

Andreas Filler,
Matthias Ludwig,
Reinhard Oldenburg (Hrsg.)

Werkzeuge im Geometrieunterricht

Vorträge auf der 29. Herbsttagung des
Arbeitskreises Geometrie in der
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 10. bis 12. September 2010 in Marktbreit

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Information bibliographique de la Deutsche Nationalbibliothek

La Deutsche Nationalbibliothek a répertorié cette publication dans la Deutsche Nationalbibliografie; les données bibliographiques détaillées peuvent être consultées sur Internet à l'adresse <http://dnb.d-nb.de>.

Andreas Filler, Matthias Ludwig, Reinhard Oldenburg (Hrsg.)

Werkzeuge im Geometrieunterricht

Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10. bis 12. September 2010 in Marktbreit

ISBN 978-3-88120-587-0

© 2011 by Franzbecker, Hildesheim, Berlin

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere die der Vervielfältigung und Übertragung auch einzelner Textabschnitte, Bilder oder Zeichnungen vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Zustimmung des Verlages in irgendeiner Form reproduziert werden (Ausnahmen gem. 53, 54 URG). Das gilt sowohl für die Vervielfältigung durch Fotokopie oder irgendein anderes Verfahren als auch für die Übertragung auf Filme, Bänder, Platten, Transparente, Disketten und andere Medien.

© 2011 by Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin

Inhaltsverzeichnis

Editorial	1
Hans-Georg Weigand <i>Neue Werkzeuge – neues Denken!?</i> <i>Werkzeuge im Geometrieunterricht – Ziele und Visionen 2020</i>	3
Andreas Filler <i>Problemorientierte geometrische Aufgaben – mit oder ohne Computer? ..</i>	19
Michael Gieding <i>Ein Wiki für die Lehrveranstaltung „Einführung in die Geometrie“</i>	35
Olaf Knapp <i>Voraussetzungen für die Nutzung von DRGS im Unterricht</i>	53
Oliver Labs <i>Gleichungen in Bildern</i>	73
Ingmar Lehmann <i>Dreiecke im Dreieck</i> <i>Vermutungen und Entdeckungen – DGS als Wundertüte</i>	101
Swetlana Nordheimer <i>Geometrische Veranschaulichung und Bruchrechnung</i>	121
Markus Ruppert, Jan Wörler <i>Die Zukunft der Raumgeometrie liegt in Menschenhand – Raumgeometriesoftware und ihre Schnittstellen zum Menschen</i>	149
Jürgen Steinwandel, Matthias Ludwig <i>Die Suche nach der angemessenen Darbietung räumlicher Strukturen – Analyse von Präsentationsformen und Beschreibungsmodell der Körperkomplexität</i>	173
Hans Walser <i>Der Baustein ist das Werkzeug</i>	185

Inhaltsverzeichnis

Autorenverzeichnis.....	197
-------------------------	-----

Editorial

Andreas Filler, Matthias Ludwig, Reinhard Oldenburg

Liest man das Wort „Werkzeug“, mag man zunächst an Hilfsmittel oder „Mittel zum Zweck“ denken, bei Werkzeugen im Geometrieunterricht sicherlich vorrangig an Bleistift, Zirkel und Lineal sowie den Computer. Der vorliegende Tagungsband behandelt das Thema „Werkzeuge im Geometrieunterricht“ wesentlich umfassender; die einzelnen Beiträge gehen auf sehr unterschiedliche Facetten des Begriffs „Werkzeug“, bezogen auf die Mathematik und speziell die Geometrie, ein. Deutlich wird an diesen Facetten das dialektische Verhältnis von Werkzeugen und „Produkten“, wobei „Produkte“ des Geometrieunterrichts natürlich hauptsächlich (Er)Kenntnisse und Fähigkeiten sind. Geometrische Kenntnisse und Fähigkeiten können wiederum zu Werkzeugen (für die Geometrie selbst, für andere Bereiche der Mathematik oder natürlich auch für die Welt außerhalb der Mathematik) werden und somit der Gewinnung neuer (Er)Kenntnisse und Fähigkeiten dienen, welche sich ihrerseits eventuell wiederum in Werkzeuge verwandeln können und so weiter.

Der einführende Beitrag zu diesem Band basiert auf dem von *Hans-Georg Weigand* gehaltenen Hauptvortrag auf der Herbsttagung 2010 des Arbeitskreises Geometrie und gibt einen umfassenden Überblick über mathematische Werkzeuge, ihre historische Entwicklung und ihre verschiedenen Funktionen (nicht nur) für den Mathematikunterricht. Wesentliche Aspekte des Begriffs „Werkzeug“, die in dem einführenden Beitrag von Weigand diskutiert werden, finden sich dann anhand konkreter Beispiele in den folgenden Beiträgen wieder.

Im Mittelpunkt der Beiträge von *Swetlana Nordheimer* und von *Oliver Labs* steht der Werkzeugcharakter der Geometrie für Veranschaulichungen arithmetischer Inhalte (speziell der Bruchrechnung) bzw. von Sachverhalten der elementaren Algebra. Hierbei sind innermathematische Vernetzungen von besonderer Bedeutung, und es wird deutlich, dass die Nutzung der Geometrie als Werkzeug gleichzeitig zum Erwerb bzw. zur Vertiefung geometrischer Kenntnisse und Fähigkeiten beitragen kann.

Mit Konstruktions- und Visualisierungswerkzeugen für die Raumgeometrie befassen sich die Beiträge von *Olaf Knapp*, von *Jürgen Steinwandel* und

Matthias Ludwig sowie von *Markus Ruppert* und *Jan Wörler*; auch in dem schon erwähnten Beitrag von *Oliver Labs* treten Werkzeuge für raumgeometrische Veranschaulichungen auf. Während *Steinwandel/Ludwig* Vergleiche der Wirksamkeit klassischer und computergestützter Veranschaulichungen räumlicher Körper anstellen, analysiert *Knapp* dynamische Raumgeometrie-Software unter den Gesichtspunkten Ergonomie und Usability. Einen Überblick über weit in die Zukunft reichende Entwicklungen computerbasierter interaktiver Visualisierungs- und Konstruktionsumgebungen geben *Ruppert/Wörler*.

Der Einsatz dynamischer Geometriesoftware für die Lösung anspruchsvoller geometrischer Probleme wird in den Beiträgen von *Andreas Filler* und von *Ingmar Lehmann* thematisiert. Einerseits wird hierbei aufgezeigt, wie der Computer als „Werkzeug“ Schülern helfen kann, interessante geometrische Zusammenhänge zu entdecken, auf der anderen Seite wird diskutiert, ob die Verwendung des Computers die Herausbildung von Problemlösestrategien fördert oder eher behindert. Auf diese Frage ergeben sich anhand verschiedener Beispiele durchaus kontroverse Antworten.

Michael Gieding befasst sich in seinem Beitrag mit hochschuldidaktischen Fragen, konkret der Nutzung von Möglichkeiten des „Web 2.0“ für eine Lehrveranstaltung „Einführung in die Geometrie“. Er beschreibt, wie sich damit Diskussionsprozesse anregen lassen, die Studierende in stärkerem Maße dazu führen sollen, eigenständig zu Erkenntnissen zu gelangen.

Hans Walser schließlich verwendet einfache geometrische Formen wie Quadrate, gleichseitige Dreiecke und gleichschenklige Trapeze als „Werkzeuge“, um interessante, komplexere geometrische Formen aufzubauen. Ein Beispiel hierfür ist der auch auf dem Umschlag dieses Bandes abgebildete Fibonacci-Stern.

Zusammenfassend meinen wir, dass die Beiträge dieses Bandes vielfältige interessante Facetten von Werkzeugen im Geometrieunterricht sichtbar werden lassen. Es zeigt sich auch, dass die vielfältigen Aspekte dieser Thematik noch lange nicht ausdiskutiert sind und viele Fragen einer weiteren Vertiefung bedürfen, so dass sich der Arbeitskreis Geometrie auch zukünftig immer wieder dieses Themengebietes annehmen wird.

Neue Werkzeuge – neues Denken!?

Werkzeuge im Geometrieunterricht

– Ziele und Visionen 2020

Hans-Georg Weigand

Zusammenfassung. Werkzeuge spielten in der historischen Entwicklung der Mathematik eine wichtige Rolle. Ob Zirkel, Lineal, Ellipsenzirkel, Winkelmesser, Abakus, Rechenschieber, Rechenmaschine, Taschenrechner oder Computer, stets waren mit neuen Werkzeugen auch veränderte Arbeitsweisen und damit einhergehend auch neue Denkweisen verbunden. Mit neuen Werkzeugen war häufig auch die Hoffnung verbunden, mathematische Inhalte effizienter, anschaulicher und verständlicher vermitteln bzw. lehren und lernen zu können. Es sollen zunächst derartige Hoffnungen an einigen exemplarisch ausgewählten Werkzeugen rückblickend analysiert und bewertet werden. Dann soll der Frage nachgegangen werden, welche Bedeutung zukünftig – vor allem digitale – Werkzeuge für den Mathematikunterricht, für das Verständnis geometrischer (mathematischer) Inhalte, für das Lehren und Lernen und schließlich auch für die weitere Entwicklung der Geometrie- und Mathematikdidaktik haben können.

Zur Bedeutung von Werkzeugen

"Der Fortschritt der Menschheit dokumentiert sich in seinen Werkzeugen. Werkzeuge sind zum einen Ergebnis von Erkenntnissen, und zum anderen sind neue Erkenntnisse nicht ohne Werkzeuge möglich. Wir sagen oft, dass eine Zeit nicht reif gewesen sei für gewisse Einsichten; häufig müsste es aber heißen, dass die jeweilige Zeit nicht über geeignete Werkzeuge verfügte, um entsprechende Einsichten gewinnen zu können." (Claus 1990, S. 43)

In diesem Zitat des Informatikers Volker Claus wird eine Dualität deutlich, nämlich die Wechselbeziehung zwischen *Werkzeug* einerseits und *Erkenntnis, Einsicht und Fortschritt* andererseits. Im Folgenden wird diese Wechselbeziehung im Hinblick auf die Bedeutung mathematische Werkzeuge für das *Lehren und Lernen von Mathematik* hinterfragt. Es geht also um die *didaktische Bedeutung mathematischer Werkzeuge*.

Dabei gehen wir davon aus, dass der Computer die lange Kette der mathematischen Werkzeuge fortsetzt: Abakus, Ziffernsysteme, Rechenmaschine, Taschenrechner, und dass er das Lehren und Lernen mathematischer Denk- und Arbeitsweisen, die im Mathematikunterricht schon immer wichtig waren, wie strukturiertes Denken, modulares Denken, funktionales Denken, unterstützt und fördert.

Was sind mathematische Werkzeuge?

Ein Werkzeug ist für einen bestimmten Zweck konstruiert. Es verstärkt menschliche Fähigkeiten (wie Hammer, Zange oder Schaufel) oder verleiht dem Menschen neue Fähigkeiten (wie Fernglas, Mikroskop oder Flugzeug). Wir wollen dabei – basierend auf Hischer (2010) – zwischen Werkzeug und Hilfsmittel unterscheiden (auch wenn die Grenzen fließend sind): Werkzeuge sind „vielseitig und ergebnisoffen“ (ebd., S. 39), während Hilfsmittel für einen bestimmten enger ausgelegten Zweck konstruiert sind (wie etwa ein Korkenzieher).

Was sind mathematische Werkzeuge? Dazu gehören zunächst *gegenständliche Werkzeuge* wie Zirkel und Lineal, Geodreieck, Parabelzeichner, Taschenrechner und Computer. Der Werkzeugbegriff kann aber auch allgemeiner gesehen werden. Ein *Algorithmus* kann ein Werkzeug sein, etwa das Newtonverfahren bei der Berechnung einer Nullstelle, oder ein *mathematischer Satz*, wie der Zwischenwertsatz oder Mittelwertsatz, kann als Werkzeug zur Lösung einer Aufgabe herangezogen werden. Auch *Computerprogramme* können als Werkzeuge bezeichnet werden. So nennt etwa Stephan Kaufmann sein Buch über Mathematica: 'Mathematica als Werkzeug', für Henn u. Jock (1993) ist das Computerprogramm CABRI Géomètre ein "Werkzeug des Geistes im Dienste der Mathematik". Schließlich können auch *Schreibweisen* und *Notationen* als Werkzeuge für mathematisches Denken angesehen werden.

(Mathematische) Werkzeuge gibt es also sowohl auf der *gegenständlichen* oder *enaktiven Ebene* (Zirkel, Lineal, Parabelzirkel), der *Objektebene* (Sätze, Algorithmen), als auch auf der *symbolischen Ebene* (Schreibweisen, Notationen). „Reale“ Werkzeuge oder mathematische Instrumente sind zunächst auf der gegenständlichen Ebene vorhanden, sie erzeugen auf der symbolischen Ebene mathematische Objekte (etwa Kurven oder Zahlen), und ihnen liegt eine – technisch umgesetzte – mathematische Idee zugrunde, d. h. sie realisieren einen mathematischen Zusammenhang.

Also: Mathematisches Werkzeuge oder Instrumente

- dienen einem *Zweck*, nämlich dem Erzeugen oder Herstellen mathematischer Objekte, wie z. B. geometrische Kurven oder dem Berechnen bestimmter Zahlen, wie etwa dem größten gemeinsamen Teiler.
- bauen auf einer *mathematischen Idee* auf;

- haben eine *technische Idee* als Grundlage.

Ferner kann einem mathematischen Werkzeug eine

- eine didaktische Bedeutung zugeschrieben werden, indem mit ihnen Kenntnisse über die erzeugten Objekte und deren Eigenschaften vermittelt werden.

Der letzte Aspekt spricht die Bedeutung eines Werkzeugs als Medium, als Vermittler an: Mit Hilfe des Werkzeugs soll eine mathematische Idee, eine Gesetzmäßigkeit oder ein Zusammenhang von einem Lernenden erfasst und verstanden werden. Dafür hat sich in der internationalen Diskussion der Begriff „Semiotic Mediation“ eingebürgert, auf den hier aber nicht näher eingegangen werden kann (vgl. etwa Bartolini Bussi u. Mariotti 1999).

Werkzeug mechanische Rechenmaschine

„Es kommt in der Wissenschaft immer auf die Werkzeuge an Die treibende Kraft hinter den meisten wissenschaftlichen Revolutionen der neueren Zeit waren neue Instrumente, das gilt etwa für die Revolution der Doppelhelix in der Biologie oder die des Urknalls in der Astronomie.“

(Dyson 2000)



Diese Sichtweise eines Werkzeugs spiegelt sich in der Mathematik insbesondere in der Entwicklung von Computern wider, die – etwa bei Computerbeweisen wie dem „Vierfarbensatz“ oder heute im Bereich des wissenschaftlichen Rechnens – neue Erkenntnisse liefern.

Aber bereits die mechanische Rechenmaschine ist ein Beispiel für ein Werkzeug, das menschliche Fähigkeiten verstärkt, indem arithmetische Rechnungen schneller durchgeführt werden können. Rechenmaschinen haben aber auch eine didaktische Funktion, indem sie das algorithmische Rechnen bei Multiplikation, Division oder dem Wurzelziehen visualisieren. Deshalb war auch Felix Klein (1908) der Meinung:

„Vor allem aber sollte natürlich jeder Lehrer der Mathematik mit ihr vertraut sein.“ (S. 22)

Die Rechenmaschine ist ein Beispiel für die Doppelnatur von Werkzeugen im Mathematikunterricht. Zum einen ist sie ein „Rechenknecht“, der mechanische Berechnungen schnell ausführt, zum anderen ist sie aber auch ein Visualisierer arithmetischer Berechnungsverfahren.

Digitale Werkzeuge

Digitale Werkzeuge sind einerseits auf der gegenständlichen Ebene (Hardware) aber auch auf der mathematischen und symbolischen Ebene (Software) anzusiedeln. Bezüglich ihres Gebrauchs hat sich in den letzten Jahren die „Theorie der instrumentellen Entwicklung“ („instrumental genesis“ oder „instrumental orchestration“) herausgebildet (etwa Trouche 2005). Dabei wird die Frage untersucht, wie neue Technologien – insbesondere Taschencomputer – zu einem für eine bestimmte Problemlösung hilfreichen *Instrument* oder *Werkzeug* werden. Dazu ist es – nach dieser Theorie – insbesondere notwendig, dass eine Wechselbeziehung zwischen dem Gerät (oder Artefakt) und dem Benutzer entwickelt wird.

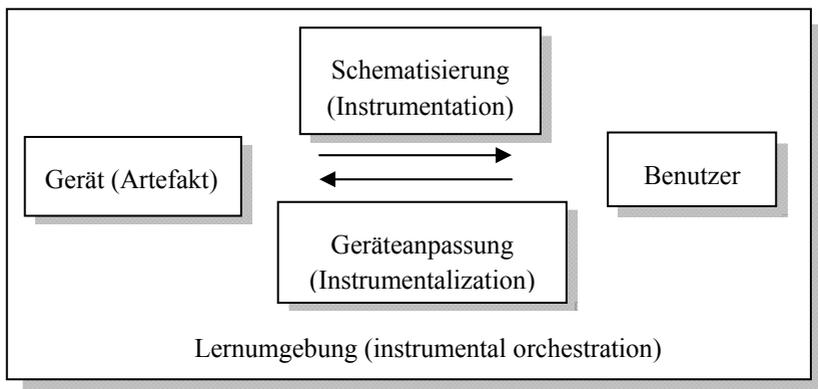


Abb. 1: Theorie der Instrumentellen Entwicklung (instrumental genesis)

Beim *Prozess der Schematisierung* (Instrumentation) werden beim Benutzer mentale Schemata oder Modelle über Möglichkeiten und Grenzen des Gerätes – in bestimmten Problemstellungen – entwickelt (z. B. über Menüstruktur, Syntax von Befehlen, Grenzen der internen Genauigkeit des Rechners

oder Bildschirmauflösung). Beim *Prozess der Geräteanpassung* (Instrumentalization) wird das Gerät der Tätigkeit des Benutzers angepasst (durch Veränderung von Menüs, Einrichten von Makros, Programmieren oder Definieren von Befehlen). In der *Entwicklung dieser instrumentellen Wechselbeziehung* (instrumental genesis) wird ein Gerät zu einem *Instrument* oder *Werkzeug*, mit dem sowohl technisches Wissen oder Bedienungswissen, als auch Wissen über seinen adäquaten Einsatz beim Benutzer einhergeht. Die zentrale Aufgabe besteht nun darin, die *Lernumgebung* oder die *instrumentelle Orchestrierung* zu entwickeln, in der diese Werkzeugentwicklung vor sich geht.

Erwartungen

Mit neuen Medien und Werkzeugen waren stets auch Erwartungen und Hoffnungen verbunden. So ist Thomas Alva Edison (1847-1931) nach der Erfindung des Tonfilms der Meinung:

„Der Film wird unser Erziehungssystem revolutionieren. In ein paar Jahren wird er weitgehend, wenn nicht sogar vollständig den Gebrauch von Büchern ersetzen.“
(1922)

In gleicher Weise meinte Arnold Schwarzenegger, Gouverneur von Kalifornien, am 9. Juni 2009

“Schulbücher sind veraltet ... und es gibt keinen Grund, warum unsere Schüler dazu gezwungen werden sollten, diese antiquierten, schweren und teuren Schulbücher herumzuschleppen.”

Solche Erwartungen waren auch mit mathematischen Werkzeugen verbunden. So wurde etwa zu Beginn des 20. Jahrhunderts die Einführung des Rechenschiebers in den Mathematikunterricht kontrovers diskutiert. In seinem Buch "Der Rechenstab im Unterricht aller Schularten" (München 1929) stellte Albert Rohrberg den besonderen pädagogischen Wert des Rechnens mit diesem Gerät heraus. Er wandte sich gegen die Behauptung, der Rechenschieber sei nur ein „Rechenknecht“ zur Mechanisierung der Rechenarbeit. Stattdessen sprach er von der Möglichkeit, dass der Rechenschieber gerade zum Gegenteil herausfordere, nämlich zu einer Vergeistigung des Rechenprozesses. Was damit gemeint war, kann jeder nachvollziehen, der während seiner Schul- und Ausbildungszeit bzw. beim praktischen Rechnen den Rechenschieber benutzt hat. Es geht um das unvermeid-

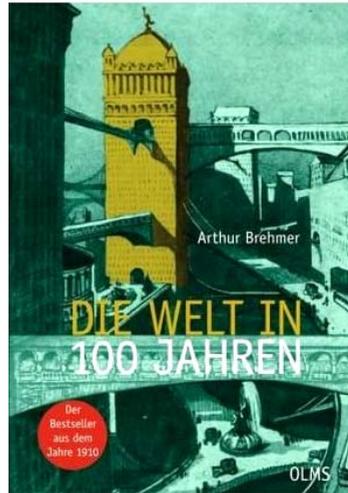
liche geistige Vorwegnehmen (Abschätzen) des Rechengangs, damit am Ende die Kommastelle richtig gesetzt werden kann.

In ähnlicher Weise wiederholte sich diese Kontroverse bei der Einführung des Taschenrechners.

Visionen

In einem 1910 herausgegebenen Buch hat Arthur Brehmer damals bedeutende Wissenschaftler aufgefordert, „Die Welt in 100 Jahren“ zu beschreiben. In einem Artikel in diesem Buch mit dem Thema „Das drahtlose Jahrhundert“ beschreibt Robert Sloss „Das Telephon in der Westentasche“ (S. 35ff):

„Der Bürger der drahtlosen Zeit werden überall mit seinem ‚Empfänger‘ herumgehen, ... Auf seinem Wege von und ins Geschäft wird er seine Augen nicht mehr durch Zeitungen anzu-strengen brauchen, denn er wird sich in der Untergrundbahn, ... oder wo er grad‘ fährt .. nur mit der “gesprochenen Zeitung” in Verbindung setzen brauchen, und er wird alle Tagesneuigkeiten, alle politischen Ereignisse und alle Kurse erfahren, nach denen er verlangt. ... Und ist ihm damit nicht gedient, sondern steht sein Sinn nach Höherem, so wird er sich mit jedem Theater, jeder Kirche, jedem Vortrags- und jedem Konzertsaal verbinden und an der Vorstellung, an der Predigt oder den Sinfonieaufführungen teilnehmen können, ja die Kunstgenüsse der ganzen Welt werden ihm offen stehen, ...“



Diese Vision ist 100 Jahre später in Form des „i-phones“ Wirklichkeit geworden.

Ähnlich visionär waren (sind) auch die NCTM-Standards von 1989 (bzw. in der Neufassung von 2000), indem sie als „Idealstandards“ eine Vision für die Zukunft des Mathematikunterrichts darstellen. Dies gilt insbesondere auch für den Einsatz neuer Technologien. Hierzu wurde in das *Technology Principle* formuliert:

“Technology is essential in teaching and learning mathematics; it influences the mathematics that is taught and enhances students' learning.” (S. 24)

Und weiter

“... Calculators and computers are reshaping the mathematical landscape ... Students can learn more mathematics more deeply with the appropriate and responsible use of technology. ...” (S. 25)

Auch in der ersten ICMI-Studie mit dem Titel “The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching” (Churchhouse 1986) wurde ein großer Enthusiasmus bzgl. der Entwicklungsperspektiven des Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit neuer Technologien deutlich. Viele, wie etwa Jim Kaput, sagten voraus, dass neue Technologien sehr schnell alle Bereiche des Mathematikunterrichts verändern würden:

“Technology in mathematics education might work as a newly active volcano – the mathematical mountain is changing before our eyes” (1992, p. 515)

Werkzeug Taschenrechner

1972 kam der erste Taschenrechner auf den Markt. Zwischen 1976 und 1978 wurde er in den meisten Bundesländern im Mathematikunterricht – meist ab Klasse 7 – erlaubt. In der DDR wurde der Schulrechner SR 1 an der Erweiterten Oberschule ab Schuljahr 1984/85 in der Klasse 11 und in der Polytechnischen Oberschule mit dem Schuljahr 1985/86 in Klasse 7 eingeführt.

In der Stellungnahme der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) vom 28. Februar 1978 wurde ein „kontrollierter Einsatz von Taschenrechnern ab dem 7. Schuljahr aller Schulformen“ (S. 117) gefordert. Davon erwartete man sich

- das Ermöglichen experimenteller Schüleraktivitäten im Rahmen des entdeckenden Lernens und Problemlösens,
- eine konkrete numerische Ausgangsbasis für Begriffsbildungen,
- das wirklichkeitsnahe Behandeln von Anwendungsaufgaben durch realitätsadäquate Zahlen,
- das Entlasten von Tätigkeiten, die für die Lösung der anstehenden Aufgabe keine zentrale Bedeutung haben,

- einen Zugang zum algorithmischen Denken,
- problemadäquate Übungsphasen.

Im Mittelpunkt der damaligen Diskussion stand aber die Frage, wie „die globalen Lernziele für den Mathematikunterricht ... besser erreicht werden können“ (Kilian 1978), und es wurden bereits damals Forderungen nach einer „tiefgreifenden Veränderung der Zielsetzungen des Mathematikunterricht“ (Winkelmann 1978) laut. Sicherlich kann heute festgestellt werden, dass diese Hoffnungen, Forderungen und Zielsetzungen zu weitreichend waren und – wohl nur zum kleinen Teil – erreicht wurden. Für die Ursachen lassen sich unterschiedliche Gründe anführen (vgl. Weigand 2003).

