UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Benedikt Betz

1. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 1 Auf $\mathbb{R}$ sei $d_1(x,y) = |x-y|$ die gewöhnliche Metrik und

$$d_2(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

Zeige:

a) d_2 ist eine Metrik.

b) d_2 ist zu d_1 äquivalent, aber nicht uniform äquivalent.

c) $(\mathbb{R}, d_2)$ ist nicht vollständig.

Aufgabe 2 Es sei $C([0,1])$ der Raum der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf $[0,1]$. Es sei d_1 die durch die Supremumsnorm $\|f\|_\infty$ definierte Metrik und d_2 die durch die Norm

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

definierte Metrik. Zeige: d_2 ist zu d_1 nicht äquivivalent, und $C([0,1])$ ist mit der Metrik d_2 nicht vollständig.

Aufgabe 3 Die Bezeichnungen seien wie in Aufgabe 3. Es sei k eine stetige, komplexwertige Funktion auf $[0,1] \times [0,1]$. Für $f \in C([0,1])$ setzen wir

$$K(f) = \left[[0,1] \to \mathbb{C};\ x \mapsto \int_0^1 k(s,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t \right].$$

Zeige: K ist eine stetige lineare Abbildung $(C([0,1]), \|\ \|_1) \to (C([0,1]), \|\ \|_\infty)$. Welche Operatornorm hat K?

Zu einer Menge X bezeichne $l_\infty(X)$ den normierten Raum aller beschränkten, komplexwertigen Funktionen auf X mit der Supremumsnorm.

Aufgabe 4 Es sei $C_c(\mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die außerhalb eines (von f abhängigen) Intervalls der Form $[-n,n]$ für $n \in \mathbb{N}$ verschwinden. Es ist $C_c(\mathbb{R}) \subseteq l_\infty(\mathbb{R})$. Zeige: Der Abschluss von $C_c(\mathbb{R})$ in $l_\infty(\mathbb{R})$ ist die Menge $C_0(\mathbb{R})$ aller stetigen, komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \sup\{|f(x)| \mid |x| > n\} < \varepsilon.$$

Abgabe: Montag, 03. 11. 2003, vor der Vorlesung.
Für jede Übungsaufgabe gibt es 4 Punkte. Zur Klausur wird zugelassen, wer mindestens die Hälfte aller Übungspunkte erhalten und aktiv an den Übungen teilgenommen hat. Aktuelle Informationen zur Vorlesung sind zu finden unter **www.math.uni-sb.de/˜ag-wittstock/lehre/WS03/fa1/**.
Die Vorlesung wird betreut von Benedikt Betz (Zimmer 304, benedikt@math.uni-sb.de). Feedback ist — wie immer — erwünscht.