

Didaktische Begleittheorien - oder: warum Füllgraphen doch authentisch sind

Anselm Lambert Universität des Saarlandes

Abstract **Mathematikdidaktik** ist eine wertvolle Legierung aus ihren konstitutiven elementaren Wissenschaften, wie **Pädagogik, (Kognitions-)psychologie, Semiotik, Epistemologie, Philosophie, Soziologie ... und nicht zuletzt Mathematik**. In diesem Sinne ist „**Mathe**“ (ANDELFINGER) mit seinen eigenen Zielen, Inhalten, Prozessen und deren zeitgebundenen Entwicklungen **normativ und konstruktiv mehr als** vermeintlich zeitlose **Mathematik**. Eine angemessene mathematikdidaktische Aufarbeitung (Planung) und Aufbereitung (Gestaltung) von Stoff für den Mathematikunterricht kann nur unter Berücksichtigung des fruchtbaren Aspektereichtums aus den unverzichtbaren, unterschiedlichen Begleittheorien gelingen. Konsequenterweise führt dies dazu, dass in Lernumgebungen Mathematik nicht alleiniger Maßstab sein kann, sondern ggf. etwas zurücktreten muss. „**Mathe**“ ist für alle da: zum **Erahnem, Erblicken, Erkunden, Erkennen, Erfassen und Erklären** – und für einige Wenige schließlich dann **Mathematik** auch zum **(Selbst-)Erfinden**.

Was Euch/Sie erwartet:

- (0) Intentionen eines Vortrages auf unserer Tagung?
- (1) Akute Motivation für mein Vortragsthema
- (2) Didaktische Begleittheorien I
 - a) Authentie
 - b) Allgemeinbildender Geometrieunterricht
 - c) Ebenen und Übergänge / Zeichen und Symbole
- (3) Beispiel 1: Füllgraphen
- (4) Didaktische Begleittheorien II
 - ✓ Muster und Strukturen ?????
- (5) Beispiel 2: Spiegelung
- (6) Auslassungen: Prädikativ vs. Funktional; Symmetrie ...

(0) Intentionen eines Vortrages auf der Tagung?

- 👍 Erzählen, was ich selbst für wichtig halte ←
- 👍 Der ganzen Welt etwas Neues verkünden
- 👍 Die Mathe(matik) voran bringen – wessen? / für wen?
- 👍 Im AK Geometrie etwas Neues diskutieren
- 👍 Im AK Geometrie etwas neu diskutieren ←
- 👍 Die Welt verbessern – bei uns? / für wen? / und wie?
- 👍 Unseren(?) Mathematikunterricht weiterentwickeln?
- 👍 Über relevante geometriedidaktische Fragen diskutieren?
- 👍 Diskutieren, was relevante Fragen sind? ←
- 👍 ...

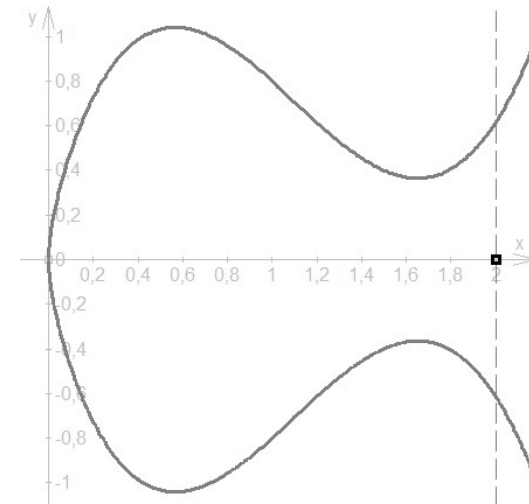
(1) Akute Motivation für mein Vortragsthema

Feind?

Schüler in deutschen Schulen lernen nun spätestens seit dem PISA-Schock im Jahr 2003 fleißig Zuordnungen bei sogenannten Füllgraphen über **Muster**erkennung vorzunehmen: Welcher Graph gehört zum Füllgraphen der angegebenen Weinkaraffe?

$$[f(x) = \sqrt{x} + x(x^2 + 3.2x + 2)]$$

Intensive Bemühungen unsere Schüler beim Abtesten der Beherrschung dieser Aufgabentypen besser abschneiden zu lassen, haben zu einer unerwarteten Aufwertung dieses **nicht authentischen** und realitätsfernen **sehr speziellen** Beispiels geführt.



Ja, aber ...

KAENDERS & WEISS-PIDSDRYGACH 2015

Realitätsnahe Alternative: Skala anbringen? Wer will das schon?

