folge $(K_n)_n$ so wählen, daß $\|K_n\| \leq \|K\|$ ist.

(ii) Konstruktion einer approximierende Folge: *Es seien $(e_n)_n\in \mathbb{N}$ eine orthonormale Basis des separablen Unterraumes $\mathrm{Bild}(K)$ und$P_n = P_{\mathrm{lin}\{e_1,\ldots,e_n\}}$ der orthogonale Projektor auf die lineare Hülle von $e_1,\ldots,e_n$. Für $K_n := KP_n$ gilt dann*

$$\lim \|K - P_nK\| = 0.$$

(iii) *Wenn $\mathcal{Y}$ ein Hilbertraum ist, dann ist K genau dann kompakt, wenn K durch Operatoren aus $\mathcal{F}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ aproximiert werden kann.*

Beweis. (i) *Es reicht die stärkste Behauptung* (ii) *zu zeigen.*

(ii) Da $K(\mathrm{Ball}\,\mathcal{X})$ separabel ist, hat $\mathrm{Bild}\,K$ eine orthonormale Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (siehe Bem. A.3.2 und Satz 1.5.9). Es sei P_n der orthogonale Projektor auf $\mathrm{lin}\{e_1,\ldots,e_n\}$ (siehe Bsp. 2.1.16). Für $y \in \overline{\mathrm{Bild}}\,K$ ist (siehe Satz 1.5.6 und Satz 1.5.3)

$$\|(\mathrm{id}_{\mathcal{Y}} - P_n)y\| = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |\langle e_\nu, y\rangle|^2 \downarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Nach dem Satz von Dini A.3.8 konvergiert die Folge der Funktionen $\|(\mathrm{id}_{\mathcal{Y}} - P_n)(\cdot)\|$ auf der kompakten Menge $\overline{K(\mathrm{Ball}\,\mathcal{X})}$ gleichmäßig gegen 0. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|(\mathrm{id} - P_n)K\| = 0.$$

Es ist $\mathrm{Rang}\, P_nK \leq n$.

(iii) Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Nach Satz B.3.4 ist der Grenzwert einer konvergenten Folge $(K_n)_n$ aus $\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{H})$ kompakt.

4.1.3 Satz (adjungierte Op. K^* kompakt)
Es seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilberträume. Ein Operator $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ ist genau dann kompakt, wenn K^* kompakt ist.

Beweis. 1. Es sei $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ kompakt. Nach Satz 4.1.2 gibt es eine Folge $(K_n)_n$ in $\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ die gegen K konvergiert.Da

$$\|K^* - K_n^*\| = \|K - K_n\|$$

ist, ist K^* kompakt.

2. Wenn K^* kompakt ist, so ist nach Teil 1. auch $K = K^{**}$ kompakt.

Anmerkung. 1. Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt. Wählt man die Projektoren $(P_n)_n$ wie in Satz 4.1.2 (ii), dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} \|K - P_nKP_n\| = 0$. Man kann also kompakte selbstadjungierte (bzw. positive) Operatoren durch kompakte (bzw. positive) Operatoren $K_n \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ approximieren.

2. In Satz 4.3.1 erhalten wir eine optimale Approximation durch endlichrangige Operatoren in der erzeugten C^*-Algebra.

4.1.4 Satz (erzeugte C^*-Algebra $C^*(T) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$.

(i) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *K ist kompakt.*

(b) *K^*K ist kompakt.*

(c) *Alle Operatoren der erzeugten C^*-Algebra $C^*(T)$ sind kompakt.*

(ii) *Wenn $\dim \mathcal{H} = \infty$ und K kompakt ist, so ist $C^*(T)$ nicht unital.*

Beweis. (i) (a)$\Rightarrow$(b) ist klar nach Satz B.3.2.

(b)$\Rightarrow$(a): Es sei (x_n) eine Folge in $\mathrm{Ball}(\mathcal{H})$ und $(K^*Kx_{n_k})_k$ eine Konvergente Teilfolge. Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}\|Kx_{n_k} - Kx_{n_l}\|^2 &= \langle K^*Kx_{n_k} - K^*Kx_{n_l}, x_{n_k} - x_{n_l}\rangle \\ &\leq 2\|K^*Kx_{n_k} - K^*Kx_{n_l}\|\end{aligned}$$

folgt, daß $(Kx_{n_k})_k$ eine Cauchyfolge ist. Da $\mathcal{K}$ vollständig ist, konvergiert diese Folge.

