Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 — Mathematik
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Jörg Fischer

8. Übung Funktionalanalysis WS 2003/04

Aufgabe 29

a) Zeigen Sie, daß der lineare Operator $T\colon (l_\infty)' \to (l_\infty)'$, gegeben durch $Tf = f\big|_{c_0}$ für $f \in (l_\infty)'$ keine Adjungierte hat.

b) Sei $\mathfrak{R}([0,1])$ der Raum der reellen Riemann integrierbaren Funktionen versehen mit dem Skalarprodukt $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Berechnen Sie die Adjungierte des linearen Operators $(Tf)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f(\frac{x}{2})$. Berechnen Sie $T'T$ und TT'.

Aufgabe 30 Seien X und Y Banachräume und $T \in B(X,Y)$ so daß $T(X)$ ein abgeschlossener Unterraum von Y ist. Zeigen Sie, daß $T'(Y') = (\ker T)^\perp$ gilt.

Hinweis: Für $\varphi \in (\ker T)^\perp = \{\, \phi \in X' \mid \langle x, \phi\rangle = 0\, \forall x \in \ker T \,\}$ definiere man $\psi_0(Tx) = \langle x, \varphi\rangle$. Der Satz von der offenen Abbildung zeigt daß ψ_0 stetig ist.

Aufgabe 31 Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $C \subset V$ heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten von C auch deren Verbindungslinie in C liegt, d.h. $tx + (1-t)y \in C$ für alle x, $y \in C$ und $t \in [0,1]$. Ein Punkt $z \in C$ heißt Extremalpunkt von C, wenn er nicht als Konvexkombination anderer Punkte aus C geschrieben werden kann, d.h. wenn aus $z = tx + (1-t)y$ mit x, $y \in C$ und $t \in (0,1)$ folgt $z = x = y$.

a) Sei $C \subset V$ konvex. Zeigen Sie, daß $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in C$ für alle $x_i \in C$, $t_i \geq 0$ so daß $\sum_i t_i = 1$ und $n \in \mathbb{N}$.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)$ der Raum der $n \times n$ Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß die Projektionen ($p^* = p = p^2$) genau die Extremalpunkte der positiven Matrizen mit Norm kleiner oder gleich 1 sind.

Hinweis: Eine Matrix $x = [x_{ij}] \in M_n$ ist positiv, wenn $\langle x\xi, \xi\rangle \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{C}^n$. Falls x positiv und $x_{ii} = 0$ folgt $x_{ij} = x_{ji} = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Sei $p \in M_n$ ein Projektor und $0 \leq x, y \leq \mathbb{1}_n$. Folgern Sie aus $p = 1/2(x+y)$ daß x und y kommutieren. (Sie dürfen benutzen, daß dann x und y eine gemeinsame Orthonormal-Basis aus Eigenvektoren haben.)

c) Zeigen Sie, daß die selbstadjungierten und unitären $n \times n$ Matrizen ($u^* = u$ und $u^2 = \mathbb{1}_n$) genau die Extremalpunkte der selbstadjungierten Matrizen mit Norm kleiner oder gleich 1 sind.

Hinweis: Zerlegen Sie ein selbsadjungiertes $v \in M_n$ geeignet als Differenz zweier positiver Matrizen und wenden Sie b) an. Für die andere Richtung, zeigen Sie zunächst daß die Identität $\mathbb{1}_n \in M_n$ ein Extremalpunkt der abgeschlossenen Einheitskugel von M_n ist. (Für den selbstadjungierten Teil der Einheitskugel ist das leicht zu sehen. Folgern Sie damit aus $\mathbb{1}_n = 1/2(x+y)$ daß x normal sein muß.)

Aufgabe 32 Bestimmen Sie die Extremalpunkte der abgeschlossenen Einheitskugeln von $l_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Folgern Sie, daß es keine Isometrie zwischen $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und $c(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ geben kann.

Abgabe: Montag, 05.01.2004, vor der Vorlesung.
Die Übungen werden betreut von Jörg Fischer (Zimmer 223, hjf@math.uni-sb.de).