**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Dipl.-Math. Michael Didas

# Übungen zur Vorlesung
# Operatoren auf dem Hilbertraum

(Wintersemester 2002/2003)

**Blatt 12** Abgabetermin: Montag, 3.02.2003, vor der Vorlesung

---

**Aufgabe 47 (Ideale in $C[0,1]$)**

Es sei $C[0,1]$ die Banachalgebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf $[0,1]$ versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ $(f \in C[0,1])$. Für eine Teilmenge $F \subset [0,1]$ sei

$$I_F = \{f \in C[0,1] : f|F = 0\}.$$

**(a)** Man beweise, dass $I_F$ ein abgeschlossenes Ideal ist. Ferner zeige man, dass es umgekehrt zu jedem abgeschlossenen Ideal $I$ in $C[0,1]$ eine eindeutig bestimmte abgeschlossene Teilmenge $F$ von $[0,1]$ gibt mit $I = I_F$.

**(b)** Sei nun $F \subset [0,1]$ abgeschlossen. Wie kann man den Quotienten $C[0,1]/I_F$ beschreiben?

---

**Aufgabe 48 (Ideale in $B(H)$)**

Sei $H$ ein komplexer Hilbertraum. Zeigen Sie: Jedes von $\{0\}$ verschiedene (zweiseitige) Ideal $I$ in $B(H)$ enthält die endlichrangigen Operatoren $F(H) = \{T \in B(H) : \dim \operatorname{ran} T < \infty\}$.

(**Anmerkung**: Ist $H$ separabel und $\dim H = \infty$, so ist $\overline{F(H)}$ sogar das einzige nicht-triviale abgeschlossene Ideal in $B(H)$. Im nicht-separablen Fall ist $\{T \in B(H) : \operatorname{ran} T$ ist separabel$\}$ ein weiteres abgeschlossenes Ideal.)

---

**Aufgabe 49 (Hauptsätze der Operatorentheorie im Hilbertraumfall)**

Seien $H, K$ komplexe Hilberträume. Beweisen Sie die folgenden Aussagen unter Beachtung der Tatsache, dass *schwach beschränkte Teilmengen eines Hilbertraumes Norm-beschränkt sind* (vgl. Aufgabe 46).

**(a)** Eine Familie $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Operatoren in $B(H)$ heißt *punktweise beschränkt*, falls die Bedingung $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\| < \infty$ für jedes $x \in H$ erfüllt ist. Offenbar ist jede Norm-beschränkte Familie von Operatoren in $B(H)$ punktweise beschränkt, es gilt jedoch auch die Umkehrung:

(*Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit*) Jede punktweise beschränkte Familie $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $B(H)$ ist bereits beschränkt bzgl. der Operatornorm, erfüllt also $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| < \infty$.

(**Hinweis**: Zeigen Sie, dass die Familie $(T_\lambda^*)_{\lambda\in\Lambda}$ punktweise beschränkt ist. Leiten Sie daraus die Beschränktheit der Menge $\{T_\lambda x : \lambda \in \Lambda, x \in H$ mit $\|x\| \le 1\}$ ab.)

**(b)** (*Satz von der stetigen Inversen*) Ist $T \in L(H,K)$ stetig und bijektiv, so ist $T^{-1}$ automatisch stetig.

(**Anleitung**: Zeigen Sie, dass $T^*$ nach unten beschränkt ist, indem Sie die schwache Beschränktheit der Menge $\{h \in H : \|T^*h\| = 1\}$ nachweisen. Beachten Sie dabei, dass $\ker T^* = \{0\}$. Begründen Sie dann, warum $T^*$ stetig invertierbar ist.)

**(c)** (*Satz von der offenen Abbildung*) Jeder surjektive stetige Operator $T \in L(H,K)$ ist offen, d.h. bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.

(**Hinweis**: Es genügt zu zeigen, dass das Bild der offenen Einheitskugel eine offene Nullumgebung enthält. Dies folgt mit Teil (b)).

**(d)** (*Satz vom abgeschlossenen Graphen*) Eine lineare Abbildung $T : H \to K$ mit abgeschlossenem Graphen $\operatorname{graph}(T) = \{(x, Tx) : x \in H\} \subset H \oplus K$ ist stetig.

(**Tipp**: Faktorisieren Sie $T$ über den Graphen und wenden Sie Teil (b) an.)

**Aufgabe 50 (approximatives Punktspektrum)**

Für einen stetigen Operator $T \in B(H)$ auf einem komplexen Hilbertraum $H$ definiert man das approximative Punktspektrum $\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$ als die Menge aller approximativen Eigenwerte von $T$ (vgl. Aufgabe 40), d.h.

$$\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ Es ex. eine Folge } (x_n) \text{ von Einheitsvektoren in } H \text{ mit } (T-\lambda)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

Hierbei bezeichnet wie üblich $T - \lambda$ den Operator $T - \lambda \cdot \mathrm{id}_H$.

Zeigen Sie: Für eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ sind äquivalent:

**(a)** $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$

**(b)** $\ker(T-\lambda) = \{0\}$ und $\mathrm{ran}\,(T-\lambda)$ ist abgeschlossen

**(c)** Es existiert ein $c > 0$ mit $\|(T-\lambda)x\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in H$.

Folgern Sie: $\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$ ist abgeschlossen und $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T) \cup \overline{\sigma_{\mathrm{ap}}(T^*)}$, wobei $\overline{\cdots}$ die komplexe Konjugation bezeichnet.

(**Vorschlag**: Bei (b) $\Rightarrow$ (c) hilft Aufgabe 49 (b), die Implikation (c) $\Rightarrow$ (b) ist trivial. Ergänzen Sie nun die fehlende Äquivalenz.)