UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Dipl.-Math. Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Operatoren auf dem Hilbertraum

(Wintersemester 2002/2003)

Blatt 14 Abgabetermin: Montag, 17.02.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 55 (Fortsetzung kompakter Operatoren auf Prähilberträumen)

Sei K ein kompakter Operator auf einem Prähilbertraum X. Die eindeutige Fortsetzung von K zu einem stetigen Operator auf der Vervollständigung $\tilde{X}$ von X werde mit $\tilde{K}$ bezeichnet. Man beweise:

(a) $\tilde{K}$ ist kompakt und $\tilde{K}(\tilde{X}) \subset X$

(b) $\sigma(K) = \sigma(\tilde{K})$

(c) $\sigma_p(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(\tilde{K}) \setminus \{0\}$ und die zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$ von K gehörigen Eigenräume von K und $\tilde{K}$ stimmen überein

(d) $\tilde{K}$ ist normal $\Leftrightarrow$ Es existiert ein $T \in L(X)$ mit $KT = TK$ und $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $(x, y \in X)$.

Aufgabe 56 (Spektraldarstellung eines Fredholmschen Integraloperators)

Sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$k(t,s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{für } 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s(1-t) & \text{für } 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Auf dem Prähilbertraum $X = C[0,1]$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ $(f, g \in X)$ betrachten wir den Fredholmschen Integraloperator

$$K : C[0,1] \to C[0,1], \quad (Kf)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)ds \quad (f \in C[0,1], \quad t \in [0,1])$$

(vgl. Blatt 13, Aufgabe 54). Zeigen Sie:

(a) K ist kompakt

(b) $K(X) \subset C^2[0,1]$ und $(Kf)'' = -f$ für alle $f \in X$

(c) Für $f \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ sind äquivalent:

$$Kf = \lambda f \quad \Leftrightarrow \quad f \in C^\infty[0,1], \quad \lambda f'' = -f \quad \text{und} \quad f(0) = f(1) = 0.$$

(d) $\langle Kf, g\rangle = \langle f, Kg\rangle$ für alle $f, g \in X$

Geben Sie die Spektraldarstellung von K (d.h. die in der Vorlesung vorgestellte Reihenentwicklung) möglichst explizit an.

Aufgabe 57* (Fredholmoperatoren)

Ein Operator $T \in B(H)$ auf einem komplexen Hilbertraum H heißt *Fredholmoperator*, falls die Räume $\ker T$ und $\ker T^*$ endlichdimensional sind und T abgeschlossenes Bild hat. Unter dem *Index* eines Fredholmoperators T versteht man die Zahl $\operatorname{ind} T = \dim\ker T - \dim\ker T^* \in \mathbb{Z}$. (Ein Beispiel zur Indexberechnung finden Sie in der nachfolgenden Aufgabe 58.)

Beweisen Sie, dass für einen Operator $T \in B(H)$ auf einem komplexen Hilbertraum H nachstehende Bedingungen äquivalent sind:

(a) T ist ein Fredholmoperator.

(b) Die Räume $\ker T$ und $\ker T^*$ sind endlichdimensional und es existiert ein eindeutig bestimmter Operator $S \in B(H)$ mit $S|(\operatorname{ran} T)^\perp = 0$, der $ST = P_{(\ker T)^\perp}$ und $TS = P_{(\ker T^*)^\perp}$ erfüllt.

(c) Es existiert ein Operator $S \in B(H)$, für den $ST - \mathrm{id}_H$ und $TS - \mathrm{id}_H$ kompakt sind.

Folgern Sie, dass die Klasse der Fredholmoperatoren auf H stabil ist gegenüber kompakten Störungen, d.h. dass mit T auch $T + K$ (für $K \in B(H)$ kompakt) ein Fredholmoperator ist.

(**Hinweis** zu (c) $\Rightarrow$ (a): Führen Sie unter Annahme der Existenz einer unendlichen Orthonormalfolge (x_n) in $\ker T$ (bzw. $\ker T^*$) einen Widerspruch herbei.

Zum Beweis der Abgeschlossenheit von $\operatorname{ran} T$ wähle man einen endlichrangigen Operator $F \in B(H)$ mit $\|(ST - \mathrm{id}_H) - F\| \leq \frac{1}{2}$. Da $T|\ker F$ nach unten beschränkt ist (Begründung?), ist $T(\ker F)$ abgeschlossen. Zudem ist $T((\ker F)^\perp) = T(\operatorname{ran} F^*)$ endlichdimensional. Bleibt zu zeigen, dass die Summe $M + N$ aus einem abgeschlossenen Teilraum $M \subset H$ und einem endlichdimensionalen Teilraum $N \subset H$ abgeschlossen ist, was man aus der Beziehung $M + N = P_{M^\perp}^{-1} P_{M^\perp} N$ (Bitte nachrechnen!) ableiten kann.)

Aufgabe 58 (Index eines analytischen Toeplitzoperators)

Es sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom mit $|p(z)| > 0$ für $z \in \mathbb{T}$ und M_p der von p auf dem Hardyraum $H^2(\mathbb{D})$ (vgl. Blatt 4, Aufgabe 13) induzierte Multiplikationsoperator

$$M_p : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D}), \quad f \mapsto pf.$$

(a) Geben Sie die Räume $\ker M_p$ und $\operatorname{ran} M_p$ explizit an. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ran} M_p$ abgeschlossen ist. (**Hinweis** zur Abgeschlossenheit des Bildes: Betrachten Sie zu $w \in \mathbb{D}$ die $H^2(\mathbb{D})$-Funktion $k_{w,n}(z) = \sum_{k=n}^\infty \frac{k!}{(k-n)!} \overline{w}^{k-n} z^k$. Was ist $\langle f, k_{w,n}\rangle_{H^2}$?)

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $(\operatorname{ran} M_p)^\perp$ endlichdimensional ist. Unter Beachtung der Ergebnisse aus Teil (a) folgt, dass M_p ein Fredholmoperator ist (vgl. Aufgabe 57). Berechnen Sie dessen Index

$$\operatorname{ind} M_p = \dim\ker M_p - \dim(\operatorname{ran} M_p)^\perp.$$

(**Anleitung**: Seien $w_1, \cdots, w_k$ die verschiedenen Nullstellen von p in $\mathbb{D}$ mit den zugehörigen Nullstellenordnungen $\kappa_1, \cdots, \kappa_k$. Zeigen Sie, dass die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} R : H^2(\mathbb{D})/\operatorname{ran} M_p \quad &\to \quad \mathbb{C}^{\kappa_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{\kappa_k}, \\ [f] \quad &\mapsto \quad \big((f(w_1), \cdots, f^{(\kappa_1-1)}(w_1)), \cdots, (f(w_k), \cdots, f^{(\kappa_k-1)}(w_k))\big) \end{aligned}$$

und

$$P : H^2(\mathbb{D})/\operatorname{ran} M_p \to (\operatorname{ran} M_p)^\perp, \quad [f] \mapsto P_{(\operatorname{ran} M_p)^\perp} f$$

wohldefinierte Isomorphismen von $\mathbb{C}$-Vektorräumen sind.)

(c)* Der Index von M_p lässt sich als Windungsindex (im Sinne der Funktionentheorie) berechnen: Beweisen Sie die Formel

$$\operatorname{ind} M_p = -\operatorname{ind}_{\Gamma_p}(0),$$

wobei $\operatorname{ind}_{\Gamma_p}(0)$ die Umlaufzahl der Kurve $\Gamma_p : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto p(e^{it})$ um den Ursprung bezeichnet.