(a)$\Rightarrow$(c): Nach Satz 4.1.3 ist K^* kompakt. Nach Satz B.3.2 sind alle Elemente der erzeugten Algebra $\mathrm{Alg}(T,T^*)$ kompakt. Da Grenzwerte kompakter Operatoren wieder kompakt sind, sind alle Elemente von $C^*(T)$ kompakt.

(ii) Wenn $\dim \mathcal{H} = \infty$ ist, so ist $\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ nicht kompakt.

4.1.5 Bem. ($(e_n)_n$ ONFolge $\Rightarrow$ $\|Ke_n\| \to 0$)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein Kompakter Operator $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ bildet orthonormale Folge $(e_n)_n$ in Nullfolgen ab:

$$\lim_{n\to\infty} \|Ke_n\| = 0.$$

Anmerkung. Im folgenden Abschnitt zeigen wir, daß auch die Umkehrung gilt.

Beweis. *Wir zeigen, daß jede konvergente Teilfolge* $(Ke_{n_k})_k$ *gegen* 0 *konvergiert. Nach Bemerkung A.3.5 ist dann* $\lim_{n\to\infty} Ke_{n_k} = 0$.

Es sei $y = \lim_{k\to\infty} Ke_{n_k}$.

$$\begin{aligned}\|Ke_{n_k}\|^2 &= \langle Ke_{n_k} - y, Ke_{n_k}\rangle + \langle y, Ke_{n_k}\rangle \\ &\leq \|K\|\,\|Ke_{n_k} - y\| + |\langle y, Ke_{n_k}\rangle| \qquad (*)\end{aligned}$$

Aus der Besselschen Ungleichung (siehe Satz 1.5.3):

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle y, Ke_{n_k}\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle K^*y, e_{n_k}\rangle|^2 \leq \|K^*y\|^2$$

folgt, das $\lim_{n\to\infty} \langle y, Ke_{n_k}\rangle = 0$ ist. Also konvergiert die rechte Seite von Gleichung $(*)$ gegen 0.

4.1.1 Vollstetige Operatoren

Anmerkung. (schwach konvergente Folgen) 1. Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Folge $(x_n)_n$ in $\mathcal{H}$ heißt schwach konvergent gegen $\tilde{x} \in \mathcal{H}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle \tilde{x}, y\rangle \quad \text{für alle } y \in \mathcal{H}$$

gilt.

2. Für Hilberträume gilt der Satz von Banach-Steinhaus: *Eine schwach konvergente Folge ist beschränkt.*

Es ist also keine Einschränkung, wenn wir im nächsten Satz nur beschränkte schwach konvergente Folgen betrachten.

3. Für Prähilberträume erklärt man die schwache Konvergenz nur für beschränkte Folgen:

Es sei $\mathcal{X}$ ein Prähilbertraum. Eine *beschränkte* Folge $(x_n)_n$ in $\mathcal{X}$ heißt schwach konvergent gegen $\tilde{x} \in \mathcal{X}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle \tilde{x}, y\rangle \quad \text{für alle } y \in \mathcal{X}$$

gilt.

4. Wenn eine beschränkte Folge in einem Pähilbertraum $\mathcal{X}$ schwach konvergiert, dann konvergiert die Folge auch in der Vervollständigung $\mathcal{X}^\sim$ schwach. Allgemeiner gilt:

5. Es sei $M \subset \mathcal{H}$ und die lineare Hülle $\operatorname{lin} M$ sei dicht in $\mathcal{H}$. Wenn für eine beschränkte Folge (x_n) in $\mathcal{H}$ und $\tilde{x} \in \mathcal{H}$ folgendes gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle \tilde{x}, y\rangle \quad \text{für alle } y \in M,$$

dann konvergiert $(x_n)_n$ schwach gegen $\tilde{x}$.

Der Beweis ergibt sich sofort mit der Dreieecksungleichung.

6. Orthonormale Folgen sind schwache Nullfolgen:

Beweis. Aus der Besselschen Ungleichung 1.5.3:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle y, e_{n_k}\rangle|^2 \leq \|y\|^2$$

folgt, das $\lim_{n\to\infty} \langle y, e_{n_k}\rangle = 0$.

