UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Benedikt Betz

2. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 5 Auf dem Raum $C^\infty([0,1])$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$ setzen wir

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\| f^{(k)} - g^{(k)} \|_\infty}{1 + \| f^{(k)} - g^{(k)} \|_\infty}.$$

Zeige:

a) d ist eine Metrik auf $C^\infty([0,1])$.

b) Eine Folge $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ von Funktionen in $C^\infty([0,1])$ konvergiert genau dann bezüglich dieser Metrik gegen f, wenn für jedes $k \geqslant 0$ die Folge der Ableitungen $(f_n^{(k)})$ gleichmäßig gegen $f^{(k)}$ konvergiert.

c) $(C^\infty([0,1]), d)$ ist vollständig.

Aufgabe 6 Auf $C([0,1])$ seien die Normen $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_\infty$ wie in Aufgabe 2 erklärt. Weiter sei $g \in C([0,1])$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die folgenden Abbildungen linear und stetig sind, und berechne ihre Norm.

a) $S : (C([0,1]), \| \ \|_1) \to (C([0,1]), \| \ \|_1);\ f \mapsto \left[t \mapsto \int_1^t f(s)\,\mathrm{d}s\right]$,

b) $T_g : (C([0,1]), \| \ \|_\infty) \to (C([0,1]), \| \ \|_\infty);\ f \mapsto gf$,

c) $U_n : (C([0,1]), \| \ \|_\infty) \to \mathbb{C};\ f \mapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(k/n)$.

Zeige weiter: Für alle $f \in C([0,1])$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(f) = 0$. Gilt auch $\|U_n\| \to 0$?

Aufgabe 7 Beweise den **Satz von DINI:**
Es sei (X,d) ein kompakter metrischer (oder allgemeiner: topologischer) Raum. Konvergiert eine monoton wachsende (oder fallende) Folge reellwertiger stetiger Funktionen auf X punktweise gegen eine stetige Funktion, so ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.

Aufgabe 8 Es sei $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Wir definieren die Abbildungen

$$S : l_p \to l_p;\ (x_n)_n \mapsto (x_{n+1})_n \qquad \text{und}$$

$$T : l_p \to l_p;\ (x_n)_n \mapsto (x_{n-1})_n \qquad \text{mit } x_{-1} = 0.$$

Zeige: S und T sind linear und stetig. Berechne die Operatornormen.

Abgabe: Montag, 10. 11. 2003, vor der Vorlesung.