

# Kurven und Tiefe

Dörte Haftendorn, Vortrag im Ak Geometrie, Saarbrücken 2017, Vorversion

**Vorbemerkungen** Das Thema **Kurven** ist wunderbar reichhaltig, aber nicht nur wegen der schönen Bilder und vielfältigen Formen. In besonderem Maße reicht es auch „tief“ in die Mathematik, ermöglicht so viele mathematische Überlegungen, Betrachtungen, Beweise, Rechnungen und Kreuz-und-quer-Bezüge, dass kein Ende abzusehen ist. Mir kommt es so vor, als öffne man im Haus der Mathematik ein Fenster, blicke in einen barocken Garten mit einer Antikensammlung und vielerlei Beeten, auf denen Blumen mit illustren Namen gedeien. Von jedem Beet führt mindestens ein Pfad in den freien „englischen“ Mathematik-Landschaftsgarten, in dem es zu jeder bekannten Blumenfamilie offenere Definitionen (Biologen sagen eher Züchtungen) gibt, die viele Überraschungen und allerlei unvermutete Verwandtschaften bieten.

Dieses „Wunder“ ist mir erst so richtig zum Bewusstsein gekommen, als ich an dem Buch „Kurven erkunden und verstehen“ gearbeitet habe, das Ende 2016 bei Springer erschien. Wie der Titel sagt, ging es um **Erkunden** der Vielfalt in eigener Regie und das **Verstehen** der Zusammenhänge unter Einsatz von mathematischem Ideenreichtum und Handwerk.

Der didaktische Aspekt, mathematisch angemessenes Vorgehen überhaupt maßgeblich weiter zu entwickeln und dabei ein passendes Tool, z.B. GeoGebra zu nutzen, durchzieht das ganze Buch. Für diesen Vortrag im Arbeitskreis lege ich den Fokus auf die bipolaren Kurven. Sie bieten auch Gelegenheit, das vertiefte Verstehen durch die Nutzung zweier Grafikfenster zu unterstützen. Einen „sanften“ Zugang bieten das Buch im Abschnitt 4.3, den ich hier aber umgestalte zugunsten eines strafferen Vorgehens für die Experten.

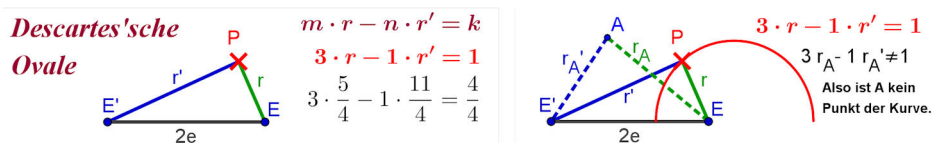
**Die zeitökonomische Vorversion dieses Aufsatzes** Gestatten Sie mir, einige Teile wörtlich aus dem Buch in diese Vorversion zu setzen. In der Endversion werde ich die Formulierungen dann – auch abhängig von der Vortragsdiskussion – anders wählen. Auf der zum Buch gehörigen Website

<http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de> sind in Kap. 4 Abschnitt 4.3 sämtliche Bilder mit zugehörigen \*.ggb und \*.nb Dateien und die Aufgabenlösung zu Aufgabe 4.4 als \*.pdf-Datei zum Herunterladen verfügbar.

In der Barockzeit war die Beschäftigung mit Kurven beliebt. In der Architektur wird die antike Strenge der Renaissance in Bögen, geschwungenen Formen und elliptischen Fenstern aufgelöst. Das ganze Kapitel Abschnitt 4 habe ich den barocken Kurven gewidmet. Jedesmal aber führen uns naheliegender erweiterte Definitionen zu unseren heutigen Möglichkeiten und Freiheiten. So geht es auch bei den bipolaren Kurven. Als Einstimmung dienen die **Ovale von Descartes**:

## Definition 4.1 (Bipolare Kurven)

Gegeben seien **zwei Pole**, oft auch **Brennpunkte** genannt,  $E$  und  $E'$  im Abstand  $\overline{EE'} = 2e$ . Jeder Punkt der Ebene hat von  $E$  einen Abstand  $r$