Werkzeug Taschencomputer

Bei dem Werkzeug Taschencomputer sind mittlerweile euphorische Erwartungen durch pragmatische Haltungen verdrängt worden. So wird in den Empfehlung der Kultusministerkonferenz (KMK) von 2009 für die MINT-Fächer ohne weitergehende Begründung gefordert,

„Computerprogramme (z. B. Tabellenkalkulation, Dynamische Geometrie, Computer-Algebra) sowie Taschenrechner (z. B. mit Graphikfunktion oder CAS) in allen MINT-Fächern verbindlich nutzen“ (S. 5).

GDM und MNU sahen sich deshalb dadurch herausgefordert, in einer eigenen Stellungnahme (2010) nochmals auf die Vorteile des Rechnereinsatz hinzuweisen:

„Wir sehen es insbesondere im Hinblick auf die Entwicklung des Begriffsverständnisses, der Problemlösekompetenz, des Modellierens und der Fähigkeit des Argumentierens und Begründens als unverzichtbar an, über den Einsatz von Taschenrechnern hinaus diese digitalen Werkzeuge nachhaltig in den Mathematikunterricht zu integrieren.“

Über die zukünftige Verwendung von Taschencomputern im Mathematikunterricht lässt sich augenblicklich nur spekulieren. Es ist sicherlich entscheidend für den Unterrichtseinsatz, ob diese Werkzeuge in Prüfungen – vor allem auch im Abitur – zugelassen sind oder nicht. Weltweit gibt es hier die verschiedensten Modelle. In Deutschland ist in den letzten Jahren die Tendenz zu erkennen, dass graphikfähige Taschenrechner vielfach verpflichtend vorgeschrieben (etwa Baden-Württemberg oder Sachsen), Ta-

schoncomputer aber nur alternativ mit einer eigenen Abiturprüfung möglich sind (etwa in Nordrhein-Westfalen, Hessen oder Bayern).

Enttäuschungen

In der aktuellen ICME-Study 17 mit dem Titel “Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain” (Hoyles u. Lagrange 2010) wird an vielen Stellen die Enttäuschung deutlich, dass sich neue Technologien trotz zahlloser Ideen, unterrichtspraktischer Erfahrungen und Forschungsberichten zum Unterrichtseinsatz nicht in der Weise durchgesetzt haben, wie das viele zu Beginn der 1990er Jahr erwartet oder erhofft hatten. Einige Zitate aus der ICME-Study:

“Technology still plays a marginal role in mathematics classrooms” (S. 312)

“The impact of this technology (CAS) on most curricula is weak today”
(S. 426)

“The situation is not so brilliant and no one would claim that the expectations expressed at the time of the first study (20 years ago) have been fulfilled.”
(S. 464)

Diese Studie gibt einen guten Überblick über die zahlreichen Aktivitäten der letzten Jahre beim Einsatz neuer Technologien im Mathematikunterricht und beim Lernen von Mathematik (vgl. auch Weigand 2010). Das Buch liefert aber keine Vision (mehr), es listet vielmehr Fragen auf, die allerdings jenen vor 20 Jahren durchaus analog oder sehr ähnlich sind. Man mag das als – teilweise – Resignation deuten, man kann es aber auch als ein Zeichen dafür sehen, wie schwer diese Fragen zu beantworten sind. Schließlich kann man es auch als Aufforderung verstehen, neue Ideen – Visionen – zu entwickeln, um die reale Integration in den Mathematikunterricht voranzubringen.

Im Folgenden werden vier Thesen aufgestellt, die stärker eine pragmatische Ansicht vertreten und Handlungsanweisungen geben möchten, um den – theoretisch vielfach vorbereiteten – Einfluss neuer Technologien auf den realen Mathematikunterricht zu verstärken.

Vier Thesen über die Zukunft

Die vier Thesen gehen davon aus, dass eine lediglich isolierte Sichtweise im Mathematikunterricht – wie etwa Einzelbetrachtungen bestimmter Teilgebiete der Mathematik, das Bewerten der aktuellen Situation ohne die Einbeziehung der Entwicklung, wie es dazu gekommen ist, der Blick auf Schülerinnen und Schüler ohne Einbezug von Lehrkräften und Inhalten, der Blick auf Technologien ohne Einbezug von Schülern, Inhalten und Lehrkräften – keine tragfähige Grundlage für zukünftige Entwicklungen ist. Ein *beziehungshaltiges Denken* ist die zentrale Voraussetzung für Veränderungen (Verbesserungen) im Mathematikunterricht. Digitale Werkzeuge können dabei unterstützend wirken.

1. These: Die Beziehung zwischen Algebra und Geometrie muss verstärkt werden.

Es lässt sich hier zum einen fragen, ob es zu einer Algebraisierung der (synthetischen) Geometrie kommen wird. Grundlage dafür bildet zum einen das Konstruktionsprinzip von Dynamischer Geometrie Software, durch die die Geometrie algebraisch (numerisch) dargestellt wird. In Programmen wie „Geogebra“ und „Felix“ wird dabei die algebraisch-geometrische Wechselbeziehung explizit dargestellt. Zum anderen kann aber auch gefragt werden, ob die Geometrie in der Algebra oder überhaupt in der Mathematik wieder eine größere Rolle spielen wird. In der aktuellen ICMI-Study 17 (Hoyles u. Laborde 2010) vertritt Jean-Marie Laborde die Meinung:

“Until the 17th century geometry has been the queen of sciences and then decayed ... It might be because of the too poor quality of drawing at that time, making ‘formal’ approaches more efficient.with new computer based tools geometrical thinking can return to be a central source of insights when exploring new domains of knowledge” (p. 436).

Im gleichen Band vertreten Keith Jones u. a. die Meinung:

“It may be that, in another 20 years, we will have moved beyond flat screen technology, perhaps to a spherical screen for spherical geometry, and perhaps to ‘virtual reality’ environments which embed the user in space” (p. 58)

In beiden Zitaten wird die Hoffnung deutlich, dass mit Hilfe neuer technologischer Entwicklungen ein Schritt zu einer besseren Darstellung geometri-

scher Zusammenhänge und zu einer adäquaten Visualisierung unserer Umwelt ermöglicht wird. Neue Technologien können Werkzeuge für die bessere Integration der Geometrie in andere Bereiche der Mathematik – d. h. im Mathematikunterricht vor allem in die Algebra – sein.

2. These: Die Beziehung zwischen “früher” und “heute” muss – bewusst – aufgebaut werden.

Es ist hinlänglich bekannt, dass Lernen nur auf einem breiten Fundament vorhandenen Wissens und Könnens aufbauen kann. Wissen wird kumulativ erworben. Der Aufbau auf bereits vorhandenem Wissen ermöglicht nicht nur Lernen überhaupt, er gibt auch die Sicherheit des Bewährten und Vertrauten, er entwickelt Sinn durch die Verknüpfung von Inhalten und das Aufzeigen eines „roten Fadens“ beim Lernen. Ein – historisch interessantes – Beispiel ist das Rechenbuch von Adam Ries „*Rechnung auff der Linihen und Federn*“, in dem er von dem den damaligen Lernenden vertrauten „Rechnen auf den Linien“ ausgeht und darauf aufbauend schriftliche Rechenverfahren („Rechnen mit der Feder“) erklärt.

In ähnlicher Weise forderte Philipp Melanchthon (1497-1560) im Jahr 1518 in Wittenberg in seiner Antrittsrede mit dem Thema „Über die Verbesserung der Studien der Jugend“ ein „ad fontes“, also ein „Zurück zu den Quellen“. Damals bedeutete das für Melanchthon die Lektüre antiker Schriftsteller. Heute kann das „ad fontes“ aber auch als Leitspruch für das Arbeiten mit digitalen Werkzeugen angesehen werden, wenn „Quellen“ die in Jahrtausenden gewachsenen geometrischen und mathematischen Grundlagen und Zusammenhängen bedeuten. Durch neue Werkzeuge wird nun ein neuer Zugang zu diesen „Quellen“ möglich. Sie stellen auch heute eine oder die Grundlage für Weiterentwicklungen dar.

3. These: Die Beziehung zwischen 2D- und 3D-Geometrie wird (weiter) entwickelt.

Die Forderung nach einer “Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens” durch eine größere Berücksichtigung des Raumes „als Träger planimetrischer Beziehungen” tritt bereits in der Meraner Reform (1905) auf. Seitdem wird die Entwicklung dieser Beziehung immer wieder gefordert,

sie hat sich aber wenig oder nur partiell im Geometrieunterricht durchsetzen können (Weigand 2009). Mit dem Aufkommen von interaktiven 3-D-Programmen wie Cabri3D oder Archimedes Geo3D wächst diese Hoffnung wieder. Damit ist es jetzt möglich, 3-D-Objekte (auf dem Bildschirm) zu erzeugen, interaktiv zu verändern und damit zu experimentieren. Heinz Schumann (2007) hat an vielen Beispielen gezeigt, wie „Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum“ aussehen kann. Digitale Werkzeuge sind dabei die entscheidende Hilfe zum interaktiven – virtuellen – Agieren mit räumlichen Objekten. Allerdings ist die Komplexität des Umgangs mit 3-D-Objekten erheblich größer als mit 2-D-Objekten. Im Sinne der 2. These wird es bei der Interpretation und Erklärung raumgeometrischer Zusammenhänge zentral und wichtig, vorhandenes Wissen in der ebenen Geometrie aufzugreifen und Analogiebildung zwischen Ebenen- und der Raumgeometrie bewusst zu nutzen (Ruppert 2010).

4. These: Der Einsatz neuer Technologien erfordert ein Gesamtkonzept des Lehrens und Lernens

Ein aktuelles Beispiel dafür, wie die Wirksamkeit neuer Medien von der Einbettung in ein Gesamtkonzept abhängt, ist das *interaktive Whiteboard*. Es ist sicherlich ein Mehrwert dieser Technologie, dass das interaktive Agieren in unmittelbarer haptischer Art und Weise möglich ist, wie das mit einer traditionellen Beamerpräsentation nicht der Fall ist. Allerdings wird alleine diese Art der Präsentation noch nicht zu einem – nachweisbaren – Wissenszuwachs der Schülerinnen und Schüler führen.

Die Verwendung des Whiteboards muss in ein Gesamtkonzept des Nutzens neuer digitaler Medien eingebunden sein. So können etwa der Einsatz von Laptops (Netbooks) im Klassenzimmer sowie das Arbeiten mit einem klasseninternen Navigationssystem die Interaktion zwischen Schüler und Lehrer verändern. Das Arbeiten und Handeln einzelner Schülerinnen und Schülern kann - unterstützt durch die optische Präsentationsmöglichkeit - jederzeit eine Diskussion in der gesamten Klasse anstoßen. Wenn der Unterricht darüber hinaus in ein digitales Kommunikationssystem eingebunden ist, auf das Schüler auch zuhause über das Internet zugreifen können, dann erhält die Nutzung des interaktiven Whiteboards wiederum eine neue Bedeutung. Im Unterrichtsgespräch entwickelte „Tafelbilder“ können Schülerinnen und Schülern unmittelbar in der Klasse und zuhause zur Verfügung gestellt

werden. Hausaufgaben können von Schülerinnen und Schülern bereits unter dem Aspekt angefertigt werden, dass sie diese problemlos interaktiv und dynamisch präsentieren können.

Wie für Whiteboards gilt diese Notwendigkeit der Einbettung in eine Organisationsstruktur für den gesamten Einsatz neuer Technologien. Ein Gesamtkonzept muss dabei verschiedene Aspekte berücksichtigen:

- In *technischer Hinsicht* geht es um das Zusammenspiel verschiedener Komponenten wie Laptops, Netbooks, Internet, Taschencomputer.
- Bei der *Verwendung von Lehrmitteln* geht es um die Beziehung traditioneller und elektronischer Lehrbücher, insbesondere die Einbindung interaktiver Arbeitsblätter.
- Bei der *inerschulischen Kooperation* geht es um die Zusammenarbeit aller in der Schule vertretenen Gruppen wie Schülern, Eltern, Lehrern und Schulleitung.
- Bei der *überschulischen Kooperation* geht es um die Zusammenarbeit zwischen Lehrern verschiedener Schulen, zwischen Schule und Schuladministration sowie zwischen Schule und Universität.

Ausblick: Drei Fragen für die Zukunft

Zentrale Fragen im Zusammenhang mit dem Einsatz neuen Technologien und einer Veränderung von Lehren und Lernen aufgrund deren Einsatzes werden schon lange gestellt und können – natürlich – nicht abschließend beantwortet werden. Mit neuen sich stets verändernden Werkzeugen stellen sich auch „alte“ Fragen in neuer Weise: Was ist und wie kann geometrisches Grundlagenwissen gesichert werden? Wie können zentrale traditionelle Arbeitsweisen (Beweisen, Argumentieren) erhalten und weiterentwickelt werden? Wie können digitale Werkzeuge die Sicherung des Basiswissens unterstützen?

Sicherlich lassen sich so zahlreiche (alte) Fragen aufzählen. Im Folgenden werden drei Fragen gestellt, die für die zukünftige Entwicklung als besonders wichtig anzusehen sind und an deren – zumindest teilweise – Beantwortung in den nächsten Jahren gearbeitet werden sollte.

1. Wie wird die Beziehung zwischen „traditionellem“ Unterricht (Tafel, Heft, ...) und „digitaler Unterrichtswelt“ sein?
2. Welchen Einfluss werden *mobile* neue Technologie und neue Entwicklungen wie 3-D-Bildschirme auf die Ziele und Inhalte des Geometrieunterrichts?
3. Welche „neuen“ Kompetenzen sind bei Schülerinnen und Schülern für einen effektiven Einsatz neuer Technologien erforderlich?

Hoffen wir, dass wir 2020 der Beantwortung dieser Fragen zumindest einen Schritt näher gekommen sind.

Literatur

- Bartolini Bussi, B., Mariotti, M. A. (1999). Semiotic mediation: from history to the mathematics classroom. *Learn. Math.* 19, No. 2, 27-35.
- Brehmer, A. (Hrsg.) (1910, Nachdruck 2010). *Die Welt in 100 Jahren*. Nachdruck 2010. Georg Olms Verlag: Hildesheim.
- Churchhouse, R. F. (Ed.) (1986). *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*. ICMI Study Series. Cambridge: University Press.
- Claus, V., *Perspektiven der Informatik*, login 10 (1990), H. 6, 43–47.
- Dyson, F. J. (2000). *Die Sonne, das Genom und das Internet*. Fischer-Verlag: Frankfurt.
- GDM u. MNU (2010). *Stellungnahme der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) sowie des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) zur „Empfehlung der Kulturministerkonferenz zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bildung“*.
<http://madipedia.de/images/4/40/Stellungnahme-GDM-MNU-2010.pdf>
- Henn, H.-W., Jock, W. (1993). *Arbeitsbuch CABRI Géomètre – Konstruieren mit dem Computer*. Dümmler Verlag: Bonn.
- Hischer, H. (2010). *Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen?* Franzbecker Verlag: Hildesheim u. Berlin.
- Hoyles, C. & J.-B. Lagrange (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain*. The 17th ICMI Study, Springer Verlag: New York a. o.
- Hoyles, C. & J.-B. Lagrange (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain*. The 17th ICMI Study, Springer Verlag: New York.
- Kaput, J. J. (1992). *Technology and mathematics education*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: McMillan. S. 515-556.

- Kaufmann, S. (1992). *Mathematica als Werkzeug. Eine Einführung mit Anwendungsbeispielen*. Birkhäuser Verlag: Basel.
- Kilian, H. (1978). Der Einsatz von Taschenrechnern in der Hauptschule anhand von Unterrichtsbeispielen. *ZDM* 10, 126-130.
- Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*. Teubner-Verlag: Leipzig.
- KMK (2009). Empfehlung der Kultusministerkonferenz zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bildung.
http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2009/2009_05_07-Empf-MINT.pdf
- NCTM (1989, 2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM, Inc.: Reston. <http://standards.nctm.org/>
- Rohrberg, A. (1929). *Der Rechenstab im Unterricht aller Schularten*. Oldenbourg Verlag: Berlin u. München.
- Ruppert, M (2010). Analogiebildung – eine grundlegende mathematische Denkweise, *BzM*, Bd. 2, 717-720.
http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2010/BzMU10_RUPPERT_Markus_Analogiebildung.pdf
- Schumann, H. (2007). *Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum*. Franzbecker: Hildesheim u. Berlin.
- Trouche, L. (2005). Instrumental Genesis, individual and Social Aspects, in: Guin, D., Ruthven, K., Trouche, L. (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*, Springer: New York. S. 197-230.
- Weigand, H.-G. (2003). Taschenrechner im Mathematikunterricht - Ein retrospektiver Vergleich der Diskussion und Vorgehensweise in der BRD und in der DDR, in: Henning, H. u. Bender, P. (Hrsg.), *Didaktik der Mathematik in den alten Bundesländern - Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR, Bericht über eine Doppeltagung zur gemeinsamen Aufarbeitung einer getrennten Geschichte*, Universität Magdeburg, Universität Paderborn. 205-216.
- Weigand, H.-G. (2009). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*, Spektrum-Verlag: Heidelberg u. Berlin.
- Weigand, H.-G. (2010). Book Review of Hoyles, C. & J.-B. Lagrange (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain*. The 17th ICMI Study, Springer: New York a. o., *ZDM - The International Journal on Mathematics Education* 42(7), 801-808.
- Winkelmann, B., Taschenrechner und Fachdidaktik: Einige Strategische Perspektiven, *ZDM* 10 (1978), 153 – 159.

Problemorientierte geometrische Aufgaben – mit oder ohne Computer?

Andreas Filler

Zusammenfassung. In diesem Beitrag wird der Frage nachgegangen, inwiefern Computernutzung die Kreativität von Schülern beim Lösen geometrischer Aufgaben anregt oder ob dynamische Geometriesoftware, indem sie zusätzliche Lösungsmöglichkeiten zur Verfügung stellt, problemorientiertes Denken eher verhindert. Dazu werden exemplarisch ausgewählte Aufgaben betrachtet und Erfahrungen geschildert, die innerhalb eines Schülerzirkels mit mathematisch interessierten Schülerinnen und Schülern siebter und achter Klassen bei der Lösung dieser Aufgaben gesammelt wurden.

Rutschende Leiter

Eine Leiter steht an einer Mauer und rutscht langsam an der Mauer nach unten. Welchen Weg beschreibt der Mittelpunkt der Leiter? Begründe deine Antwort.

Diese Aufgabe beinhaltet – unabhängig von den zu ihrer Lösung verwendeten Werkzeugen – ein Problem „dynamischer Geometrie“, denn es ist die Kurve zu ermitteln, die ein Punkt beschreibt, der sich in Abhängigkeit von der Lage einer Strecke verändert.

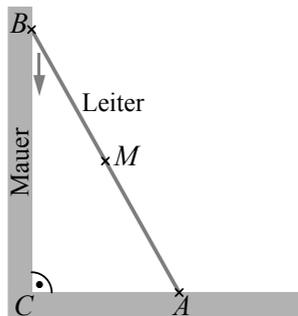


Abb. 1: Rutschende Leiter

Nachdem Schülern die Aufgabe gestellt wurde, äußerten einige von ihnen zunächst falsche Vermutungen bezüglich der Spur des Leitermittelpunktes. Es wurde die Vorstellung deutlich, dass sich der Leitermittelpunkt auf einer Kurve bewegen müsse, die (nach den Skizzen der Schüler) etwa die Form eines Hyperbelastes hat. Nach etwa fünfminütigen Versuchen (zunächst mit

Papier und Bleistift, Abb. 2) gelangte die Mehrheit der beteiligten Schüler zu der Erkenntnis, dass sich der Mittelpunkt auf einem Viertelkreis bewegt.

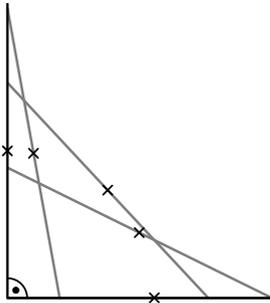


Abb. 2: Rutschende Leiter: Konstruktion einiger Punkte

Mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware lässt sich die Spurkurve des Mittelpunktes M „aufzeichnen“ (Abb. 3). Schüler erhalten somit die Bahnkurve, ohne über charakterisierende Eigenschaften der Bahn des Punktes nachdenken zu müssen. Um zu der Erkenntnis zu gelangen, dass es sich hierbei um einen Viertelkreis handelt, ist es lediglich erforderlich, mithilfe der Software eine Konstruktion anzufertigen und zu wissen, wie Spurkurven aufgezeichnet werden können. Die Entwicklung eigener Vorstellungen zu einem Problem „dynamischer Geometrie“ wird durch die „automatische“ Lösung mittels der Software weit weniger angeregt als durch ein Durchdenken des Problems unter Zuhilfenahme von Papier und Bleistift.

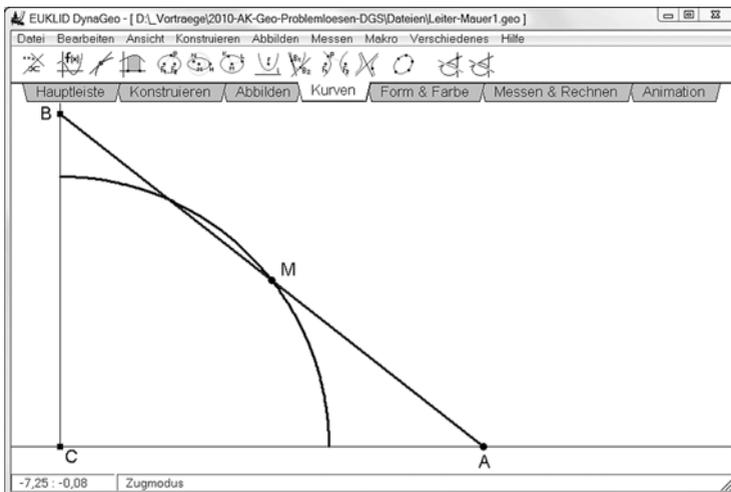


Abb. 3: Rutschende Leiter als Ortslinie in der Software Euklid Dynageo

Immerhin könnte die dynamische Konstruktion bei der Findung einer Begründung bzw. einer Beweisidee helfen: Um nachzuweisen, dass sich M beim „Abrutschen“ der Leiter wirklich auf einer Kreisbahn bewegt, ist zu begründen, dass sich der Abstand von M zu C beim Rutschen nicht ändert. Anhand der dynamischen Konstruktion wird schnell sichtbar, dass die Strecken \overline{MB} , \overline{MC} und \overline{MA} gleich lang sein müssen und somit (da \overline{MB} und \overline{MA} jeweils halb so lang sind wie die Leiter) der Abstand von M zu C konstant bleibt (siehe Abb. 4).

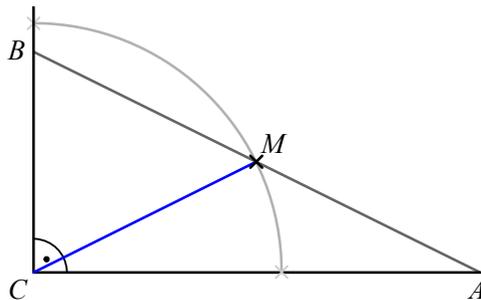


Abb. 4: Rutschende Leiter – Beweisidee

Mithilfe dieser Beweisidee, deren Findung eine dynamische Geometriesoftware unterstützen kann, lässt sich nun recht leicht ein exakter Beweis führen. Jedoch scheint das mit der Software erreichte Ergebnis bereits derart sicher zu sein, dass die Motivation, über eine Begründung bzw. einen Beweis nachzudenken, vielfach erheblich leidet. Die Schüler, mit denen die Aufgabe erprobt wurde, sahen nach der Konstruktion einiger Punkte auf Papier und der Vermutung, dass alle Punkte auf einem Viertelkreis liegen, durchaus die Notwendigkeit einer exakten Begründung bzw. eines Beweises. Hingegen war das Ergebnis nach der Konstruktion mithilfe der Software für sie derart evident, dass begründende Überlegungen nur noch schwer motiviert werden konnten.

Die Aufgabe stellt somit ein Beispiel dafür dar, wie eine mit traditionellen Mitteln durchaus anspruchsvolle Überlegungen erfordern Aufgabe durch den Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware lediglich Fähigkeiten in der Nutzung der Software erfordert. Derartige Fähigkeiten erwerben Schüler erfahrungsgemäß schnell. Für die Entwicklung geometrischer Anschauung sowie von Problemlösefähigkeiten, die über die Nutzung technischer Hilfsmittel hinausgehen, wird hiermit jedoch nicht viel erreicht.

Neben der erwähnten Lösung mithilfe von Papier und Bleistift ist es auch denkbar, die Auseinandersetzung mit der Aufgabe „Rutschende Leiter“ völlig ohne Hilfsmittel als Vorstellungsübung zu beginnen, einen interessanten Vorschlag hierzu beschreibt Weber (2010, S. 136ff.).

Es sei erwähnt, dass die Verwendung des Spurkurvenwerkzeugs zwar bei der hier vorgestellten Aufgabe zu einer unmittelbaren Lösung führt und anspruchsvollere Überlegungen eher verhindert. Bei anderen Aufgaben kann jedoch eine völlig andere Situation vorliegen; die Betrachtung von Spurkurven mit Computerhilfe erweist sich in vielen Fällen als wertvolle heuristische Strategie, siehe u. a. Schumann (1991, Kap. 7), Weigand/Weth (2002, S. 179ff.) sowie das folgende Beispiel.

Konstruktionsaufgabe

Zwei parallele Geraden g und h haben den Abstand 6 cm. Auf g liegen zwei Punkte A und B mit dem Abstand 9 cm. Konstruiere einen Punkt C auf h so, dass die Strecke \overline{AC} genauso lang ist wie das Lot von B auf AC .

