UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Dipl.-Math. Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Operatoren auf dem Hilbertraum

(Wintersemester 2002/2003)

Blatt 6 Abgabetermin: Montag, 9.12.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 20 (Nach unten beschränkte Sesquilinearformen)

Seien H ein Hilbertraum und b eine beschränkte Sesquilinearform, die *zusätzlich* in folgendem Sinne *nach unten beschränkt* sei: Es existiere eine Konstante $c > 0$ mit

$$|b(x, x)| \geq c\|x\|^2 \qquad (x \in H).$$

Zeigen Sie, dass es genau einen *invertierbaren* Operator $T \in B(H)$ gibt, der b darstellt (der also in der Notation der Vorlesung die Identität $b = b_T$ erfüllt), und dass die Abschätzung $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$ gilt.

Aufgabe 21 (Berechnung von Adjungierten)

(a) Zu vorgegebenen Funktionen $g \in C[0,1]$ und $k \in C([0,1] \times [0,1])$ bezeichne $M_g \in B(L^2[0,1])$ die eindeutige stetige Fortsetzung des Operators

$$C[0,1] \xrightarrow{M_g} C[0,1], \quad (M_g f)(t) = g(t)f(t) \quad \text{für } t \in [0,1]$$

sowie $T_k \in B(L^2[0,1])$ die eindeutige stetige Fortsetzung von

$$C[0,1] \xrightarrow{T_k} C[0,1], \quad (T_k f)(t) = \int_0^1 k(s,t)f(s)ds \quad \text{für } t \in [0,1].$$

Bestimmen Sie die Adjungierten von M_g und T_k. Ziehen Sie sich dabei (wie in der Definition der beiden Operatoren) auf eine dichte Teilmenge von $L^2[0,1]$ zurück. Für welche Wahl von g bzw. k ergibt sich jeweils ein selbstadjungierter Operator?

(b) Berechnen Sie die Adjungierten der Operatoren

$$U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$S : \ell^2(\mathbb{N}_0) \to \ell^2(\mathbb{N}_0), \quad (x_0, x_1, x_2, \cdots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \cdots)$$

$$M_z : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D}), \quad f \mapsto zf,$$

wobei z für die identische Funktion auf $\mathbb{D}$ steht (zum Hardyraum $H^2(\mathbb{D})$ siehe Blatt 4, Aufgabe 13). Geben Sie UU^*, U^*U, SS^* und S^*S explizit an.

Aufgabe 22 (Isometrien und ihre Adjungierten)

Rechnen Sie am Beispiel der Isometrie

$$V : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^{m+n}, \quad (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_m, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-\text{mal}})$$

mit $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ die Aussagen aus Bemerkung 2.1.6 (vgl. Skript zur Vorlesung) explizit nach. (Hierbei seien $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^{m+n}$ beide mit dem Standard-Skalarprodukt versehen.)

Aufgabe 23 (Partielle Isometrien)

Ein Operator $V \in B(H)$ heißt *partielle Isometrie*, falls $\|Vx\| = \|x\|$ für alle $x \in H$ mit $x \perp \ker V$ gilt. (Die Adjungierte einer Isometrie hat diese Eigenschaft.)

(a) Für einen Operator $V \in B(H)$ beweise man die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Der Operator V ist eine partielle Isometrie.

(ii) Die Abbildung $\tilde{V} : (\ker V)^{\perp} \xrightarrow{V} \operatorname{ran} V$ ist ein isometrischer Isomorphismus.

(iii) Die Adjungierte V^* ist eine partielle Isometrie.

(iv) Der Operator V^*V ist die Orthogonalprojektion auf $(\ker V)^{\perp}$.

(v) Die Abbildung V hat abgeschlossenes Bild und VV^* ist die Orthogonalprojektion auf $\operatorname{ran} V$.

(b) Zeigen Sie, dass für zwei partielle Isometrien $U, V \in B(H)$ die folgenden Eigenschaften gleichwertig sind:

(i) Die Komposition UV ist eine partielle Isometrie.

(ii) Es gilt die Inklusion: $V^*(\ker U) \subset \ker(UV)$.

(iii) Es ist $UP_{\operatorname{ran} V}|\ker U = 0$, wobei $P_{\operatorname{ran} V}$ die Orthogonalprojektion auf das Bild von V bezeichnet.

(**Hinweis** zu (b): Überlegen Sie sich zuerst, dass für jeden Operator $T \in B(H)$ und jede Wahl abgeschlossener Teilräume $M, N \subset H$ die Äquivalenz $TM \subset N \Leftrightarrow T^*N^{\perp} \subset M^{\perp}$ gilt.)