**Abb. 4.5** Bei **bipolaren Kurven** müssen die Abstände eines Punktes von zwei festen Punkten eine vorgegebene Gleichung erfüllen. Bei den **Descartes'schen Ovalen** ist es eine lineare Gleichung. Für das Bild ist  $m = 3$ ,  $n = 1$ ,  $k = 1$  gewählt. a) P erfüllt mit  $r = \frac{5}{4}$  und  $r' = \frac{11}{4}$  die Gleichung. b) Die rote Kurve besteht aus genau den Punkten (der oberen Halbebene), deren Abstände die rot geschriebene Gleichung erfüllen. Sie ist das durch diese Gleichung beschriebene Descartes'sche Oval.

und von  $E'$  einen Abstand  $r'$ . Jede Gleichung mit  $r$  und  $r'$  definiert eine **bipolare Kurve** als Menge aller Punkte, die die Gleichung erfüllen.

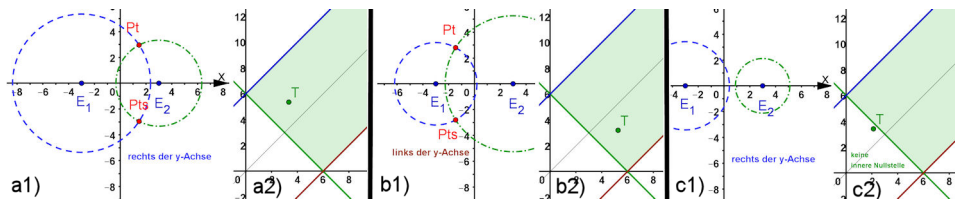
Gleichung	Name der Kurven	Bedingung, Anmerkung
$r + r' = 2a$	Ellipsen	$0 \leq e \leq a$ , es gilt $e^2 + b^2 = a^2$
$r - r' = \pm 2a$	Hyperbeln	$0 \leq a \leq e$ , es gilt $a^2 + b^2 = e^2$
$m r \pm n r' = k$	Descartes'sche Ovale	
$r \cdot r' = k^2$	Cassini'sche Kurven	
$r \cdot r' = e^2$	Bernoulli'sche Lemniskaten	$e = \frac{1}{2} \overline{EE'}$

Diese allgemeine Definition bietet nicht nur einigen bekannten Kurven ein gemeinsames Dach, sondern ermöglicht auch eigene Erfindungen. Auch sie wird – ebenso wie die allgemeinen Definitionen von Strophoide und Cissoide – von Lockwood in seinem Buch „Kurven“ (1960) gegeben. Mit GeoGebra und anderen Computerwerkzeugen für Mathematik können wir in erheblich einfacherer Weise, als es Lockwood möglich war, ausprobieren, was sich für selbst gewählte Gleichungen für  $r$  und  $r'$  ergibt.

**Konstruktionsbedingungen und ihre Visualisierung** Nicht alle Paare  $(r, r')$ , die die Gleichung erfüllen, ergeben einen Punkt der bipolaren Kurve. Es müssen nämlich  $r$ ,  $r'$  und  $2e$  **alle positiv** sein und ein Dreieck bilden, d. h. die Summe zweier Seiten muss größer sein als die dritte Seite.