Diese Aufgabe wurde in einem früheren Jahrgang des Landeswettbewerbs Mathematik Baden-Württemberg Schülern der Klassenstufen 5-10 gestellt. Bei der Diskussion der Aufgabe in einem Schülerzirkel unterbreitete ein Schüler recht schnell den Vorschlag, in dem Mittelpunkt M der Strecke \overline{AB} die Senkrechte zu der Geraden AB zu errichten und C als Schnittpunkt dieser Senkrechten mit h festzulegen. Dieser Vorschlag wurde jedoch schnell verworfen, da dann offensichtlich die Strecken \overline{AC} und \overline{BC} gleich lang sind, das Lot \overline{BS} von B auf die Gerade AC jedoch kürzer als die Strecke \overline{BC} ist, siehe Abb. 5.

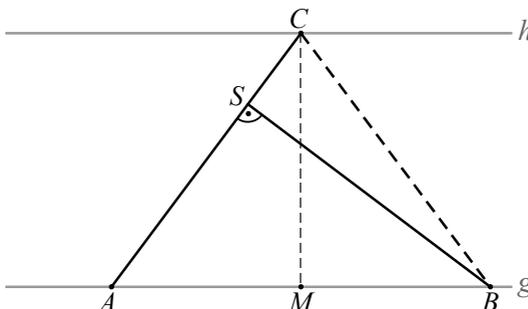


Abb. 5: Konstruktionsaufgabe – erste Überlegungen

Eine Phase des Nachdenkens brachte keine Ideen zu Tage, die als Ansätze zu der Lösung des Problems geeignet gewesen wären. Deshalb wurde den Schülern der Vorschlag unterbreitet, zunächst mithilfe des Computers eine Position für C zu suchen, welche die Bedingung der Aufgabe möglichst gut erfüllt. Folgende Fragen wurden ihnen dazu gestellt:

- Wie bewegt sich der Lotfußpunkt S , wenn C bewegt wird?
- Verschiebe C so, dass \overline{AC} und \overline{BS} möglichst gleich lang sind.
- Fülle das Lot von S auf g .
- Wie groß ist etwa der Abstand vom Fußpunkt F des Lotes zu B ?

Die Untersuchung der ersten Frage (siehe Abb. 6) erinnerte die Schüler an den Satz des Thales (genauer handelt sich um seine Umkehrung), sie konnten nach der mithilfe der Software gemachten Feststellung begründen, dass sich der Lotfußpunkt S auf einem Halbkreis bewegt.

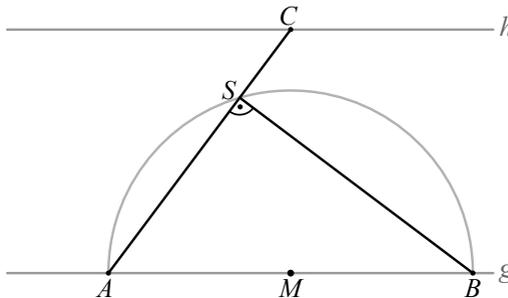


Abb. 6: Konstruktionsaufgabe – Zwischenüberlegung: Thaleskreis

Durch Ziehen an dem Punkt C konnten die Schüler die in der Aufgabenstellung gestellte Bedingung $|AC| = |BS|$ annähernd erreichen – allerdings war es mittels Mausbewegung nicht möglich, diese Bedingung bis auf die von Euklid Dynageo angegebenen drei Nachkommastellen genau zu realisieren, siehe Abb. 7. Es erschien durchaus so, dass die (an sich nebensächliche) Ungenauigkeit dazu beitrug, dass die beteiligten Schüler mit dem Ergebnis noch nicht ganz zufrieden und daher bereit waren, sich mit der Aufgabe weiter auseinanderzusetzen. Die Benutzung der Software als dynamisches Explorationswerkzeug trug in diesem Beispiel somit zur Findung einer Lösungsidee bei, ohne jedoch eine exakte Lösung in den Augen der Schüler überflüssig werden zu lassen.

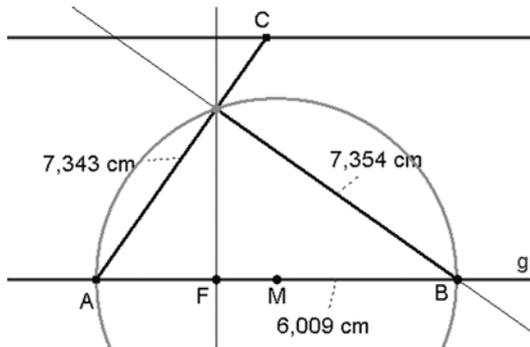


Abb. 7: Konstruktionsaufgabe – Lösung mit DGS

In Bezug auf die zuletzt genannte Frage wurde festgestellt, dass der Abstand vom Fußpunkt F des Lotes zu B „wahrscheinlich“ 6 cm beträgt, wenn das „Ziel“ $|AC| = |BS|$ erreicht wird. Daraus konnte nun eine „hypothetische Konstruktionsvorschrift“ entwickelt werden (siehe Abb. 8):

- Konstruiere einen Halbkreis über dem Durchmesser \overline{AB} .
- Markiere auf der Strecke \overline{AB} den Punkt F , dessen Abstand zu B 6 cm beträgt.
- Errichte in F die Senkrechte zu AB und markiere den Schnittpunkt S dieser Senkrechten mit dem zuvor konstruierten Halbkreis.
- Zeichne die Gerade durch A und S und markiere ihren Schnittpunkt mit h . Dieser ist der gesuchte Punkt C .

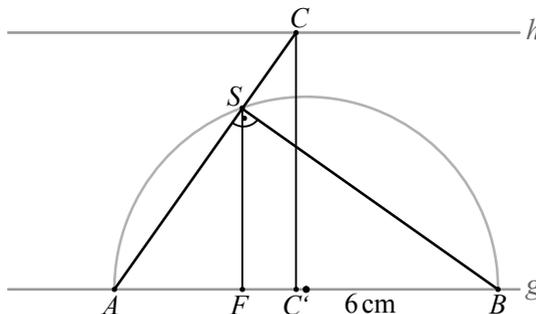


Abb. 8: Konstruktionsaufgabe – Konstruktionsvorschrift

Eine Begründung, dass mit dem so konstruierten Punkt C tatsächlich $|AC| = |BS|$ ist, lässt sich durch Fällen des Lotes von C auf g führen. Ist C'

der Fußpunkt dieses Lotes, so sind die (rechtwinkligen) Dreiecke $\triangle AC'C$ und $\triangle SFB$ wegen $|BF|=|CC'|$ sowie gleich großer Winkel bei A und S kongruent, woraus die Behauptung folgt. Um diese Begründung zu finden, wurde den Schülern der allgemein gehaltene Hinweis gegeben, in der Konstruktion nach kongruenten Dreiecken zu suchen, in welchen die beiden Strecken als Seiten auftreten.

Eine alternative Lösung des Problems bestünde in der Errichtung einer Senkrechten zu g in A , dem Abtragen einer Strecke der Länge 9 cm auf dieser Senkrechten von A aus und der Konstruktion eines Halbkreises mit dieser Strecke als Durchmesser. Der Schnittpunkt dieses Halbkreises mit h ist dann der gesuchte Punkt C , wie aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle BAS$ deutlich wird (vgl. Abb. 9). Allerdings wurde dieser Lösungsweg von keinem der beteiligten Schüler gefunden.

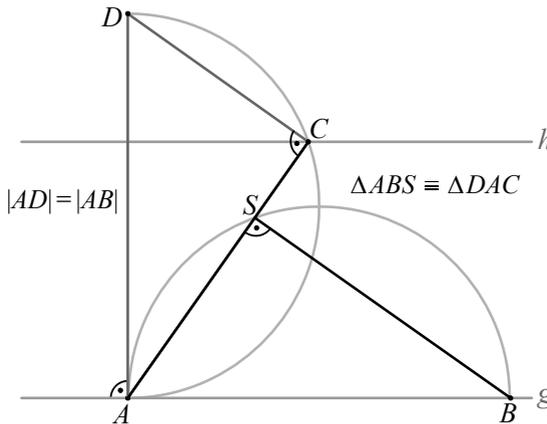


Abb. 9: Konstruktionsaufgabe – Alternative

Weitere Lösungswege für die Aufgabe basieren auf der Betrachtung ähnlicher Dreiecke und können daher i. Allg. von Schülern erst ab der 9. Jahrgangsstufe beschrritten werden. Derartige Lösungswege sind u. a. deshalb interessant, weil sich durch Überlegungen zu ähnlichen Dreiecken aus dem spontanen falschen Ansatz nach Abb. 5 unmittelbar eine Lösung ableiten lässt. Die Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle ACM$ sind wegen paarweise

kongruenter Winkel ähnlich zueinander, woraus sich $\frac{|BS|}{|CM|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ ergibt.

Wenn die Bedingung der Aufgabe erfüllt ist, also $|AC| = |BS|$ gilt, dann folgt daraus $|AC|^2 = |AB| \cdot |MC| = 9\text{cm} \cdot 6\text{cm}$. Hieraus lässt sich \overline{AC} z. B. mithilfe des Höhen- oder des Kathetensatzes konstruieren und damit die Aufgabe lösen.

Die Nutzung des Computers ermöglichte es den beteiligten Schülern bei dieser Aufgabe – nachdem sie festgestellt hatten, dass sie keinen Lösungsansatz finden können – zunächst eine annähernde Lösung experimentell zu finden. Die Eigenschaften dieser Lösung (insbesondere die Feststellung, dass der Fußpunkt des Lotes von S auf g „wahrscheinlich“ 6 cm von B entfernt sein muss, siehe Abb. 7) konnten dann als Ausgangspunkt für eine exakte Lösung genutzt werden. Die Strategie der Lösung eines Problems durch die Analyse eines (oftmals noch nicht erreichten) Ergebnisses wird als *Rückwärtsarbeiten* bezeichnet (siehe u. a. Polya 1949, S. 199ff., Posamentier/Schulz 1995, S. 2ff. und Schwarz 2006, S. 211ff.). Sie zählt zu den wichtigsten heuristischen Strategien. Im Falle der hier betrachteten Aufgabe trug die DGS-Konstruktion wesentlich dazu bei, die Strategie des Rückwärtsarbeitens anwenden zu können.

Dreibogeneck

Drei Kreisbögen bilden ein Dreibogeneck ABC , wenn sie auf Kreisen liegen, die sich in den Punkten A , B bzw. C berühren. Dabei sind nur Kreisbögen zugelassen, deren Mittelpunktswinkel kleiner als 180° sind (Abb. 10). Gegeben sind die Eckpunkte A , B und C eines Dreiecks, das nicht rechtwinklig ist. Konstruiere das zugehörige Dreibogeneck ABC .

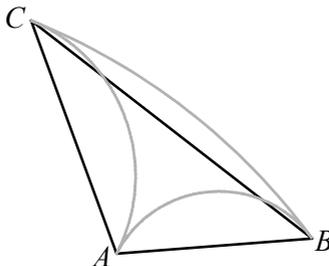


Abb. 10: Dreibogeneck

Auch diese Aufgabe stammt aus dem Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg (2006). Es sei erwähnt, dass der Terminus „Dreibogeneck“ offensichtlich vorher nicht verwendet und erst mit dieser Aufgabe eingeführt wurde.

Es ist recht schwierig, für diese anspruchsvolle – und aufgrund der zu konstruierenden Figur motivierende – Aufgabe einen Lösungsansatz zu finden. Eine sinnvolle Herangehensweise besteht erneut darin, zu untersuchen, welche Eigenschaften eine Lösung haben muss, obwohl diese noch nicht zur Verfügung steht, also die Strategie des Rückwärtsarbeitens anzuwenden.

Um diese Strategie anhand der Aufgabe „Dreibogeneck“ zu nutzen, können Schüler zunächst versuchen, eine Zeichnung, die der Forderung „etwa“ gerecht wird, mit dem Zirkel oder mit einer Geometriesoftware anzufertigen – wobei dies mit der Software besser gelingt, da sich die drei Kreise verändern und annähernd „passgerecht zurechtschieben“ lassen (Abb. 11).

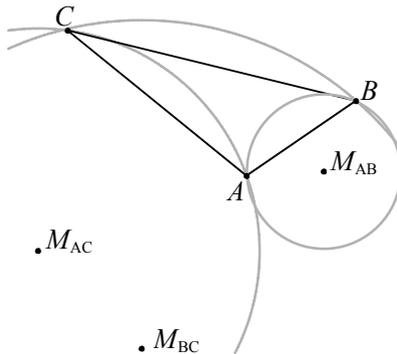


Abb. 11: Dreibogeneck: Erste Versuche

Auch mithilfe einer DGS ist es jedoch kaum möglich, eine Zeichnung anzufertigen, die der Aufgabenstellung exakt entspricht, sodass jeweils zwei der drei Kreise gemeinsame Tangenten besitzen. Das stellten die beteiligten Schüler recht schnell fest: Immer wenn sie die Tangentenbedingung in einem Punkt erreicht hatten, war sie in den anderen Punkten nicht mehr erfüllt. Bei einer ersten Reflexion unterbreitete ein Schüler den Vorschlag, die Mittelpunkte der Kreise an die Mittelsenkrechten der Strecken \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{AC} zu binden. Damit war ein erster Schritt zur Annäherung an die Lösung getan. Durch die Einschränkung der „Freiheitsgrade“ wurde die Konstruktion nun schon erkennbar genauer (Abb. 12).

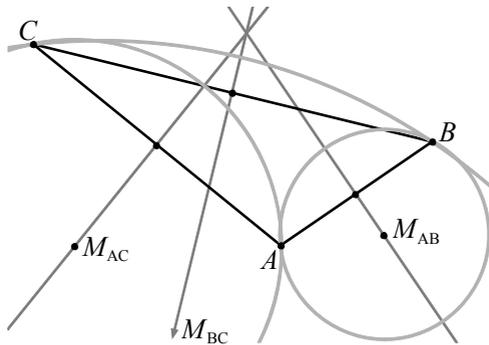


Abb. 12: Dreibogeneck: Erste Verbesserung

Für die weiteren Überlegungen ist es nun entscheidend, die Tangentenbedingung (d. h. jeweils zwei Kreise sollen in den Punkten A , B und C gemeinsame Tangenten besitzen) zu durchdenken und daraus Bedingungen für die Konstruktion abzuleiten. Dazu wurde mit den Schülern herausgearbeitet, dass bei zwei sich berührenden Kreisen die Mittelpunkte der Kreise und der Berührungspunkt auf einer Geraden liegen müssen (Abb. 13). Dies gilt natürlich auch für den Berührungspunkt zweier Kreise, von denen einer innerhalb des anderen liegt.

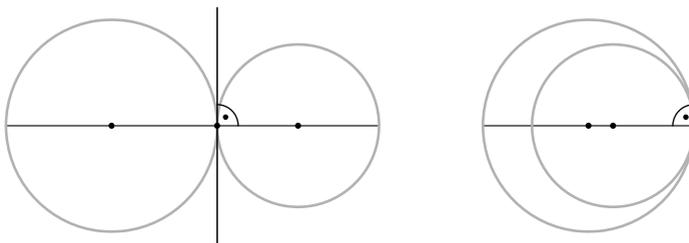


Abb. 13: Tangentenbedingung

Unter Anwendung dieser Bedingung war nun eine „fast exakte“ Konstruktion möglich. Dazu wird einer der Kreismittelpunkte (in Abb. 14 M_{AB}) zunächst willkürlich auf der zugehörigen Mittelsenkrechten festgelegt. Durch M_{AB} und A wird eine Gerade konstruiert. Der Mittelpunkt M_{AC} des Kreises durch A und C muss auf dieser Geraden sowie auf der Mittelsenkrechten von \overline{AC} liegen. Durch diesen Schnittpunkt und C wird erneut eine Gerade konstruiert, welcher der Mittelpunkt M_{BC} abgehören muss. Schließlich wird die Gerade durch M_{BC} und B konstruiert. Wenn der Schnittpunkt S dieser Geraden mit dem zunächst willkürlich festgelegten Punkt M_{AB} überein-

stimmt, sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Durch Ziehen von M_{AB} in der in Abb. 14 dargestellten dynamischen Konstruktion lässt sich dies erreichen, es entsteht die gewünschte Figur.

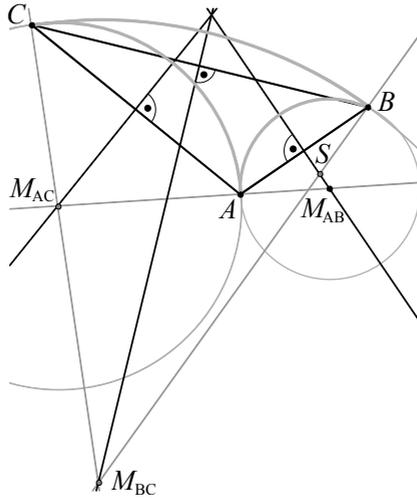


Abb. 14: „Fast exakte“ Konstruktion des Dreibogenecks

Obwohl die Aufgabe (welche die Erarbeitung einer vollständigen Konstruktionsvorschrift verlangt) damit noch nicht gelöst war, betrachteten die Schüler ihr bislang erreichtes Ergebnis als beachtlichen Erfolg. Die Verwendung des Computers trug erheblich dazu bei, diesen Erfolg zu erreichen – letztendlich war es jedoch entscheidend, geometrische Überlegungen zu Kreisen und ihren Tangenten anzustellen und diese Überlegungen anzuwenden.

Eine „vollständige“ Lösung der Aufgabe ist, ausgehend von den bisherigen Überlegungen, auf unterschiedlichen Wegen möglich. So reicht es, einen der Winkel α_1 und α_2 in Abb. 15 zu bestimmen, um die Mittelpunkte der Kreise konstruieren zu können. Wegen des Innenwinkelsatzes und des Nebenwinkelsatzes gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ und $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ$, somit also

$$\beta + \gamma = \alpha_1 + \alpha_2. \quad (1)$$

$\triangle ACM_{AC}$ und $\triangle ABM_{AB}$ müssen gleichschenklige Dreiecke sein, da A und C bzw. A und B auf Kreisen um M_{AC} bzw. M_{AB} liegen. Daher ist $\alpha_1 = \gamma_1$ und $\alpha_2 = \beta_2$. Da das Dreieck $\triangle BCM_{BC}$ ebenfalls gleichschenklige ist, gilt $\gamma_1 + \gamma = \beta_2 + \beta$, also $\alpha_1 + \gamma = \alpha_2 + \beta$ und daher

$$\gamma - \beta = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (2)$$

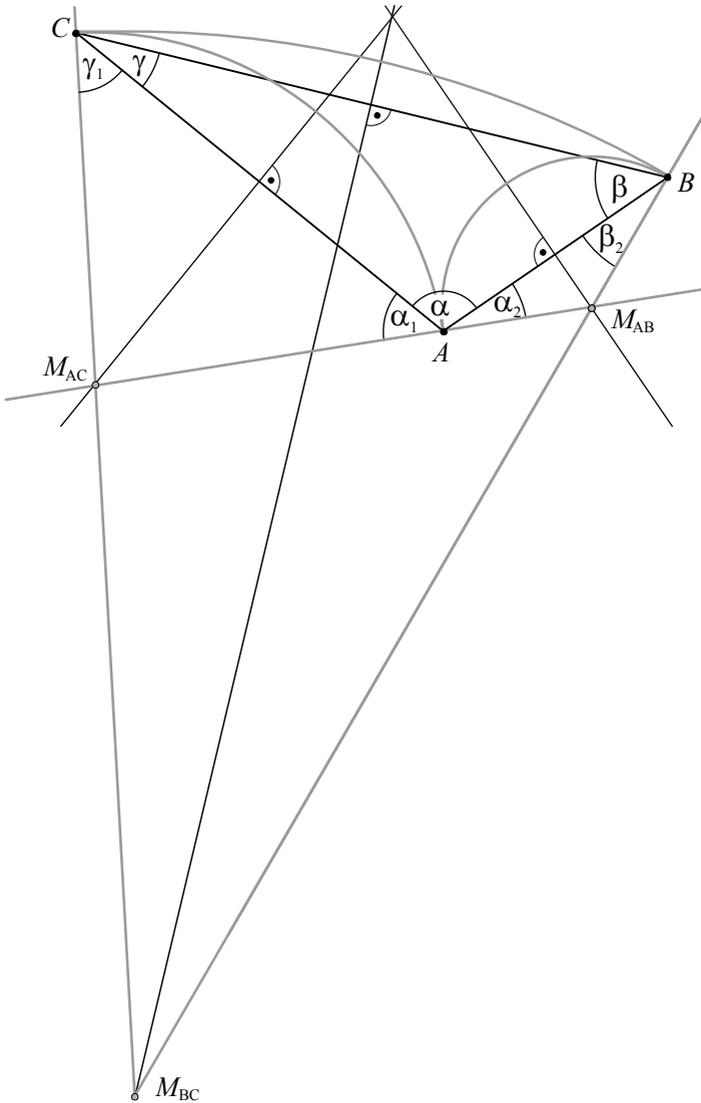


Abb. 15: Überlegungen zu Winkeln bei der Konstruktion des Dreieckszentrums

Aus (1) und (2) ergibt sich schließlich $\gamma = \alpha_2$. Da γ ein gegebener Winkel des Ausgangsdreiecks ist, lassen sich die Mittelpunkte der drei gesuchten Kreise damit schrittweise konstruieren.

In dem erwähnten Schülerzirkel gelang es keinem der Teilnehmer, den skizzierten Lösungsweg über Winkelbeziehungen zu finden. Hierzu ist ein

hohes Maß an Erfahrung bei der Ausnutzung von Winkelbeziehungen in mehreren (hauptsächlich gleichschenkligen) Dreiecken und der Zusammensetzung der gefundenen Beziehungen zur Bestimmung eines gesuchten Winkels erforderlich, über das die beteiligten Schüler nicht verfügten.

Ein anderer Weg der Erarbeitung einer vollständigen Konstruktionsvorschrift beruht auf dem Zusammenhang zwischen den drei Kreisbögen des Dreibogenecks und dem Umkreis des gegebenen Dreiecks. Die Tangentenbedingung an die Kreisbögen des Dreibogenecks ist erfüllt, wenn die Tangenten seiner drei Kreisbögen in den Eckpunkten zu den jeweiligen Tangenten des Umkreises des gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ senkrecht sind. Da die Mittelpunkte der Kreise, deren Bögen das Dreibogeneck bilden, auf den Mittelsenkrechten der jeweiligen Dreiecksseiten liegen müssen (und ebenso der Mittelpunkt des Umkreises), ist die Konstruktion derartiger Kreise möglich, siehe Abb. 16.

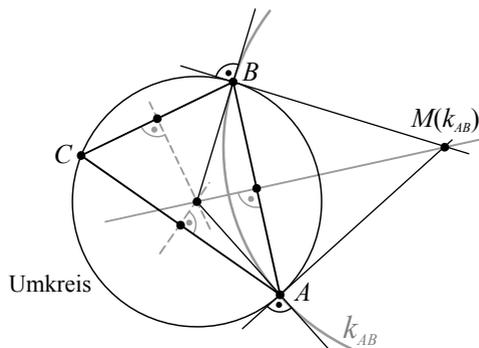


Abb. 16: Überlegungen zu Winkeln bei der Konstruktion des Dreibogenecks

Da die beteiligten Schüler nicht von selbst auf den Gedanken kamen, den Zusammenhang zwischen den Bögen des Dreibogenecks und dem Umkreis zu nutzen, wurden ihnen noch ein „Experimentierauftrag“ (mithilfe der Software) gestellt:

- Zeichne den Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$. Welchen Zusammenhang erkennst du zwischen dem Umkreis und deinen ungefähr „passenden“ Kreisen des Dreibogenecks?

Mit diesem Hinweis gelang nun die vollständige Lösung der Aufgabe; die Abbildungen 17 und 18 zeigen exemplarisch die Lösungen zweier Schüler (der Schüler, welcher die in Abb. 18 dargestellte Konstruktion anfertigte, blendete die Zwischenschritte der Konstruktion aus).

