UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Dipl.-Math. Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Operatoren auf dem Hilbertraum

(Wintersemester 2002/2003)

Blatt 4 Abgabetermin: Montag, 25.11.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 13 (Funktionale Hilberträume II: Der Hardyraum)

Der Hardyraum über der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist definiert als

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \quad \text{analytisch}, \quad \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty \right\}.$$

Für $f \in H^2(\mathbb{D})$ setzt man $\quad \|f\|_{H^2} = \sup\limits_{0<r<1} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Zeigen Sie zunächst die folgenden beiden Hilfsbehauptungen:

i) Für zwei analytische Funktionen $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit den Taylorreihen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ sowie $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ $(z \in \mathbb{D})$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \overline{g(re^{it})} dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k r^{2k} \qquad (0 < r < 1).$$

ii) Für (a_k), $(b_k) \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ ist $\quad \lim\limits_{r\uparrow 1} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k r^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k.$

Folgern Sie hieraus nachstehende Aussagen über die Struktur des Hardyraumes $H^2(\mathbb{D})$:

(a) Für eine analytische Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit Taylorreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ $(z \in \mathbb{D})$ sind äquivalent: $f \in H^2(\mathbb{D}) \Leftrightarrow (a_k) \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, und in diesem Fall ist

$$\|f\|_{H^2} = \|(a_k)\|_2.$$

(b) Der Hardyraum $H^2(\mathbb{D})$ ist ein Vektorraum, auf dem durch $\|\cdot\|_{H^2}$ eine Norm erklärt wird, die ihn zu einem Hilbertraum macht. (Geben Sie explizit einen isometrischen Isomorphismus $\Phi : H^2(\mathbb{D}) \to \ell^2(\mathbb{N}_0)$ an.)

(c) Für das von $\|\cdot\|_{H^2}$ auf $H^2(\mathbb{D})$ induzierte Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2}$ gilt die Formel:

$$\langle f, g \rangle_{H^2} = \lim_{r\uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \overline{g(re^{it})} dt.$$

(Insbesondere darf in der Definition von $\|\cdot\|_{H^2}$ das Supremum $\sup_{0<r<1}$ durch den Limes $\lim_{r\uparrow 1}$ ersetzt werden.)

(d) Das System $\{z^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine Orthonormalbasis von $H^2(\mathbb{D})$. (Hierbei bezeichnet $z : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ die identische Funktion $z \mapsto z$.)

(e) Zu jedem $w \in \mathbb{D}$ existiert eine Funktion $k_w \in H^2(\mathbb{D})$ mit der Eigenschaft

$$\langle f, k_w \rangle_{H^2} = f(w) \qquad (f \in H^2(\mathbb{D})),$$

d.h. $H^2(\mathbb{D})$ ist ein funktionaler Hilbertraum. Geben Sie k_w $(w \in \mathbb{D})$ samt zugehöriger Taylorreihe explizit an. (**Tipp**: Gewinnen Sie $f(w)$ aus der Taylorreihe von f um 0 und interpretieren Sie die Reihe als Skalarprodukt in $\ell^2(\mathbb{N}_0) \simeq H^2(\mathbb{D})$.)

Aufgabe 14 (Orthogonalreihen)

Betrachten Sie die folgenden Aussagen über eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ paarweise orthogonaler Elemente eines Prä-Hilbertraumes H:

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist konvergent.

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist *schwach konvergent*, was definitionsgemäß bedeutet, dass es einen Vektor $x \in H$ gibt, so dass

$$\langle \sum_{n=1}^{k} x_n, y\rangle \xrightarrow{k} \langle x, y\rangle \qquad \text{(für alle } y \in H)$$

gilt.

(c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ ist konvergent.

Zeigen Sie: Im Prä-Hilbertraumfall gelten die Implikationen (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c). Ist H sogar ein Hilbertraum, so sind (a), (b) und (c) äquivalent.

Aufgabe 15 (Gram-Schmidt-Orthonormalisierung)

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine linear unabhängige Folge von Vektoren in einem Prä-Hilbertraum X und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ diejenige Orthonormalfolge, die aus der gegebenen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens hervorgeht. Zeigen Sie:

Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine weitere Orthonormalfolge in X mit der Eigenschaft

$$\operatorname{span}\{f_0, \cdots, f_n\} = \operatorname{span}\{x_0, \cdots, x_n\} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

so existiert eine Folge $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ komplexer Zahlen vom Betrage Eins mit $f_k = \lambda_k e_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Es bezeichne $P[-1,1]$ den Prä-Hilbertraum aller komplexen Polynomfunktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt \qquad (f, g \in P[-1,1]).$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $u_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $u_n(t) = t^n$ sowie

$$\varphi_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

das *n-te Legendre-Polynom*.

Zeigen Sie nach folgender Anleitung, dass $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ das durch Gram-Schmidt-Orthonormalisierung von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ entstehende Orthonormalsystem in $P[-1,1]$ ist.

(i) Überlegen Sie sich, dass φ_n ein Polynom n-ten Grades ist und einen *positiven* höchsten Koeffizienten besitzt.

(ii) Zeigen Sie durch $(j+1)$-fache partielle Integration, dass für $0 \leq j < m$ die Beziehung

$$\int_{-1}^{1} t^j \varphi_m(t)dt = 0$$

besteht. Folgern Sie: $\langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = 0$ für $n \neq m$.

(iii) Beweisen Sie (ebenfalls mittels partieller Integration), dass $\|\varphi_n\|^2 = 1$ ist $(n \in \mathbb{N}_0)$.

(iv) Schließen Sie unter Benutzung von Teil (a) den Beweis ab.