**Dreiecksbedingung**, Grenzfälle eingeschlossen:

$$2e \leq r + r' \quad -2e \leq r - r' \quad r - r' \leq 2e \quad (4.1)$$



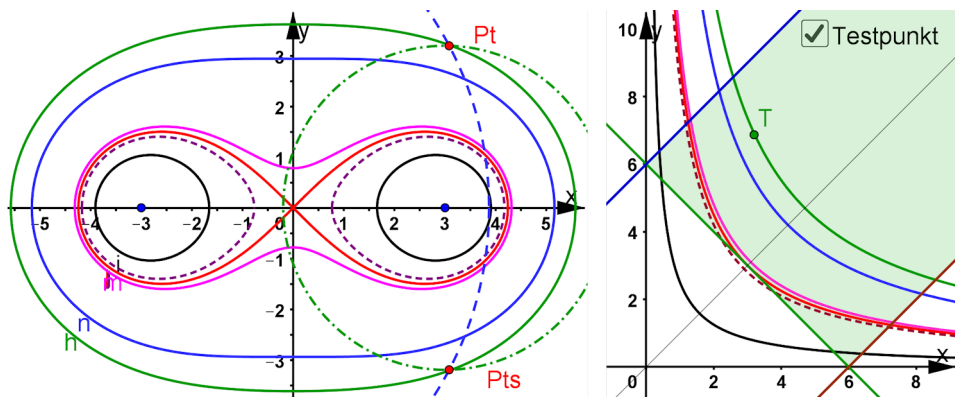
**Abb. 4.6 Gültigkeitsbereich für Bipolare Kurven** In den Darstellungen a), b) und c) ist jeweils im 2. Grafikfenster ein freier Testpunkt  $T = (r, r')$  gezeigt. Im 1. Grafikfenster sind die Pole  $E_1 = (-e, 0)$  und  $E_2 = (e, 0)$  und Kreise mit den Radien  $r'$  (blau gestrichelt) und  $r$  (grün, Strichpunkte) zu sehen. Diese Kreise haben außerhalb des grün hinterlegten Bereiches keinen gemeinsamen (reellen) Punkt. Gültig ist also nur der Durchschnitt der Halbebenen  $-x + y \leq e$  (oben blau begrenzt),  $x - y \leq 2e$  (unten braun begrenzt) und  $x + y \leq 2e$  (links grün begrenzt). Beim Bewegen von  $T$  wird angezeigt, ob die Schnittpunkte der Kreise links oder rechts von der  $y$ -Achse liegen. Liegt  $T$  auf einer Bereichsgrenze, berühren sich die Kreise auf der  $x$ -Achse. Bei der unteren (grünen) Grenze ist dieser Punkt zwischen den Polen.

### 4.3.1 Cassini'sche Kurven konkret

#### Definition 4.2 (Cassini'sche Kurven)

Eine **Cassini'sche Kurve** ist die Ortslinie aller Punkte  $P$ , die von zwei festen Punkten  $E$  und  $E'$  ein konstantes **Abstandsprodukt** haben. Es gilt also für die Abstände  $r$  und  $r'$  von  $E$  bzw.  $E'$ :  $r \cdot r' = k^2$  mit einer reellen Zahl  $k$ .

**Definierende Relation, Gültigkeitsbereich und Cassini'sche Kurven** Im Buch ist ein phänomenologischer Zugang gewählt und auch einiges zu Cassini gesagt und berechnet. Cassini (um 1700) glaubte nämlich, die Planetenbahnen seien diese, nun nach ihm benannten Kurven. Auch die Gleichung ist hergeleitet. Die definierende Relation ist eine



**Abb. 4.7 Cassini'sche Kurven** mit Gültigkeitsbereich, die Eigenschaften der Cassini'schen Kurven sind durch die gekoppelte Darstellung leicht zu sehen.

zur Geraden  $y = x$ , also  $r' = r$ , symmetrische Hyperbel. Daher sind alle Cassini'schen Kurven symmetrisch zur y-Achse.

Für genau für  $k = e$  ist der Ursprung auf der Kurve, denn die Hyperbel berührt die grüne Bereichsgrenze. Es handelt sich dann um eine Lemniskate. Dass es die Bernoulli'sche Lemniskate ist, wird in der Aufgabe 4.4 gezeigt werden. Für  $k < e$  wird diese Bereichsgrenze **immer** geschnitten, und zwar ist dann  $r = e \pm \sqrt{e^2 - k^2}$ . Die beiden Ovale der Cassini'schen Kurve rücken vom Ursprung ab. Nach „Sicht“ schrumpfen sie in den Brennpunkten zusammen. Aber die Brennpunkte werden nicht erreicht.

