UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Dipl.-Math. Michael Didas

Übungen zur Vorlesung Operatoren auf dem Hilbertraum

(Wintersemester 2002/2003)

Blatt 13 Abgabetermin: Montag, 10.02.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 51 (Konstruktion von Charakteren auf $C^*(N, \mathbf{id}_H)$)

Sei $N \in B(H)$ ein normaler Operator auf einem komplexen Hilbertraum H und $\lambda \in \sigma(N)$. Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine Folge (x_n) in H mit $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und $(\lambda - N)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. λ ist ein approximativer Eigenwert. (Benutzen Sie Aufgabe 50.)

(b) Für $p \in \mathbb{C}[\zeta, \bar{\zeta}]$ gilt $\|(p(\lambda, \bar{\lambda}) - p(N, N^*))x_n\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (**Tipp**: Ziehen Sie sich auf $p(\zeta, \bar{\zeta}) = \zeta^k \bar{\zeta}^m$ zurück.)

(c) Die Abbildung $\chi : \mathbb{C}[N, N^*] \to \mathbb{C}, \quad A \mapsto \lim_{n\to\infty}\langle Ax_n, x_n\rangle$ ist ein kontraktiver, unitaler $*$-Homomorphismus (mit $\chi(N) = \lambda$) und besitzt als solcher eine eindeutige stetige Fortsetzung zu einem Charakter von $C^*(N, \mathrm{id}_H)$.

Aufgabe 52 (Der stetige Funktionalkalkül für normale Operatoren)

Sei $N \in B(H)$ ein normaler Operator auf einem komplexen Hilbertraum H, $C(\sigma(N))$ die C^*-Algebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf $\sigma(N)$ und $z \in C(\sigma(N))$ die identische Funktion.

(a) Zeigen Sie: Es existiert genau ein unitaler $*$-Homomorphismus $\Phi : C(\sigma(N)) \to C^*(N, \mathrm{id}_H)$ mit der Eigenschaft $\Phi(z) = N$. Die Abbildung Φ ist eine bijektive Isometrie, und es gilt der spektrale Abbildungssatz: $\sigma(\Phi(f)) = f(\sigma(N))$.

Man nennt Φ den *stetigen Funktionalkalkül* von N und verwendet die Schreibweise $f(N) = \Phi(f)$ für $f \in C(\sigma(N))$.

(b) Beweisen Sie, dass der stetige Funktionalkalkül ordnungserhaltend ist, d.h. dass für $f \in C(\sigma(N))$ gilt: $f \geq 0 \Leftrightarrow f(N) \geq 0$.

(c) Geben Sie an, wie man mithilfe des Funktionalkalküls die Operatoren $|N|$, $\mathrm{Re}\, N$, $\mathrm{Im}\, N$, sowie (falls $N = N^*$) N_+, N_- und (falls N positiv) $N^{1/2}$ darstellen kann.

(d) Bestätigen Sie unter Benutzung des stetigen Funktionalkalküls: Ein normaler Operator $N \in B(H)$ ist genau dann

(i) unitär, wenn $\sigma(N) \subset \mathbb{T}$ gilt; (ii) selbstadjungiert, wenn er $\sigma(N) \subset \mathbb{R}$ erfüllt.

(e) Rechnen Sie nach: Ist N selbstadjungiert, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iN)^n}{n!}$ unitär.

(f) Sei $\lambda \in \sigma(N)$ beliebig. Konstruieren Sie zu $\varepsilon > 0$ einen Operator $N_\varepsilon \in B(H)$ mit $\|N_\varepsilon\| = 1$ und $(\lambda - N)N_\varepsilon \stackrel{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$. (**Hinweis**: Wenden Sie den Funktionalkalül an auf die Einschränkung geeigneter stetiger Funktionen $f_\varepsilon : \mathbb{C} \to [0, 1]$, deren Träger sich für $\varepsilon \downarrow 0$ auf $\{\lambda\}$ zusammenzieht.) Zeigen Sie hiervon ausgehend, dass λ ein approximativer Eigenwert von N ist, indem Sie eine zugehörige Folge approximativer Eigenvektoren konstruieren.

Aufgabe 53 (Bild kompakter Operatoren)

Seien H und K Hilberträume. Zeigen Sie:

(a) Ist $T \in L(H, K)$ kompakt und $M \subset \operatorname{ran} T$ ein abgeschlossener Teilraum, so gilt $\dim M < \infty$. (**Hinweis**: Reduzieren Sie auf den Fall $M = \operatorname{ran} T = K$ eines surjektiven kompakten Operators T und benutzen Sie den Satz von der offenen Abbildung (Teil (c) von Aufgabe 49).)

(b) Ein idempotenter Operator $T \in B(H)$ ist genau dann kompakt, wenn er endlichrangig ist, d.h. $\dim \operatorname{ran} T < \infty$ gilt.

Aufgabe 54 (Fredholmscher Integraloperator)

Sei $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ stetig. Der durch

$$(T_k f)(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s) ds \qquad (f \in C[0, 1], \quad t \in [0, 1])$$

definierte Operator $T_k \in L(C[0, 1])$ heißt *Fredholmscher Integraloperator* mit Kern k. Man beweise:

(a) T_k ist wohldefiniert und stetig;

(b) T_k ist kompakt.