UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Dipl.-Math. Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Operatoren auf dem Hilbertraum

(Wintersemester 2002/2003)

Blatt 10 Abgabetermin: Montag, 20.01.2003, vor der Vorlesung

Es bezeichne H stets einen komplexen Hilbertraum.

Aufgabe 37 (invariante und reduzierende Teilräume)

Seien $T \in B(H)$, $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum von H und $P = P_M \in B(H)$ die Orthogonalprojektion auf M. Bzgl. der orthogonalen Zerlegung $H = M \oplus M^\perp$ kann T als Operatormatrix

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

mit stetigen linearen Operatoren $T_{11} : M \to M$, $T_{12} : M^\perp \to M$, $T_{21} : M \to M^\perp$, $T_{22} : M^\perp \to M^\perp$ geschrieben werden (vgl. Aufgabe 29 (a)).

(a) Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $TM \subset M$ (d.h. M ist *invariant* unter T)

(ii) $PTP = TP$

(iii) $T_{21} = 0$

(b) Zeigen Sie die Äquivalenz nachstehender Aussagen:

(i) $TM \subset M$ und $TM^\perp \subset M^\perp$ (d.h. M ist *reduzierend* für T)

(ii) $PT = TP$

(iii) $T_{12} = T_{21} = 0$ (d.h. $T = T_{11} \oplus T_{22} \in B(M \oplus M^\perp)$)

(iv) M ist invariant unter T und T^*

(c) Beweisen Sie: Ist M reduzierend für T, so ist $(T|M)^* = T^*|M$. Einschränkungen normaler (unitärer) Operatoren auf *reduzierende* Teilräume bleiben normal (unitär). Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Einschränkung eines unitären Operators auf einen *invarianten* Teilraum hingegen nicht einmal normal sein muss.

Aufgabe 38 (diagonalisierbare Operatoren)

Ein Operator $T \in B(H)$ heißt *diagonalisierbar*, falls eine Familie $(P_j)_{j\in J}$ paarweise orthogonaler Projektoren mit $H = \bigoplus_{j\in J} P_j H$ und eine Familie $(\alpha_j)_{j\in J}$ paarweise verschiedener komplexer Zahlen mit $\sup_{j\in J} |\alpha_j| < \infty$ existieren, so dass für alle $j \in J$ und alle $x \in P_j H$ gilt: $Tx = \alpha_j x$. Zeigen Sie, dass für einen diagonalisierbaren Operator $T \in B(H)$ folgendes gilt:

(a) Für jedes $x \in H$ ist die Reihe $\sum_{j\in J} \alpha_j P_j x$ summierbar zur Summe $Tx = \sum_{j\in J} \alpha_j P_j x$.

(b) T ist normal und $\|T\| = \sup_{j\in J} |\alpha_j|$.

(c) Für $S \in B(H)$ sind äquivalent: $ST = TS \Leftrightarrow P_j H$ reduziert S (für jedes $j \in J$)

(d) Unter welchen Bedingungen an die Folge $(\alpha_j)_{j\in J}$ ist T selbstadjungiert (positiv)?

(e) Für positives T ist mit T auch $T^{1/2}$ diagonalisierbar. (Geben Sie die Reihendarstellung (gem. Teil (a)) von $T^{1/2}$ explizit an.)

(f) Mit T ist auch $|T|$ diagonalisierbar. (Wie sieht die Reihendarstellung von $|T|$ aus?)

(g) Bestimmen Sie den Kern von T.

Aufgabe 39 (Spektren)

(a) Gegeben sei eine Folge $(\alpha_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty(\mathbb{N}_0)$. Die Operatoren $S, D \in B(\ell^2(\mathbb{N}_0))$ seien wie folgt definiert:

$$S(x_0, x_1, x_2, \cdots) = (0, x_0, x_1, x_2, \cdots) \quad \text{und} \quad D(x_0, x_1, x_2, \cdots) = (\alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots).$$

Zeigen Sie: Der Operator S hat keine Eigenwerte, die Menge der Eigenwerte von S^* hingegen ist $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Bestimmen Sie die Spektren der Operatoren S und D.

(b) Beweisen Sie: Der zweiseitige Shift

$$U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

ist ein unitärer Operator ohne Eigenwerte.

Aufgabe 40 (approximative Eigenwerte)

(a) Zeigen Sie: Ist $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge invertierbarer Operatoren in $B(H)$, die in der Operatornorm gegen einen nicht invertierbaren Operator $A \in B(H)$ konvergiert, so ist die Folge der Normen $(\|A_n^{-1}\|)_{n\geq 1}$ unbeschränkt. (**Hinweis**: Für invertierbare Operatoren $S, T \in B(H)$ gilt $T^{-1} - S^{-1} = S^{-1}(S - T)T^{-1}$.)

(b) Folgern Sie aus Teil (a): Ist $T \in B(H)$ ein stetiger Operator und $\lambda \in \partial\sigma(T)$ ein Randpunkt des Spektrums, so existiert eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ von Vektoren in H mit

$$\|x_n\| = 1 \quad (n \geq 1) \quad \text{und} \quad (T - \lambda)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Eine solche Zahl λ nennt man einen *approximativen Eigenwert* von T.

Aufgabe 41* (abgeschlossene Teilräume mit nicht abgeschlossener Summe)

In jedem Hilbertraum H mit $\dim H = \infty$ existieren

(a) abgeschlossene Teilräume $X, Z \subset H$, so dass $X + Z$ nicht abgeschlossen ist;

(b) abgeschlossene Teilräume $W, Z \subset H$, so dass $P_W Z$ nicht abgeschlossen ist, wobei $P_W \in B(H)$ die Orthoprojektion auf W bezeichnet.

Zum Beweis wähle man Orthonormalfolgen $(x_n)_{n\geq 1}$ und $(y_n)_{n\geq 1}$ in H mit $x_n \perp y_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ (Warum geht das?) und setze $\alpha_n = \cos(1/n)$, $\beta_n = \sin(1/n)$ sowie $z_n = \alpha_n x_n + \beta_n y_n$ $(n \geq 1)$. Die Räume

$$X = \overline{\mathrm{lin}}\{x_n : n \geq 1\} \quad \text{und} \quad Z = \overline{\mathrm{lin}}\{z_n : n \geq 1\}$$

haben dann die in (a) geforderten Eigenschaften. Führen Sie die Beweise der folgenden Behauptungen im Detail aus:

(i) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} \beta_n y_n$ konvergiert. Ihr Grenzwert y liegt in $\overline{X + Z}$.

(ii) Gäbe es eine Darstellung $y = x + z$ mit $x \in X, z \in Z$, so wäre

$$\beta_n = \langle y, y_n\rangle = \langle z, z_n\rangle\langle z_n, y_n\rangle = \langle z, z_n\rangle\beta_n \qquad (n \geq 1),$$

im Widerspruch dazu, dass $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Orthonormalfolge ist. Dies zeigt Teil (a).

(iii) Setzt man $W = X^\perp$, so folgt Teil (b) aus der Identität $X + Z = X \oplus P_{X^\perp} Z$.