Für  $k > e$  gibt **immer** es genau zwei Nullstellen des zugehörigen Ovals. Da die größte Krümmung der definierenden Hyperbel beim nach-außen-Rücken immer kleiner wird, wird der Bereich *fast* gerade geschnitten. Eine Gerade  $r' + r = \text{const}$  im Gültigkeitsbereich erzeugt (siehe auch Aufgabe 4.4 Top 2) kartesisch eine Ellipse. Ist also  $e \ll k$ , werden die Cassini'schen Ovale einem Kreis immer ähnlicher.

### 4.3.2 Bipolare Kurven mit beliebigen Gleichungen für $r$ und $r'$

#### Aufgabe 4.4 Weitere bipolare Kurven

Am besten denken Sie sich selbst Gleichungen aus oder variieren das Bisherige. Einige Anregungen:

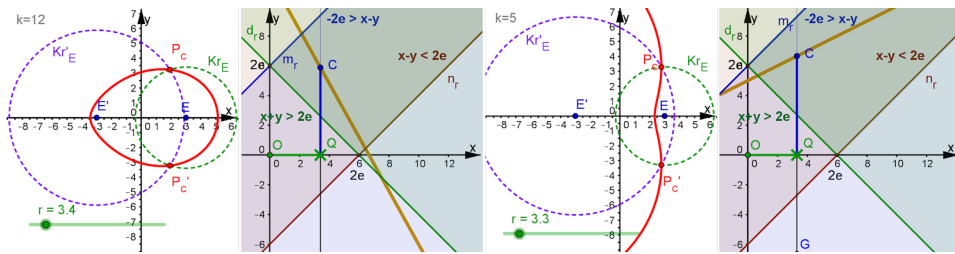
1. Sehen Sie sich wirklich die Bewegungen von  $P$  und  $P'$  bei Variation von  $Q$  in den Dateien zu den gezeigten bipolaren Kurven in gekoppelter Darstellung an.
2. Untersuchen Sie die **Descartes'schen Ovale** aus der Definition 4.3 S. 100 in der gekoppelten Darstellung. Welche Typen gibt es?
3. Was wird aus  $r' = 0.2 \tan(r) + r$ ? Der **Tangens** schneidet den fraglichen Bereich ja unendlich oft. Der Summand  $r$  bewirkt, dass die typische S-Welle des Tangens im Gültigkeitsbereich bleibt.
4. Was wird aus  $r' = 5.5 \sin(r) + r$ ?
5. Experimentieren Sie mit **Parabeln**.

#### Hinweis

Sie brauchen nur in den GeoGebra-Dateien den Eintrag für die Kurvengleichung zu ändern. Geben Sie Funktionen mit  $y = \text{term}(x)$  ein oder nehmen Sie für Funktionen eine andere Datei als für Gleichungen. Achten Sie darauf, dass Ihre Kurve im erlaubten Bereich auch wirklich Punkte hat. ◀

**Lösung: Zu 1.:** Fügen Sie einen freien Testpunkt  $T = (r, r')$  im rechten Fenster mit seinen Kreisen und deren Schnittpunkten in der kartesischen Darstellung im linken Fenster ein. Sehen Sie sich an, welche Bedeutung die Ränder des Gültigkeitsbereiches haben. (Im Vortrag ist dieses oben schon dargestellt.) Wenn Ihnen die Datei zu Bild 4.19 (Buch) zu aufwändig ist, dann nehmen Sie die zu den Descartes'schen Ovalen in Top 2. Aber: **Beobachten können Sie nur selbst!**

**Zu 2.: Descartes'sche Kurven, Descartes'sche Ovale, auch etwas missverständlich „kartesische Ovale“ genannt,** erfüllen eine Gleichung der Bauart  $mr + nr' = k$ . Dabei gibt es zwei Brennpunkte  $E = (e, 0)$  und  $E' = (-e, 0)$  im Abstand  $2e$ . Diese Festlegungen der Brennpunkte sind „o. B. d. A.“, sie schränken die Allgemeinheit nicht ein, machen Sie sich das klar. Es erfüllen also  $r$  und  $r'$  für jedes Descartes'sche Oval eine lineare Gleichung. Damit ist schon klar, dass für  $m = 1$  und  $n = \pm 1$  Ellipsen und Hyperbeln mit  $k = \pm 2a$  spezielle solche Descartes'schen Kurven sind.