(1) Akute Motivation für mein Vortragsthema

Schulmathematik

Elementar-
mathematik

von

höheren

Standpunkten

Höhere Mathematik

Mathematik im Beruf:
Ingenieure,
Wirtschaftler,
Handwerker,
...

Intersubjektives:

Epistemologie, Semiotik

Subjektives:

Kognitionstheorie

Mathematik im Alltag

Wissenschaftlich unterrichten kann nur heißen, den Menschen dahin bringen, daß er wissenschaftlich denkt, keineswegs aber ihm von Anfang an mit einer kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik ins Gesicht springen. (KLEIN 1909)

(2a) Didaktische Begleittheorien I: Authentie

Der Terminus ‚authentische Aufgaben‘ wird heute in der Didaktik vielfach [...] benutzt. Gern taucht er insbesondere auch in Explikationen konstruktivistischer Lerntheorien auf, wo wir Halbsätze finden wie: „... wird besonders durch authentische Aufgaben befördert“. Nähere Erläuterungen, was nun authentische Aufgaben sind, habe ich dagegen in der Literatur kaum gefunden, eher Beispiele, die offensichtlich als gut oder als gelungen empfunden werden.

(JAHNKE 2005, 3)

Das Formulieren einer Aufgabe in noch so authentischem Kontext und ihr Einsatz im Schulunterricht sprengt die Authentie. Vermutlich ist es sogar so, dass die schulische Rahmung von Mathematikaufgaben deren bemühte Authentizität zwangsläufig zerstört.

(JAHNKE 2005, 10)

(2a) Authentie und Beziehungshaltigkeit

Will man zusammenhängende Mathematik unterrichten, so muß man in erster Linie die Zusammenhänge nicht direkt suchen; man muß sie längs der Ansatzpunkte verstehen, wo die Mathematik mit der erlebten Wirklichkeit des Lernenden verknüpft ist. Das – ich meine die Wirklichkeit – ist das Skelett, an das die Mathematik sich festsetzt, und wenn es erst scheinbar zusammenhanglose Elemente der Mathematik sein mögen, so erfordert es Zeit und Reifung, die Beziehungen zwischen ihnen zustande zu bringen. Den Mathematiker möge ein freischwebendes System der Mathematik interessieren – für den Nichtmathematiker sind die Beziehungen zur erlebten Wirklichkeit unvergleichlich wichtiger.

(FREUDENTHAL 1973, 77)






Spiral-
cur-
ri-
cu-
lum

(2a) Authentie

Wenn man die Bezeichnung authentisch für Mathematikaufgaben retten will, dann darf man sie nicht an die Realität oder authentische Kontexte binden, sondern muss sich mit der übertragenen Bedeutung ‚echt‘, ‚glaubwürdig‘, ‚zuverlässig‘ begnügen. Unter ‚echt‘ könnte man auch ‚in sich stimmig‘ verstehen, ob eine Aufgabe also nichts anderes will als sie zugibt.

(JAHNKE 2005, 12)

Eine Authentie, die sich

-  durch das Verhältnis zu den **Bildungszielen**,
-  die Qualität der angeregten **mathematischen Tätigkeiten**
-  und das entstehende **Bild von Mathematik** bestimmt,

ist (neben Offenheit und Differenzierungsvermögen) wichtiges Aufgabenmerkmal.






(vgl. BÜCHTER und LEUDERS 2005, 73 ff.)

(2b) Allgemeinbildender Geometrieunterricht

Aspekte des Geometrieunterrichts

– frei (vor und) nach HOLLAND:

Geometrie als

-  Möglichkeit zur Erschließung der eigenen Umwelt
-  Vorrat mathematischer „Muster und Strukturen“
(zur Beschreibung von allgemeiner Wirklichkeit)
-  Lehre vom Anschauungsraum
-  Spielfeld zum Problemlösen-Lernen
-  Grundlage wissenschaftlichen Arbeitens als exemplarisches Beispiel einer deduktiven Theorie – zumindest lokal ordnend argumentierend und kommunizierend

(2c-i) Ebenen und Übergänge

Ebenen und Übergänge

Person A		Person B	
Vorstellung A ↓	<i>EIS-Darstellung</i>		Vorstellung B ↓
	Konkretes <i>Objekt</i> und konkrete <i>Handlung</i>		
	Abbildendes (statisches oder dynamisches) <i>Zeichen</i>		
	<i>Symbol</i> (als Zeichen mit Spielregeln) und <i>Operation</i>		
„Gemeintes“	„Gesagtes“	„Gehörtes“	„Aufgefasstes“

Handlungen, Zeichen und Symbole sind didaktische Medien zur vernetzenden Beziehung von Lernenden mit dem Stoff.