4.1.6 Bez. (vollstetige Op.)

Es seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Prähilberträume. $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ heißt *vollstetig*, wenn K beschränkte schwache Nullfolgen in Nullfolgen abbildet:

$$\begin{aligned}&(x_n)_n \text{ in Ball}\,\mathcal{X} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0 \text{ für } y \in \mathcal{X} \\ &\quad\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|Kx_n\| = 0.\end{aligned}$$

4.1.7 Bem. (Kompakte Op. vollstetig)

Es sei $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Prähilberträume. Jeder kompakte Operator $K \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ist vollstetig.

Beweis. Es sei K kompakt und $(x_n)_n$ eine eine Folge in $\text{Ball}(\mathcal{H})$, die schwach gegen 0 konvergiert. Es seien $\mathcal{H} := \mathcal{X}^\sim$ und $\mathcal{K} := \mathcal{Y}^\sim$ die Vervollständigungen. Die eindeutige stetige Forsetzung bezeichnen wir mit K. Nach Bemerkung B.3.3 ist die Fortsetzung kompakt.

Nach Anmerkung 5. konvergiert die Folge $(x_n)_n$ in $\mathcal{H}$ schwach gegen 0.

Wir zeigen, daß jede konvergente Teilfolge $(Kx_{n_k})_k$ *gegen* 0 *konvergiert. Nach Bemerkung A.3.5 ist dann* $\lim_{n\to\infty} Kx_{n_k} = 0$.

Es sei $y = \lim_{k\to\infty} Kx_{n_k}$. Für den Grenzwert y folgt dann:

$$\begin{aligned}\|Kx_{n_k}\|^2 &= \langle Kx_{n_k} - y, Kx_{n_k}\rangle + \langle y, Kx_{n_k}\rangle \\ &\leq \|K\|\,\|Kx_{n_k} - y\| + |\langle K^*y, x_{n_k}\rangle| \to 0.\end{aligned}$$

4.1.8 Bem. (Grenzwerte von Folgen vollst. Op.)
Es seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Prähilberträume und $(K_n)_n$ eine konvergente Folge vollstetiger Operatoren in $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$:

$$\lim_{n\to\infty} \|K - K_n\| = 0.$$

Dann ist der Grenwert K vollstetig.

Beweis. Es sei $(x_n)_n$ eine schwache Nullfolge in $\operatorname{Ball} \mathcal{X}$. Nach Voraussetzung gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine vollstetigen Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ mit $\|K - L\| < \varepsilon$. Da L vollstetig ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\|Lx_n\| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Also ist

$$\|Kx_n\| \leq \|(K - L)x_n\| + \|Lx_n\| \leq 2\varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

4.1.9 Festst. (vollstetige Op.)
Es seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Prähilberträume und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

(i) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *K ist vollstetig*

(b) *Für jede orthonormale Folge $(e_n)_n$ ist*

$$\lim_{n\to\infty} \|Ke_n\| = 0.$$

(c) *Es gibt eine Folge $(K_n)_n$ endlichrangiger Operatoren in $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ die gegen K konvergiert.*
Man kann die approximierende Folge $(K_n)_n$ so wählen, daß $\|K_n\| \leq \|K\|$ ist.

(ii) *Es sei $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. In den beiden Fällen*

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
2. *K ist* symmetrisch *(siehe* Bez. 2.1.9 (iii)*),*

ist die folgende Aussage (d) *äquivalent zu* (a)–(c)*:*

(d) *Für jede orthonormale Folge $(e_n)_n$ ist*

$$\lim_{n\to\infty} \langle Ke_n, e_n \rangle = 0.$$

Anmerkung. Aus Satz B.3.4 folgt nun:

4.1.10 Folg. (kompakt ⇔ vollstetig)
Für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und einen Prähilbertraum $\mathcal{X}$ gilt: $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ ist genau dann vollstetig, wenn K kompakt ist.

Beweis. (i) (a) ⇒ (b): Aus der Besselschen Ungleichung 1.5.3 folgt, daß jede orthonormale Folge eine schwache Nullfolge ist.

