UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Dipl.-Math. Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Operatoren auf dem Hilbertraum

(Wintersemester 2002/2003)

Blatt 3 Abgabetermin: Montag, 18.11.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 9 (Funktionale Hilberträume I)

Für eine beliebige Menge Ω bezeichne $\mathbb{C}^\Omega$ die Menge aller komplexwertigen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Ein Hilbertraum $H \subset \mathbb{C}^\Omega$ von Funktionen auf Ω heißt *funktionaler Hilbertraum*, wenn für jeden Punkt $\lambda \in \Omega$ das zugehörige Auswertungsfunktional

$$\delta_\lambda : H \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(\lambda)$$

stetig ist. Zeigen Sie:

(a) Ein Hilbertraum $H \subset \mathbb{C}^\Omega$ ist genau dann ein funktionaler Hilbertraum, wenn eine Funktion

$$K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$$

mit folgenden Eigenschaften existiert:

(i) Für jedes feste $\lambda \in \Omega$ gehört die Funktion $K_\lambda : \Omega \to \mathbb{C},\ \mu \mapsto K(\mu, \lambda)$ zu H.
(ii) Für alle $f \in H$ und $\lambda \in \Omega$ gilt $f(\lambda) = \langle f, K_\lambda \rangle$

In diesem Fall ist K eindeutig bestimmt und heißt *reproduzierender Kern* von H.

(b) Sei nun $H \subset \mathbb{C}^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K. Dann gelten folgende Aussagen (**Hinweis**: Was ist $\langle K_\mu, K_\lambda \rangle$?):

(i) Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\|\delta_\lambda\| = \|K_\lambda\| = \sqrt{K(\lambda, \lambda)}$. (Hierbei sei K_λ wie in Teil (a) definiert.)
(ii) Es besteht die Beziehung $\overline{K(\lambda, \mu)} = K(\mu, \lambda)$ für alle $\lambda, \mu \in \Omega$.
(iii) Sind je endlich viele komplexe Zahlen $\xi_1, \cdots, \xi_n$ und Punkte $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Omega$ gegeben, so gilt stets

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(\lambda_i, \lambda_j) \xi_j \bar{\xi}_i \geq 0.$$

(c) Der Raum $\ell^2(n)$ (siehe Blatt 1, Aufgabe 4) kann als funktionaler Hilbertraum über der Menge $\Omega = \{1, \cdots, n\}$ aufgefasst werden. (Wie?) Geben Sie explizit den reproduzierenden Kern K von $\ell^2(n)$ an.

Interessantere Beispiele funktionaler Hilberträume (etwa der Hardy-Raum oder der Bergman-Raum über der Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$) werden in der Vorlesung bzw. auf den folgenden Übungsblättern vorgestellt.

Aufgabe 10 (Ein für Folgenräume typischer Vollständigkeitsbeweis)

Beweisen Sie die Vollständigkeit des Raumes

$$\ell^1(\mathbb{N}_0) = \{(x_n)_{n=0}^\infty : x_n \in \mathbb{C} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty\}$$

bezüglich der Norm

$$\|(x_n)_n\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \qquad ((x_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}_0)).$$

Aufgabe 11 (Ortho-Projektionen auf endlichdimensionale Teilräume)

Seien H ein Prä-Hilbertraum und $M \subset H$ ein endlichdimensionaler Teilraum.

(a) Zeigen Sie: Jedes $x \in H$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = x_M + x_{M^\perp} \quad \text{mit} \quad x_M \in M \quad \text{und} \quad x_{M^\perp} \in M^\perp.$$

Überlegen Sie sich zuerst die Eindeutigkeit; finden Sie dann – unter Verwendung einer Orthonormalbasis $(e_1, \cdots, e_n)$ von M – explizite Formeln für die Abbildungen

$$P_M : H \to H, \quad x \mapsto x_M \qquad \text{und} \qquad Q_M : H \to H, \quad x \mapsto x_{M^\perp}$$

(**Hinweis**: Blatt 1, Aufgabe 1).

(b) Folgern Sie, dass P_M und Q_M stetig lineare Projektionen sind.

(c) Sei nun $N \subset H$ ein beliebiger Teilraum von H, $x \in H$ und $z \in N$. Zeigen Sie, dass der Vektor $x - z$ genau dann orthogonal zu N ist, wenn $\|x - z\| = \inf_{y \in N} \|x - y\|$ gilt.

Folglich ist für jedes $x \in M$ die Orthogonalprojektion $x_M = P_M x$ von x auf M das eindeutig bestimmte Element x_M in M mit der Eigenschaft $\|x - x_M\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$.

Aufgabe 12 (Unbedingte Konvergenz)

Sei I eine beliebige Indexmenge. Eine Familie $\{x_\iota : \iota \in I\}$ von Vektoren in einem normierten Raum E heißt *summierbar* zur Summe $x \in E$, in Zeichen

$$\sum_{\iota \in I} x_\iota = x,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Indexmenge $J(\varepsilon) \subset I$ gibt, so dass für jede endliche Obermenge $J \supset J(\varepsilon)$ mit $J \subset I$ stets $\|x - \sum_{\iota \in J} x_\iota\| < \varepsilon$ ist. Zeigen Sie:

(a) Aus $\sum_{\iota \in I} x_\iota = x$ und $\sum_{\iota \in I} y_\iota = y$ folgt $\sum_{\iota \in I}(x_\iota + y_\iota) = x + y$ und $\sum_{\iota \in I} \alpha x_\iota = \alpha x$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) Höchstens abzählbar viele Glieder einer summierbaren Familie sind $\neq 0$.

(c) Ist die abzählbare Familie $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ summierbar zur Summe x, so konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ unbedingt (d.h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder) gegen x.