(3) Beispiel 1: Füllgraphen

Systematisch spiralcurricular

Klassenstufe 5/6

Messen!!!!

enaktiv

portionsweises Füllen von konkreten Körpern

(Kegel, Zylinder – gleiches Volumen), Messen der Füllhöhe in Abhängigkeit vom Füllvolumen

ikonisch

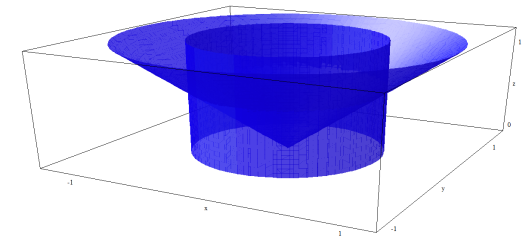
a) fotografieren der Füllstände

b) tabellieren der Werte (empirische Funktion, vgl. LIETZMANN 1926), graphische Darstellung als Säulen

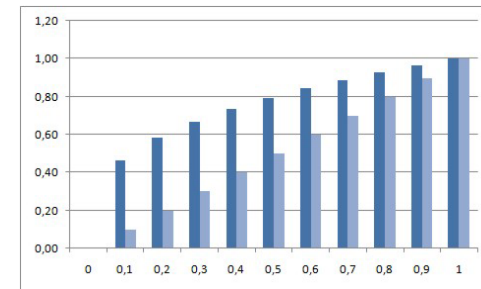
symbolisch

Vergleich der Füllvorgänge anhand der graphischen Darstellung (aber was passiert bei der 0?)
(L. 2013)

Raum und Form



Darstellen



Interpretieren

Funktionaler Zusammenhang

(M)ein Plädoyer für formale Bildung!

(2c-ii) Zeichen und Symbole

Eine epistemologische Unterscheidung von mathematischen Sprachformen

ikonisch

symbolisch

Wort

verbal-begriffliche Regeln (VB)

Bild

konstruktiv-geometrische Regeln (KG)

Formelzeichen

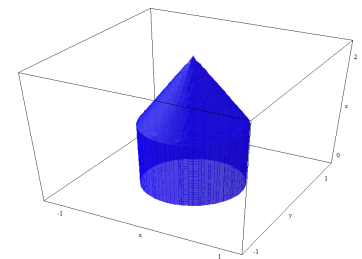
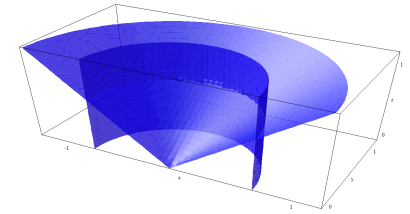
formal-algebraische Regeln (FA)

(3) Beispiel 1 - reloaded: Füllgraphen

Epistemologisch zu unterscheidende Symbole

Klassenstufe 7/8

- Interpolation (KG) der Messwerte zu einem kontinuierlichen Funktionsgraph dieser *empirischen Funktion* Fortsetzung des Graphen zur 0 hin (VB)
- Übergang vom Füllvolumen zur Füllzeit (VB)
- Proportionalität: Wie sieht der Graph zu einem „halben Zylinder“ bzw. „halben Kegel“ aus? (VB)
- Diskussion der Steigung und Krümmung des Graphen: Wann hat eine Flasche aus Zylinder und Kegel keinen Knick im Graphen? (KG & VB) – Vorbereitung Infinitesimalbegriff



(L. 2013)

Öffentliche Fehler bei Füllgraphen reflektieren

Alle Gefäße sind gleich hoch und fassen gleich viel Wasser.

a) Welcher Graph passt zu welchem Gefäß? Schreibe die Zahl des Gefäßes zum Graphen.



1



2



3

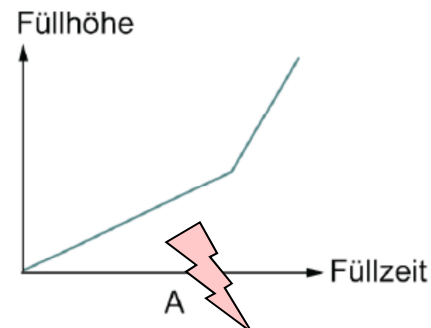


4

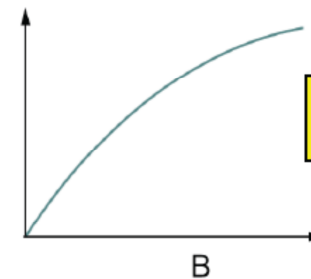


5

A gehört zu 4



B gehört zu 5



Fachfremd?