(b) ⇒ (c): *Wir konstruieren induktiv eine orthonormale Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{X}$ und die orthogonalen Projektoren*

$$P_n := P_{\operatorname{lin}\{e_0,\ldots,e_{n-1}\}} \quad \textit{und} \quad Q_n := \operatorname{id}_{\mathcal{X}} - P_n$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$\|KQ_n\| \leq \|KQ_ne_n\| + \tfrac{1}{n} \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Man wähle $e_0 \in \mathcal{X}$ mit $\|e_0\| = 1$. Es seien $e_0, \ldots, e_n$ bereits gewählt, so daß $(*)$ gilt. Nach Definition der Norm, gibt es einen Einheitsvektor $e_{n+1} \in Q_{n+1}\mathcal{X} = \{e_0, \ldots, e_n\}^\perp$ mit

$$\|KQ_{n+1}\| \leq \|KQ_{n+1}e_{n+1}\| + \tfrac{1}{n+1}.$$

Da nach Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} \|Ke_n\| = 0$ und $Q_ne_n = e_n$ ist, folgt

$$\|KQ_ne_n\| = \|Ke_n\| \to 0.$$

Aus Gleichung $(*)$ folgt nun $\lim_{n\to\infty} \|KQ_n\| = 0$.

Der Operator $K_n := KP_n = K(\operatorname{id}_{\mathcal{X}} - Q_n)$ hat endlichen Rang und

$$\lim_{n\to\infty} \|K - K_n\| = \lim_{n\to\infty} \|KQ_n\| = 0.$$

Für die Norm gilt: $\|K_n\| = \|KP_n\| \leq \|K\|\|P_n\| = \|K\|$.

(c) ⇒ (a) ergibt sich sofort aus Bemerkung 4.1.8.

(ii) (b) ⇒ (d) gilt offensichtlich immer.

(d) ⇒ (c): In den beiden angegebenen Fällen ist die Norm der quadratischen Form $q_T : x \mapsto \langle Tx, x \rangle$ äquivalent zur Operatornorm $\|T\|$ (siehe...).
Führt man den Schluß (b) ⇒ (c) analog mit der äquivalenten Norm $\|q_T\|$ durch, so erhält man (d) ⇒ (c).

4.1.2 Beispiele

Anmerkung. Ein quasinilpotenter kompakter Operator heißt auch Volterra-Operator. Der Prototyp eines solchen Operators in $L^2([0,1])$ hat die Form

$$(Vf)(s) = \int_0^s k(s,t)f(s)\,dt \quad \text{für } f \in L^2([0,1]).$$

Der *kern* $k(t,s)$ verhält sich wie eine untere Dreiecksmatrix mit 0 auf der Diagonalen. Im Fall

$$k(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } s < t \\ 0 & \text{für } t \le s \end{cases}$$

ist Vf die Stammfunktion, die wir in den beiden folgenden Beispielen genauer untersuchen:

4.1.11 Bsp. (Volterra-Operator auf $C([0,1])$)
Auf $C([0,1],\mathbb{C})$ mit der $\|\cdot\|_{\sup}$-Norm erklären wir eine linearen Operator V durch die Stammfunktion

$$(Vf)(t) := \int_0^t f(\tau)\,d\tau \quad \text{für } t \in [0,1]$$

und $f \in C([0,1])$. V hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $\|V\| = 1$ und V ist kompakt.

(ii) V ist quasinilpotent: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|V^n\|} = 0$.

V ist injektiv und $0 \in \sigma(V)$ ist ein approximativer Eigenwert.

Beweis. (i) Aus

$$\|Vf\|_{\sup} = \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right| \le \|f\|_{\sup}.$$

folgt $\|V\| \le 1$. Da $\|V\mathbb{1}_{[0,1]}\|_{\sup} = 1$ ist , ist $\|V\| = 1$.

Wir prüfen die Voraussetzungen für den Satz von Arzela-Ascoli nach: Die Familie $V(\operatorname{Ball} C([0,1]))$ ist gleichstetig:

$$|f(s) - f(t)| = \left|\int_s^t f(\tau)\,d\tau\right| \le \|f\|_{\sup}|t-s|.$$

und beschränkt. Nach dem Satz A.3.7 ist $V(\operatorname{Ball} C([0,1]))$ relativ kompakt und somit V ein kompakter Operator.