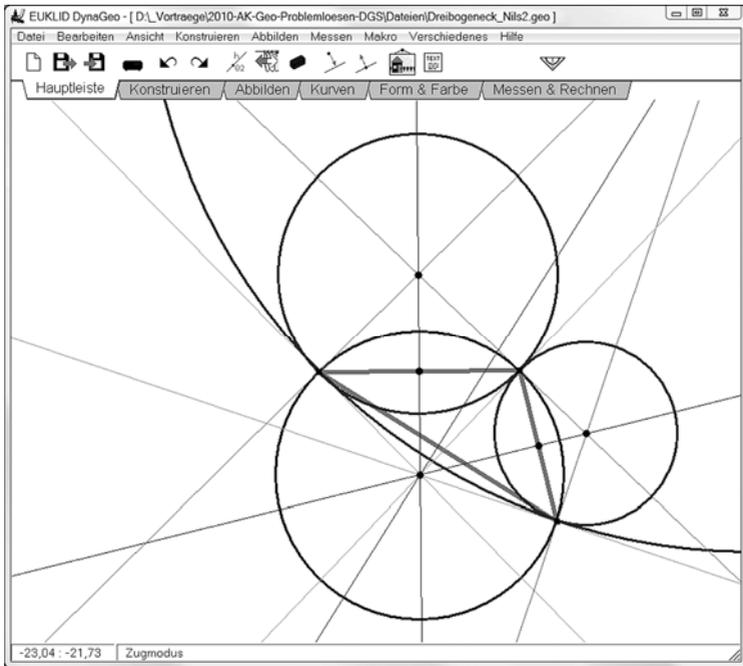


Abb. 17: Dreibogendeck – Konstruktion eines Schülers (1)

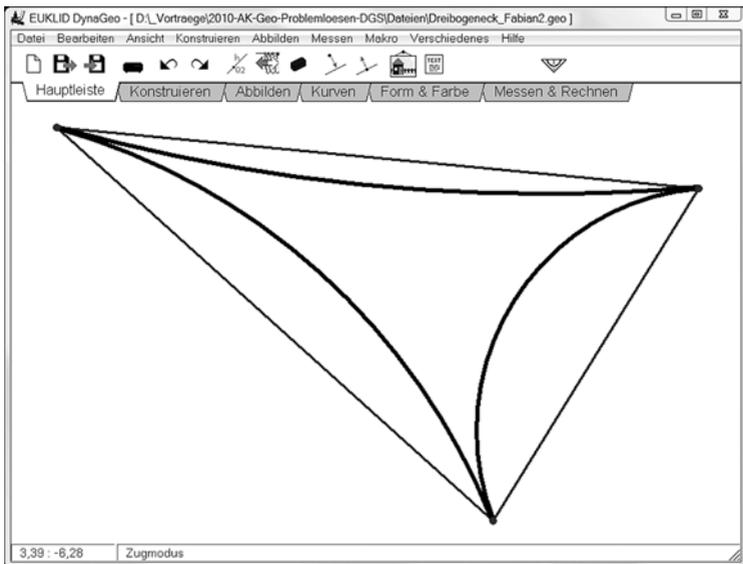


Abb. 18: Dreibogendeck – Konstruktion eines Schülers (2)

Mithilfe des Zugmodus konnten die Schüler nach erfolgter Konstruktion die Gestalt von Dreibogenecken unterschiedlicher Dreiecke untersuchen. Sie stellten dabei fest, dass sich Dreibogenecke, die auf der Grundlage spitzwinkliger und stumpfwinkliger Dreiecke konstruiert wurden, grundsätzlich voneinander unterscheiden und dass für den Grenzfall rechtwinkliger Dreiecke keine Dreibogenecke existieren, da einer der erzeugenden Kreise in diesem Falle in eine Gerade überginge. Abb. 19 zeigt in der Software Dynageo nach der beschriebenen Konstruktion generierte und durch Variation eines Eckpunktes entstandene Beispiele. Theoretisch konnten diese Fälle in dem hier beschriebenen Schülerzirkel nicht tiefer gehend untersucht werden, jedoch ließe sich ihre Diskussion für interessante weitergehende Überlegungen nutzen (u. a. zu Geraden als Grenzfällen in Scharen von Kreisen).

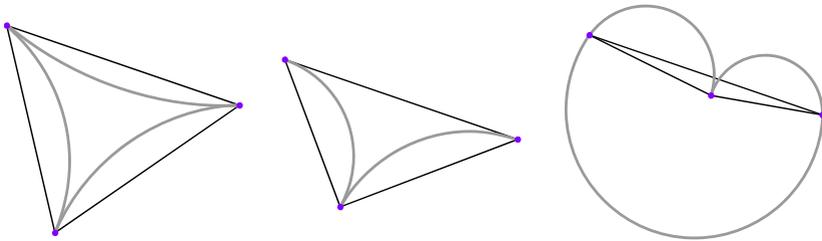


Abb. 19: Dreibogenecke spitz-, recht- und stumpfwinkliger Dreiecke

Ausblick: Verallgemeinerungen der Aufgabe „Dreibogeneck“

Allgemein werden Folgen von Kreisbögen mit gemeinsamen Tangenten an den Übergangspunkten als *Korbbögen* bezeichnet. Die Konstruktion von In- und Umkorbbögen von n -Ecken beschreibt Walser (1996). In einem anderen Beitrag geht er auf interessante Konstruktionen von „Blumen“ und „Sternen“ ein, die auf Um- und Inkorbbögen beruhen, siehe Walser (2010).

Fazit

Problemorientierte geometrische Aufgaben – mit oder ohne Computer?
Diese Frage lässt sich anhand der betrachteten Beispiele keinesfalls beantworten, und es gibt auch keine eindeutige Antwort darauf. Betrachten wir das erste Beispiel „Rutschende Leiter“, so dürfte die Antwort wohl eher „ohne Computer“ lauten: In diesem Falle wird sich Computernutzung kontraproduktiv auf die Entwicklung von Lösungsstrategien für geometrische Probleme auswirken, da der Computer das Ergebnis „von selbst“ präsentiert

und dabei eine Evidenz vortäuscht, die für viele Schüler auch die Frage nach dem „warum“ überflüssig erscheinen lässt. Hingegen verdeutlichen die beiden anderen Beispiele, insbesondere das „Dreibogeneck“, dass eine dynamische Geometriesoftware bei der Findung eines Lösungsweges behilflich sein kann, ohne anspruchsvolle inhaltliche Überlegungen zu geometrischen Eigenschaften und Zusammenhängen überflüssig werden zu lassen. Gerade die wichtige heuristische Strategie *Rückwärtsarbeiten* kann – bei der Bearbeitung dafür geeigneter Aufgaben – durch die Untersuchung mit dem Computer erzeugter „ungefähr passender“ Lösungen unterstützt werden. Dynamische Geometriesoftware sollte daher ein fest etabliertes Werkzeug im Geometrieunterricht des Jahres 2020 sein, allerdings keinesfalls das Zeichnen mit Papier und Bleistift vollständig verdrängen.

Literatur

- Elschenbroich, H. J.; Gawlick, T.; Henn, H. W. (2000). *Zeichnung – Figur – Zugfigur*. Hildesheim: Franzbecker.
- Koepsell, A.; Tönnies, D. (2007). *Dynamische Geometrie im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I*. Köln: Aulis Verlag Deubner.
- Polya, G. (1995). *Schule des Denkens*. Bern: Francke (Erstausgabe: 1949).
- Posamentier, A. S.; Schulz, W. (1995). *The Art of Problem Solving*. Thousand Oaks (California): Corwin Press.
- Schumann, H. (1991). *Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer*. Stuttgart: Metzler+Teubner.
- Schwarz, W. (2006). *Heuristische Strategien des Problemlösens*. Münster: WTM.
- Walser, H. (1996). Geschlossene Korbbögen. In: *Praxis der Mathematik* 38 (4), S. 169-172.
- Weber, Chr. (2010). *Mathematische Vorstellungsbildungen im Unterricht*. Seelze-Velber: Kallmeyer.
- Weigand, H.-G.; Weth, T. (2002). *Computer im Mathematikunterricht*. Heidelberg: Spektrum.

Materialien im Internet

- Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg (in Zusammenarbeit mit Bayern): <http://www.landeswettbewerb-mathematik.de>
- Frank, R.; Walser, H. (2010). Korbbögen – wie kriegen wir die Kurve?
http://www.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/M14/14_Korbboegen.pdf
- Walser, H. (2010). Blumen und Sterne aus Kreisbögen:
http://www.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/B/Blumen_und_Sterne

Ein Wiki für die Lehrveranstaltung „Einführung in die Geometrie“

Michael Gieding

Zusammenfassung. An der Pädagogischen Hochschule Heidelberg gilt die Lehrveranstaltung „Einführung in die Geometrie“ bei den Studierenden als besonders schwierig. Die Ursachen für die Probleme, die die Studierenden mit der genannten Lehrveranstaltung haben, lassen sich u.a. wie folgt spezifizieren:

- mangelndes sprachlich/logisches Ausdrucksvermögen hinsichtlich mathematischer Sachverhalte und Zusammenhänge,
- mangelnde Kenntnisse und Fähigkeiten im Beweisen mathematischer Sätze.

Einer Überwindung dieser Defizite steht häufig der kontraproduktive Umgang zu vieler Studierender mit dem geometrischen Lehrstoff gegenüber. Während des Semesters wird der Lehrstoff vor allem in Form bedruckten Papiers gesammelt, kurz vor der Akademischen Teilprüfung wird er dann mehr oder weniger auswendig gelernt. Viele unserer Studierenden haben Mathematik bisher vor allem als Rezeptwissen kennen gelernt. Vorträge und Appelle helfen da nur wenig, die bisherige Aneignungsweise mathematischen Lehrstoffs zu überdenken.

Es schien uns, dass ein lehrveranstaltungsbegleitendes Wiki gewisse Potenziale haben könnte, hinsichtlich der Überwindung der genannten Probleme hilfreich zu sein. Aus diesem Grunde wurde mit dem Sommersemester 2010 zum ersten Mal ein solches an die Lehrveranstaltung „Einführung in die Geometrie“ gebundenes Wiki eingerichtet. Im Folgenden werden die ersten Erfahrungen und Probleme im Umgang mit einem solchen Wiki dargelegt.

Warum und wozu ein Wiki für die Geometrieausbildung

Beispiel einer gelungenen Diskussion im Geometriewiki

Die Idee des gleichschenkligen Dreiecks ist von zentraler Bedeutung für die Schulgeometrie. Dementsprechend wird eine Lehrveranstaltung zur Vorbereitung zukünftiger Mathematiklehrer kaum auf den Begriff des gleichschenkligen Dreiecks verzichten können und wollen. Im Rahmen der Geometrieausbildung an der PH Heidelberg erfolgt diese Einbeziehung unter zwei Aspekten:

- zum einen geht es um eine tiefes Verständnis des Begriffs im Rahmen einer axiomatisch begründeten Theorie der Geometrie,
- zum anderen dient die Begriffsbildung als Beitrag zur Herausbildung von Fähigkeiten im Definieren von mathematischen Begriffen.

Beides erreicht man in keinem Fall dadurch, dass eine gegebene Definition auswendig gelernt wird. Vielmehr bedarf es zur Erreichung der genannten Ziele einer aktiven Auseinandersetzung mit dem Begriff. Besonders fruchtbar kann eine solche Auseinandersetzung sein, wenn man sie gemeinsam mit anderen Studierenden führt. Diesbezüglich kann eine Plattform wie ein Wiki hilfreich sein, wie das folgende Beispiel illustriert.

Übungsaufgabe 8.5:

Definieren Sie: gleichschenkliges Dreieck, Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks, Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks.

Neben der eigentlichen Lösung der Aufgabe kam es zu folgender Diskussion im Wiki zur Lehrveranstaltung:

Principella: Wenn das gleichschenklige Dreieck auch gleichseitig ist, kann man dann trotzdem von Schenkeln und Basis sprechen?

Löwenzahn: Da jedes gleichseitige Dreieck auch ein gleichschenkliges ist, könnte ich mir vorstellen, dass es möglich ist. Oder man müsste es einfach so festlegen.

Tja???: Ich denke, es ist ganz einfach nicht möglich, weil man Schenkel und Basis nicht mehr zuordnen kann. Schenkel sind die beiden kongruenten Seiten des gleichschenkligen Dreiecks - also welche dann im gleichseitigen???. Es geht nicht!

Löwenzahn: Könnte man nicht bei einem gleichseitigen Dreieck die Seiten entsprechend benennen. O.B.d.A. wäre dann die Seite c die Basis und die Seiten a und b die Schenkel. Hätte man dann nicht auch die Bedingungen entsprechend der Definitionen erfüllt?

Mirasol: Also in einem gleichschenkligen Dreieck gibt es eine Basis, während in einem gleichseitigen gibt es keine und auch keine Basiswinkel!

Rakorium: Ich denke schon, dass gleichseitige Dreiecke auch gleichschenklige Dreiecke sind. Man muss in diesem Fall nur definieren welches die Basis und welches die Schenkel sind. Weil wenn das nicht der Fall wäre, dann dürfte man ja auch nicht sagen, dass ein Quadrat ein Rechteck ist.

Principella: Die Menge aller gleichseitigen Dreiecke ist Teilmenge der Menge aller gleichschenkligen Dreiecke, d.h. dass jedes gleichseitige Dreieck auch gleichschenklig ist! Wenn ich jetzt die Menge ALLER gleichschenkligen Dreiecke definieren will, dann muss ich auch alle gleichseitigen Dreiecke mit einbeziehen, denn wenn ich die gleichschenkligen Dreiecke ohne die gleichseitigen Dreiecke definiere, dann wäre das (wie Rakorium auch gesagt hat) wie wenn

ich Rechtecke definiere und die Quadrate mit dieser Definition ausschlieÙe. Das darf ich nicht!?. Wenn ich also behaupte/festlege dass jedes gleichschenklige Dreieck zwei Schenkel und eine Basis hat, dann muss nach Definition auch ein gleichseitiges Dreieck mindestens zwei Schenkel und eine Basis haben!

Auszug aus einer Diskussion im Geowiki

Problemfall: „Einführung in die Geometrie“

Unter den Studierenden gilt die Lehrveranstaltung „Einführung in die Geometrie“ als eine der schwierigsten und anspruchsvollsten an der PH Heidelberg. Sie bildet die Grundlage für die Akademische Teilprüfung zu Modul 2 und muss von allen Studierenden, die in irgendeiner Form das Fach Mathematik (Hauptfach, Leitfach, affines Fach) gewählt haben, besucht werden. Der Anteil derjenigen Studierenden, die die Teilprüfungsklausur mit einer schlechteren als der Note 4 absolvieren, liegt in der Regel zwischen 20 und 25 Prozent. (Es gab auch Semester, in denen dieser Anteil bei 60% lag.)

Die Lehrveranstaltung ist mit 4 SWS ausgeschrieben. 2 SWS entfallen auf die Vorlesung, die anderen beiden SWS auf die Übung. Aufgrund der hohen Teilnehmerzahl werden Vorlesung und Übung mehrfach in der Woche angeboten. Zusätzlich können die Studierenden Tutorien besuchen. Zur Überprüfung des Leistungsstandes werden Probeklausuren geschrieben. Jede Woche gibt es Übungsaufgaben. Persönliche und Konsultationen per Mail runden das Angebotspaket der Lehrveranstaltungsreihe für die Studierenden ab. Kurz und gut, die Studierenden bekommen eine vergleichsweise sehr intensive Betreuung im Rahmen des Lehrangebots „Einführung in die Geometrie“. In der Regel sind in jedem Semester neben den Tutoren wenigstens zwei Kollegen des Faches Mathematik in die Lehrveranstaltungsreihe involviert.

Trotz des betriebenen Aufwandes bleibt eine gewisse Unzufriedenheit mit den Ergebnissen der jeweiligen Akademischen Teilprüfung sowohl auf Seiten der Studierenden als auch auf Seiten der Lesenden (wenn auch mit unterschiedlichem Hintergrund). Ohne Vollständigkeit anstreben zu wollen, stellen sich diesbezügliche Gründe entsprechend der Erfahrungen, die der Autor mit der eigenen Gestaltung der genannten Lehrveranstaltung über einen Zeitraum von 10 Semestern sammeln konnte, u.a. wie folgt dar:

- Das sprachlich logische Ausdrucksvermögen in Wort und Schrift ist bei vielen Studierenden zu gering ausgebildet. Häufig ist auch

der Wortschatz der Studierenden zumindest bezüglich der Mathematik zu lückenhaft.

- Die Fähigkeiten im Argumentieren, Begründen und Beweisen sind bei vielen Studierenden bestenfalls rudimentär ausgeprägt.
- Viele Studierende wissen nicht, wie man sich mathematischen Lehrstoff aneignet. Kurz und prägnant kann man die Auffassung dieser Studierenden auf den folgenden Nenner bringen: Sage mir, welche Fakten ich auswendig lernen soll, zu gegebener Zeit (eine Woche vor der Klausur) werde ich das dann tun.

Diese drei Punkte sind eng miteinander verbunden. Ein Schlüssel zu einem nachhaltigeren Erfolg der Lehrveranstaltung „Einführung in die Geometrie“ scheint u.a. darin zu bestehen, die Studierenden noch mehr dazu anzuregen, sich stärker in einer kontinuierlichen, aktiven Auseinandersetzung mit dem Lehrstoff über das gesamte Semester hinweg zu üben. Unsere klassischen Methoden schienen diesbezüglich an einem gewissen Punkt der Stagnation angekommen zu sein. Auf der Suche nach neuen bzw. ergänzenden Möglichkeiten zu unserer klassischen Lehrtätigkeit lag es nahe, Möglichkeiten in Betracht zu ziehen, die unter der Bezeichnung „WEB2.0“ firmieren.

Auch wenn die Idee eines Wiki nicht explizit auf Lehrveranstaltungen abzielt, scheint sie auch hierfür gewisse Potenzen insbesondere hinsichtlich der gemeinsamen aktiven Auseinandersetzung (Kollaboration) mit dem jeweiligen Lehrstoff zu bieten. Daher beschlossen wir, der Lehrveranstaltung „Einführung in die Geometrie“ ein Wiki an die Seite zu stellen.¹

Das Geometrie-Wiki

Allgemeine Bemerkungen

Die Idee eines Wiki muss an dieser Stelle sicherlich nicht erläutert werden. Der große Bruder aller Wikis, die Wikipedia, dürfte jedem bekannt sein. Die Plattform für unser Geometrie-Wiki² wurde uns dankenswerter Weise

¹ Wir, das sind die Mitarbeiter des Faches Mathematik der PH Heidelberg Christian Spannagel, Andreas Schnirch und der Autor dieses Beitrages.

² Siehe <http://wikis.zum.de/geowiki/index.php/Hauptseite>

von der *Zentrale für Unterrichtsmedien im Internet (ZUM)*³ zur Verfügung gestellt.⁴

Generierung und Aufbau einer Standardseite

Der Anfänger im Umgang mit einem Wiki wird zunächst vergebens eine Baumstruktur bzw. Hierarchie der einzelnen Dokumente suchen. Es gibt sie nicht. Eine neue Standardseite kann dadurch angelegt werden, dass man einen neuen Link entsprechend der Syntax [[meine neue Seite]] im Quelltext einer bereits vorhandenen Seite generiert. Nachdem der Quelltext geändert wurde erscheint der Link *meine neue Seite* auf das noch leere neue Dokument in der Farbe rot. Ein Klick auf den Link führt zu dem neuen Dokument, welches nun bearbeitet werden kann. Ist es mit Inhalt gefüllt, erscheint der zuvor generierte Link *meine neue Seite* in der Farbe blau. Ein Klick auf einen solchen Link öffnet die entsprechende Seite im Browser:

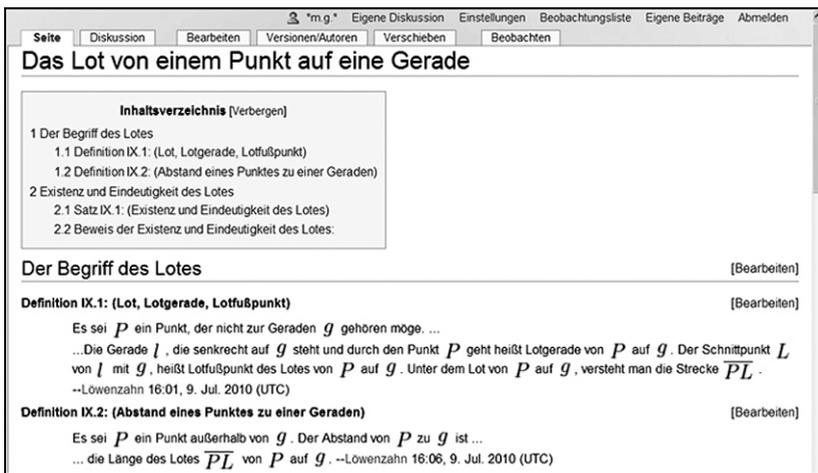


Abb. 1: Typische Seite im Wiki

³ Siehe http://wiki.zum.de/Zentrale_für_Unterrichtsmedien_im_Internet. Unser Wiki reiht sich damit in die Wiki-Familie auf <http://wikis.zum.de/index.php/Hauptseite> ein. So wie auch die anderen Wikis, die über die ZUM erreichbar sind, basiert das Geometrie Wiki auf der MediaWiki Software, die in PHP geschrieben ist.

⁴ An dieser Stelle bedanken wir uns insbesondere bei Achim Burgermeister, der uns immer wieder in technischen Fragen unterstützt.

Jeder angemeldete Benutzer hat nun die Möglichkeit, den Quelltext der Seite und damit ihren Inhalt zu ändern:

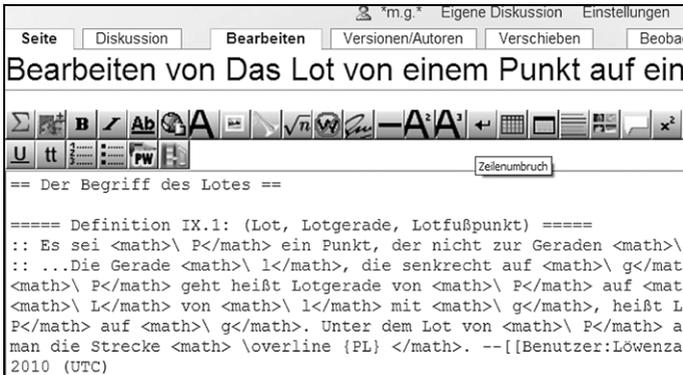


Abb. 2: Die Seite aus Abb. 1 im Bearbeitungsmodus

Jede Standardseite des Wiki hat ihre eigene Diskussionsrunde:

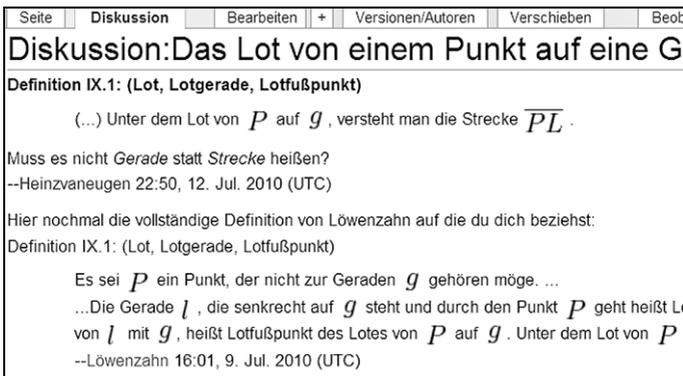


Abb. 3: Diskussionsseite zur Seite aus Abb. 1

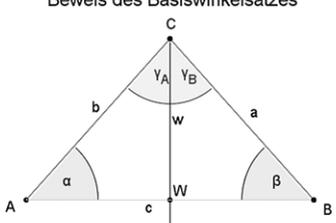
Häufig hat der ungeübte Benutzer zunächst Angst, den Inhalt der Seite „zu zerstören“. Hierzu besteht jedoch keine Veranlassung, da alle Versionen einer Seite gespeichert werden. Damit ist es schnell möglich, eine zeitlich ältere Version wieder zur aktuellen zu machen.

Geometrie- bzw. Mathematikoptionen im Wiki

Die Möglichkeit der gemeinsamen Bearbeitung von Dokumenten liefern auch andere Plattformen, wie etwa die an der PH Heidelberg favorisierte „Lernumgebung“ Stud.IP. Im mathematischen und insbesondere geometri-

schen Kontext bemerkt man jedoch schmerzhaft das Fehlen von Möglichkeiten der Eingabe von mathematischen Formeln und Zeichnungen oder gar die Einbindung interaktiver DGS-Applikationen. Die MediaWiki Software rendert hingegen Formeln, die in LaTeX-Syntax eingegeben wurden und ermöglicht die Einbindung von Bildern (png, jpg und svg). Darüber hinaus können sogar Geogebra-Applikationen in Wikiseiten eingebettet werden:

Beweis des Basiswinkelsatzes



Voraussetzung

- $a \cong b$

Behauptung

- $\alpha \cong \beta$

Hilfskonstruktion zur Beweisführung

- Winkelhalbierende w von $\angle ACB$

Begründung der Hilfskonstruktion

- Existenz und Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden

Folgerung aus der Hilfskonstruktion

- Es existiert W , der Schnittpunkt von w mit \overline{AB}

Begründung der Folgerung

- Lemma 1

Nr.	Beweisschritt	Begründung
1	<input checked="" type="checkbox"/> $a \cong b$	<input checked="" type="checkbox"/> Voraussetzung
2	<input checked="" type="checkbox"/> $\gamma_A \cong \gamma_B$	<input checked="" type="checkbox"/> w ist Winkelhalbierende von γ
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aus 4 folgt unmittelbar die Behauptung.
Begründung:

Schenkellänge = 6

Abb. 4: Screenshot einer eingebetteten Geogebra-Applikation

Weitere Medienoptionen im Wiki

Man kann Dokumente im PDF-Format auf die Wiki Plattform hochladen und dann per Link in die Wiki-Dokumente einbinden. In das Wiki lassen sich weiterhin Videos einbetten, die auf anderen Plattformen wie etwa Youtube gehostet sind. Von dieser Möglichkeit machten wir Gebrauch, indem Videoaufzeichnungen von Vorlesungsteilen in das Wiki eingefügt wurden. Mittels des Tags `<iframe src= ...> Applikation </iframe>` lassen sich zudem auf externen Servern laufende Applikationen einbinden (etwa *.swf).

Multiple Choice Tests

Eine Erweiterung der MediaWiki-Software ist die Generierung verschiedener Formen von Tests auf der Grundlage von Multiple Choice. Die Ergänzung der klassischen Übungsaufgaben durch einen derartigen Test wurde von den Studierenden ausnahmslos begrüßt – auch wegen der Hinweise zur Lösung, die mehr oder weniger ausführlich in den Test eingebaut werden können.

1. Die Voraussetzung ist korrekt notiert

— ja, richtig!

Die Behauptung ist korrekt notiert.

— auch das stimmt!

Der "nulle" Beweisschritt und seine Begründung ist korrekt.

Die Begründung dieses Schrittes ist nicht ganz richtig. Nur weil wir eine Definition des Mittelpunktes haben, heißt dies ja noch lange nicht, dass dieser auch existiert.

— Richtige Begründung: Satz über die Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunktes einer Strecke.

Der erste Beweisschritt und seine Begründung ist korrekt.