Steigungsverhältnis?

www.osrema.ch (download 25.02.13)

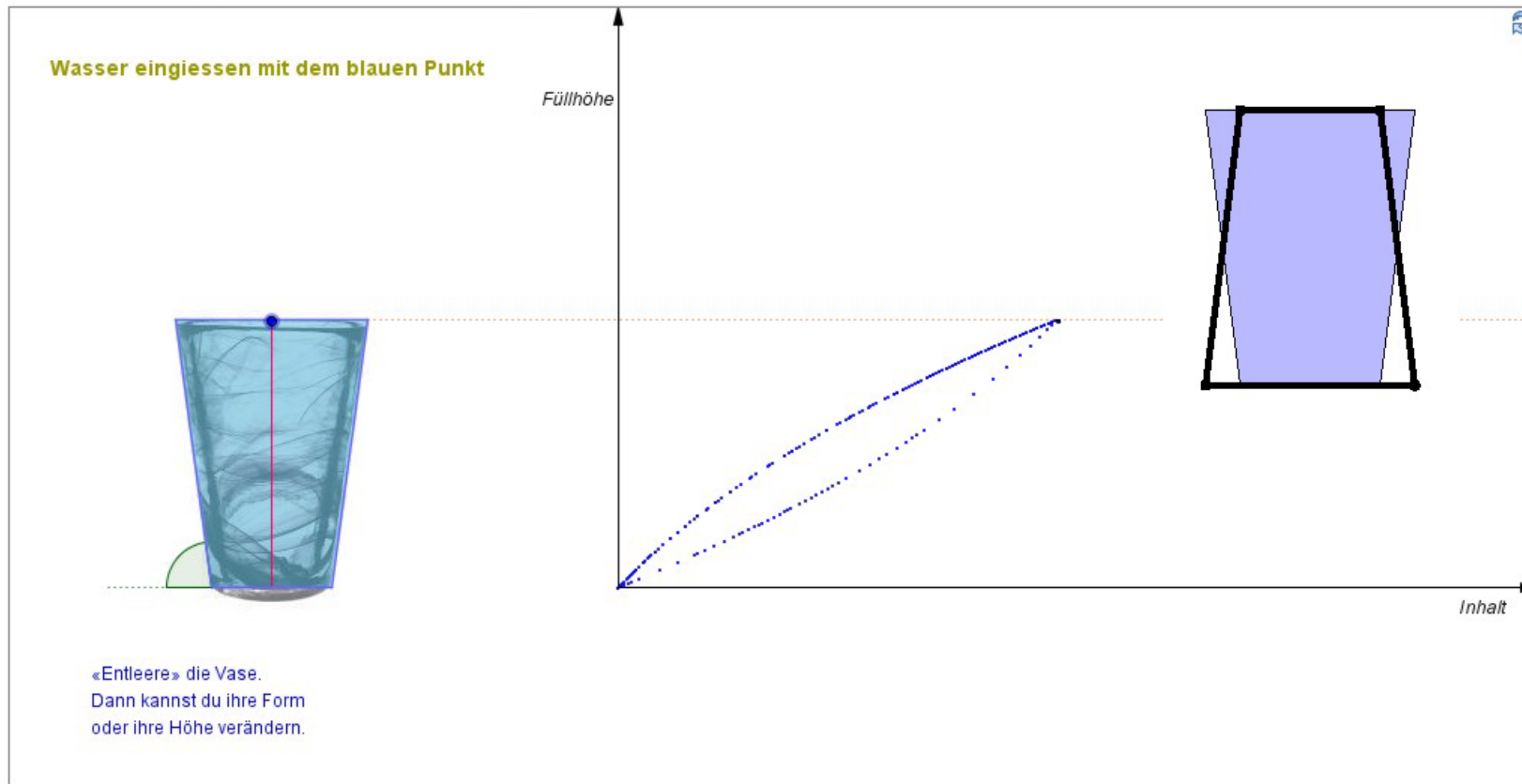
KG und VB Argumentationen klären hier.

(L. 2013)

Die Muster sind wirklich reichhaltiger als in den Tests.