(ii) Für die n-ten Stammfunktion $V^n f$ gilt die Taylorformel mit Integralrestglied:

$$\begin{aligned}(V^n f)(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} (V^{(-n+k)}f)(0)\frac{(t-a)^k}{k!} \\ &+ \int_0^t f(\tau)\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau \quad \text{für } t \in [0,1]. \quad (*)\end{aligned}$$

Die Taylorkoeffizienten verschwinden alle. Man schätzt ab:

$$|(V^n f)(t)| \le \|f\|_{\sup} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau = \|f\|_{\sup}\frac{t^n}{n!}.$$

Hieraus folgt $\|V^n\| \le \frac{1}{n!}$ und somit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|V^n\|} = 0$.

Für $e_n(t) := e^{2\pi i n t}$ ist

$$Ve_n = \frac{e_n - \mathbb{1}_{[0,1]}}{2\pi i n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und folglich $\lim_{n\to\infty} \|Ve_n\|_{\sup} = 0$. Die Folge (e_n) ist ein approximativer Eigenvektor.

Anmerkung. Es sei $\mathcal{X}$ der Prähilbertraum $C([0,1])$ versehen mit dem Standardskalarprodukt $\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(s)\overline{g(s)}\,ds$ (siehe Bsp. 1.2.4). Die Vervollständigung von $\mathcal{X}$ ist der Raum $L^2([0,1])$. Die Einbettung

$$I : (C([0,1]), \|\cdot\|_{\sup}) \to L^2([0,1])$$

ist kontrahierend mit $\|I\| = 1$. Wir untersuchen den Volterra-Operator aus Beispiel 4.1.11 als Operator auf $\mathcal{X}$ bzw. $L^2([0,1])$.

4.1.12 Bsp. (Volterra-Operator auf $L^2([01])$)
Es sei $V : C([0,1]) \to C([0,1])$ der Operator aus Beispiel 4.1.11.

(i) Faßt man V als Operator $\tilde{V} : \mathcal{X} \to C([0,1])$ auf, so ist $\tilde{V}$ kompakt.

(ii) $\tilde{V}$ hat eine eindeutige stetige Fortsetzung zu einem kompakten Operator $\tilde{V} : L^2([0,1]) \to C([0,1])$.

(iii) Es sei I die stetige Einbettung von $(C([0,1]))$ in $L^2([0,1])$. Die Komposition

$$K = I\tilde{V} : L^2([0,1]) \to C([0,1]) \to L^2([0,1])$$

ist ein kompakter Operator von $L^2([0,1])$ in sich.

(iv) K ist quasinilpotent: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|K^n\|} = 0$, injektiv und $0 \in \sigma(K)$ ist ein approximativer Eigenwert.

Insbesondere bilden die Basisvektoren $e_n(t) := e^{2\pi i n t}$ ($n \in \mathbb{N}$) (siehe Satz 1.5.13) eine approximative Eigenvektorfolge:. $\lim_{n\to\infty} \|Ke_n\| = 0$.

Beweis. (i) *Wir prüfen die Voraussetzungen für den Satz von Arzela-Ascoli nach:* Für $0 \le s \le t \le 1$ folgt mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}&|(Kf)(t) - (Kf)(s)| = \left|\int_s^t 1 \cdot f(\tau)\,d\tau\right| \\ &\le \left(\int_s^t 1^2 \cdot d\tau\right)^{1/2}\left(\int_s^t |f(\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2} \le \sqrt{t-s}\,\|f\|_{L^2}\end{aligned}$$

Also ist die Familie $\tilde{V}(\operatorname{Ball}\mathcal{X})$ gleichstetig. Für $s = 0$ folgt $\|\tilde{V}\| \le 1$. Mit dem Satz von Arzela-Ascoli A.3.7 folgt, daß $\tilde{V}(\operatorname{Ball}\mathcal{X})$ relativ kompakt in $(C([0,1]), \|\cdot\|_{\sup})$ ist.

Folglich ist der Operator $\tilde{V} : \mathcal{X} \to C([0,1])$ kompakt.

(ii) Nach Bemerkung B.3.3 (ii) hat der kompakte Operator $\tilde{V}$ genau eine stetige Fortsetzung auf die vollständige Hülle von $\mathcal{X}$, die wir weiterhin mit $\tilde{V} : L^2([0,1]) \to \mathbb{C}([0,1])$ bezeichnen. $\tilde{V}$ ist kompakt.