— Ja, prima!

Der zweite Beweisschritt und seine Begründung ist korrekt.

— auch das stimmt!

Der dritte Beweisschritt und seine Begründung ist korrekt.

— ja, das ist OK!

Der vierte Beweisschritt und seine Begründung ist korrekt.

— in der Begründung fehlt noch der Hinweis auf den Kongruenzsatz sss, auf den man sich hier bezieht.

Der fünfte Beweisschritt und seine Begründung ist korrekt.

— das stimmt und damit ist die Behauptung gezeigt!

Beweise den Basiswinkelsatz!

Skizze:

VSS: $|AC| = |BC|$

Zz: $\alpha = \beta$

Beweisschritt	Begründung
0. $3 \text{ r.e. } \overline{AC} \equiv \overline{BC}$	0
1. $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$	VSS
2. $\overline{CP} \equiv \overline{CP}$	t.r.v.w.l.
3. $\Rightarrow \angle APC \equiv \angle BPC$	(W.K.)
4. $\Rightarrow \alpha = \beta$	(4)
5.	
6.	
7.	

Abb. 5: In das Wiki eingebetteter Multiple Choice Test (im Kontrollmodus)

1. In welchen Fällen ist der Begriff der Strecke mathematisch korrekt definiert worden?

- Eine Strecke ist die Menge aller Punkte, die zwischen zwei verschiedenen Punkten, den sogenannten Endpunkte der Strecke, liegen.
- Das ist leider nur die offene Strecke (Strecke ohne ihre Endpunkte).
- Eine Strecke ist die kürzeste Verbindung zweier verschiedener Punkte.
- informell ok, aber was heißt das "kürzeste Verbindung" ? Nicht beantwortet | 0 Punkte
- Eine Strecke ist die Vereinigung ihrer inneren Punkte mit ihren Endpunkten.
- Was ist das Innere einer Strecke?
- Eine offene Strecke ist die Menge aller Punkte, die zwischen zwei gegebenen verschiedenen Punkten liegen. Die beiden gegebenen Punkte heißen Endpunkte dieser offenen Strecke. Die Vereinigungsmenge einer offenen Strecke mit der Menge ihrer beiden Endpunkte ist die Strecke, die durch die beiden Endpunkte bestimmt ist.
- gute Idee: wenn man die Formelsprache meiden möchte, dann ist es einfacher erst den Begriff der offenen Strecke sprachlich zu klären.
- $\overline{AB} := \{P \mid |AP| + |PB| = |AB|\}$
- Kein Knoten in der Zunge, dafür nach der Formelangebe in den Fingern.
- $\overline{AB} := \{P \mid \exists w(A, P, B)\} \cup \{A, B\}$
- dasselbe, wie grad zuvor, warum?
- Eine Strecke ist eine beliebige konvexe Teilmenge einer Geraden.
- Wäre eine schöne Definition. Allerdings haben wir den Begriff der konvexen Menge über den Begriff der Strecke definiert. Typischer Fall, sich im Kreis zu drehen.

Abb. 6: Weiterer Screenshot eine Multiple Choice Tests (im Kontrollmodus)

Satellites

Während des Sommersemesters 2010 kreisten die Inhalte einiger anderer Lehrveranstaltungen thematisch um die Lehrveranstaltung „Einführung in die Geometrie“. Die Studierenden dieser Lehrveranstaltungen generierten Applikationen, die im Kontext des Geometrie-Wikis verwendet wurden.

Didaktik der Geometrie

Im Sommersemester 2011 werden auch die Inhalte der Lehrveranstaltung „Didaktik der Geometrie“ ein integraler Bestandteil des Geometrie-Wikis sein. Vorab unterstützten die Teilnehmer der Didaktikveranstaltung (als solche haben sie die „Einführung in die Geometrie in der Regel bereits hinter sich) im Sommersemester 2010 ihre Kommilitonen mit der Generie-

rung von Geogebra-Applikationen zum Thema Satz des Thales, in die sie ihr frisch erworbenes didaktisches Know-How einfließen ließen.

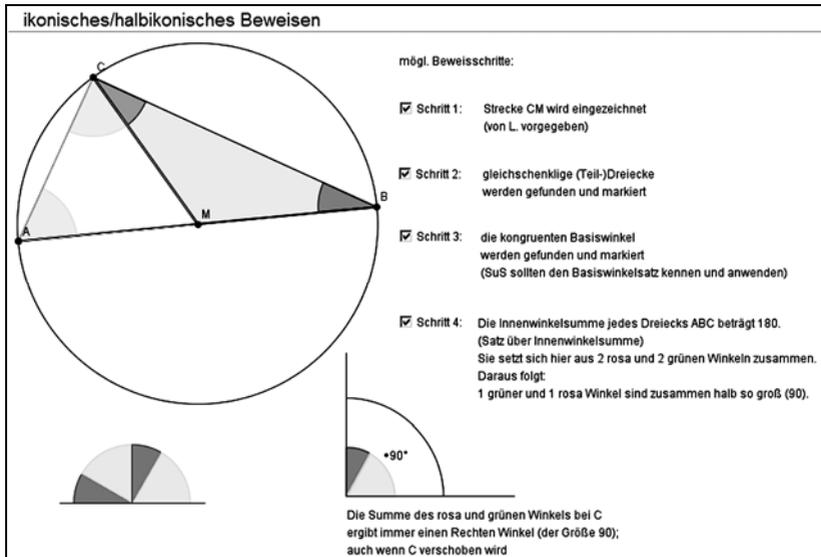


Abb. 7: Screenshot einer Geogebra-Applikation, die von Teilnehmern der Lehrveranstaltung „Didaktik der Geometrie“ angefertigt wurde

Lehren und Lernen mit digitalen Medien

Zentrales Thema der Lehrveranstaltung „Lehren und Lernen mit digitalen Medien“ war im Sommersemester 2010 der Einsatz und die Generierung von digitalen Videos für den Unterricht bzw. die Lehre an der PH. Ein Teil der Studierenden nahm hierzu die Vorlesung mit einer digitalen Videokamera auf, bearbeitete das aufgenommene Material und stellte es über YouTube für das Geometrie-Wiki zur Verfügung. Ein anderer Teil der Studierenden nahm eigene Videos auf, wie etwa ein Video zum Einstiegsbeispiel der Vorlesungsreihe: „Wie Eratosthenes die Erde vermaß“. Wieder andere Studierende skizzierten mittels eines Captureprogrammes Beweisideen für zentrale Sätze der Vorlesung.

Erstellen von Multimedienanwendungen für den Unterricht

Es ist bereits seit Jahren Tradition, dass die Studierenden dieser Lehrveranstaltung u.a. Flashapplikationen zur Unterstützung der Lehre generieren. Da der Durchführende dieser Lehrveranstaltung sich in starkem Maße der Geo-

metrie verpflichtete fühlt, handelt es sich dabei häufig um Applikationen für die Geometrieausbildung an der PH Heidelberg:

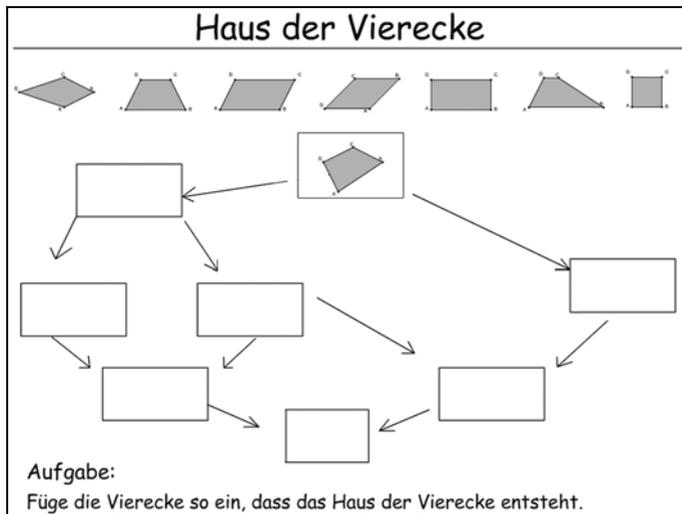


Abb. 8: Von Studierenden generierte Flashapplikation, die im Geowiki verwendet wird

Zusatzseminar Classroompresenter

Das Programm Classroompresenter wurde an der Universität Washington entwickelt und steht unter <http://classroompresenter.cs.washington.edu> zur freien Verfügung. Die grundlegenden Ideen des Programms bestehen darin, dass eine hinreichende Anzahl von Teilnehmern einen Tablet-PC im Rahmen einer Lehrveranstaltung nutzen kann. Die Computer sind miteinander vernetzt, wodurch es möglich ist, in einfacher Art und Weise den Studierenden gewisse Aufgabenstellungen in digitaler Form zukommen zu lassen. Die Aufgabenlösungen werden auf den Tablet-PC's mit Hilfe eines Eingabestiftes dokumentiert und an den PC des Leiters der Lehrveranstaltung geschickt. Dieser veröffentlicht die zugesandten Ergebnisse mittels eines Beamers. Eine Diskussion der veröffentlichten Ergebnisse schließt sich an.

Für das Geometrie-Wiki brachte ein zusätzliches Seminar, in dem das Programm Classroompresenter genutzt wurde, eine Fülle von authentischem Material, welches in die Aufgabengestaltung des Wiki Einzug hielt (siehe Abb. 9). U.a. wurde der auch Multiple Choice Test zum Basiswinkelsatz (siehe Abb. 5) auf der Grundlage der Lösung eines Studierenden aus diesem Classroompresenter-Seminar generiert.

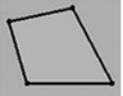
	<u>Def. Allgemeines Viereck:</u> Ein Viereck ist die Vereinigungsmenge der Verbindungsstrecken von vier nicht kollinearen Punkten.
	<u>Def. Trapez:</u> Ein Trapez ist ein Viereck mit einem Paar paralleler Seiten.
	<u>Def. Drachen:</u> Ein Viereck bei dem die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen und die eine die andere halbiert, heißt Drach.

Abb. 9: Authentische studentische Aufgabenlösungen lieferte der Einsatz des Programms „Classroompresenter“

To Wiki Or Not To Wiki

Be Quick Or Be Dead

Obiger Titel eines Songs von Iron Maiden kam dem Autor immer wieder zu Anfang des Sommersemesters 2010 im Zusammenhang mit dem Geometrie-Wiki in den Sinn. Viele zunächst engagiert betriebene „WEB2.0“-Projekte zeigen: Wenn das Projekt nicht relativ schnell ins Rollen kommt, ist es tot. Im Gegensatz zu „Larry“, einem Klassiker der Computerspiele, in dessen Spielverlauf es durchaus möglich war, mit gewissen Tricks den bereits toten Hauptdarsteller „Larry“ wieder zu recyceln, scheint für mehr oder weniger größere WEB-Projekte zu gelten: „einmal tot, immer tot“. (Man denke nur an die vielen Projektrudimente, die seit langem ein eher trauriges Dasein im WWW fristen.)

Damit war klar, unser Geometrie-Wiki musste recht bald zum Objekt der häufigen Nutzung unserer Studierenden werden. Demgegenüber stand eine ziemlich geringe Begeisterung für das Geometrie-Wiki auf der Seite der Studierenden. Bis zum Sommersemester 2010 war es üblich, dass den Studierenden ein Skript im PDF-Format zur Verfügung stand. Im selben Format konnten die Übungsaufgaben und deren Lösungen heruntergeladen werden. Genau dieser Service wurde den Studierenden im Sommersemester zunächst verweigert. Der folgende Abschnitt klärt, warum wir zu dieser drastischen Maßnahme greifen mussten.

There's No Way But The Hard Way

Wir wollten, dass die Studierenden das Wiki annehmen und wirklich zu ihrer Arbeitsplattform bezüglich der „Einführung in die Geometrie“ machen. Aus diesem Grunde mussten wir radikal alle Lehrinhalte von der Übungsaufgabe bis zum Skript im Wiki-Format anbieten. Viele Studierende reagierten mit heftigen Protesten. Insbesondere waren es zwei Gründe, die sie hinsichtlich der Ablehnung des Geometrie-Wikis spezifizierten:

- Dokumente im Wiki-Format lassen sich nicht mehr so komfortabel ausdrucken, wie es mit Dokumenten im PDF-Format möglich ist.
- Entsprechend des Wiki-Gedankens konnte ja jeder mehr oder weniger beliebig das Skript als auch die Übungsaufgaben ändern. Es grassierte die Angst, sich den Lehrstoff fehlerhaft anzueignen.

Diese beiden Gründe verdeutlichen, wie viele Studierende das Lernen allgemein und leider auch das von Mathematik verstehen. Skript und Übungsaufgabenlösungen werden in gedruckter Form gesammelt. Das gibt schon mal ein gewisses sicheres Gefühl. Wenn der zwangsläufig näher rückende Termin der Klausur hinreichend Druck erzeugt, versucht man, sich möglichst viele Fakten mechanisch anzueignen. In diesem Zusammenhang sprechen Studierende selbst von einer „Lehr-/Lernbulimie“. Zum Thema „Unmut der Studierenden“ schrieb User Heinz Van Eugen im Weblog von Christian Spannagel im Zusammenhang mit dem Geometrie-Wiki:

Lehr-/Lern-Bulimie (Reinstopfen und auskotzen) – sorry für die drastischen Worte – ist oftmals die einzige Lösung. Das Verständnis bleibt natürlich auf der Strecke und kann oftmals nicht abgeprüft werden.

(<http://cspannagel.wordpress.com/2010/06/19/ein-wiki-fur-eine-geometrieveranstaltung/#comments>)

Genau aus dem Grunde, dass wir diesen Kreislauf durchbrechen wollten, hatten wir ja das Wiki eingerichtet. Allein mit Appellen und Vorträgen, das wussten wir, war dem Phänomen nicht beizukommen. Wir kannten das ja aus den Semestern zuvor: War dem Dozenten in der Vorlesung oder in der Übung ein Fehler unterlaufen, regte sich ein lautstarker Sturm der Entrüstung. Jetzt hatte man doch tatsächlich etwas Falsches abgeschrieben! Was, wenn man jetzt dieses Falsche lernt und deshalb durch „die alles entscheidende Prüfung“ fällt? Der Autor weiß nicht mehr, wie oft er den folgenden Satz zum Vortrage brachte: „Wir wollen nicht Definitionen, sondern das Definieren lernen.“

Die Vorteile der eigenen aktiven Auseinandersetzung mit dem Lehrstoff erfährt man nur dadurch, dass man diese Auseinandersetzung wirklich betreibt. Mitunter muss man dazu „gezwungen“ werden. There's no way but the hard way: Es führt kein Weg daran vorbei, du musst es am eigenen Leib erfahren.

The Old Divide and Rule

Teile und herrsche ist ein klassisches heuristisches Prinzip des Problemlösens und unter dieser Bezeichnung insbesondere in der Informatik bekannt. Der Autor ist überzeugt davon, dass eine größere Beachtung dieses Prinzips, vielen Projekten im Zusammenhang mit dem neuen „MitmachWEB2.0“ zu einem größeren Erfolg verholfen hätte, als es ihm dann beschieden war. Mitunter scheint es, dass man sich zu sehr auf die Wirkung der Technik verlässt. Eine Lernplattform an sich bewirkt noch gar nichts. Hätten wir die Studierenden mit dem Wiki allein gelassen, schließlich sollte es ja das Wiki der Studierenden sein, wäre das Ganze wohl nach einem Monat Laufzeit nicht mehr zu retten gewesen. Im Weblog von Christian Spannagel hat der Autor das Problem wie folgt beschrieben:

Axiom 3 (Problem der naiven Arroganz)

Eine Webaktion, deren Ziel zu hoch angesetzt wird, ist von vornherein tot.

Eigentlich wollte ich das Axiom anders nennen: Axiom vom schnellen Kindstod. Mit der nun doch anders gewählten Bezeichnung möchte ich folgendes verdeutlichen: Zu schnell sind wir von Web2.0 & Co und den sich daraus ergebenden Möglichkeiten begeistert. Das ist der naive Teil. Wenn wir genauer hinsehen, erkennen wir natürlich, dass die Dinge so toll nun auch wieder nicht sind. Das verdrängen wir dann. Dieses Verdrängen ist auch eine gewisse Form von Arroganz. Will sagen: In vielen Fällen wusste man bzw. hätte man wissen können, dass man Totgeburten ins Web setzt.

(<http://cspannagel.wordpress.com/2010/06/19/ein-wiki-fur-eine-geometrieveranstaltung/#comments>)

Wenn unser Wiki also zum Leben erweckt werden sollte, so mussten die Studierenden zunächst an einzelne kleinere Aufgaben im Zusammenhang mit dem Wiki herangeführt werden, die derart beschaffen waren, dass die Studierenden sie bewältigen und die Lösung der Aufgaben für sich als wertvoll ansehen konnten. Erst im Laufe der Zeit konnten die Aufgaben komplexer werden. Der Autor möchte diese Idee vom üblichen Schreiben des Lehrveranstaltungsskripts durch den Lesenden bis hin zur immer offe-

neren Gestaltung des Vorlesungsskripts als das Prinzip „des immer größeren Mutes zur Lücke“ bezeichnen.

Mut zur Lücke

Kleine Lücke

Skript nach der Vorlesung:

Definition V.2: (Inneres eines Winkels)

Das Innere eines Winkels $\angle ASB$

Skript nach der Bearbeitung durch eine Studentin:

Definition V.2: (Inneres eines Winkels)

Das Innere eines Winkels $\angle ASB$ ist der Schnitt ...der beiden Halbebenen SA, B^+ und SB, A^+ .

--Principella 10:47, 12. Jun. 2010 (UTC)

Mehr Lücken

Im Rahmen der folgenden Analogiebetrachtungen waren die fettgedruckten Teile durch die Studierenden zu ergänzen

Analogiebetrachtung: Halbgeraden und Halbebenen

Wir konstatieren:

- *Eine Gerade wird durch einen **Punkt** in zwei **Halbgeraden**. eingeteilt.*
- *Eine Ebene wird durch eine **Gerade** in zwei **Halbebenen** eingeteilt.*
- *Eine Gerade ist ein **eindimensionales** Objekt.*
- *Eine Ebene ist ein **zweidimensionales** Objekt.*

*Im Fall dieser Geradenteilung ist der Trenner ein **nulldimensionales** geometrisches Objekt. Im Fall dieser Ebenenteilung ist der Trenner ein **eindimensionales** geometrisches Objekt. Wenn also n die Dimension des geometrischen Objekts ist, das geteilt wird, dann hat der Trenner die Dimension **$n-1$** .*

Geradenteilung:

Es seien g eine Gerade und A ein Punkt auf ihr. Ferner sei Q ein von A verschiedener Punkt der Geraden g . Die Menge $g \setminus A$ wird durch den Trenner A in genau zwei Klassen eingeteilt:

- *Die Menge aller Punkte von $g \setminus A$, **die mit Q auf derselben Seite bezüglich A liegen**.*
- *Die Menge aller Punkte von $g \setminus A$, **die mit Q nicht auf derselben Seite bezüglich A liegen**.*

Ebenenteilung:

Es seien E eine Ebene und g eine Gerade, die vollständig in E liegt. Ferner sei Q ein nicht zu g gehörender Punkt der Ebene E . Die Menge $E \setminus g$ wird durch den Trenner g in genau zwei Klassen eingeteilt:

- *Die Menge aller Punkte von $E \setminus g$, die mit Q auf derselben Seite bezüglich g liegen.*
- *Die Menge aller Punkte von $E \setminus g$, die mit Q nicht auf derselben Seite bezüglich g liegen.*

Beweislücken

Es werden in der Vorlesung Beweise geführt die in tabellarischer Übersicht aufgeschrieben werden. Im Wiki ist das Rudiment der Beweise aufgeführt. Fehlende Stellen im Beweis sind zu ergänzen.⁵

Videolücke

Ein Beweis wird nicht explizit in das Wiki aufgenommen. Den Studierenden haben wir aber ein Vorlesungsvideo zur Verfügung gestellt. Aus diesem ist der Beweis zu rekonstruieren. Analog kann man hinsichtlich der Definition von Begriffen vorgehen.

Große Lücke

Ein leeres Wikidokument wird eingerichtet, die Studierenden füllen es selbstständig mit Inhalt.

Beispiel: Zentriwinkel Peripheriewinkelsatz (Auszug)

Satz:(Der Zentri-Peripheriewinkelsatz)

Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß, wie sein zugehöriger Zentriwinkel.

Beweis

Ich hab mir Gedanken zu den Fallunterscheidungen gemacht, komme aber irgendwie nicht weiter. Ich stelle meine Notizen mal hier ein, kann mir jemand weiter helfen?

--Barbarossa 13:22, 25. Jul. 2010 (UTC)

Jaaaaaaaaa :-) Ich glaube, ich hatte gerade DIE Eingebung, zumindest bezüglich der Fallunterscheidungen ;-).

⁵ Siehe http://wikis.zum.de/geowiki/index.php/Das_Lot_von_einem_Punkt_auf_eine_Gerade#Satz_IX.1:_Existenz_und_Eindeutigkeit_des_Lotes.29.

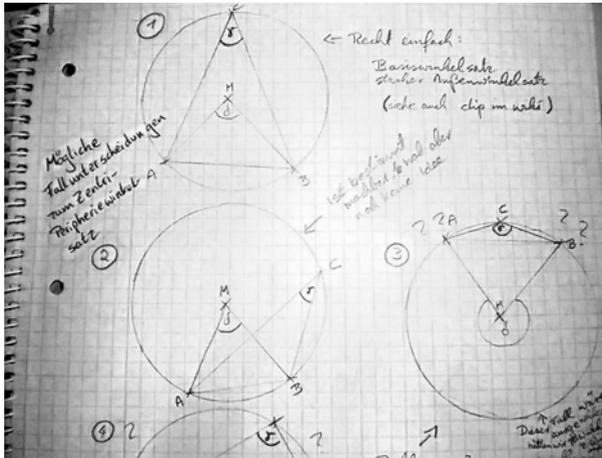


Abb. 10: Wenn es mit der Generierung der Seiten zu aufwendig wurde, betteten die Studierenden einfach Fotos ein.

Eigene Lücke

Zum Üben richteten die Studierenden eigene Seiten ein.

Abschließende Bemerkungen

Mögliche Potenzen des Verwendens eines Wikis für eine Hochschullehrveranstaltung

Die folgenden Potenzen der Wikinutzung im Rahmen einer Hochschullehrveranstaltung lassen sich erkennen:

Synergie

Bezüglich der früheren Arbeitsweise des Autors die u.a. darin bestand, einzelne Mails der Studierenden zu fachlichen Fragen der Vorlesung zu beantworten, diese dann ggf. zu anonymisieren und schließlich für alle Studierenden ins WEB zu stellen, ist die sofortige Arbeit in der Öffentlichkeit eine Arbeitserleichterung. Hinzu kommen natürlich die positiven Effekte einer Diskussion der Studierenden untereinander. Die alte Arbeitsweise per Mail wäre mit einem Schüler-Lehrer Zwiegespräch zu vergleichen, während die neue Arbeitsweise mit dem Wiki einem echten Unterrichtsgespräch, in das (fast) alle Schüler involviert sind, gleichkommen würde.

Mitunter klären sich die Probleme in der Diskussion der Studierenden untereinander, ohne dass der Dozent eingreifen muss.

Anonymität

Auch wenn in einem Lehrveranstaltungsbegleitenden Wiki die Anonymität der Teilnehmer nur bedingt gewährleistet sein kann, trägt doch der Umstand einer höheren Anonymität als in einer Lehrveranstaltung dazu bei, eher fachlichen Kontext in die Diskussion einzubringen, obwohl man sich über die Richtigkeit der eigenen Ausführungen gar nicht so sicher ist. Das Problem, einer „persönlichen Blamage“ vor den anderen Kommilitonen scheint doch erheblich größer zu sein, als man annehmen mag.

Identifizierung typischer Fehlvorstellungen und fachlicher Fehler der Studierenden

Ein Beispiel soll diesen Punkt zunächst illustrieren. Der Autor ist nun schon ein Viertel Jahrhundert in die Ausbildung von Mathematiklehrern involviert. Immer wieder stand er fassungslos vor der Tatsache, dass sich viele Studierende bei der Identifizierung von Voraussetzung und Behauptung einer Implikation äußerst schwer tun. Die Fülle derartiger problembehafteter Ausführungen der Studierenden im Geometrie-Wiki ließ ihn endlich begreifen, worin des Pudels Kern besteht. Umgangssprachlich ist die gesamte Implikation eine Behauptung. Die Implikation, *wenn Schweinsteiger seinen ersten Zweikampf gewinnt, wird Deutschland Weltmeister*, würde man sicherlich umgangssprachlich insgesamt als eine gewagte Behauptung bezeichnen. Es war die Fülle der studentischen Beiträge im Wiki, die den Autor die entsprechende studentische Fehlvorstellung in ihrer Ursache endlich begreifen ließ.

Medienvielfalt

Der Autor nutzt seit Längerem die verschiedensten Medien in seinen Lehrveranstaltungen. Die Möglichkeit der Zusammenführung aller dieser Medien über die Mediawiki-Software stellt eine erhebliche Arbeitserleichterung dar.

Probleme der Nutzung eines Wiki zur Begleitung einer Lehrveranstaltung

Kurz und knapp: Wikis sind a priori nicht für den expliziten Einsatz in Lehrveranstaltungen gemacht. Während die Intention eines Wikis vor allem der Generierung des *Endproduktes* gilt, ist es in einer Lehrveranstaltung vor

allem der *Prozess der Erkenntnisgewinnung*, der den Wert des Wikis ausmacht.