Neue Medien und Werkzeuge helfen entdecken

Der Graf, der die Abhängigkeit der Füllhöhe vom Inhalt zeigt



z.B.
Trapez
auf dem
Kopf:
Wasser
ver-
drängt
Luft
(VB)

(L. 2013)

1. Beobachte den Verlauf des Grafen.

Geogebra-datei:

www.phzh.ch/lehre/christian.rohrbach/mathematik2/fuellgraf.html (25.02.13)

(4) Didaktische Begleittheorien II

Muster und Strukturen? „Struktur“ bei BRUNER?

Um die Anwendbarkeit einer fundamentalen Idee beim “nicht-spezifischen Transfer” zu erkennen, muss der Schüler die „Struktur“ eines Themas kennen, denn „die Struktur eines Themas lernen, heißt lernen, wie die Dinge aufeinander bezogen sind“ (Bruner 1970, S. 22). Es blieb allerdings, trotz vieler blumiger Beschreibungen der Bezeichner „Fundamentale Ideen“ und „Struktur“, offen, welche Bedeutung BRUNER ihnen zuweist.

(Be-
griffe
und)
Be-
griffs-
netze?

(VON DER BANK 2015)

(4) Didaktische Begleittheorien II

Gutworte?

Muster und Strukturen? Bei plus.mathe.org

"A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas." This much quoted line is from British mathematician G. H. Hardy's famous book, *A mathematician's apology*, written in 1940. And any mathematician, from the ancient Greeks to those working today, would agree.

Patterns and structures are fundamental to mathematics. They allow mathematicians to spot when something interesting is going on, to identify the core of a problem and to generalise from a specific example to a more general understanding.

(Thomas o.J., <https://plus.maths.org/content/patterns-and-structures>)

Mehr als
Gutworte?

(4) Didaktische Begleittheorien II

Muster und Strukturen? Nach den BS Primarstufe

Sie erfahren die Bedeutung der Mathematik für die kulturelle Entwicklung und erhalten einen Zugang zur Ästhetik mathematischer **Strukturen**. [...]

Mathematisches Handeln basiert auf dem Erkunden von Zusammenhängen, auf dem Entwickeln und Untersuchen von **Strukturen** sowie auf dem Streben nach Abstraktion und Verallgemeinerung. [...]

Durch das Erkennen von und das Reflektieren über innermathematische **Strukturen** können Schülerinnen und Schüler selbsttätig ihr Wissen über Regeln und Rechenstrategien entwickeln.

http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_gs_mathe_nib.pdf (S. 7ff)

(4) Didaktische Begleittheorien II

Muster und Strukturen? Nach den BS Primarstufe

Im Kompetenzbereich Raum und Form

<p>Geometrische Abbildungen</p>	<ul style="list-style-type: none"> • erkennen einfache symmetrische Muster und setzen sie fort. • untersuchen Figuren auf Achsensymmetrie und stellen einfache achsensymmetrische Figuren her. • finden und beschreiben in der Umwelt geometrische Figuren und Muster. 	<ul style="list-style-type: none"> - einfache symmetrische Figuren herstellen? - in symmetrische Figuren eine Spiegelachse kennzeichnen? - Symmetrieachsen in verschiedenen Lagen kennzeichnen? 	<ul style="list-style-type: none"> • entwickeln symmetrische Muster selbst und setzen Muster fort. • entdecken und beschreiben Eigenschaften der Achsensymmetrie. • untersuchen Figuren auf Achsensymmetrie, bestimmen die Anzahl ihrer Symmetrieachsen und stellen achsensymmetrische Figuren her. • bilden ebene Figuren in Gitternetzen ab (verkleinern und vergrößern). 	<ul style="list-style-type: none"> - im Gitternetz Figuren an einer Achse spiegeln? - mehrere Symmetrieachsen in regelmäßigen Figuren (z. B. Quadrate, Sterne) erkennen? - über die Funktionalität von Symmetrie in der Umwelt reflektieren?
--	---	--	---	---

http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_gs_mathe_nib.pdf (S. 28)

(4) Didaktische Begleittheorien II

Muster und Strukturen? Bei Freudenthal

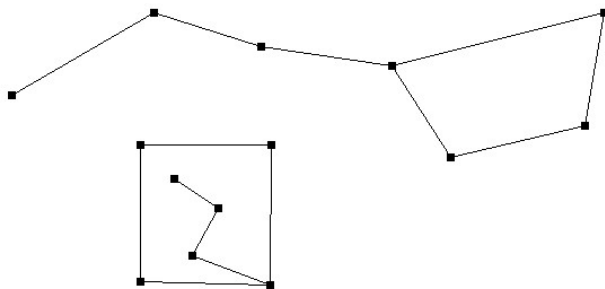
Wo endet
„Muster“ und
wo beginnt
„Struktur“?