(iii) Da die identische Abbildung, aufgefaßt als Abbildung $C([0,1]) \to \mathcal{X} \subset L^2([0,1])$, beschränkt ist, ist $K = I \circ \tilde{V} : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ kompakt.

(iv) Für K^n gilt die Formel $(*)$. Schätzt man in $(*)$ die rechte Seite mit der Schwarzschen Ungleichung ab:

$$\begin{aligned}|(K^n f)(t)| &\le \|f\|_{L^2}\left(\int_0^t \left(\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\right)^2 d\tau\right)^{1/2} \\ &\le \|f\|_{L^2}\left(\int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau\right)^{1/2} \\ &\le \|f\|_{L^2}\left(\frac{t^n}{n!}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

so folgt
$$\|K^n\| \leq \frac{1}{\sqrt{n!}}$$
und somit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|K^n\|} = 0$.

Für $e_n(t) := e^{2\pi i n t}$ ist
$$Ke_n = \frac{e_n - \mathbb{1}_{[0,1]}}{2\pi i n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
und somit $\lim_{n\to\infty} \|Ke_n\|_{L^2} = 0$. Die orthonormale Folge (e_n) ist ein approximativer Eigenvektor. (vgl. hierzu Bem. 4.1.5).

Wir zeigen, daß K injektiv ist: Da $K : L^2([0,1]) \to C([01,])$ stetig ist, gilt für $f \in \operatorname{Kern} K$ die Formel
$$\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, f\rangle = (Kf)(t) = 0 \quad \text{für } t \in [0,1].$$
Die lineare Hülle der Funktionen $\{\mathbb{1}_{[0,t]} \mid t \in [0,1]\}$ sind die rechtsseitig stetigen Treppenfunktionen. Da die Treppenfunktionen dicht in $L^2([0,1])$ liegen (siehe Bem. 1.4.6), ist
$$\langle g, f\rangle = 0 \quad \text{für } g \in L^2([0,1])$$
und folglich $f = 0$.

4.2 Spektrum kompakter Operatoren

Anmerkung. Die Ergebnisse diese Abschnittes sind nicht typisch für Hilbertraume bzw. Prähilberträume. Mit den gleichen Beweisideen und etwas mehr Aufwand lassen sich die Aussagen für Banachräume beweisen. Wir benutzen lediglich, daß es zu jedem endlichdimensionalen Raum eine stetigen Projektor auf diesen Raum gibt. Das gilt auch für normierte Räume (vgl. [, Werner Satz IV.6.2]).

Anmerkung. (Rieszsches Lemma) Es seien E ein normierter und F ein abgeschlossener Teilraum. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_0 \in E \setminus F$ mit
$$1 = \operatorname{dist}(x_0, F) \leq \|x_0\| < 1 + \varepsilon$$

Beweis. Da F abgeschlossen ist, ist $\operatorname{dist}(x, F) > 0$ für $x \in E \setminus F$. Man beachte, daß die Distanzfunktion $x \mapsto \operatorname{dist}(x, F)$ eine Halbnorm auf E ist. Man wähle ein $x \in E \setminus F$ mit $\operatorname{dist}(x, F) = 1$ und dazu ein $y \in F$ mit
$$1 = \operatorname{dist}(x, F) \leq \|x - y\| < 1 + \varepsilon$$
und setze $x_0 := x - y$.

4.2.1 Festst.

Es seien $\mathcal{X}$ ein Prähilbertaraum und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ kompakt. Dann gilt

(i) *Der Kern* $\operatorname{Kern}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ *ist endlichdimensional.*

(ii) *Der Minimalmodul* $\gamma(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K) > 0$.

(iii) *Das Bild* $\operatorname{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ *ist abgeschlossen.*

(iv) *Wenn* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K$ *injektiv ist, dann existiert eine beschränkte Inverse* $(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Beweis. (i) Auf $N := \operatorname{Kern}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ ist $\mathrm{id}_N = K|N$ kompakt. Nach Folgerung 4.1.1 ist $\dim N < \infty$.

