UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Dipl.-Math. Michael Didas

Übungen zur Vorlesung Operatoren auf dem Hilbertraum

(Wintersemester 2002/2003)

Blatt 11 Abgabetermin: Montag, 27.01.2003, vor der Vorlesung

Es bezeichne H stets einen komplexen Hilbertraum.

Aufgabe 42 (Spektrum eines Multiplikationsoperators)

Für $g \in C[0,1]$ bezeichne $M_g \in B(L^2[0,1])$ den von g induzierten Multiplikationsoperator, d.h. die eindeutige stetige Fortsetzung des Operators $C[0,1] \to C[0,1]$, $f \mapsto gf$ auf $L^2[0,1]$ (vgl. Aufgabe 21). Beweisen Sie:

(a) Es gilt die Äquivalenz: $M_g \geq 0 \Leftrightarrow g \geq 0 \quad (g \in C[0,1])$.

(b) Folgern Sie aus Teil (a): Für $g \in C[0,1]$ ist $\|M_g\| = \|g\|_\infty$ und $\sigma(M_g) = g([0,1])$. (**Hinweise**: $M_{\bar{g}} = M_g^*$, $\lambda\mathrm{id} - M_g = M_{\lambda - g}$.)

(c) Berechnen Sie $\sigma(M_g)$ für $g(t) = e^{2\pi it}$ $(t \in [0,1])$.

Aufgabe 43 (Spektrum des zweiseitigen Shifts)

Da die Funktionen $e_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $e_n(t) = e^{2\pi int}$ $(n \in \mathbb{Z})$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2[0,1]$ bilden, ist die Fouriertransformation $F : L^2[0,1] \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $\quad f \mapsto (\langle f, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine unitäre Abbildung. Dabei ist offensichtlich $\langle f, e_n\rangle = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt$.

(a) Rechnen Sie nach: Vermöge Fouriertransformation ist der Multiplikationsoperator $M_g \in B(L^2[0,1])$ mit $g(t) = e^{2\pi it}$ $(t \in [0,1])$ unitär äquivalent zum zweiseitigen Shift-Operator $U \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ (vgl. Aufgabe 39). Bestimmen Sie dann $\sigma(U)$ mittels Teil (c) von Aufgabe 42.

(b) Zeigen Sie: Die für $k \geq 1$ definierten Vektoren $x^k = (\xi_n^k)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ mit $\xi_n^k = 1/\sqrt{2k+1}$ (falls $-k \leq n \leq k$) und $\xi_n^k = 0$ (sonst) bilden eine Folge approximativer Eigenvektoren (vgl. Aufgabe 40) von U zum approximativen Eigenwert 1.

(c) Konstruieren Sie für jede Zahl $\lambda \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ eine zugehörige Folge approximativer Eigenvektoren von U. Berechnen Sie nun $\sigma(U)$ ohne Benutzung der Fouriertransformation.

Aufgabe 44 (ein selbstadjungierter Operator ohne Eigenwerte)

Es sei $M_t \in B(L^2[0,1])$ der Multiplikationsoperator mit der Funktion $[0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t$ (vgl. Aufgabe 42). Zeigen Sie: M_t ist ein selbstadjungierter Operator ohne Eigenwerte.

(**Anleitung**: Es bezeichne $\mathbf{1} \in C[0,1]$ die konstante Funktion 1 auf dem Intervall $[0,1]$. Angenommen, $\lambda \in \sigma(M_t)$ wäre ein Eigenwert von M_t und $h \in L^2[0,1]$ ein zugehöriger Eigenvektor. Indem man für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ das Skalarprodukt $\langle p(M_t)\mathbf{1}, h\rangle$ einerseits soweit wie möglich ausrechnet (Was ist $p(M_t)^*h$?) und andererseits im Betrag nach oben abschätzt, kann man zeigen, dass das Punktauswertungsfunktional $C[0,1] \ni p \mapsto p(\lambda) \in \mathbb{C}$ beschränkt ist bzgl. der $\|\cdot\|_2$-Norm auf der Urbildseite. Dies lässt sich jedoch zum Widerspruch führen.)

Aufgabe 45 (Resolventenwachstum)

Aus Aufgabe 41 (a) folgt, dass für beliebiges $T \in B(H)$ die Norm der Resolvente $(\lambda - T)^{-1}$ bei Annäherung der Zahl $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ an das Spektrum von T gegen ∞ strebt.

Zeigen Sie, dass im Falle eines selbstadjungierten Operators $T \in B(H)$ das Wachstumsverhalten der Resolvente explizit gegeben ist durch die Formel

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| = \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(T))} \qquad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T).$$

Aufgabe 46* (schwach beschränkt = Norm-beschränkt)

Eine Teilmenge $M \subset H$ heißt *schwach beschränkt*, falls für jedes $h \in H$ die Familie komplexer Zahlen $(\langle h, x \rangle)_{x \in M}$ beschränkt ist, d.h. wenn es zu jedem $h \in H$ eine Konstante $\alpha(h) > 0$ gibt, so dass die Abschätzung

$$|\langle h, x \rangle| \leq \alpha(h) \qquad (x \in M)$$

gilt. Jede (Norm-)beschränkte Menge ist offenbar schwach beschränkt, überraschenderweise gilt jedoch auch die Umkehrung:

Jede schwach beschränkte Teilmenge eines Hilbertraumes ist (norm-)beschränkt.

Führen Sie den in *Halmos*, "A Hilbert space problem book", *van Nostrand*, vorgeführten Beweis dieser Aussage (vgl. Solution 22, S. 185f) detailliert aus.