Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 — Mathematik
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Jörg Fischer

12. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 45 Sei $H = l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Wir definieren $S \in B(H)$ durch $S(x_n)_n = (\lambda_n x_{n-1})_n$, wobei $(x_n)_n \in l_2$ und $x_0 := 0$. Bestimmen Sie die Polarzerlegung von S und geben Sie diejenigen Folgen $(\lambda_n)_n \in l_\infty$ an, für die S kompakt ist.

Aufgabe 46 Es seien S der Rechtsshift auf $l_2(\mathbb{N}_0)$, $\mathcal{B}$ die von S und id erzeugte unitale Banachalgebra. Es sei $\mathcal{A}$ die von S erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} := \overline{\mathrm{lin}}\{S^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}, \quad \mathcal{A} := \overline{\mathrm{lin}}\{S^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Man zeige: $\mathcal{A}$ ist ein maximales Ideal in $\mathcal{B}$ und $\chi_0 \colon T \mapsto \langle Te_0, e_0\rangle$ ist ein Charakter auf $\mathcal{B}$ mit $\ker \chi_0 = \mathcal{A}$. Es ist $\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{id}$ eine topologisch direkte Summe. Man gebe die zugehörigen Projektoren an.

b) Man zeige $\sigma_{\mathcal{B}}(S)$ ist die abgeschlossene Kreisscheibe $\{\,\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le 1\,\}$. Für $|\lambda| < 1$ ist $\chi_\lambda \colon T \mapsto \langle Te_0, x_\lambda\rangle$ ein Charakter auf $\mathcal{B}$ mit $\chi_\lambda(S) = \lambda$, wobei $x_\lambda := (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist. Für $|\lambda| = 1$ gibt es auch einen Charakter χ_λ auf $\mathcal{B}$ mit $\chi_\lambda(S) = \lambda$.

Hinweis: Was ist $\langle P(S)e_0, x_\lambda\rangle$ für ein Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$. Wieso hat der Algebrenhomomorphismus $P(S) \mapsto P(\lambda_0) \in \mathbb{C}$ für $|\lambda_0| \le 1$ eine stetige Fortsetzung auf $\mathcal{B}$.

Aufgabe 47 Gegeben sei $\epsilon > 0$ und $\{\,x_{m,n} \mid m, n \in \mathbb{N}\,\} \subset \mathbb{C}$, so daß $\infty > \sum_{n=1}^{\infty} |x_{m,n}| > 4\epsilon$ und $\lim_m x_{m,n} = 0$ für alle m, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß es streng monoton wachsende Abbildungen $g \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ und $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$\sum_{n=1}^{g(j-1)} |x_{f(j),n}| < \epsilon, \qquad \sum_{n=1+g(j-1)}^{g(j)} |x_{f(j),n}| > 3\epsilon, \qquad \sum_{n=1+g(j)}^{\infty} |x_{f(j),n}| < \epsilon.$$

Zeigen Sie außerdem, daß es eine Folge $(y_n)_n$ komplexer Zahlen vom Betrag 1 gibt, so daß

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_{f(j),n}\Big| > \epsilon$$

für alle $j \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Setzen Sie $g(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Dann sind für $j = 1$ die geforderten Bedingungen erfüllt. Zur Bestimmung von $(y_n)_n$ setzen Sie $y_n = \mathrm{sign}\, \bar{x}_{f(j),n}$ auf $f(j-1) < n \le f(j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 48

a) Sei $(x_n)_n$ eine Folge in l_1, die schwach (bzgl. l_∞) gegen 0 konvergiert. Dann konvergiert $(x_n)_n$ in der Norm gegen 0.

Hinweis: Nehmen Sie an, $(x_n)_n$ konvergiere nicht in der Norm und wenden Sie Aufgabe 47 an.

b) Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H, l_1)$, dann ist T ein kompakter Operator. Sei $S \in L(c_0, H)$, dann ist S ein kompakter Operator.

Abgabe: Montag, 02.02.2004, vor der Vorlesung.