(ii) Da N endlichdimensional ist, ist $\mathcal{X} = N \oplus N^\perp$. Wenn $\gamma((\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K) = 0$ ist, so gibt es eine Folge $(x_n)_n$ in $N^\perp$ mit
$$\|x_n\| = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_n\| = 0.$$
Da K kompakt ist, hat $(Kx_n)_n$ eine konvergente Teilfolge. Ohne Einschränkung existiert also $y := \lim_{n\to\infty} Kx_n$. Dann konvergiert aber auch die Folge $(x_n)_n$ gegen den gleichen Grenzwert:
$$y = \lim_{n\to\infty} Kx_n = \lim_{n\to\infty} x_n \in N^\perp.$$
$$\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1.$$
Da
$$(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)y = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_n = 0$$
ist, folgt $y \in N \cap N^\perp$, d.h., $y = 0$ im Widerspruch zu $\|y\| = 1$.

(iii) Zu $y \in \overline{\operatorname{Bild}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ gibt es eine Folge $(x_n)_n$ in $\mathcal{X}$ mit $y = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_n$. Da konvergente Folgen beschränkt sind und nach (ii) $c := \gamma(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K) > 0$ ist, ist die Folge $(x_n)_n$ beschränkt:
$$\|x_n\| \leq c^{-1} \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \|(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_\nu\| < \infty.$$

Da K kompakt ist, hat $(Kx_n)_n$ eine konvergente Teilfolge. Ohne Einschränkung existiert $z = \lim_{n\to\infty} Kx_n$. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y + \lim_{n\to\infty} Kx_n = y + z$$

und es ist

$$y = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_n = (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)(y+z).$$

Also ist $y \in \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ und $\mathrm{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ ist abgeschlossen.

(iv) Wenn $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K$ injektiv ist, dann ist nach (iii) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K$ nach unten beschränkt. Wenn $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K$ surjektiv ist, so existiert die Inverse und ist stetig.

Wir zeigen, daß die Annahme, $\mathrm{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K) \neq \mathcal{X}$ *zu einem Widerspruch führt.* Dazu bilden wir die Folge der Räume $\mathcal{X}_0 := \mathcal{X}$, $\mathcal{X}_1 := \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ und $\mathcal{X}_{n+1} = (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)\mathcal{X}_n$. Da $(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ injektiv ist, ist $\mathcal{X}_n \supsetneqq \mathcal{X}_{n+1}$.

Nach (iii) ist $\mathcal{X}_1 := \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)$ abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{X}_0 := \mathcal{X}$. $\mathcal{X}_1$ ist invariant unter K:

$$K\mathcal{X}_1 = K(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)\mathcal{X}_0 = (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)K\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_1.$$

Wendet man (iii) auf den Prähilbertraum $\mathcal{X}_1$ und den kompakten Operator $K_1 := K|\mathcal{X}_1$, so folgt, daß $\mathcal{X}_2 = (\mathrm{id}_{\mathcal{X}_1} - K_1)\mathcal{X}_1$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{X}_1$ ist. Induktiv fogt, daß alle Räume $\mathcal{X}_n$ abgschlossen sind.

Nach dem Rieszschen Lemma gibt es eine Folge $(x_n)_n$ mit folgenen Eigenschaften:

$$x_n \in \mathcal{X}_n \setminus \mathcal{X}_{n+1} \quad \text{und} \quad 1 = \mathrm{dist}(x_n, \mathcal{X}_{n+1}) \leq \|x_n\| \leq 2.$$

Für $m < n$ ist $(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_m + Kx_n \in \mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}_{m+1}$ und folglich

$$\|Kx_m - Kx_n\| = \|x_m - \big((\mathrm{id}_{\mathcal{X}} - K)x_m + Kx_n\big)\| \geq 1,$$

Die Folge $(Kx_n)_n$ enthält also keine konvergente Teilfolge, im Widerspruch zur Kompaktheit von K.

4.2.2 Folg.
Es sei $\mathcal{X}$ ein Hilbertraum und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt.

(i) *Jedes $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenwert.*

(ii) *Das Spektrum von K ist endlich oder abzählbar unendlich.*

(iii) *Für jede Aufzählung $\sigma(K) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $(\lambda_n)_n$ eine Nullfolge.*

Kurz gesagt, $\sigma(K)$ ist endlich oder eine Nullfolge.

Beweis. (i) Wenn $\mu \neq 0$ und $\mu\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - K$ injektiv ist, so ist μ in der Resolventenmenge $\rho(K)$ (siehe Feststellung 4.2.1). Folglich sind alle $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ Eigenwerte von K.