Our mathematical **concepts, structures, ideas** have been invented as tools to organize the phenomena of the physical, social and mental world.

(FREUDENTHAL 1983, ix)

Wherever **sets** in advanced mathematics are not an aim in themselves, they fulfill various tasks. For instance, they **serve as substrata for structures** – a metric space, a group, a category is a set with a number of properties.

(FREUDENTHAL 1983, 34)



Without much ado I used the word “structure” many times. **I will explain it now more systematically.** [...] It represents a structure, a graph of seven nodes and seven connecting lines.

(FREUDENTHAL 1983, 210)

Die betrachteten Eigenschaften bestimmen die Struktur.

(Begriffe und)
Begriffsnetze?

Muster und Strukturen erahnen, erkunden, erblicken, erkennen, erfassen und erklären

Phänomen Spiegelung: Geeignete Fragesituationen

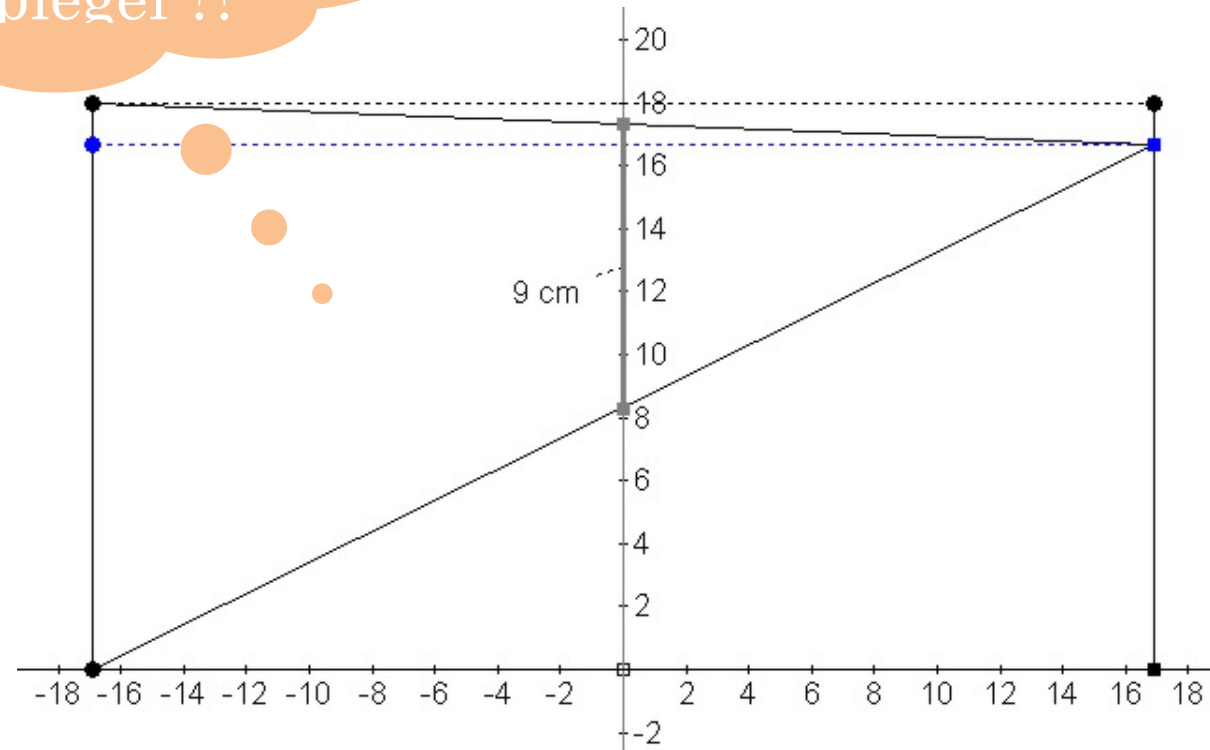
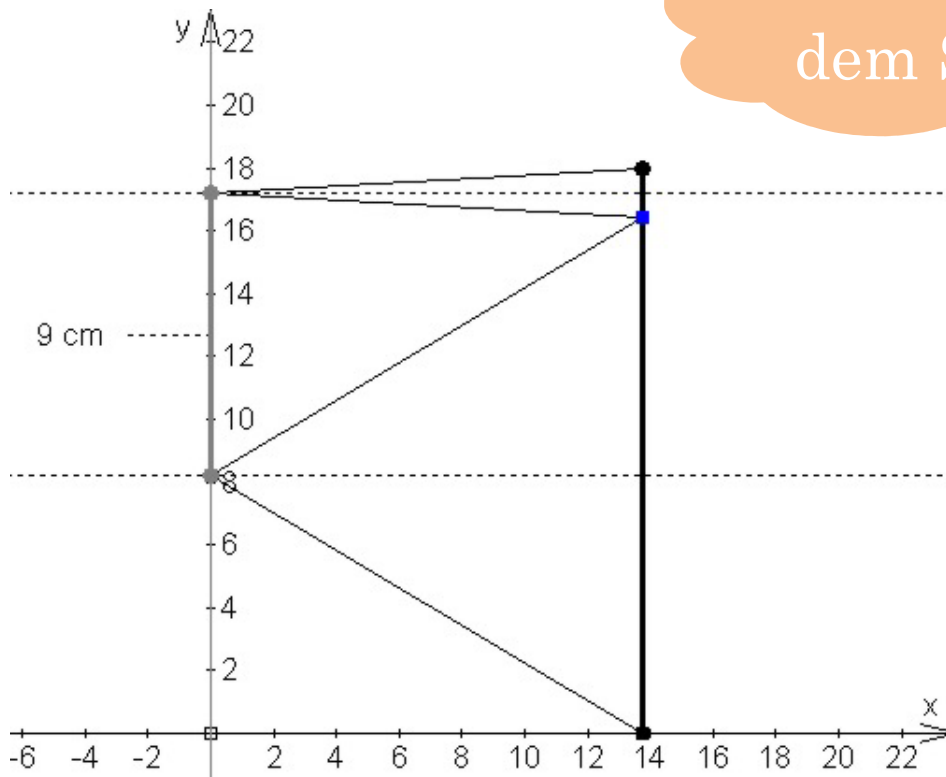
- *Wie groß muss ein (ebener) Spiegel sein, in dem Du Dich selber ganz sehen kannst? Spielt der Abstand zum Spiegel dabei eine Rolle?*
- *Wie müssen in einer Umkleide Spiegel positioniert werden, damit Du Dich von hinten sehen kannst?*
- *Warum winkt Dein Spiegelbild mit der rechten Hand, wenn Du mit der linken winkst?*
- *Warum erscheint Dein Kopf auf dem Kopf, wenn Du in einen blanken Löffel schaust?*



