UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Dipl.-Math. Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Operatoren auf dem Hilbertraum

(Wintersemester 2002/2003)

Blatt 9 Abgabetermin: Montag, 13.01.2003, vor der Vorlesung

Auf diesem Übungsblatt bezeichne H stets einen komplexen Hilbertraum.

Aufgabe 32 (Einzeiler zu Betrag und Wurzel)

Beweisen Sie folgenden "Nachtrag" zur Vorlesung:

(a) Für jeden Operator $T \in B(H)$ gilt die Übereinstimmung: $\ker T = \ker |T|$.

(b) Für positives $T \in B(H)$ ist $\ker T = \ker T^{1/2}$.

Aufgabe 33 (Polarzerlegung)

(a) Ist $T \in B(H)$ ein invertierbarer Operator mit Polarzerlegung $T = VP$, so gilt die Äquivalenz: T ist normal $\Leftrightarrow VP = PV$.

(b) Sei $T \in B(H)$ normal. Zeigen Sie unter Zuhilfenahme der unitären Polarzerlegung $T = UP$ von T, dass $\operatorname{ran} T = \operatorname{ran} T^*$ gilt. (**Tipp**: Was ist T^*U^2?)

(c) Sei $(\xi_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty(\mathbb{N}_0)$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. Geben Sie die Polarzerlegung des Operators

$$S : \ell^2(\mathbb{N}_0) \to \ell^2(\mathbb{N}_0), \quad (\alpha_n)_{n\geq 0} \mapsto (\xi_n \alpha_{n+1})_{n\geq 0}$$

explizit an.

Aufgabe 34 (Pseudoinverse)

Es seien H, K Hilberträume und $T \in L(H, K)$, $T \neq 0$. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) Für den *Minimalmodul* $\gamma(T) = \max\{c \geq 0 : c\|x\| \leq \|Tx\| \text{ für alle } x \in (\ker T)^\perp\}$ von T gilt: $\gamma(T) > 0$.

(b) Es gibt genau einen Operator $A \in L(K, H)$ mit

$$AT = P_{(\ker T)^\perp} \quad \text{und} \quad A|(\operatorname{ran} T)^\perp = 0.$$

(Man nennt A die *Pseudoinverse* von T.)

Gilt eine dieser Bedingungen, so ist $\|A\| = \gamma(T)^{-1}$ und $TA = P_{\operatorname{ran} T}$. Ferner ist in diesem Fall A^* die Pseudoinverse von T^* und $\gamma(T^*) = \gamma(T)$.

Anleitung zum Beweis von (a) $\Rightarrow$ (b): Der von T induzierte Operator $\tilde{T} : (\ker T)^\perp \xrightarrow{T} \operatorname{ran} T$ ist bijektiv. Definieren Sie A als geeignete Fortsetzung der Umkehrabbildung $\tilde{T}^{-1}$. Beachten Sie hierbei, dass T abgeschlossenes Bild hat (vgl. Vorlesung). Schätzen Sie zum Beweis der Stetigkeit von A die Norm $\|A\|$ nach oben durch $\gamma(T)^{-1}$ ab.

Aufgabe 35 (Cayley-Transformierte)

Sei $T \in B(H)$ ein selbstadjungierter Operator auf einem komplexen Hilbertraum H. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildungen $T + i\ \mathrm{id}_H$ und $T - i\ \mathrm{id}_H$ sind bijektiv und haben stetige Inverse. (**Tipp**: Rechnen Sie zuerst die Identität $\|(T \pm i\ \mathrm{id}_H)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2$ $(x \in H)$ nach.)

(b) Der Operator $U_T = (T+i\ \mathrm{id}_H)(T-i\ \mathrm{id}_H)^{-1}$ ist unitär. (Man nennt U_T die *Cayley-Transformierte* von T.)

(c) Die Abbildung $\mathrm{id}_H - U_T$ hat eine stetige Inverse. Geben Sie diese konkret an und zeigen Sie damit, dass T sich wie folgt aus seiner Cayley-Transformierten U_T zurückgewinnen lässt: $T = -i(\mathrm{id}_H + U_T)(\mathrm{id}_H - U_T)^{-1}$.

Aufgabe 36* (Partielle Isometrien)

(a) Seien X ein Prä-Hilbertraum und $A, B \subset X$ Teilräume mit $X = \overline{A \oplus B}$. Dann lässt sich jeder stetige Operator $V \in L(X)$, für den $V|A = 0$ und $V|B : B \to X$ isometrisch ist, eindeutig fortsetzen zu einer partiellen Isometrie $W \in B(H)$ auf der Vervollständigung H von X.

(b) Sei $0 < c < 1$ fest gewählt. Bestimmen Sie die Zahl $\alpha > 0$ so, dass sich die Abbildung

$$V_\alpha : C[0,1] \to C[0,1], \quad (V_\alpha f)(t) = \alpha f(ct)$$

zu einer partielle Isometrie W auf $L^2[0,1]$ fortsetzen lässt. Berechnen Sie dazu zuerst die Räume $A = \ker V_\alpha$ und $B = C[0,1] \ominus \ker V_\alpha$ und leiten Sie eine notwendige Bedingung für α her. Wenden Sie dann Teil (a) an mit $X = C[0,1]$ und $H = L^2[0,1]$.)