UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Benedikt Betz

6. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 21

a) Es seien X und Y normierte Räume, einer von beiden vollständig, und $B : X \times Y \to \mathbb{C}$ eine Bilinearform. B sei *getrennt stetig,* das heißt, für alle $x \in X$ seien die Funktionen $y \mapsto B(x,y)$ und für alle $y \in Y$ die Funktionen $x \mapsto B(x,y)$ stetig.

Zeige: Dann ist B stetig. (Zeige zunächst die Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.)

b) Dies gilt nicht mehr, falls weder X noch Y vollständig ist. Betrachte dazu $X = Y = (C([0,1]), \| \ \|_1)$ und $B(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Zeige: B ist getrennt stetig, aber nicht stetig.

Hinweis: Passende Ausnahmefunktionen lassen sich in den Polynomen finden.

Aufgabe 22 Es sei E ein Banachraum, X und $Y \subseteq E$ abgeschlossene Unterräume und $E = X \oplus Y$ als (algebraische) direkte Summe. Zeige: Dann ist die Projektion auf X parallel zu Y stetig.

Aufgabe 23 Es sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum und $p : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm. p heißt *koordiniert,* falls für jede Folge $(x_n)_n$ in X, für die $\|x_n\| \to 0$ und $p(x_n - x_m) \to 0$, auch $p(x_n) \to 0$ konvergiert. Zeige: Ist X ein Banachraum und p eine koordinierte Halbnorm, so ist p stetig. (Der Beweis wurde in der Vorlesung skizziert.)

Aufgabe 24 Aus Aufgabe 23 lassen sich das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, der Satz von abgeschlossenen Graphen und der Satz von der offenen Abbildung gewinnen. (Welcher der drei Sätze wird in Aufgabe 23 benutzt?)

a) Zeige: Ist $T : X \to Y$ ein Operator zwischen normierten Räumen, so ist der Graph von T abgeschlossen, wenn die Halbnorm $p(x) = \|Tx\|$ koordiniert ist. Die Umkehrung gilt, falls Y vollständig ist. Leite daraus den Satz vom abgeschlossenen Graphen her.

b) Zeige: Jede unterhalbstetige Halbnorm auf einem normierten Raum ist koordiniert. Leite daraus das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit her unter Benutzung der Halbnorm $p(x) = \sup_i \|T_i x\|$.

c) Leite den Satz von der stetigen Inversen her unter Benutzung der Halbnorm $p(y) = \|T^{-1}(y)\|$ auf Y für einen stetigen, bijektiven Operator $T : X \to Y$. (Diese ist koordiniert, wenn X vollständig ist.)

Wie gewinnt man daraus den Satz von der offenen Abbildung?

Abgabe: Montag, 8. 12. 2003, vor der Vorlesung.