Während sich etwa in der Wikipedia Experten zusammenfinden, die das Ziel haben, einen Sachverhalt möglichst prägnant und exakt darzustellen, sind es im Rahmen einer Lehrveranstaltung auch User die sich ansonsten nicht freiwillig an die Darstellung des entsprechenden Kontextes gewagt hätten. Kürzer: viele User wollen lediglich durch die Prüfung kommen.

Insbesondere für diese User ist es ein Problem, wenn das Wiki ausufert. Gerade die Möglichkeit, ständig eine neue „Baustelle“ aufzumachen, birgt die Gefahr, die Übersicht im Wiki zu verlieren.

Ansätze zur Lösung der Probleme, der Nutzung eines Wikis im Rahmen einer Lehrveranstaltung

Wie angedeutet, besteht das Problem insbesondere in der Unübersichtlichkeit, die sich schnell bei der Arbeit mit einem Wiki ergibt. Häufig kamen die Dozenten bei der Klarstellung gewisser Probleme zu spät, weil sie die entsprechende Baustelle erst zu spät entdeckten. Letztlich handelt es sich auch um ein zeitliches Problem. Natürlich ist eine möglichst vielfältige Diskussion gewünscht. Je mehr sie stattfindet, desto weniger wird es dem Dozenten möglich sein, selbst in die Diskussionen einzugreifen. Hilfe bietet die Arbeit mit Tutoren, die die Arbeit am Wiki begleiten.

Voraussetzungen für die Nutzung von DRGS im Unterricht

Olaf Knapp

Zusammenfassung. Wenn Dynamische Raumgeometrie-Systeme (DRGS) im Schulunterricht eingesetzt werden sollen, müssen diese bestimmten, schulspezifischen Anforderungen genügen. Günstig wäre es bspw., wenn diese „intuitiv“ wären. Was aber ist intuitiv? Welche weiteren Kriterien sollten DRGS erfüllen? Lehrer und Schüler benötigen spezifische Hilfen beim Erlernen von DRGS und beim Lernen mit DRGS. Wie kann dieses Lernen unterstützt werden? In diesem Beitrag werden neben allgemeinen Überlegungen konkrete Beispiele gegeben, die vorgenannten Fragen didaktisch gewinnbringend zu beantworten.

Einleitung

„Ein zeitgemäßer Mathematikunterricht muss die von digitalen Medien geprägte Lebenswelt von Schülerinnen und Schülern berücksichtigen. Digitale Medien [...] verbessern die Unterrichtskultur nicht per se. [...] Wir sehen es [...] als unverzichtbar an, über den Einsatz von Taschenrechnern hinaus diese digitalen Werkzeuge nachhaltig in den Mathematikunterricht zu integrieren.“

(Madipedia 2011)

Solche digitalen Werkzeuge zur Bereicherung des Unterrichts können DRGS sein. So ermöglichen für die schulische Raumgeometrie entwickelte leistungsfähige DRGS wie bspw. Cabri 3D (Bainville/Laborde 2004-2007) dem Novizen ohne zwingende Kenntnis der Methoden der Darstellenden Geometrie einen *interaktiven Zugang* zum Visualisieren, Erzeugen und Manipulieren von räumlichen Figuren im virtuellen „Handlungsraum“ (Schumann 2007). Unter „Interaktivität“ soll im allgemeinen Sinne die technische Interaktion und Operation eines Menschen mit einem Computer durch wechselseitige Bezugnahme verstanden werden, bei der sowohl der Mensch als auch der Computer unterschiedliche Wahlmöglichkeiten zur Verfügung haben, wobei der Mensch durch seine physischen und psychischen Ressourcen, der Computer durch die Programmierung beschränkt ist. Der Mensch kann den Verlauf des „kommunikativen Aktes“ steuern und kontrollieren, was ein ausschließliches Bereitstellen von Informationen hinsichtlich der Begriffe „interaktiv“ bzw. „Interaktion“ ausschließt (vgl. Kerres 2001). Zur allgemeinen pädagogischen Bedeutung der Interaktivität für das Lehren und Lernen mit Neuen Medien und der damit verbundenen didaktischen Mehrwertgenerierung sei hier auf Strzebkowski/Kleeberg (In:

Issing/Klimsa 2002, S. 229-245), speziell für die Mathematikdidaktik auf Schumann 2007 verwiesen.

In Ermangelung der Existenz (schul-)praktikabler Realwerkzeuge (wie Zirkel und Lineal für die Planimetrie) ist direktes raumgeometrisches Konstruieren nur im virtuellen Raum möglich. Ein interaktiver Zugang hierzu kann bei den zurzeit vorhandenen Ressourcen in der Schule durch DRGS erfolgen. Analog den für die ebene Geometrie konzipierten Dynamischen Geometrie-Systemen (DGS) ermöglichen DRGS dynamisches Arbeiten.

Für den Einsatz von DRGS im Schulunterricht sind neben der Kenntnis entsprechender Produkte (z.B. durch Lehrerfortbildungen, als Teil der Lehramtsausbildung, Beiträge in Praxiszeitschriften etc.) allgemeine Faktoren wie eine leichte Verfügbarkeit (z.B. als Downloadversion im Internet), ein günstiger Preis, eine einfache, sich selbsterklärende Installation oder die Netzwerктаuglichkeit (z.B. Kompatibilität mit Musterlösungen) Voraussetzungen für ihre Nutzung. Ebenso stellt die Raumvorstellungsfähigkeit sowohl einen wichtigen Einflussfaktor für die Nutzung von DRGS im Unterricht, als auch ihre Schulung durch ein DRGS dar. Auf das grundlegende Problem der Darstellung räumlicher Phänomene auf einem planaren Bildschirm kann hier aus Platzgründen nicht näher eingegangen werden. Exemplarisch sei an die Problematik der „Rot-Grün-Brillen“ erinnert. Da etwa 9 % aller Männer und 1 % aller Frauen von Dyschromatopsie („Rot-Grün-Sehschwäche“) betroffen sind (Wikipedia 2011), sind diese Brillen für diese Menschen nicht geeignet, um einen Verräumlichungseffekt zu erzielen.

Grundlegende Problematik bei der Benutzung von Software

Für den Softwarenutzer ist die *erste Hürde* der Umgang mit der *Benutzeroberfläche*. Verliert er hier schnell die Lust sich mit ihr im Dialog aktiv auseinanderzusetzen oder hindert ihn die Oberfläche gar daran, bauen sich eventuell neben fachlichen Hürden noch emotionale auf. Zur Begriffsklärung sei darauf hingewiesen, dass ein Dialog eine Interaktion zwischen einem Benutzer und einer Software (hier DRGS) ist, um ein bestimmtes Ziel zu erreichen (vgl. CEN 1995, S. 5).

Um dem Aufbau von Hürden entgegenzuwirken, sollte die Benutzeroberfläche einen Aufforderungscharakter besitzen und den Nutzer zur aktiven Auseinandersetzung mit ihr anregen. Sie sollte ihn ermuntern, sich weiter

mit ihr zu beschäftigen, um alle in die Software implementierten Optionen nach und nach kennen zu lernen, um sie später selbständig (etwa beim Problemlösen) nutzen zu können. Der Aufforderungscharakter wird u.a. dadurch bestimmt, inwieweit die Software an das Vorwissen des Nutzers anknüpft, z.B. durch Wiedererkennungseffekte an ihm bereits bekannte Programme und Wissensbereiche oder, ob die Benutzeroberfläche „intuitiv“ ist.

Was bedeutet in diesem Zusammenhang „intuitiv“?

Das Wort „intuitiv“ wird etymologisch häufig synonym für „instinktiv“, „unwillkürlich“, „spontan“ oder „gefühlsmäßig“ verwendet. Ebenso finden sich Parallelen zum Begriff des „intuitiven Denkens“. In der Lernpsychologie sind wesentliche Merkmale intuitiven Denkens der spontane Einfall und ein averbaler Charakter wie er bspw. in psychologischen Diagnosen als „Unmittelbarkeit der Erkenntnis“ oder „eingebungsartige Erfassung des Wesentlichen“ gekennzeichnet wird (vgl. Edelmann 2000, S. 142 f.). Edelmann weist aber auch darauf hin, dass „Trotz des Gefühls der Evidenz (Offensichtlichkeit) ... es hierbei zu Irrtümern kommen [kann]“. Deswegen forderten einige Autoren „in einem zweiten Schritt analytisches Denken und eine sprachliche Formulierung der Gedanken“ (ebd.).

Analog Urhahne/Harms 2006, S. 365 wäre „intuitiv“ die „schnelle Einschätzung einer antizipierten Situation“. Man könnte hier auch von der „Erwartungskonformität“ als einem Grundsatz der Dialoggestaltung sprechen. Dieser Begriff stammt aus der Software-Ergonomie als Wissenschaft von der Anpassung der Technik an ihre Benutzer, speziell der benutzergerechten Gestaltung der Mensch-Computer-Interaktion (vgl. Eberleh et al. 1994, S. 1). Die Verhaltens- und Wahrnehmungsgewohnheiten des Nutzers werden quasi zur Grundlage genommen, die zu entwickelnde Software dem Menschen anzupassen um u.a. den eingangs erwähnten physischen und psychischen Ressourcen des Benutzers entgegenzukommen. Analog Eberleh et al. 1994 könnte man sagen, dass je weniger Zeit es eigens für das Erlernen der Benutzung einer neuen Software oder einzelner -teile aufzuwenden gilt, desto geringer ist der Lernaufwand (vgl. ebd., S. 87 ff.). Ist dieser Zeitaufwand gleich oder annähernd Null, so ist die Software „intuitiv“.

Das Europäische Komitee für Normung hat in der EN ISO 9241-10 weitere allgemeine Grundsätze der Dialoggestaltung festgelegt (vgl. CEN 1995). Grundsätzlich sind demnach die Aufmerksamkeitsspanne, die Grenzen des

Kurzzeitgedächtnisses, die Lerngewohnheiten, der Grad an Erfahrung bezüglich der Arbeit und im Umgang mit dem Dialogsystem (z.B. einem DRGS) und das mentale Modell des Benutzers von der zugrunde liegenden Struktur und dem Zweck der Software, mit dem der Benutzer arbeiten wird prinzipiell zu berücksichtigen (vgl. ebd., S. 4).

Software-ergonomische Prinzipien und Anforderungen an DRGS

Im Folgenden werden allgemeine software-ergonomische Prinzipien kurz beschrieben und als ein Analyse- bzw. Bewertungsinstrument auf DRGS am Beispiel von Cabri 3D angewendet.

(AA) Prinzip der Aufgabenangemessenheit

Neben den allgemeinen Aufgaben von Windowsapplikationen wie etwa dem Öffnen, Speichern und Verwalten von Dateien kommen im Falle eines DRGS darüber hinaus speziell auch das Lösen von Aufgaben, wie das raumgeometrische Konstruieren, Variieren und Manipulieren hinzu. Diesem Prinzip folgend soll ein Programm die Schüler unterstützen, ohne dass der Lösungsprozess durch spezifische Eigenschaften des Systems (etwa durch die Dialogführung) unangemessen behindert wird.

Ein DRGS wie Cabri 3D erfüllt die Anforderungen an das didaktische Prinzip der Passung (vgl. Steiner, in: Krapp/Weidenmann 2006, S. 185). Über Konstruktionsaufgaben hinaus können Variations-, Satzfindungs-, Beweisaufgaben etc. mit Hilfe der angebotenen Werkzeuge bearbeitet werden.

Weiterhin sollte ein DRGS dem Benutzer nur solche Informationen anzeigen, die im Zusammenhang mit der Erledigung der Arbeitsaufgabe stehen (vgl. CEN 1995, S. 5). So sollen etwa Vorschläge zur Formatierung nur dann angezeigt werden, wenn sie die Erledigung der Arbeitsaufgabe erleichtern. In zunächst unübersichtlichen Konstruktionen sollten sich demnach erst nach Benutzereingaben bzw. -rückfragen Dialoge öffnen, um z.B. Objektfarben zu ändern oder zusätzliche Informationen zu erhalten. Die angezeigte Hilfe-Information sollte von der Aufgabe abhängen. So werden bspw. weitergehende und erklärende Hilfen in Cabri 3D in einem besonderen Fenster („Online-Hilfe“) angeboten. Ruft der Benutzer in Cabri 3D „Hilfe“ auf, hat er die Auswahl aus verschiedenen Hilfeangeboten.

Alle Aufgaben die sinnvollerweise dem DRGS zur automatischen Ausführung übertragen werden können, werden von dem DRGS Cabri 3D ausge-

führt, ohne den Benutzer damit zu belasten. So laufen z.B. Startprozeduren des Systems automatisch ab (vgl. ebd.).

Bei der Gestaltung von Dialogen sollte der Komplexität von Arbeitsaufgaben unter Berücksichtigung der Fertig- und Fähigkeiten des Benutzers Rechnung getragen werden. Die Form der Ein- und Ausgabe sollte der jeweiligen Arbeitsaufgabe und den Benutzerbelangen angepasst sein (vgl. ebd.). Dialoge sollte den Benutzer bei der Erledigung wiederkehrender Aufgaben unterstützen. Gibt es für eine Arbeitsaufgabe Standardwerte, so sollten diese dem Benutzer als Vorgabe angeboten werden. Diese Werte sollten aber auch durch andere Werte oder durch andere aufgabenangemessene Vorgabewerte ersetzt werden können, wie dies in Cabri 3D möglich ist. Die Eingabe z.B. über einen wissenschaftlichen (Taschen-)Rechner in Cabri 3D gestattet die Eingabe freier Werte, voreingestellter Werte (z.B. e , π) und abhängiger Werte.

Ein DRGS sollte keine unnötigen Arbeitsschritte erforderlich machen, um eine spezifische Aufgabe zu lösen.

(SE) Prinzip der Selbstbeschreibung und Selbsterklärung

Ein DRGS sollte dem Benutzer, dort wo es zweckmäßig ist, eine Rückmeldung geben (vgl. ebd.). Die in den jeweiligen „Hilfoptionen“ (in Cabri 3D etwa die Online-Hilfe, das Benutzerhandbuch und die Online-Tutorials) beschriebenen Programmeigenschaften sollten integriert sein. Wenn der Vollzug einer Handlung schwerwiegende Folgen haben kann „[...] sollten vor der Ausführung Erläuterungen gegeben und eine Bestätigung verlangt werden“ (ebd.) (z.B. „Wollen Sie wirklich ohne speichern abbrechen?“).

„Das unmittelbare Anzeigen eingegebener Daten und das Anzeigen des Änderungszustands der Daten sind notwendig, um [Anmerk. d. A.] dem Benutzer beim Verstehen dessen zu helfen, was in der Anwendung geschieht und was er beeinflussen kann.“ (ebd.)

Eine unmittelbare Anzeige wäre bezogen auf Cabri 3D bspw. die sofortige Erzeugung eines Punktes an dem Ort, auf den der Nutzer geklickt hat. Das unmittelbare Anzeigen des Änderungszustands der Daten wäre z.B. im Zugmodus das „Mitwandern“ eines Punktes mit dem Mauszeiger.

Rückmeldungen oder Erläuterungen sollten eine einheitliche Terminologie verwenden, die sich aus der Schulmathematik ableitet (vgl. ebd., S. 7). Der Benutzer kann wahlweise eine Erläuterung in allgemeiner Form oder in

Form eines Beispiels abrufen. Ein DRGS wie Cabri 3D bietet eine Hilfe an, die mit der gegenwärtigen Tätigkeit zusammenhängt (kontext-sensitive Hilfe wie etwa die „Online-Hilfe“) (vgl. ebd., S. 7). Allgemein soll die Qualität von Rückmeldungen oder Erläuterungen den Bedarf minimieren, Benutzerhandbücher oder externe Informationen heranziehen zu müssen und so häufigen Medienwechsel vermeiden. Die Rückmeldungen und Erläuterungen sollten keine Werturteile enthalten (vgl. ebd., S. 8).

Globale und lokale Hilfen und Erläuterungen sollten in schülerverständlichen Formulierungen erfolgen. Diese können automatisch oder benutzerdefiniert abgerufen werden. Damit kann Orientierungsverlust, unbekanntes und falsches Eingeben, sowie inhaltliche Fragen den Anwendungsbereich betreffend begegnet werden.

(SB) Steuerbarkeit

„Ein Dialog ist steuerbar, wenn der Benutzer in der Lage ist, den Dialogablauf zu starten sowie seine Richtung und Geschwindigkeit zu beeinflussen, bis das Ziel erreicht ist.“ (ebd., S. 8)

Hier werden die dem Windowsstandard entsprechenden interaktiven Ein- und Ausgabemuster zur benutzerbestimmten Dialogführung angesprochen. Die Geschwindigkeit des Dialogs sollte nicht vom DRGS vorgeschrieben werden. Sie sollte immer unter Kontrolle des Benutzers stehen entsprechend den Belangen und Merkmalen des Benutzers. Ferner sollte kein Eingabefeld oder Objekt gelöscht, ersetzt oder anderweitig dem Benutzer unzugänglich gemacht werden bis der Benutzer die Vollständigkeit der Dateneingabe bestätigt. Das DRGS sollte dem Schüler die Kontrolle darüber geben, wie der Dialog fortgesetzt werden soll. Es bietet dem Benutzer die Möglichkeit, auf gelöschte Objekte zurückzugreifen bzw. diese wiederherzustellen. Für ungeübte Benutzer sollten Menüs und für geübte Benutzer Kurzwahltaasten zur Verfügung stehen (vgl. ebd., S. 8, 9).

(FT) Prinzip der Fehlertoleranz und Fehlerbehandlung

„Ein Dialog ist fehlertolerant, wenn das beabsichtigte Arbeitsergebnis trotz erkennbar fehlerhafter Eingaben entweder mit keinem oder mit minimalem Korrekturaufwand durch den Benutzer erreicht werden kann.“ (ebd., S. 10)

Ein DRGS sollte den Benutzer dabei unterstützen, Eingabefehler zu entdecken und zu vermeiden. Es sollte verhindern, dass eine Benutzereingabe zu undefinierten Systemzuständen oder zu -abbrüchen führen kann (vgl. ebd.).

Sollte eine Abfolge von Handlungen erforderlich werden, so ist das DRGS so zu gestalten, „[...] dass der jeweils nächste Schritt in einem Ablauf aus den angezeigten Informationen erkannt werden kann“ (ebd.). So prüft etwa der „Rechner“ in Cabri 3D die Benutzereingaben auf definierte Ziffern, falls nur Ziffern erlaubt sind. Ist diese Vorgabe nicht erfüllt, so zeigt Cabri 3D eine Fehlermeldung („Nicht definiert“) an. Dabei enthält es Informationen über das Auftreten des Fehlers, die Art des Fehlers und mögliche Methoden der Korrektur in dem Maße, in dem das DRGS diese Informationen geben kann (vgl. ebd., S. 11). Die kontextsensitive Hilfe in Cabri 3D könnte diesbezüglich noch über die Online-Hilfe hinaus ergänzt werden.

Cabri 3D „verzeiht“ dem Schüler den/die begangenen Fehler mittels Aufruf einer Undo-Funktion. Eine programminterne, nicht sichtbare und anzuzeigende externe Protokoll-Funktion (etwa via „Konstruktionsbeschreibung“) ermöglicht dem Nutzer den individuellen Arbeitsweg zur Selbstkontrolle zurück zu verfolgen und den gewünschten Arbeitsschritt aufzurufen.

(EK) *Prinzip der Erwartungskonformität*

„Ein Dialog ist erwartungskonform, wenn er konsistent ist und den Merkmalen des Benutzers entspricht, z.B. den Kenntnissen aus dem Arbeitsgebiet, der Ausbildung und der Erfahrung des Benutzers sowie den allgemein anerkannten Konventionen.“ (ebd., S. 9)

Die Interaktion mit dem System soll den Erwartungen der Schüler entsprechen, die sie bereits aus Erfahrungen mit Arbeitsabläufen ohne und mit dem Computer haben. Das Dialogverhalten und die Informationsdarstellung sollten innerhalb eines DRGS einheitlich sein. In Cabri 3D ist dies z.B. bei dem grundsätzlich gleichen bzw. analogen Aufbau der Objekteigenschaftsfenster nach Objektfarbe, -größe/-dicke, -stil etc. der Fall.

Zustandsmeldungen des DRGS werden stets an der entsprechenden Stelle ausgegeben. In Cabri 3D werden etwa der erläuternde Text eines Werkzeugs bei Mouseover oder die Objektinformationen bei Mouseover in der Zeichenfläche an den entsprechenden Stellen ausgegeben. Die bekannten Tastenkombinationen sind in Cabri 3D implementiert (vgl. ebd.).

Ein DRGS sollte den Wortschatz verwenden, der dem Benutzer bei der Erledigung der Arbeitsaufgabe vertraut ist (vgl. ebd.). Besonders hier zeigt sich, dass in diesem Sinne Cabri 3D auf die Mathematik in der Schule hin ausgelegt ist und sich damit didaktisch von marktüblichen 3D-CAD-Systemen

men abgrenzt. Die im Dialog verwendeten geometrischen Fachausdrücke sind identisch mit jenen, welche im Bereich der Geometrie der Schulmathematik tatsächlich verwendet werden (vgl. ebd.).

„Auf Eingaben des Benutzers sollte eine unmittelbare Rückmeldung folgen, soweit dies den Erwartungen des Benutzers entspricht“ (ebd., S. 10). Wenn der Nutzer eine Strecke erzeugen will und die entsprechenden Objekte definiert hat, sollte sie unverzüglich erzeugt werden. Cabri 3D ist diesbezüglich nicht nur hinsichtlich der Rückmeldungen erwartungskonform, die Rückmeldungen berücksichtigen ferner den Kenntnisstand von Schülern.

In einem DRGS kann ein Punkt die Funktionen eines frei verschiebbaren Punktes („Basispunkt“), eines von einem anderen Objekt abhängigen Punktes („Laufpunkt“) oder eines von zwei anderen Objekten abhängigen Punktes („Schnittpunkt“) einnehmen. Analoges gilt für andere Objekte. Es existiert also eine „Hierarchie von Abhängigkeiten“ (vgl. Talmon/Yerushalmy 2003). Dies sollte je nach funktionalem Zusammenhang durch eine je einheitliche Darstellung (z.B. durch unterschiedliche Farbgebung und Gestalt) eines jeden Punktes an den Nutzer rückgemeldet werden.

In Abb. 1 ist mit der Konstruktion eines Pyramidenstumpfes in Cabri 3D ein Beispiel aus der Sekundarstufe I zu sehen. Basispunkte, Laufpunkte und Schnittpunkte wurden konstruiert und – da Cabri 3D die vorgenannten Optionen nicht bietet – nachträglich mit unterschiedlichen Farben und Gestaltungen versehen. Gemäß Talmon/Yerushalmy 2003 hängt davon – neben der dahinter liegenden Geometrie – auch der Umgang der Nutzer mit einem DGS bzw. analog von einem DRGS ab.

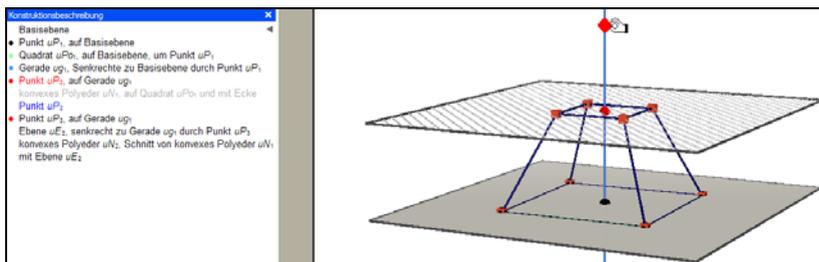


Abb. 1: Pyramidenstumpf und Konstruktionsbeschreibung

Die aus anderen Windowsapplikationen bekannten und damit zu erwartenden Exportmöglichkeiten (z.B. der HTML-Export oder das Einbinden in andere Windowsapplikationen wie „PowerPoint“) existieren.

(IF) Prinzip der Individualisierbarkeit und Flexibilität

„Ein Dialog ist individualisierbar, wenn das Dialogsystem Anpassungen an die Erfordernisse der Arbeitsaufgabe, individuelle Vorlieben des Benutzers und Benutzerfähigkeiten zulässt.“ (ebd., S. 11)

Ein DRGS wie Cabri 3D sollte Ein- und Anpassungsoptionen für die je individuellen Bedürfnislagen des Benutzers hinsichtlich Sprache, kulturelle Eigenheiten, „[...] sowie an individuelles Wissen und Erfahrung auf dem Gebiet der Arbeitsaufgabe und an das Wahrnehmungsvermögen sowie die sensomotorischen und geistigen Fähigkeiten“ besitzen (ebd., S. 12). Dies kann etwa durch eine adressatenkonfigurierbare Menüleiste oder das Einstellen bestimmter Sprachen oder Farben aus einer Sprach- oder Farbauswahl vor oder während des Programmlaufes geschehen.

Nachdem die Beherrschung des Systems mit wachsendem Umgang mit dem System zunimmt, ist diesem Umstand Rechnung zu tragen (vgl. auch Schumann 2007). So sollen die Schüler den Benutzungsvorgang jederzeit unterbrechen und diesen nach Benutzung eines anderen Systemteils an der Unterbrechungsstelle fortsetzen können (vgl. ebd.).