Zwei unterschiedliche(?) Modelle – aber woher?

„Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“ und „Spiegelpunkte“

Welt hinter
dem Spiegel ?!



Extramathematische Sichten

'Spieglein, Spieglein an der Wand, wer ist die Schönste im ganzen Land?' so antwortete der Spiegel: 'Frau Königin, Ihr seid die Schönste im Land.' Da war sie zufrieden, denn **sie wußte, daß der Spiegel die Wahrheit sagte.**

(gutenberg.spiegel.de, 01.05.07; Abb: www.fln.vcu.edu, 01.05.07)



[...] You can just see a little *peep* of the passage in the Looking-glass house, if you leave the door of our drawing-room wide open and it's very like our passage as far as you can see, only **you know it may be quite different on beyond.**

(CARROLL 1865)





Experimentell von Phänomenen zu Begriffen



Erahnen(?) und Erblicken

-  Phänomen in Situation wahrnehmen
-  Aufmerksamkeit fokussieren

Erkunden und Erkennen

-  Situation systematisch durchspielen und reduzieren
-  Begriffe und Zusammenhänge (d. h. Muster?) aufdecken

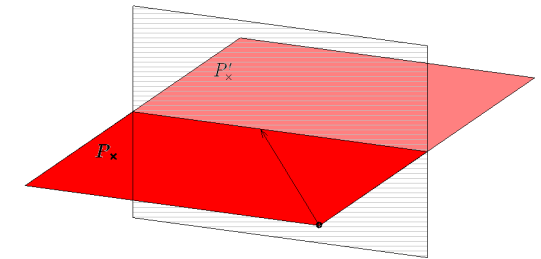
Erfassen und Erklären

-  Begriffe und Zusammenhänge (d. h. ggf. Strukturen?) mathematisch beschreiben
-  Vorhersagen machen.

Reduktion: Spiegelte nur *einen Punkt!*

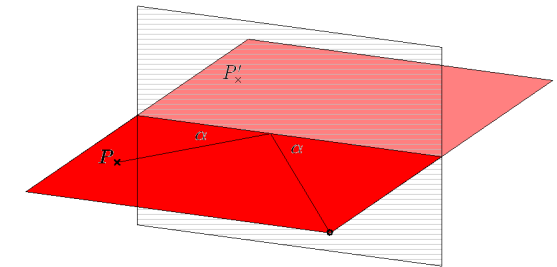
Ein erstes Experiment zur Erkundung des Phänomens:

Zeichne auf ein DIN A4-Blatt einen Punkt P und halte dieses Blatt vor einen Spiegel (der ja die Wahrheit sagt!), so dass eine Blattkante am Spiegel anliegt und das Blatt mit seinem Spiegelbild in einer Ebene liegt.