**Abb. 4.8 Aufgabe 4.4 Descartes'sche Ovale gekoppelt** Diese Darstellung ist hier bei Abb. 4.6 und im Buch auf Seite 105 in Abb. 4.19 und 4.20 erklärt. Sonstiges steht im Text.

Die lineare Gleichung erzeugt die ockerfarbene Gerade, die nur für Punkte in dem dunkelgrünen Bereich Kurvenpunkte erzeugt. Damit ergeben sich aus diesen Bildern zwei Typen: geschlossene eiförmige Kurven und geschlossene Kurven mit Delle. Letzteres sieht man hier nicht, aber die Gerade verlässt sicher weiter rechts den Gültigkeitsbereich, daher kann sie nicht bis ins Unendliche reichen.

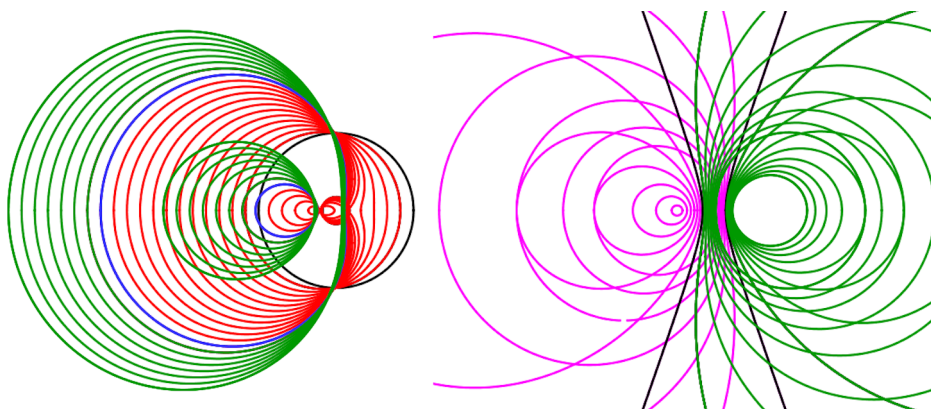
Betrachten wir aber den Fall, dass die Gerade die Steigung  $\frac{m}{n} = 1$  hat, so ergibt sich eine **Hyperbel**, wenn  $|\frac{k}{n}| < 2e$  ist. Bei **Ellipsen** ist dagegen die Steigung  $\frac{m}{n} = -1$  und es muss gelten  $\frac{k}{n} > 2e$ .

**Gleichung der Descartes'schen Ovale** Wenn man die Gleichung der Kurve aufstellen will, braucht man die beiden Kreise  $Kr_E : (x - e)^2 + y^2 = r^2$  und  $Ka_E : (x + e)^2 + y^2 = a^2$ , der Deutlichkeit halber ist  $a := r'$  geschrieben. Dazu tritt die Bedingung  $DES : mr + na = k$ . Wir denken später über die Minus-Fälle nach. Elimination von  $a$  und  $r$  ergibt mit Mathematica, wenn man etwas elegant sortiert: **Gleichung der Descartes'schen Ovale**

$$k^4 + (e^2(m^2 - n^2) - 2e(m^2 + n^2)x + (m^2 - n^2)(x^2 + y^2))^2 - k^2 (e^2(m^2 + n^2) - 2e(m^2 - n^2)x + (m^2 + n^2)(x^2 + y^2)) = 0$$

Mit Copy as plaintext kann man das in GeoGebra übernehmen, wobei man vorher!!!!  $e, k, m, n$  als Schieberegler definieren muss. Damit kann man weiter erkunden, wie die Abb. 4.9 (hier) zeigt.