(LF) Prinzip der Lernförderlichkeit

„Ein Dialog ist lernförderlich, wenn er dem [sic] Benutzer beim Erlernen des Dialogsystems unterstützt und anleitet.“ (CEN 1995, S. 12)

Ergänzend wird erläutert, dass „[...] Regeln und zugrundeliegende Konzepte, die für das Erlernen nützlich sind“ dem Benutzer zugänglich gemacht werden sollen, „[...] damit dieser sich eigene Ordnungsschemata und Merkgeltern aufbauen kann“ (ebd.). Zur Verdeutlichung wird hier exemplarisch auf das „Online-Hilfe-Fenster“ in Cabri 3D verwiesen. Durch die „Online-Hilfe“ in Cabri 3D kann sich der Benutzer Informationen „über das Modell, auf dem die Anwendung aufgebaut ist, anzeigen lassen“ (ebd.). Dieses Fenster nimmt immer den gleichen Platz auf dem Bildschirm ein und kann dennoch benutzerdefiniert verschoben werden. Der Nutzer erhält so bspw. Informationen über das zuvor ausgewählte Werkzeug.

In Cabri 3D wird das „Learning-by-doing“ dadurch unterstützt, „[...] dass der Benutzer ermutigt wird: zu experimentieren, in unterschiedlichen Situationen Beispiele durchzuspielen, ‚Was wäre wenn?‘-Alternativen anzuwenden ... ohne dass die Gefahr besteht, potentiell katastrophale Ergebnisse herbeizuführen“ (ebd.).

(ÜS) *Das Prinzip der Übersichtlichkeit*

Ein DRGS soll sich den Schülern „übersichtlich“ darstellen. Das betrifft die zeitliche und örtliche Organisation grafischer und verbaler Informationen auf dem Bildschirm, deren Kodierung und Wahrnehmbarkeit (Screen Design) (vgl. Schumann 2007). So sollten etwa die Menüleiste, die Werkzeugleiste und das Zeichenblatt entsprechend grafisch getrennt sein.

(TP) *Prinzip der Transparenz*

Die Werkzeugleiste sollte beispielsweise nach dem Ordnungsschema „von einfachen Grundkonstruktionswerkzeugen zu erweiterten Konstruktionswerkzeugen“ geordnet sein. Der Schüler sollte die Programmrückmeldungen durchschauen und verstehen können. Etwa dann, wenn er je nach geometrischem Kontext mit dem Mauszeiger über einen Punkt fährt und die Meldungen „diesen Punkt“ oder „ein neuer Punkt (Schnitt)“ erhält.

(PU) *Prinzip der Plattformunabhängigkeit*

Das Anwendersystem muss die Erstellung von Materialien (z.B. interaktive Arbeitsblätter, Applets), die in andere Anwendungen (z.B. PowerPoint) oder Medien (z.B. das Internet) implementiert werden können, unterstützen (vgl. Schumann 2007). So sollten etwa die erstellten internetkompatiblen Webseiten von allen gängigen Browsern les- und ausführbar sein. Das DRGS selbst sollte auf allen gängigen Betriebssystemen wie z.B. der Windows- oder Mac-Technologie lauffähig sein. Alle in diesem Betriebssystem üblichen integrierten Funktionen sollten angeboten werden.

Für die Schulpraxis wäre es wünschenswert, wenn alle nötigen Programmteile vollständig in das DRGS integriert sind, ohne dass zusätzliche Komponenten nachzuinstallieren oder extern aufzurufen sind. So wäre z.B. die vollständige Implementation „ab Werk“ des Cabri 3D Plug-Ins (CABRI-LOG 2011 a) in die Software Cabri 3D anzuregen.

Die oben genannten Forderungen und Prinzipien sind aber gemäß CEN 1995, S. 4 nicht unabhängig voneinander,

„[...] und es kann notwendig sein, die Vorteile eines Grundsatzes gegenüber denen eines anderen abzuwägen. Die Anwendbarkeit und die jeweilige Wichtigkeit hängen vom speziellen Anwendungsfall, von den Benutzergruppen und von der gewählten Dialogtechnik ab.“ (ebd.)

Demnach (vgl. ebd.) müssen (1) die „Ziele der Organisation“, (2) die „Benutzerbelange der vorgesehenen Benutzergruppe“, (3) die „Aufgaben, die unterstützt werden sollen“ und (4) die „verfügbaren Techniken und Mittel“ berücksichtigt werden, so dass es „notwendig sein kann, Prioritäten fallweise festzulegen (vgl. ebd.).

Gemäß dem Vorgenannten reicht es für den Einsatz von DRGS im Unterricht nicht aus, ein DRGS mit ansprechenden und aussagekräftigen Buttons in der Werkzeuggestreife zu versehen. Es muss durch die software-ergonomischen Standards für Dialogsysteme (Shneiderman 2009) auch „intuitiv“ sein. Obwohl Cabri 3D die o.g. Prinzipien und Standards weitgehend erfüllt, bestehen einige Phänomene, Mängel und Probleme der Darstellung und dem Programmablauf in und mit Cabri 3D. Hier wären bspw. zu nennen:

- Die bei aktivem Werkzeug dargebotene „Tellerebene“ ist (zumindest zu Beginn) gewöhnungsbedürftig und damit nicht zwingend „intuitiv“.
- Einen (freien) Punkt im Raum mittels der Umschalttaste zu erzeugen ist nicht zwingend „intuitiv“ und dauert einige Zeit, bis der Nutzer sich daran gewöhnt bzw. dies erlernt hat.
- Die von Cabri 3D geforderte primäre Auswahl der Basisebene beim Konstruieren wurde in empirischen Untersuchungen (Knapp 2010) nicht von allen Schülern als „intuitiv“ beschrieben. Ähnliche Erfahrungen machte der Autor auch in seinen eigenen Klassen.

Folgt man der Theorie des Graphical User Interfaces (GUI) als dominantem Interaktionsparadigma (Wessel 2002, ACM 2011), kann ein DRGS gemäß obiger Fragestellung als „intuitiv“ angesehen werden, wenn es bei standardisiertem Programmstart mindestens den Prinzipien der Erwartungskonformität, Übersichtlichkeit, Selbstbeschreibung/-erklärung, Steuerbarkeit, Fehlertoleranz/Fehlerbehandlung, Lernförderlichkeit und Transparenz folgt.

Die obige Reihenfolge ergibt sich dabei aus der persönlichen didaktischen Reihung einer intuitiven Benutzeroberfläche, die der Autor unter dem Eindruck und Einfluss der jahrelangen Benutzung von D(R)GS im Unterricht und aufgrund empirischer Forschungsergebnisse (Knapp 2010) konstatiert. Der Autor schlägt daher in Anlehnung an obige Ausführungen folgende *Definition* für eine *intuitive Benutzeroberfläche* für DGS und DRGS vor:

„Unter einer intuitiven Benutzeroberfläche für DGS/DRGS soll ein interaktiver Softwaredialog eines DGS bzw. DRGS verstanden werden, welcher

den Erwartungen des Nutzers entspricht, sich ihm übersichtlich darstellt, sich selbst beschreibt und erklärt, gegenüber den Eingaben des Nutzers fehlertolerant ist und einen geringen Korrekturaufwand erfordert, lernförderlich und transparent ist.“ Die Software ist dabei umso intuitiver, je geringer der aufzubringende Zeitaufwand ist, die Funktionen der Software zu beherrschen. Diese in der Human-Computer-Interaction (SIGCHI 2011) und anderen Wissenschaftsdisziplinen wie bspw. der Lernpsychologie (Edelmann 2000), Kognitionspsychologie (Anderson 2001) und speziell der Usability-Forschung (exemplarisch sei hier im Rahmen der Medienpädagogik das Webdesigning, u.a. beschrieben in Nielsen 2001, genannt) schon lange etablierten, tradierten und empirisch evaluierten Erkenntnisse (Clark et al. 2006) sind in der Mathematikdidaktik bisher leider vernachlässigt oder beschränken sich auf allgemeine Ausführungen mit marginalen mathematikdidaktischen Bezügen.

Vorteile einer intuitiven Benutzeroberfläche

Für den Nutzer, insbesondere für Novizen, bieten intuitive Benutzeroberflächen zahlreiche Vorteile, wie geringere Zugangs- und Lernvoraussetzungen, geringere softwaretechnische und emotionale Hürden, höhere Akzeptanz und Motivation, ökonomischeres, effektiveres und effizienteres Arbeiten, eine verkürzte Einarbeitungszeit sowie einen höheren Aufforderungscharakter, sich mit der Software und all ihren Optionen zu beschäftigen gegenüber Benutzeroberflächen, welche nicht intuitiv sind.

Ein erster Vergleich zweier DRGS – Cabri 3D und Archimedes Geo3D

Die bis September 2010 am weitesten entwickelten DRGS für den Einsatz in der Schule sind Cabri 3D und Archimedes Geo3D (Goebel 2005-2010). Schon ein oberflächlicher Vergleich zeigt beim standardisierten Programmstart der jeweiligen Programme:

- Der Cabri 3D-Bildschirm ist zweigeteilt, jener von Archimedes Geo3D dreigeteilt.
- Cabri 3D bietet weniger Optionen als Archimedes Geo3D.
- Die Cabri 3D-Werkzeugleiste erscheint magerer, dafür übersichtlicher.
- Die Anzahl unbekannter Symbole in Cabri 3D ist für Schüler der Mittelstufe absolut und prozentual geringer als in Archimedes Geo3D.

- Hilfsobjekte werden in Cabri 3D automatisch erzeugt.
- Cabri 3D bietet mehr interaktive Rückmeldeoptionen.
- Cabri 3D erlaubt das parallele Arbeiten in/mit mehreren Dateien.

Werkzeugleisten von Cabri 3D und Archimedes Geo3D:



Abb. 2: Cabri 3D-Werkzeugleiste

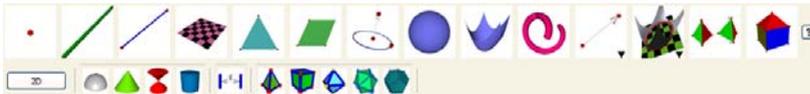


Abb. 3: Archimedes Geo3D-Werkzeugleiste

Anhand der Konstruktionsbeispiele „Erzeugung eines Kreisbogens in der Ebene und im Raum“ und „Erzeugung einer Gerade im Raum“ in den beiden DRGS wurde im Vortrag erläutert, wie für den fortgeschrittenen Lerner *das experimentelle Explorieren in DRGS* unterstützt werden kann und wo sich jeweils Probleme und Beschränkungen ergeben.

Es drängen sich somit u.a. folgende Hypothesen auf:

1. Cabri 3D ist intuitiver als Archimedes Geo3D.
2. Cabri 3D ist eher für die Mittelstufe (speziell für Haupt- und Realschulen) geeignet als Archimedes Geo3D.
3. Cabri 3D ist eher für jüngere Schüler geeignet als Archimedes Geo3D.
4. Archimedes Geo3D ist eher für Gymnasien, speziell für die Sekundarstufe II geeignet als Cabri 3D.

Interessant wäre in diesem Zusammenhang auch die Forschungsfrage, ob (signifikante) geschlechtsspezifische Unterschiede in der Beurteilung intuitiver Benutzeroberflächen von DRGS existieren und wenn ja, wie groß die entsprechenden Effekte sind.

Wie könnten diese Hypothesen empirisch überprüft und weitere Forschungsergebnisse generiert werden?

Zahlreiche Forschungsdesigns zur Beantwortung dieser Hypothesen sind denkbar. Erwähnt seien hier exemplarisch einige Zugänge aus der qualitati-

ven und quantitativen empirischen Bildungsforschung wie Usabilitytests, Videoanalysen, Eye-Tracking, Interviews oder printmediale oder webbasierte Fragebögen. Mit Hilfe des Fragebogens zur ISONORM 9241-10 (wie er bspw. von Prümper/Anft seit 1993 vorliegt) wären einfach handhabbare, praktikable und aussagefähige empirische Untersuchungen möglich. Vorgenannter Fragebogen ist gemäß Prümper 1997 und Bräutigam 2008 valide, reliabel, empirisch getestet, benötigt keine vorbereitende Schulung und ist praktikabel hinsichtlich Aufwand und Verständlichkeit. Er ermöglicht so eine Operationalisierung der o.g. Kriterien zur Beurteilung der Intuitivität (sowie damit einhergehend der vermehrten Nutzung von DRGS im Unterricht) und – eingebunden in ein entsprechendes Untersuchungsdesign – Analyse. Damit könnten die obigen Hypothesen wissenschaftlich überprüft werden. Zudem ließen sich Rückschlüsse zur Gebrauchstauglichkeit eines DRGS ziehen.

„Gebrauchstauglichkeit meint im Gegensatz zur Benutzbarkeit die Usability einer Software im konkreten Nutzungskontext, also unter Berücksichtigung der am Arbeitsplatz geltenden Anforderungen durch Benutzer, Arbeitsaufgabe und Arbeitsumgebung.“
(Müller et al. 2008, S. 21)

Im Falle der Nutzung von DRGS im Unterricht also den Schüler als Benutzer beim (Be-)Arbeiten im Rahmen des Visualisierens, Erzeugens und Manipulierens raumgeometrischer Phänomene bzw. Aufgaben in der Arbeitsumgebung „Schule“ mit ihren heute faktisch vorhanden rechtlichen, personellen, räumlichen, sächlichen, organisatorischen und administrativen Vorgaben und Ressourcen.

Wie könnte ein geeignetes Design aussehen?

Ein erster Zugang könnte z.B. durch Konstruktionsaufgaben wie die im Vortrag (s.o.) vorgeführten erfolgen. So könnte der Versuchsleiter die Probanden (gewonnen durch duale Randomisierung von Schulen und Schülergruppen und ausreichenden Schülerzahlen) in einer dem quantitativen Forschungsparadigma folgenden empirischen Untersuchung in zwei vergleichbare Gruppen A und B teilen. Jeder der beiden Gruppen wird die gleiche Aufgabe gestellt, welche Gruppe A zunächst mit Cabri 3D, Gruppe B zunächst mit Archimedes Geo3D löst. Danach bearbeiten beide Gruppen den Fragebogen von Prümper/Anft 1993. Im Anschluss daran löst Gruppe A die

gleiche Aufgabe mit Archimedes Geo3D und Gruppe B mit Cabri 3D. Die Befragung endet mit dem erneuten Bearbeiten des o.g. Fragebogens.

Da die Gruppen vergleichbar sind und ausreichende Probandenanzahlen vorliegen kann mit Hilfe der ausgewerteten Fragebögen und geeigneter Analysemethoden wie z.B. der kumulierten Häufigkeiten eine Auswertung hinsichtlich der Intuitivität bzw. der Gebrauchstauglichkeit beim Vergleich der beiden untersuchten DRGS (verbunden mit der Beantwortung der Frage, ob geschlechtsspezifische Unterschiede existieren) vorgenommen werden.

Um die Aussagefähigkeit und die Generalisierbarkeit zu erhöhen, können weitere Aufgaben mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden, mit komplexeren Aufgabenstellungen, aus dem tradierten (etwa Aufgaben aus der Planimetrie, bei welcher Schüler bereits Vorerfahrungen haben) und nicht-tradierten (DRGS bieten Möglichkeiten „neue“ Aufgaben wie z.B. stereometrische Variations-, Berechnungs- Satzfindungsaufgaben etc. zu stellen bzw. zu bearbeiten) Geometrieunterricht, bei bereits vorhanden raumgeometrischen Erfahrungen mit DRGS etc. gewählt werden.

Weiterhin sollten Schüler und Schülerinnen als Probanden aus verschiedenen Schultypen, verschiedenen Alters- bzw. Klassenstufen, Schülern aus verschiedenen Bundesländern etc. rekrutiert werden. Von der Rekrutierung von Studierenden als Probanden sei vor dem Hintergrund der Nutzung von DRGS im Unterricht abgeraten (Bortz/Döring 2006, S. 74).

Wie kann das Lernen unterstützt werden?

Im Rahmen empirischer Untersuchungen an acht zufällig ausgewählten allgemein bildenden Realschulen in Baden-Württemberg (Knapp 2010) wurde festgestellt, dass über 85% der 427 befragten Schüler der achten Jahrgangsstufe keines der 2D-DGS Euklid DynaGeo, Cabri (I, II, II Plus) oder Cinderella kannten. Gestützt wird dieses Ergebnis zudem von der vierzehnjährigen schulpraktischen Erfahrung des Autors an verschiedenen Schulen und dem Austausch mit KollegInnen über obige DGS sowie über Geonext und Zirkel und Lineal. Die Kenntnis und der sichere Umgang der Lehrkräfte sowie die Installation dieser Programme im Schulnetzwerk sind notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen um ihre Integration in den Unterricht zu erforschen. Diese Problematik wird in Untersuchungen mit Lehrkräften oder Lehramtsstudierenden leider gelegentlich vergessen.

Von einem flächendeckenden Einzug, Einsatz oder gar Siegeszug von DGS im Mathematikunterricht kann daher (noch) nicht ausgegangen werden. DRGS wie Cabri 3D oder Archimedes Geo3D sind zum jetzigen Zeitpunkt in der Schulpraxis nahezu unbekannte Programme (vgl. ebd., S. 381 f.).

Lehrerkräfte und Schüler benötigen somit konkrete Hilfen und Unterstützung, speziell beim Einstieg zur Nutzung von DRGS mit anspruchsvolleren raumgeometrischen Konstruktionsaufgaben. Um den Einstieg für die Novizen zu erleichtern und die Interventionen der Lehrkräfte während der Arbeit der Schüler am Computer zu verringern, bieten sich z.B. folgende Medien als Hilfen für das Lernen durch Instruktion an: Online-Tutorials (CABRI-LOG 2011 b), Video-Glossare (Schumann/Huber 2007), Videos (Schumann 2006) oder interaktive Instruktionvideos (Knapp 2010 u. 2011).

Curriculare Überlegungen

Bezogen auf den Ist-Zustand der verschiedenen Curricula der Bundesländer muss leider festgestellt werden, dass der Stereometrie nur ein geringer Raum zugestanden wird. Über den zugrunde liegenden Bedeutungsverlust des (Raum-)Geometrieunterrichts in den letzten Jahrzehnten wurde in der neueren mathematikdidaktischen Literatur bereits mehrfach berichtet (bspw. Schumann 2010). Da der qualifizierte Einsatz eines DRGS aber nur beim Betreiben von Raumgeometrie Sinn macht, sind curriculare Überlegungen und Voraussetzungen unabdingbar hierfür.

So finden sich in den „Beschlüssen der Kultusministerkonferenz über die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“ (KMK 2003) bereits heute direkte curriculare Anknüpfungspunkte zum Einsatz von DRGS im Unterricht. So z.B. in den „Allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Fach Mathematik“ in „(K 5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ (ebd., S. 9), der „(L 3) Leitidee Raum und Form“ (ebd., S. 11) oder in „(L 4) Leitidee Funktionaler Zusammenhang“ (ebd., S. 12). Teilweise werden diese direkt angesprochen wie z.B. durch die zu erlernende Fähigkeit geometrische Figuren unter Verwendung dynamischer Geometriesoftware zu zeichnen und zu konstruieren (ebd., S. 11), teilweise können sie analog den angestrebten Bildungsziele der ebenen Geometrie („Die Schüler und Schülerinnen wenden Sätze der ebenen Geometrie bei Konstruktionen, Berech-

nungen und Beweisen an.“ (ebd.) mit Hilfe eines DRGS für die Ebene und sinngemäß für den Raum verwirklicht werden, teilweise sind sie im allgemeinen Bildungsauftrag zum „sinnvollen und verständigen Einsatz mathematischer Werkzeuge“ (vgl. ebd., S. 9) enthalten.

Was hier für den flächendeckenden Einsatz von DRGS im Unterricht der Sekundarstufe I für die Zukunft noch fehlt, ist eine höhere Verbindlichkeit, etwa durch eine Implementation des Vorgenannten in allgemein verbindlichen Abschluss- oder Zwischenprüfungsaufgaben aller Schularten in allen Bundesländern. Hierzu wäre die Entwicklung eines curricularen Konzeptes für den Einsatz von DRGS im Schulunterricht unerlässlich, welches allerdings in entsprechender Breite und detaillierter Tiefe noch aussteht. Erste Überlegungen zur Stereometrie finden sich etwa in Schumann 2007 im Kapitel „Lehrplaninhalte der Klassen 5-12 für die Raumgeometrie im virtuellen Handlungsraum“ (ebd., S. 18+19).

Denkbar und wünschenswert wäre in bzw. für die Zukunft auch, dass sich z.B. durch die in allgemeinbildenden Schulen etablierte informationstechnische Grundbildung Anknüpfungspunkte für fächerübergreifendes, projektartiges Arbeiten nicht nur eröffnen, sondern auch konkret umgesetzt werden.

Zahlreiche der in den Bildungsstandards des Faches Mathematik (KMK 2003) aufgeführten Inhalte (s. o.) finden sich auch in Bildungs- bzw. Lehrplänen der Länder wieder. Exemplarisch sei hier die „Förderung von vorausschauendem und vernetztem Denken, Modellbildung, Abstraktionsvermögen, Kreativität, Selbstständigkeit und Zuverlässigkeit“ (Ministerium für Kultus Jugend und Sport Baden-Württemberg 2004, S. 192) genannt. Explizit finden sich Lehr-/Lerninhalte wie „Daten und Sachverhalte anschaulich darstellen“, „mathematische Modellierungsaufgaben bearbeiten“ oder „den Computer zum Messen und Steuern einsetzen“ (ebd., S. 194f.).

Analog zu den einleitenden Ausführungen zur informationstechnischen Grundbildung könnte in diesem Kontext auch für DRGS im Unterricht gelten: Werkzeuge wie DRGS ermöglichen selbstständigere Arbeitsformen, welche aber auch verstärkt eingefordert werden sollten. Ob als Werk- oder Lernzeug, als Mittel zum Wissenserwerb oder zur Kooperation – DRGS können die Anschauung komplexer Inhalte erleichtern, die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler fördern und einen differenzierten und schülerorientierten Unterricht unterstützen (vgl. Ministerium für Kultus Jugend und Sport Baden-Württemberg 2011).

Schlussbemerkungen und Ausblick

Es kann festgestellt werden, dass die didaktische Mehrwertgenerierung für die Nutzung von DRGS im Unterricht (u.a. zur Erhöhung der Intuitivität und der Gebrauchstauglichkeit) gesteigert werden kann, wenn an der (Weiter-) Entwicklung der DRGS neben Mathematikdidaktikern auch (Medien-) Pädagogen, (Lern-)Psychologen, Softwareergonomen und Informatiker beteiligt sind.

Werden DRGS künftig zu multimedialen Lernumgebungen weiterentwickelt, können die von Mayer konstatierten „Seven Principles of Multimedia Design“ (Mayer 2001, S. 183-186) als Gestaltungsprinzipien für das Design von und in multimedialen Lernumgebungen herangezogen werden. Hierbei wären demnach das Multimedia Principle, Spatial Contiguity Principle, Temporal Contiguity Principle, Coherence Principle, Modality Principle, Redundancy Principle und das Individual Differences Principle zu berücksichtigen.

Soll die nachhaltige Integration von DRGS im Unterricht vorangetrieben werden und sollen diese durch ihren didaktischen Mehrwert den Mathematikunterricht bereichern, sind eine didaktisch begründete curriculare Ausarbeitung und Implementation verbunden mit begleitenden empirischen Untersuchungen dringend notwendig.

Literatur

- ACM (2011). <http://www.acm.org> (30.01.2011).
- Anderson, J. R. (2001). Kognitive Psychologie. 3. Auflage. Heidelberg, Berlin: Spektrum.
- Bainville, E.; Laborde, J.-M. (2004-2007). Cabri 3D 2.1.2 (Software). Grenoble: Cabrilog. Deutsche Version (Bearbeitung von H. Schumann). Zu beziehen über <http://www.cotec.de> (30.01.2011).
- Bortz, J.; Döring, N. (2006). Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler. 4. Auflage. Heidelberg: Springer.
- Bräutigam, L. (2008). Beurteilung von Software-Ergonomie anhand des ISONORM-Fragebogens. http://www.ergo-online.de/site.aspx?url=html/software/verfahren_zur_beurteilung_der/beurteilung_der_software_ergo.htm (30.01.2011).
- CABRILOG (2011 a). <http://www.cabri.com/download-cabri-3d.html> (30.01.2011).
- CABRILOG (2011 b). <http://www.cabri.com> (30.01.2011).

- CEN – Europäisches Komitee für Normierung (1995). Europäische Norm EN ISO 9241-10; ICS 331.101.1.-651.2.,681.31.022. Deutsche Fassung; Ergonomische Anforderungen für Bürotätigkeiten mit Bildschirmgeräten. Teil 10: Grundsätze der Dialoggestaltung (ISO 9241-10: 1995).
- Clark, R. C.; Nguyen, F.; Sweller, J. (2006). Efficiency in learning. Evidence-based guidelines to manage cognitive load. San Francisco, CA: Pfeiffer.
- Eberleh, E. Oberquelle, H.; Oppermann, R. (Hrsg.) (1994): Einführung in die Software-Ergonomie. Grundwissen 1/2. 2. Auflage. Berlin: De Gruyter.
- Edelmann, W. (2000). Lernpsychologie. 6. Auflage. Weinheim: Beltz.
- Goebel, A. (2005-2010). Archimedes Geo3D. <http://www.raumgeometrie.de> (30.01.2011).
- Issing, L. J.; Klimsa, P. (Hrsg.) (2002). Information und Lernen mit Multimedia und Internet. 3. Auflage. Weinheim: Beltz.
- Kerres, M. (2001). Multimediale und telemediale Lernumgebungen. Konzeption und Entwicklung. 2. Auflage. München: Oldenbourg.
- KMK (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (30.01.2011).
- Knapp, O. (2010). Entwicklung und Evaluation interaktiver Instruktionsvideos für das geometrische Konstruieren im virtuellen Raum. Dissertation. Pädagogische Hochschule Weingarten. Hochschulschriften zur Mathematik-Didaktik, Band 1. Münster: WTM.
- Knapp, O. (2011). Tutorial zum Lernen von Raumgeometrie. Rosenheim: co.Tec.
- Krapp, A.; Weidenmann, B. (Hrsg.) (2006). Pädagogische Psychologie. 5. Auflage. Weinheim, Basel: Beltz.
- Madipedia (2011). <http://madipedia.de/images/4/40/Stellungnahme-GDM-MNU-2010.pdf> (30.01.2011).
- Mayer, R. E. (2001). Multimedia Learning. Cambridge: Cambridge University Press.
- Ministerium für Kultus Jugend und Sport Baden-Württemberg (2004). Bildungsplan 2004. www.bildungsstandards-bw.de (30.01.2011).
- Ministerium für Kultus Jugend und Sport Baden-Württemberg (2011). http://www.bildung-staerkt-menschen.de/schule_2004/bildungsplan_kurz/real-schule (30.01.2011).
- Müller, C., Hurtienne, J; Prümper, J. (2008). Standardsoftware – benutzbar und gebrauchstauglich! Computer und Arbeit. Heft 5/2008, S. 20-24.
- Nielsen, J. (2001). Designing Web Usability. 2. Auflage. München: Markt+Technik.

