UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Benedikt Betz

3. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 9 Es sei $(c, \| \ \|_\infty)$ der Banachraum der konvergenten Folgen. Zeige: Durch die Dualität

$$\langle (x_n)_n, (y_n)_n \rangle = \sum_{n+0}^{\infty} x_n y_{n+1} + y_0 \lim_{n\to\infty} x_n$$

ist ein isometrischer Isomorphismus von c' und l_1 gegeben.
Welcher andere Banachraum hat ebenfalls l_1 als Dual?

Aufgabe 10 Es sei $(x_n)_n \in l_\infty$. Durch $(x_n)_n$ wird für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ein Operator

$$T : l_p \to l_p;\ (y_n)_n \mapsto (x_n y_n)_n$$

definiert. Zeige: T ist genau dann kompakt, wenn $(x_n)_n \in c_0$ ist.

Aufgabe 11 Zur Neumannschen Reihe
Zu $k \in C([0,1]^2)$ definieren wir einen Operator wie in Aufgabe 3:

$$T_k : C([0,1]) \to C([0,1]);\ f \mapsto \left[s \mapsto \int_0^1 k(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t \right].$$

Jetzt betrachten wir aber auf $C([0,1])$ beide Male die Norm $\| \ \|_\infty$. T_k heißt *Fredholmscher Integraloperator mit Kern k*. Zeige: Dann hat T_k die Operatornorm

$$\sup_s \int_0^1 |k(s,t)|\,\mathrm{d}t.$$

Zeige weiter: Ist $\|T_k\| < 1$, so hat zu jeder rechten Seite $g \in C([0,1])$ die Integralgleichung

$$f(s) - \int_0^1 k(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t = g(s)$$

genau eine Lösung $f \in C([0,1])$. Wie lässt sich die Lösung durch T_k und g ausdrücken?

Aufgabe 12 Fortsetzung von Aufgabe 11:
Der Operator $\sum_{n=1}^\infty T_k^n$ ist auch wieder ein Fredholmscher Integraloperator. Betrachte dazu die Kerne

$$k_1(s,t) = k(s,t),$$

$$k_n(s,t) = \int_0^1 k(s,u) k_{n-1}(u,t)\,\mathrm{d}u.$$

Zeige: Es ist $T_k^n = T_{k_n}$, die Reihe

$$h = \sum_{n=1}^\infty k_n$$

konvergiert gleichmäßig auf $[0,1]^2$, und es ist

$$T_h = \sum_{n=1}^\infty T_k^n.$$

Die Funktion h heißt *der auflösende Kern* der Integralgleichung aus Aufgabe 11. Wie lässt sich durch T_h die Lösung der Integralgleichung ausdrücken?

Abgabe: Montag, 17. 11. 2003, vor der Vorlesung.