Sieht man sich die Entstehung in der GeoGebra-Datei wirklich an, so entstehen für jeden Wert der „Laufvariablen“ ( also  $e$  links und  $m$  rechts, jeweils in 0.1-Schritten) stets **zwei Ovale** obwohl die definierende Bedingung eine Geradenrelation ist, die den Gültigkeitsbereich höchstens **einmal** queren kann.



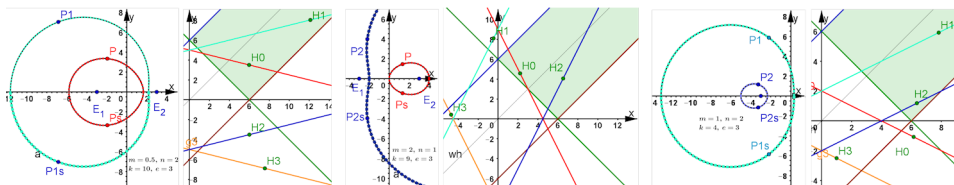
**Abb. 4.9 Aufgabe 4.4 Descartes'sche Ovale nach der Gleichung**

Linkes Bild:  $k = 2$ ,  $m = 0.7$ ,  $n = 1$  und  $e$  variiert von 0 (schwarz), dann rot, über  $e = 2.4$  (blau), dann grün bis  $e = 3.8$ .

Rechtes Bild:  $e = 3$ ,  $k = 2$ ,  $n = 1$  und  $m$  variiert von 0.1 bis 0.9 violett,  $m = 1$  schwarz und dann bis  $m = 1.8$  in grün.

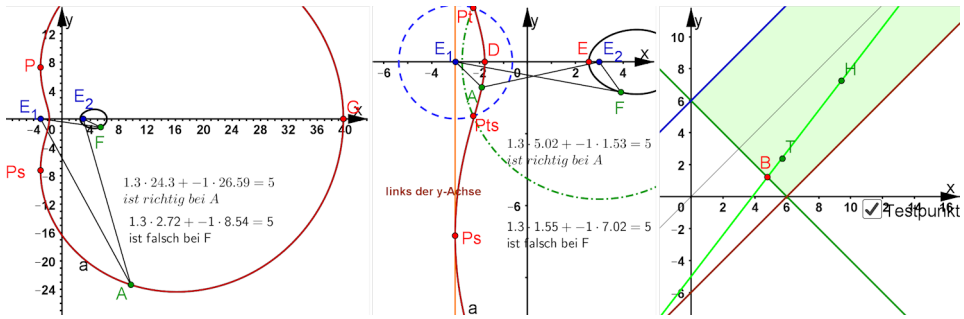
### Zusammenhang zwischen Descartes'schen Ovalen und den definierenden Geraden

Ein Blick auf die kartesische Gleichung zeigt, dass alle Parameter, außer  $e$ , ausschließlich quadratisch vorkommen. Daher kann man sich für die Gleichungsvariation auf positive Werte beschränken. Geometrisch aber ergeben sich vier Gleichungstypen, von denen stets höchstens zwei eine Kurve erzeugen und zwei ganz außerhalb des Gültigkeitsbereiches liegen. Abb. 4.10 zeigt das. Stellt man sich nun alle Parameter positiv vor, sind das die Geraden:  $g_0 : mr + nr' = k$ ,  $g_1 : -mr + nr' = k$ ,  $g_2 : mr - nr' = k$ ,  $g_3 : mr + nr' = -k$ .