Visier den Spiegelpunkt über eine Ecke des Blattes an und zeichne die Fluchtlinie.

Zeichne nun noch die Verbindungsstrecke von P zum Ende der Fluchtstrecke am Spiegel auf das Blatt.



„Einfalls- gleich Ausfallswinkel“
ist offensichtlich eine passende Begrifflichkeit!

Reduktion: Spiegelungen nur *einen Punkt*!

Noch ein Experiment

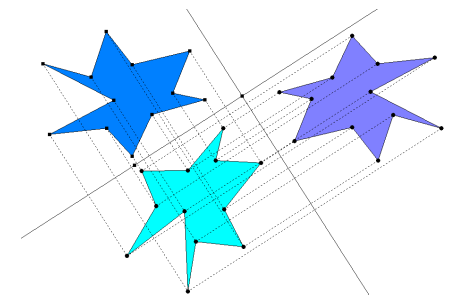
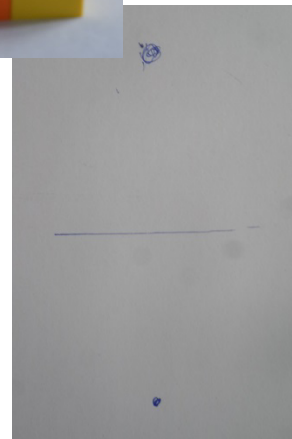
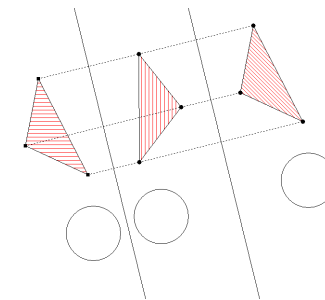
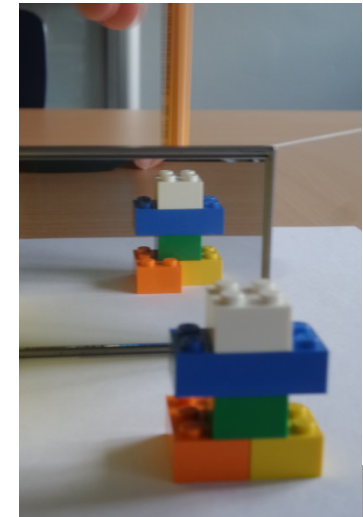
zur Erkundung des Phänomens:

„Punkt und Spiegelpunkt (bzgl. einer Achse)“
ist offensichtlich auch eine passende Begrifflichkeit!

Und kann darüber hinaus durch authentisches
innermathematisches Weiterspielen leicht
zu (propädeutischer?) Struktur führen!

Die Verkettung zweier *Achsenpiegelungen*

- an zueinander parallelen Geraden ergibt eine Verschiebung und jede Verschiebung ist so darstellbar
- an sich schneidenden Geraden ergibt eine Drehung um den Schnittpunkt und jede Drehung ist so darstellbar
- an aufeinander senkrecht stehenden Geraden ergibt eine **Punktspiegelung** und jede Punktspiegelung ist so darstellbar



Am Anfang steht die Achsenspiegelung?

– Mathematik als induzierte Struktur

- Als wesentlich für die Untersuchung von Spiegelungen (in der Ebene) stellen sich Achsenspiegelungen heraus.
- Diese sind spezielle längentreue und bijektive Abbildungen (→ Kongruenzabbildungen) der Ebene in sich. Auch Drehungen und Verschiebungen haben diese Eigenschaften, zentrische Streckungen dagegen nicht.
- Die Menge aller Kongruenzabbildungen hat ein **(Meta-)Muster(?)**, das sich mathematisch untersuchen lässt: Sie bildet bezüglich der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe – ihre **Struktur!**:
Sie ist algebraisch abgeschlossen, assoziativ, es existieren Umkehrabbildungen und ein neutrales Element (die identische Abbildung id , die jeden Punkt sich selbst zuordnet).

(6) Auslassungen:



Kognitive Präferenzen:
prädikativ vs. funktional



Modellbildung und Situierung



Symmetrie oder Achsenspiegelung
– Henne oder Ei?



...



...