UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Dipl.-Math. Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Operatoren auf dem Hilbertraum

(Wintersemester 2002/2003)

Blatt 5 Abgabetermin: Montag, 2.12.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 16 (Direkte Summen von Hilberträumen)

Sei I eine beliebige Indexmenge. Für eine Familie $(H_\iota, \langle\cdot,\cdot\rangle_\iota)$ $(\iota \in I)$ von Hilberträumen definiert man die direkte Summe

$$\bigoplus_{\iota\in I} H_\iota = \{(x_\iota)_{\iota\in I} : x_\iota \in H_\iota \quad (\iota \in I) \quad \text{und} \quad \sum_{\iota\in I} \|x_\iota\|^2 < \infty\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $H = \bigoplus_{\iota\in I} H_\iota$ ein Vektorraum ist, auf dem durch

$$\langle (x_\iota), (y_\iota)\rangle = \sum_{\iota\in I} \langle x_\iota, y_\iota\rangle_\iota \qquad ((x_\iota), (y_\iota) \in H)$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

(b) Beweisen Sie, dass $(\bigoplus_{\iota\in I} H_\iota, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum ist.

(c) Begründen Sie, warum im Falle eines separablen, unendlich-dimensionalen Hilbertraumes K für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Hilberträume $\bigoplus_{j=1}^n K$ und K isomorph sind.

Aufgabe 17 (Unbeschränktheit der quantenmechanischen Operatoren)

Die Vertauschungsrelation $AB - BA = \mathrm{id}_E$ ist durch zwei *beschränkte* lineare Operatoren $A, B \in L(E)$ auf einem normierten Raum $E \neq (0)$ nicht erfüllbar.

Gehen Sie zum Beweis dieser Aussage wie folgt vor:

(a) Rechnen Sie nach: $AB^{n+1} - B^{n+1}A = (AB^n - B^nA)B + B^n(AB - BA)$ für $n \geq 0$.

(b) Zeigen Sie induktiv: $AB^{n+1} - B^{n+1}A = (n+1)B^n$ für $n \geq 0$.

(c) Führen Sie unter Verwendung der Beschränktheit von A und B einen Widerspruch herbei.

Die Heisenbergesche Unschärferelation ist eine Kommutatorrelation der oben angegebenen Form. Die typischen Operatoren der Quantenmechanik sind daher unbeschränkt.

Aufgabe 18 (Beispiele zur Berechnung der Operatornorm)

Es bezeichne $C[0,1]$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Für $f \in C[0,1]$ seien $\|f\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$ die *Supremumsnorm* und $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ die *Integralnorm* von f. Ferner seien $g \in C[0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Man beweise, dass die Abbildungen

$$S : (C[0,1], \|\cdot\|_1) \to (C[0,1], \|\cdot\|_1), \quad (Sf)(t) = \int_0^t f(s)ds$$

$$T_g : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty), \quad f \mapsto gf$$

$$U_n : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)dt - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$$

linear und stetig sind und berechne ihre Normen. Des Weiteren zeige man, dass $\lim_{n\to\infty} U_n(f) = 0$ für alle $f \in C[0,1]$ gilt. Gilt auch $\|U_n\| \xrightarrow{n} 0$?

Aufgabe 19 (Fourierreihen)

Laut Vorlesung bildet das Funktionensystem

$$e_n : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{2\pi i n t} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

eine Orthonormalbasis des Prä-Hilbertraumes $C[0,1]$ bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt \qquad (f, g \in C[0,1]).$$

Die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $C[0,1]$ induzierte Norm werde mit $\| \cdot \|_2$ bezeichnet; wie in Aufgabe 18 steht $\| \cdot \|_\infty$ für die Supremumsnorm auf $C[0,1]$.

(a) Zeigen Sie: Der Stammfunktionsoperator

$$S : (C[0,1], \| \cdot \|_2) \to (C[0,1], \| \cdot \|_2), \quad (Sf)(t) = \int_0^t f(s)ds$$

und die identische Abbildung $j : (C[0,1], \| \cdot \|_\infty) \to (C[0,1], \| \cdot \|_2)$, $f \mapsto f$, sind linear und stetig. Geben Sie die Funktionen Se_n $(n \in \mathbb{Z})$ explizit an und beweisen Sie die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\langle f, e_n \rangle}{2\pi i n} e_n$.

(b) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teil (a) zum Beweis der folgenden Aussage:

Es sei $f \in C[0,1]$ eine stetige Funktion mit verschwindendem nullten Fourierkoeffizienten (d.h. $\langle f, e_0 \rangle = 0$). Dann besitzt die Stammfunktion $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ $(t \in [0,1])$ bzgl. der Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die Fourierreihe

$$F = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\langle f, e_n \rangle}{2\pi i n} e_n - \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\langle f, e_n \rangle}{2\pi i n} \right) e_0.$$

(c) Sei nun speziell $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\quad t \mapsto t - \frac{1}{2}$ und F wie in Teil (b) definiert. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\langle f, e_n \rangle$ für $n \in \mathbb{Z}$ sowie $\langle F, e_0 \rangle$ direkt, d.h. durch Auswertung der entsprechenden Integrale.

Schließen Sie dann unter Anwendung von Teil (b) auf die Gültigkeit der Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$