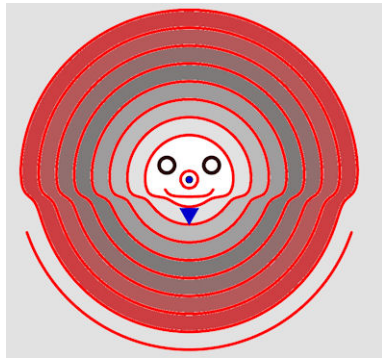


**Abb. 4.10 Descartes'sche Ovale und vier definierende Geraden**  $g_0$  ist rot,  $g_1$  ist türkis,  $g_2$  ist blau und  $g_3$  ist orange. Sie gehen geometrisch durch Spiegelungen auseinander hervor. I.d.R. treffen genau zwei von ihnen den Gültigkeitsbereich. Nur die zugehörigen zwei Ovale zeichnet auch die Gleichung, schwarz hinterlegt.

**Fragen an die Descartes'schen Ovale** Führt man die geometrische Ortsliniendefinition (rot) mit *einer* Geraden und die implizite Kurvengleichung (schwarz) in einer Datei zusammen, so wird ein schwarzes Oval von der Ortslinie nicht erfasst. Eine Idee zum Auffinden der Beule ist es, den Schnitt mit einer Geraden  $x = b$  zu rechnen und über die Diskriminanten die richtigen Stellen zu finden. Dies tut die Mathematica-Datei, die auf dem Website als `bipolar.nb` und zum Lesen als `*.pdf` verlinkt ist.

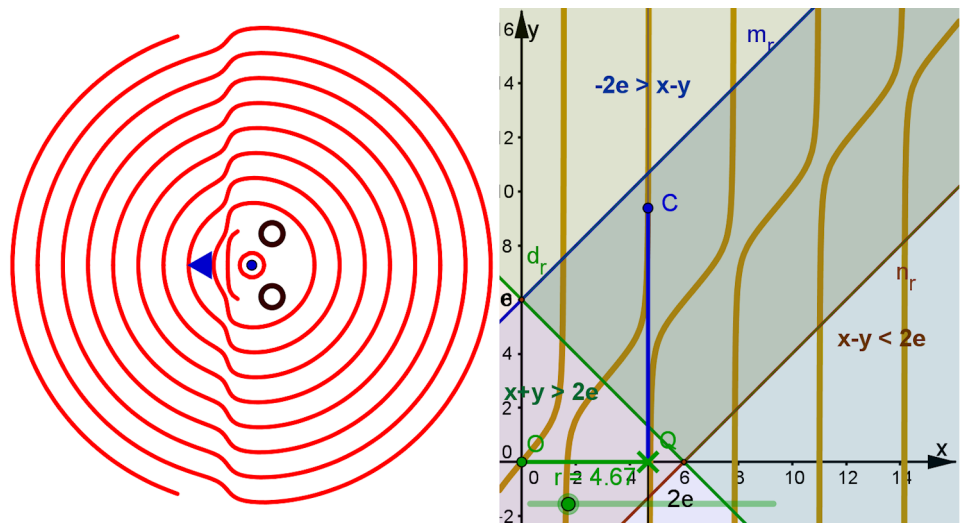


**Abb. 4.11 Fragen an Descartes'sche Ovale** Gezeichnet ist offenbar Gerade  $g_2$ . Welche Gerade hätte das andere Oval erzeugt? Wo genau ist der äußerste linke Punkt der Beule des Ovals für  $\{e, k, m, n\} = \{3, 5, 1.3, -1\}$ ?



**Abb. 4.12 Aufgabe 4.4 Top 3. „Grinsekatz“ Schräger Tangens** Die nachfolgende Idee aus Abb. 4.13 (hier im Sinne von Alice im Wunderland gestaltet. Diese Grinsekatz ist um  $90^\circ$  gedreht, das blaue Dreieck ist  $E'$ , in der Nase ist Punkt  $E$ . Die Augen sind die beiden Schnittpunkte der Kreis um  $E'$  und  $E$ , die zu den Radien  $r' = y(C)$  und  $r = x(C)$  des abgebildeten  $C$  gehören. Der rote Teil der Grinsekatz ist die beiden Ortslinien der „Augenpunkte“ bezüglich  $Q$ , das dir Bewegung von  $C$  steuert, hier durch Schieberegler  $r$  realisiert.  
**Fazit: Alle Gebiete und Linien entstehen durch Mathematik.**

Lediglich die farbigen Füllungen sind vom Malprogramm.