(ii) *Wir zeigen, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Teilmenge $S_k := \{\lambda \in \sigma(K) \mid |\lambda| \geq \frac{1}{k}\}$ endlich ist. Dann ist $\sigma(K) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ höchstens abzählbar unendlich.*

Annahme: Es gibt ein $c > 0$ und eine Folge $(\lambda_n)_n$ in $\sigma(K)$, derart daß für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lambda_m \neq \lambda_n \text{ für } m \neq n \quad \text{und} \quad |\lambda_n| \geq c.$$

Da die λ_n paarweise verschieden sind, ist jede endliche Summe der Eigenräume $N_n := \mathrm{Kern}(\lambda_n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - K)$ eine direkte Summe. Die Räume $\mathcal{X}_0 = \{0\}$ und

$$\mathcal{X}_n := \bigoplus_{\nu=1}^{n} N_\nu$$

sind endlichdimensional, also abgeschlossen (siehe Satz 1.2.8). Da $\mathcal{X}_n \subsetneqq \mathcal{X}_{n+1}$ ist, gibt es nach dem Lemma von Riesz Vektoren $x_n \in \mathcal{X}_n \setminus \mathcal{X}_{n-1}$ mit

$$1 = \mathrm{dist}(x_n, \mathcal{X}_{n-1}) \leq \|x_n\| \leq 2.$$

Es sei $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Da $(\lambda_n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - K)x_n \in \mathcal{X}_{n-1}$ und $K\mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}_{n-1}$ ist, folgt

$$\begin{aligned}\|Kx_n - Kx_m\| &= \|\lambda x_n - \big((\lambda_n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - K)x_n + Kx_m\big)\| \\ &\geq |\lambda_n|\,\mathrm{dist}(x_n, \mathcal{X}_{n-1}) \geq c.\end{aligned}$$

Die Folge $(Kx_n)_n$ enthält also keine konvergente Teilfolge, im Widerspruch zur Kompaktheit von K.

4.3 Kompakte normale Operatoren

4.3.1 Satz (Spektralsatz für kpt. normal Op.)
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt und normal.

(i) *Wenn $1 \leq \operatorname{Rang} K < \infty$ ist, dann ist das Spektrum endlich: $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.*

(ii) *Wenn $\operatorname{Rang} K = \infty$ ist, dann ist das Spektrum abzählbar unendlich: $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dabei sind die λ_n paarweise verschieden und bilden eine Nullfolge.*

(iii) *Die Punkte $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ sind Eigenwerte und die Eigenräume $N_\lambda := \operatorname{Kern}(\lambda \operatorname{id}_{\mathcal{H}} - K)$ sind endlichdimensional.*

Die orthogonalen Projektoren $P_\lambda := P_{N_\lambda}$ haben endlichen Rang.

Man setze $N_0 := \operatorname{Kern} K$ und $P_0 := P_{N_0}$ den orthogonalen Projektor auf N_0. Wenn K injektiv ist, so ist $P_0 = 0$.

(iv) *Für je zwei zwei verschieden Eigenwerte λ, μ sind die Eigenräume senkrecht zueinander:*

$$N_\lambda \perp \mathbb{N}_\mu \quad \text{und} \quad P_\lambda P_\mu = 0 \quad \text{für } \lambda \neq \mu.$$

(v) *Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist die orthogonale direkte Summe der Eigenräume von K. D.h. für $x \in \mathcal{H}$ gilt*

$$x = \sum_{\lambda \in \sigma(K)} P_\lambda x \quad \text{und} \quad \|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \sigma(K)} \|P_\lambda x\|^2.$$

Man schreibt hierfür $\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(K)}^{\ell_2} N_\lambda$.

(vi) *Der Operator K hat eine Entwicklung in eine Reihe*

$$K = \sum_{\lambda \in \sigma(K)} P_\lambda K.$$

Die Reihe konvergiert in der Operatornorm: Für endliche Mengen F_0, F mit $F_0 \subset F \subset \sigma(K)$ gilt

$$\|K - \sum_{\lambda \in F} P_\lambda K\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(K) \setminus F_0\}.$$

Im allgm. ist die Reihe nicht absolut konvergent.

(vii) *Für eine Aufzählung $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ ist also $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} N_{\lambda_n}$,*

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \quad \text{und} \quad \|K - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu P_\nu\| = |\lambda_{n+1}| \to 0,$$

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \quad \text{und} \quad \|Kx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2.$$