UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Dipl.-Math. Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Operatoren auf dem Hilbertraum

(Wintersemester 2002/2003)

Blatt 1 Abgabetermin: Montag, 4.11.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Orthogonalität, Orthonormalbasen im Endlichdimensionalen)

Sei $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ eine endliche orthonormale Teilmenge des Skalarproduktraumes $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Für $x \in V$ setze man $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

(a) Sei $x \in V$ beliebig. Zeigen Sie: Der Vektor $x' = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i$ ist orthogonal zu jedem x_j $(j = 1, \cdots, n)$. Folgern Sie: Für $x \in V$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (\textit{Besselsche Ungleichung}).$$

(b) Beweisen Sie unter Verwendung von Teil (a): Für $x, y \in V$ gilt die Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \qquad (\textit{Schwarzsche Ungleichung}).$$

Rechnen Sie nach, dass durch $\|\cdot\|$ tatsächlich eine Norm auf V erklärt wird.

(c) Zeigen Sie unter der Einschränkung $\dim V < \infty$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gibt keine Orthonormale Menge $S \subset V$ mit $X \subsetneq S$.
(ii) Ist $\langle x, x_i\rangle = 0$ für alle $i = 1, \cdots, n$, so folgt $x = 0$.
(iii) span $X = V$
(iv) Für jedes $x \in V$ ist $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i$.
(v) Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle\langle x_i, y\rangle$ (*Parsevalsche Identität*).
(vi) Für jedes $x \in V$ ist $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i\rangle|^2$.

(d) Zeigen Sie, dass jeder endlich-dimensionale Skalarproduktraum V eine Vektorraumbasis aus paarweise orthogonalen Vektoren der Norm 1 (*Orthonormalbasis*) besitzt.

Aufgabe 2 (Operatoren auf endlichdimensionalen Hilberträumen)

Sei V ein komplexer Skalarproduktraum mit $\dim V < \infty$ und $L(V) = \{A : V \to V, \quad A \text{ ist linear}\}$ die Menge aller linearen Operatoren auf V. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Zu jedem linearen Funktional $y' : V \to \mathbb{C}$ existiert ein Vektor $y \in V$ mit der Eigenschaft

$$y'(x) = \langle x, y\rangle \qquad (x \in V).$$

(b) Sei $A \in L(V)$. Dann gibt es genau einen Operator $A^* \in L(V)$ mit $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.
Man nennt A^* den adjungierte Operator von A. Im Falle $A = A^*$ heißt A *selbstadjungiert*.

(c) Leiten Sie einige Rechenregeln für die Abbildung $* : L(V) \to L(V), \quad A \mapsto A^*$, her.

(d) Sei $X = (x_1, \cdots, x_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Ist (a_{ij}) die darstellende Matrix von A bzgl. X, so ist $(\bar{a}_{ij})^t$ die darstellende Matrix von A^* bzgl. X. Es gilt $\det A^* = \overline{\det A}$.

(e) Ein Operator $A \in L(V)$ ist genau dann selbstadjungiert (vgl. (b)), wenn für die darstellende Matrix (a_{ij}) bzgl. einer Orthonormalbasis X von V gilt: $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$.

(f) Man hat die Zerlegung $L(V) = L(V)_{sa} \oplus iL(V)_{sa}$, wobei $L(V)_{sa}$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der selbstadjungierten Operatoren auf V bezeichnet.

(g) Für $A \in L(V)$ gilt: $A = 0 \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle = 0$ für alle $x \in V$ und $A = A^* \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$. (*Hinweis:* Berechnen Sie $\langle A(x + \lambda y), (x + \lambda y)\rangle$ für $x, y \in H$ und $\lambda \in \{1, -1, i, -i\}$; diese Technik nennt man *Polarisieren*.)

Aufgabe 3 (Isometrien im Endlichdimensionalen)

Über einem endlich-dimensionalen Skalarproduktraum V beweise man folgende Aussagen:

(a) Für $T \in L(V)$ sind äquivalent:

(i) $T^*T = \mathrm{id}_V$

(ii) Für alle $x, y \in V$ gilt: $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$.

(iii) Für alle $x \in V$ ist $\|Tx\| = \|x\|$.

(*Hinweis:* Für (iii) $\Rightarrow$ (i) verwende man Aufgabe 2 (g).)

In diesem Fall nennt man T *isometrisch* bzw. eine *Isometrie*.

(*Bemerkung*: Im endlich-dimensionalen Fall ist jede Isometrie automatisch ein isometrischer Isomorphismus. In Skalarprodukträumen beliebiger Dimension ist diese Aussage jedoch falsch. Was kann „schiefgehen“?)

(b) Sei $X = (x_1, \cdots, x_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $U : V \to V$ ein isometrischer Isomorphismus. Dann ist auch $(Ux_1, \cdots, Ux_n)$ eine Orthonormalbasis von V.

(c) Ein Operator $U \in L(V)$, der eine Orthonormalbasis X von V in eine Orthonormalbasis $U(X)$ von V überführt, ist ein isometrischer Isomorphismus.

Aufgabe 4 (Modellsatz für endlichdimensionale Hilberträume)

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ zwei Skalarprodukträume und $L(V, W) = \{A : V \to W,\ A \text{ linear}\}$. Ein Operator $T \in L(V, W)$ heißt isometrisch, falls für alle $x, y \in V$ gilt: $\langle Tx, Ty\rangle_W = \langle x, y\rangle_V$.

Zeigen Sie: Jeder n-dimensionale Skalarproduktraum V ist isometrisch isomorph zu $\ell^2(n)$. Hierbei steht $\ell^2(n)$ für den $\mathbb{C}^n$ – versehen mit dem Standard-Skalarprodukt: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ $(x, y \in \mathbb{C}^n)$.

Konstruieren Sie einen isometrischen Isomorphismus $U : V \to \ell^2(n)$ unter Zuhilfenahme von Teil (d) der Aufgabe 1. Ein Blick auf Aufgabe 3 (b) hilft ebenfalls weiter.