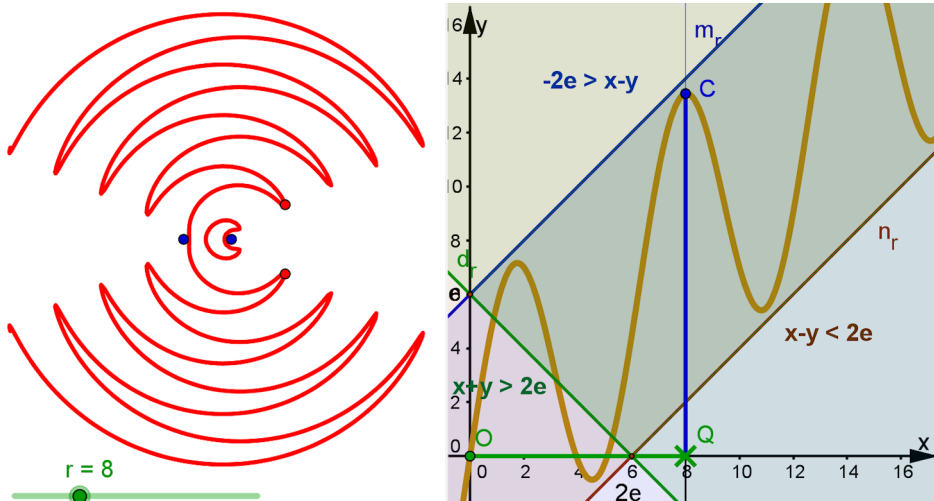
**Abb. 4.13 Aufgabe 4.4 Top 3. Schräger Tangens** Rechts sieht man, dass die Äste der Tangenskurve stets den Gültigkeitsstreifen verlassen. Daher besteht die Kurve nur aus „Inseln“. Der Strich, der wie ein Mund aussieht, ist ein **Artefakt**. Bei feiner Einstellung für  $r$  gehört er auch zu einer geschlossenen Kurve. Es gab auch keinen geometrischen Grund für die Enden des Striches.



**Zu 3.: „Grinsekatz“ und Schräger Tangens** Machen Sie sich klar: Erreicht  $C$  die blaue Gerade  $m_r$  (oben)  $-2e = x - y$ , so entsteht ein Punkt auf der x-Achse rechts vom rechten Brennpunkt  $E$ . Die untere Gerade  $n_r$  gehört zu Punkten  $(x_0, 0)$  mit  $x_0 < -2e$ , die grüne Gerade  $d_r$  gehört zu Punkten auf der x-Achse zwischen den Brennpunkten. So zeigt es auch Abb.+

Vergleichen Sie dies nochmals mit den Geraden parallel zu den Bereichskanten, die zu Ellipsen und Hyperbeln führen (siehe Text zu Top 2.).

**Zu 4.:Abb. 4.14 (hier)** Schräger Sinus



**Abb. 4.14** Aufgabe 4.4 Top 4. Schräger Sinus

Rechts sieht man, dass die Sinuskurve außen stets im Gültigkeitsstreifen bleibt, anfangs tritt sie noch einmal heraus. Daher hat die Kurve links innen eine kleine „Insel“, sonst ergibt sich eine zusammenhängende Kurve. Für kleine  $k$  verschwindet die Insel, für große  $k$  gibt es nur noch Inseln. Finden Sie selbst heraus, wann das eine bzw. das andere passiert.

**Zu 5.:** Wenn Sie die Parabeln als  $f(x) = k(x - m)^2 + n$  realisieren, können Sie auch hierfür die Hauptdatei dieser Aufgabe verwenden. Je nachdem wie oft Ihre Parabel den Gültigkeitsbereich schneidet bekommen Sie zwei ineinander liegende Inseln, Vanillekipferl, einzelne Übergangsformen, isoliert Punkte oder gar keine Kurve.