UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Dipl.-Math. Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Operatoren auf dem Hilbertraum

(Wintersemester 2002/2003)

Blatt 8 Abgabetermin: Montag, 6.01.2003, vor der Vorlesung

Auf diesem Übungsblatt bezeichne H durchweg einen komplexen Hilbertraum.

Zur Erinnerung: Ein Operator $T \in B(H)$ heißt *selbstadjungiert* $:\Leftrightarrow T = T^*$, *normal* $:\Leftrightarrow TT^* = T^*T$ und *unitär* $:\Leftrightarrow UU^* = \mathrm{id}_H = U^*U$, *Kontraktion* $:\Leftrightarrow \|T\| \le 1$.

Überlegen Sie sich vorab, dass für einen normalen Operator $T \in B(H)$ die Identität $\|Tx\| = \|T^*x\|$ $(x \in H)$ gilt. Diese kann in den beiden nachfolgenden Aufgaben gewinnbringend eingesetzt werden.

Aufgabe 27 (Rechnen mit positiven Operatoren und ihren Wurzeln)

Es seien $A, B, S, T \in B(H)$. Zeigen Sie:

(a) $0 \le A \le B \quad$ und $\quad 0 \le S \le T \quad \Rightarrow \quad \|A^{1/2}S^{1/2}\| \le \|B^{1/2}T^{1/2}\|$.

(b) $0 \le A \le B \quad$ und $\quad AB = BA \quad \Rightarrow \quad 0 \le A^2 \le B^2$.

(c) $0 \le A \le B, \quad 0 \le S \le T, \quad AB = BA \quad$ und $\quad ST = TS \quad \Rightarrow \quad \|AS\| \le \|BT\|$.

(d) $0 \le A \le B \quad \Rightarrow \quad \overline{\operatorname{ran} A} \subset \overline{\operatorname{ran} B}$.

(e) Existiert $B^{-1} \in B(H)$, so gilt: $\quad 0 \le A \le B \quad \Leftrightarrow \quad \|A^{1/2}B^{-1/2}\| \le 1$.

(f) $0 \le A$ und $\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \le A^{1/2} \le (A + \varepsilon \mathrm{id}_H)^{1/2} \le A^{1/2} + \varepsilon^{1/2}\mathrm{id}_H$.

(g) $0 \le A \le B \quad \Leftrightarrow \quad$ Für $\varepsilon > 0$ ist $\|A^{1/2}(B + \varepsilon \mathrm{id}_H)^{-1/2}\| \le 1$.

Aufgabe 28 (Summenzerlegung normaler Kontraktionen)

Zeigen Sie:

(a) Zu jeder selbstadjungierten Kontraktion $T \in B(H)$ existiert genau ein unitärer Operator $U \in B(H)$ mit den Eigenschaften

$$T = \frac{1}{2}(U + U^*) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} U \ge 0.$$

Der Operator U vertauscht mit jedem Operator, der mit T vertauscht.

(**Tipp**: Im Fall $H = \mathbb{C}$ ist dies Geometrie am Einheitskreis; T entspricht einer reellen Zahl vom Betrag ≤ 1, U einer komplexen Zahl mit Betrag 1 und U^* der zu U konjugiert komplexen Zahl.)

(b) Zu jeder normalen Kontraktion $T \in B(H)$ existiert ein eindeutig bestimmter unitärer Operator $W \in B(H)$ mit

$$T = W|T| \quad \text{und} \quad W|\ker T = \mathrm{id}_{\ker T}.$$

Der Operator W vertauscht mit jedem Operator, der mit T vertauscht.

(**Tipp**: Definieren Sie W zunächst auf dem Bild von $|T|$ und setzen Sie dann geeignet fort. Überlegen Sie sich hierzu, dass aus der Normalität von T die Beziehung $\ker T = \ker T^*$ folgt.)

(c) Zu jeder normalen Kontraktion $T \in B(H)$ gibt es unitäre Operatoren $U_1, U_2 \in B(H)$ mit $T = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$. Man kann U_1 und U_2 so wählen, dass sie mit jedem Operator vertauschen, der mit T vertauscht.

Aufgabe 29 (Unitäre Dilatationen und Fortsetzungen)

(a) Zu einer Kontraktion $T \in B(H)$ bilde man auf dem Hilbertraum $H \oplus H$ den Operator

$$U = \begin{bmatrix} T & (\mathrm{id}_H - TT^*)^{\frac{1}{2}} \\ (\mathrm{id}_H - T^*T)^{\frac{1}{2}} & -T^* \end{bmatrix}.$$

(Man schreibe die Elemente von $H \oplus H$ in der Form $\binom{x}{y}$ mit $x, y \in H$ und lasse U mit der üblichen Matrizenmultiplikation darauf wirken.)

Zeigen Sie, dass U unitär ist.

Zu jeder Kontraktion $T \in B(H)$ existiert also ein unitärer Operator $U \in B(K)$ auf einem H umfassenden Hilbertraum K, so dass T sich schreiben lässt als $T = P_H U|H$. (Hierbei steht $P_H \in B(K)$ für die Orthogonalprojektion von K auf H.) Einen solchen Operator U nennt man eine *unitäre Dilatation* von T.

(b) Im Falle von Isometrien gilt eine stärkere Aussage: Zeigen Sie, dass jede Isometrie $T \in B(H)$ eine *unitäre Fortsetzung* $U \in B(K)$ auf einem Hilbertraum $K \supset H$ besitzt, d.h. konstruieren Sie einen unitären Operator U auf $K = H \oplus G$ (G ein geeigneter Hilbertraum) mit $UH \subset H$ und $T = U|H$.

Lösen Sie dieses Problem auch ohne Benutzung der Wurzel!

Aufgabe 30* (von Neumannscher Ergodensatz)

Zeigen Sie nacheinander:

(a) Sei $x \in H$ ein beliebig vorgegebener Vektor und $T \in B(H)$ eine Kontraktion. Dann gilt die Äquivalenz

$$Tx = x \quad \Leftrightarrow \quad T^*x = x.$$

(b) Für eine Kontraktion $T \in B(H)$ setze man

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{und} \qquad H_0 = \ker(\mathrm{id}_H - T)$$

und definiere $P \in B(H)$ als die Orthogonalprojektion von H auf H_0. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n x = Px \qquad (x \in H).$$

(**Tipp:** Man kann sich auf die beiden Fälle $x \in H_0$ und $x \in \operatorname{ran}(\mathrm{id}_H - T)$ zurückziehen.)

Aufgabe 31* (Orthonormal- und Vektorraumbasen)

(a) Eine Orthonormalbasis von H ist ganau dann eine Vektorraumbasis von H (im Sinne der linearen Algebra), wenn H endlichdimensional ist.

(b) Jede Vektorraumbasis eines unendlichdimensionalen Hilbertraumes ist überabzählbar.

**Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest
und einen guten Rutsch ins Jahr**

2003.

F. Schöpfer M. Didas G. Wittstock