- Prümper, J.; Anft, M. (1993): Beurteilung von Software auf der Grundlage der Internationalen Ergonomie-Norm 9241-10. Downloadbar unter http://www.ergo-online.de/html/service/download_area/isonorm.doc (30.01.2011).
- Prümper, J. (1997). Der Benutzungsfragebogen ISONORM 9241/10: Ergebnisse zur Reliabilität und Validität. In: Liskowski, R.; Velichkovsky, B. M.; Wünschmann, W. (Hrsg.). Software-Ergonomie '97 – Usability Engineering: Integration von Mensch-Computer-Interaktion und Software-Entwicklung (S. 253- 262). Stuttgart: Teubner.
- Schumann, H. (2006). Interaktive Videos für die Raumgeometrie mit Cabri 3D. Rosenheim: co.Tec.
- Schumann, H. (2007). Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Ein Lehr- und Lernbuch der interaktiven Raumgeometrie mit Cabri 3D. Hildesheim: Franzbecker.
- Schumann, H. (2010). Über die Zukunft des Geometrie-Unterrichts. Hauptvortrag auf der 28. Arbeitstagung des AK MuI in Soest vom 24.-26.09.2010.
- Schumann, H.; Huber, T. (2007). Cabri 3D-Video-Glossar. Rosenheim: co.Tec.
- Shneiderman, B. (2009). Designing the User Interface: Strategies for Effective Human-Computer Interaction. 5. Auflage. Amsterdam: Addison-Wesley Longman.
- SIGCHI (2011). <http://www.sighci.org> (30.01.2011).
- Talmon, V.; Yerushalmy, M. (2003). Dynamic behaviour in dynamic geometry environments: Some questions of order. Downloadbar unter http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG9/TG9_Talm on_cerme3.pdf (30.01.2011).
- Urhahne, D.; Harms, U. (2006). Instruktionale Unterstützung beim Lernen mit Computersimulationen. In: Die Unterrichtswissenschaft. Heft 4 / 2006. 34. Jahrgang, S. 358-377.
- Wessel, Ivo (2002). GUI-Design: Richtlinien zur Gestaltung ergonomischer Windows-Applikationen. 2. Auflage. München, Wien: Hanser.
- Wikipedia (2011). <http://de.wikipedia.org/wiki/Dyschromatopsie> (30.01.2011).

Ich danke Frau Prof. Dr. Haftendorn (Lüneburg), Herrn Prof. Dr. Oldenburg (Frankfurt) und Herrn Prof. Dr. habil. Schumann (Weingarten) für die nützlichen Hinweise und Kommentare.

Gleichungen in Bildern

Oliver Labs

Zusammenfassung. Eine ebene algebraische Kurve ist die Menge der Punkte in der Ebene, die eine polynomielle Gleichung $f(x|y)=0$ in zwei Variablen erfüllen. Zwar wurde bereits verschiedentlich vorgeschlagen, derartige Kurven in den Schulunterricht zu integrieren, doch meist bestehen die Ansätze aus ganzen Unterrichtseinheiten mit Inhalten, die über den Lehrplan teils weit hinausgehen und schon daher in der Praxis kaum umgesetzt werden.

Die Arbeit mit Termen und Gleichungen ist in der Schule aber ein zentrales Thema und der Wunsch nach deren Geometrisierung naheliegend. Der folgende Artikel stellt dazu ein Gesamtkonzept vor, das bereits frühzeitig in der Sekundarstufe I direkt an den Lehrplaninhalten ansetzt und die Verfügbarkeit neuer Medien ausnutzt. Dabei wird auch der Raumgeometrie ein ihr gebührender Platz eingeräumt.

„Alle meine algebraischen Darlegungen werden sich um einen Punkt gruppieren, nämlich die Anwendung der graphischen und überhaupt der geometrisch anschaulichen Methoden auf die Lösung von Gleichungen.“

Felix Klein in (Klein, 1928), 3. Aufl., S. 93, Einleitung zum Teil über Algebra.

Einleitung

Eine algebraische Kurve ist die Menge aller Punkte $(x|y)$, die eine polynomielle Gleichung $f(x|y)=0$ erfüllen. Bereits verschiedentlich wurde vorgeschlagen, solche Kurven in den Schulunterricht zu integrieren; neben älteren Texten hierzu (siehe z.B. (Wieleitner 1914) oder (Wolff 1966)) stellt (Schupp/Dabrock 1995) eine ansprechende moderne Zusammenstellung dar. Diese wie auch die sonstige Literatur zum Themenkomplex hat allerdings das Problem, dass ihr Inhalt meist frühestens in der Oberstufe behandelt werden kann. Basierend auf Ortskurven gibt es auch einige wenige Ansätze (beispielsweise von Dörte Haftendorn), algebraische Kurven bereits in der Sekundarstufe I einzusetzen, dann aber oft als eigene Unterrichtseinheit, mit Inhalten, die über den aktuellen Lehrplan teils weit hinausgehen. Auf ihrer Webseite stellt Haftendorn allerdings außerdem einige Materialien bereit, die auch den Einsatz impliziter Gleichungen in der Mittelstufe ohne großen Aufwand betreffen.

Dieser Artikel geht einen Schritt weiter und skizziert ein Gesamtkonzept, bei dem algebraische Kurven und Flächen bereits frühzeitig basierend auf impliziten Gleichungen in der Schulalgebra zur Veranschaulichung, Sinn-

gebung, Quelle interessanter Aufgaben, Vernetzung usw. eingeführt und dann durchgängig in den weiteren Jahren immer mehr mit Geometrie und Leben gefüllt werden. An einigen ausgewählten Beispielen legt dieser Artikel dar, warum dies erstens im Unterrichtsalltag der Sekundarstufen möglich und zweitens auch sinnvoll sein kann, indem die Vorschläge nämlich direkt die Inhalte des Lehrplans betreffen. Die Idee eines solchen Konzepts entwickelte sich, als der Autor dieses Artikels für die Wanderausstellung *Imaginary* (www.Imaginary-Exhibition.com) im Jahr der Mathematik 2008 die Software *Surfer* (Meyer, 2011) mitentwickelte, mit Hilfe derer jeder Ausstellungsbesucher mit algebraischen Flächen und Gleichungen experimentieren konnte. Im Rahmen vieler Ausstellungsbesuche mit Schulklassen stellte sich dabei nämlich heraus, dass dieses Thema durch die visuell ansprechenden Bilder und durch die Nähe zur Schulmathematik der Sekundarstufe I auch bereits Schüler dieser Altersklasse faszinierten.

Die hier vorgestellten Beispiele weisen außerdem darauf hin, dass durch die durchgehende Verwendung algebraischer Kurven und Flächen zur Geometrisierung der Schulalgebra einige Lücken im bisher üblichen Gebäude der Schulmathematik möglicherweise auf natürliche Weise gefüllt werden könnten. Der Durchschnitt zweier Geraden in der Ebene etwa ist Gegenstand des Unterrichts, deren Vereinigung allerdings nicht, wenn man ohne algebraische Geometrie arbeitet. Ein weiteres Beispiel sind Symmetrien im Zusammenhang mit Funktionsgraphen, wo das Spiegeln an Achsen zwar erlaubt ist, das Drehen um 90° aber nicht, weil dies oft keinen Funktionsgraphen (aber eine algebraische Kurve!) liefert. Im Text wird man sehen, dass durch den vorgestellten Zugang mehrere Aspekte des Variablenbegriffs geometrische Entsprechungen erhalten, wie etwa der Einsetzungsaspekt in dem Unterabschnitt *Variablensubstitution* und dem *Anhang: Ray Tracing*.

Der vorliegende Artikel stellt nur den Beginn eines längerfristigen Projektes dar, denn es ist klar, dass das Konzept an vielen Stellen weiter konkretisiert, in der Unterrichtspraxis intensiv erprobt und überhaupt noch ausführlicher diskutiert werden muss. Dazu sollte ferner bemerkt werden, dass die grundlegende Idee der Geometrisierung der Algebra freilich spätestens bereits bei Felix Klein zu finden ist, in der hier angedachten Konsequenz aber wohl noch nicht vorgestellt wurde, vermutlich auch weil die heute verfügbare Computersoftware neue Möglichkeiten eröffnet.

Algebraische Kurven und Flächen

Eine *reelle ebene algebraische Kurve vom Grad d* ist die Menge all jener Punkte $(x|y) \in \mathbf{R}$, die eine polynomielle Gleichung $f(x|y) = 0$ vom Grad d mit reellen Koeffizienten erfüllen. Da hier keine anderen Kurven diskutiert werden, wird der Kürze wegen meist nur von Kurven die Rede sein. Im gesamten Text werden die Buchstaben x, y die Koordinaten der Ebene bezeichnen; andere Buchstaben werden entweder für Zahlen (typischerweise a, b, c, \dots) oder für Kurven (meist f, g, h, \dots) stehen.

Ein erstes Beispiel für eine solche Kurve ist in Abb. 1 zu sehen. Wir überprüfen beispielhaft für einige Punkte, ob sie die dort angegebene Bedingung $f(x|y) := x^2 + y^2 - x^3 = 0$ erfüllen:

$$\begin{aligned} f(1|0) &= 1^2 - 0^2 - 1^3 = 1 - 0 - 1 = 0, \\ f(-3|6) &= (-3)^2 - 6^2 - (-3)^3 = 9 - 36 + 27 = 0, \\ f(-2|4) &= (-2)^2 - 4^2 - (-2)^3 = 4 - 16 + 8 = -4. \end{aligned}$$

Der letzte überprüfte Punkt, $(-2|4)$, liegt also im Gegensatz zu den anderen beiden nicht auf der Kurve.

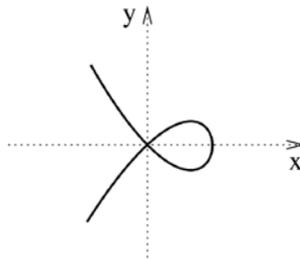


Abb. 1: Die Kurve mit Gleichung $x^2 - y^2 - x^3 = 0$; da Newton sich bereits mit ihr (und verwandten Kurven) beschäftigte, wird sie oft Newtonscher Knoten genannt.

Ersetzt man Aufgaben wie jene in Abb. 2 durch derartige Überprüfungen, so erhalten diese einen geometrischen Kontext.

$\begin{aligned} \text{b) } &(-5)^2 \cdot (-4) = \\ \text{d) } &(-3)^3 \cdot 2 \cdot (-5) = \\ \text{f) } &(-11)^2 \cdot (-7) = \\ \text{h) } &(-7)^2 \cdot (-10)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \end{aligned}$
--

Abb. 2: Einige typische Aufgaben zu negativen Zahlen.

Ähnliche Betrachtungen können wir auch im Raum durchführen. Wir beginnen dazu mit der Betrachtung zweier Gipfel, dem Rossstein (links in Abb. 3) und dem Buchstein (rechts).



Abb. 3: Die beiden Gipfel Rossstein und Buchstein in den bayrischen Alpen.

Für einen Bergsteiger ist es natürlich wichtig, wie steil es bergan bzw. bergab geht; in Karten sind daher oft sogenannte Höhenlinien eingezeichnet, die Stellen gleicher Höhe verbinden.

Um dies zu verdeutlichen nähern wir die zwei Gipfel idealisiert und etwas überzeichnet durch eine algebraische Fläche an (links in Abb. 4) und markieren dort einige Höhenlinien (mittleres Bild, in der Mathematik oft *Niveaulinien* genannt). Um zu betonen, dass die Punkte gleicher Höhe jeweils in einer Ebene liegen, sind die Ebenen, die zu den eingezeichneten Höhenlinien bzw. Niveaulinien gehören, rechts ebenfalls gezeigt.

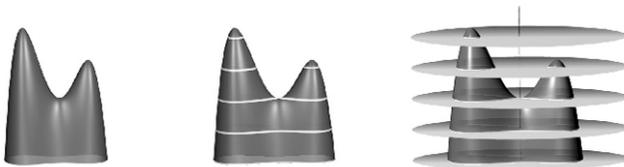


Abb. 4: Ein idealisierter Berg mit zwei Gipfeln und einigen Höhenlinien.

Jede der Höhenlinien stellt also eine Kurve in einer der Ebenen dar. Der gezeigte idealisierte Berg erfüllt die Gleichung

$$z = x^2 - y^2 - \frac{5}{100}x^4 - \frac{5}{100}x^3.$$

Setzen wir einige feste Werte für z ein, so erhalten wir wieder eine Gleichung in den zwei Variablen x und y , also die Gleichung einer algebraischen Kurve. Die im Berg markierten Höhenlinien zeigt Abb. 5 in einer Ebene, wie auf einer Landkarte; sie sind gegeben durch Einsetzen der Werte $z = -6; -3; 0; 3; 6$ in die Gleichung des idealisierten Berges.

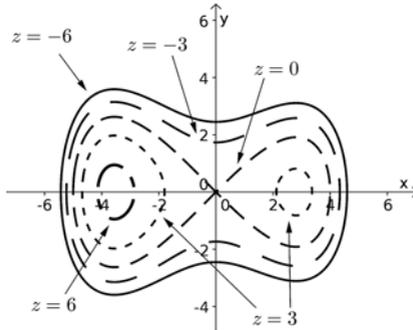


Abb. 5: Die Höhenlinien des obigen Berges in einer Ebene.

Allgemeiner ist eine reelle algebraische Fläche im Raum die Menge aller Punkte $(x|y|z) \in \mathbf{R}^3$, die eine polynomielle Gleichung $g(x|y|z) = 0$ mit reellen Koeffizienten erfüllen. Auch hier reden wir, wie bei Kurven, der Einfachheit halber kurz von Flächen.

Die Beispiele in Abb. 6 bis Abb. 8 zeigen einige Flächen, deren Geometrie sich teilweise bereits stark von dem einleitenden Beispiel des Berges unterscheidet. In der Gleichung g aus Abb. 6 kommt die dritte Variable z gar nicht vor und ist sogar identisch mit der Kurvengleichung f von oben, so dass das Bild der Fläche im Raum natürlich für jedes feste z gerade aus einer Kopie des Newtonschen Knotens besteht, den wir weiter oben gesehen hatten; der „Berg“ ist daher quasi unendlich hoch (im Bild freilich abgeschnitten). Man nennt eine solche Fläche dann *Zylinder über der Kurve*.


 Abb. 6: Die Fläche mit
 $g: x^2 - y^2 - x^3 = 0$

 Abb. 7: Die Fläche mit
 $h: x^2 - y^2 - x^3 - z = 0$

 Abb. 8: Die Fläche mit
 $i: x^2 - y^2 - x^3 - z^2 = 0$

Die Fläche h ist auch noch recht einfach durchschaubar, denn für jeden Punkt $(x|y) \in \mathbf{R}^2$ der Ebene kann man z eindeutig berechnen; das Bild ist genauer gesagt der Graph der Funktion $(x|y) \rightarrow x^2 - y^2 - x^3$. Die Abbildung zu Fläche i ist nicht mehr so direkt zu verstehen; nur mit Hilfe von

Quadratwurzeln und Fallunterscheidungen ist eine Auflösung nach einer Variablen zu realisieren. Und für noch kompliziertere Gleichungen ist aus der Galoistheorie bekannt, dass das Auflösen nach einer Variablen durch (auch höhere) Wurzeln im Allgemeinen gar nicht möglich ist.

Visualisierungssoftware

Das Zeichnen algebraischer Flächen erscheint wegen der Beispiele des vorigen Abschnittes zumindest nicht trivial und ist in der Tat noch heute ein Objekt der Forschung auf dem Grenzgebiet zwischen Mathematik und Informatik; trotzdem existiert Software, die interaktiv ist und die für den Schuleinsatz im Wesentlichen geeignet erscheint, wie z.B. das in der Einleitung erwähnte Programm Surfer. Software zum Visualisieren von Kurven ist dagegen wesentlich einfacher zu realisieren und sogar aktuelle Taschenrechner wie der TI-nspire beherrschen dies im Großen und Ganzen, z.B. über die Eingabe $f(x)=\text{zeros}(x^2-y^2-x^3,y)$, und auch die aktuelle Beta-Version der Dynamischen Geometrie Software GeoGebra (Hohenwarter, 2011) liefert bei der Eingabe $x^2-y^2-x^3=0$ ein korrektes Bild. Kostenfreie Software zum Anzeigen algebraischer Kurven und Flächen ist also verfügbar.

Die Visualisierung ebener algebraischer Kurven mit Hilfe der aktuellen Beta-Version von GeoGebra bettet sich intuitiv in diese recht verbreitete Software ein (dort einfach in die Eingabezeile eine Gleichung in x und y eingeben, wie z.B. $x^2 - y^2 = x^3$), so dass wir hier auf die Bedienung nicht weiter eingehen. Für den praktischen Einsatz in der Schule sei hier aber nochmals betont, dass auch einige aktuelle CAS-Taschenrechner in der Lage sind, viele algebraische Kurven darzustellen, was den Einsatz im Unterricht stark erleichtert. Für die Umsetzung unseres in diesem Artikel angedeuteten Gesamtkonzepts ist es jedoch in keiner Weise nötig, dass jeder Schüler im Unterricht einen solchen Taschenrechner zur Verfügung hat; es erhöht allerdings die experimentellen Möglichkeiten erheblich.

Algebraische Flächen können, wie erwähnt, mit Hilfe der Software Surfer dargestellt werden; da das Arbeiten mit algebraischen Flächen im Raum noch nicht weit verbreitet ist, gehen wir hierauf etwas näher ein. Zunächst kann eine algebraische Fläche, genauso wie eine Gerade in der Ebene, abstrakt betrachtet unendlich groß sein, wie wir bereits gesehen haben und wie

sogar schon die Ebene mit der Gleichung $z = 3$ zeigt; diese besteht ja aus allen Punkten im Raum, deren z -Koordinate 3 ist. Daher zeigt die Software Surfer nur einen Ausschnitt des Gebildes und zwar jenen, der innerhalb einer Kugel um den Ursprung vom Radius r liegt, wobei r über den senkrechten Schieberegler verändert werden kann; Surfer passt dann gleichzeitig automatisch den Zoom so weit an, dass der angezeigte Ausschnitt wieder bildfüllend ist (Abb. 9).

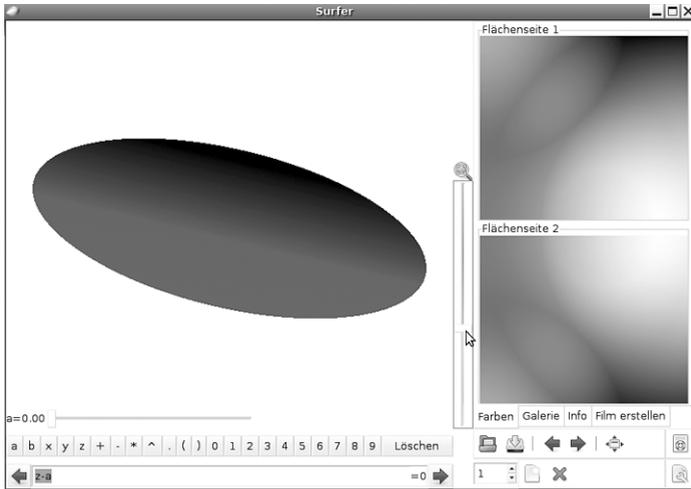


Abb. 9: Die Ebene mit Gleichung $z - a = 0$, visualisiert in Surfer.

Diese Wahl des Ausschnitts hat einige Implikationen: Schon am Beispiel der Ebene sieht man, dass sie etwas ungewohnt dargestellt wird, nämlich als Kreisfläche, weil sie ja der Schnitt einer Ebene mit einer Kugel ist. Zoomt man nur weit genug hinein, so sieht man die Ebene gar nicht mehr, falls sie nicht durch den Ursprung geht.

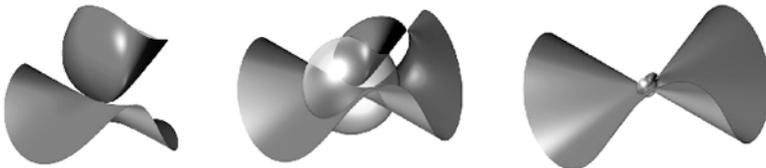


Abb. 10: Die Fläche mit Gleichung $xz - x^3 - y^2z - xz^2 = 0$, links stark hereingezoomt, in der Mitte weniger, rechts noch weniger. In den beiden rechten Bildern ist zusätzlich die Kugel transparent eingezeichnet, mit der das linke Bild abgeschnitten wurde.

Obwohl uns dieses Problem von der üblichen Darstellung im Koordinatensystem geläufig ist, da wir ja auch dort nur einen Ausschnitt des Raumes darstellen, muss man sich klar machen, dass man evtl. gerade wesentliche Teile eines Objektes nicht sieht, insbesondere auch, weil in der aktuellen Version von Surfer die Koordinatenachsen nicht gezeigt werden. Beispielsweise erkennt man auf dem linken Bild in Abb. 10 nicht die globale Struktur der Fläche, nach Herauszoomen aber schon (siehe die anderen Bilder).

Alternativ zum Herauszoomen per Schieberegler kann man in solchen Fällen die Gleichung anpassen, im Beispiel der Ebene weiter oben etwa $z = 1$ statt $z = 3$ oder allgemein $z = a$. Letzteres ist in Surfer besonders praktisch, denn falls ein Parameter namens a oder b in einer Gleichung auftaucht, erscheint automatisch je ein zugehöriger Schieberegler, über den man den Wert von a zwischen 0 und 1 einstellen und so die zugehörige Veränderung des Gebildes studieren kann (s. Abb. 11).

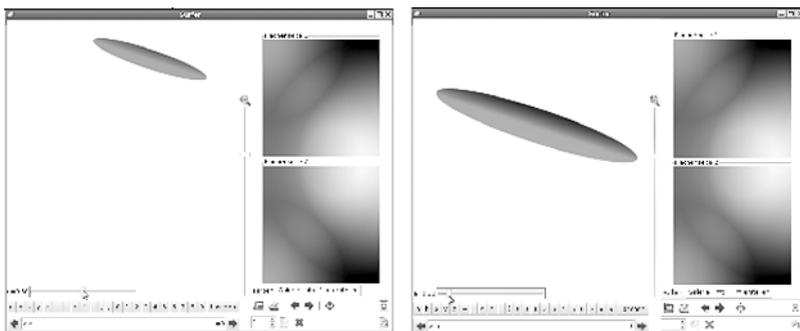


Abb. 11: Die Fläche mit Gleichung $z - a = 0$ links für $a = 0,1$ und rechts für $a = 0,5$. Wie man sieht, wird die Ebene für noch etwas größere a gar nicht mehr sichtbar sein.

Aus diesen Ausführungen wird deutlich, dass die Beschäftigung mit algebraischen Flächen, speziell in Surfer, für die koordinatenbezogene Raumvorstellung (s. (Filler, 2006), S. 40ff) möglicherweise gewinnbringend sein kann. Und diese sowie verwandte Themen sind ja, wie bereits Maier in (Maier, 1999) feststellte, ein Punkt, der stärker betont werden sollte. Doch der Hauptgrund, aus dem wir dieses Thema für die Behandlung in der Sekundarstufe I vorschlagen, liegt in der Arbeit mit Termen und Gleichungen und deren Vernetzungen mit der Geometrie.

Wie man in obigen Screenshots sehen kann, gibt man in Surfer die Gleichung einer Fläche übrigens nicht komplett ein, sondern stellt sie

zunächst so um, dass auf einer Seite der Gleichung nur eine 0 steht, also in dem obigen Beispiel $z - a = 0$. Das hat einerseits den Vorteil, dass man sich das „=0“ sparen kann und in Surfer nur $z - a$ einzutippen hat; andererseits hat die Betrachtung impliziter Gleichungen als Nullstellenmengen aber noch weitere Implikationen, etwa bei der Untersuchung von Gleichungen der Form $f \cdot g = 0$ (siehe dazu z.B. den Abschnitt zu Termumformungen, in dem auch mögliche Schüler-Fehler beim Ausmultiplizieren angesprochen werden).

Negative Zahlen, Terme, Koordinatensysteme

Wie kann man eine Aufgabe zu negativen Zahlen, Termumformungen oder zum Einsetzen in Terme motivieren? Hierzu gibt es nicht nur die üblichen Möglichkeiten, wie etwa jene aus dem Modellierungskontext, sondern auch innermathematische auf Basis algebraischer Kurven und Flächen.

Das Arbeiten mit negativen Zahlen wird häufig auch an der Zahlengeraden veranschaulicht (s. etwa Neue Wege 7 RLP: Kapitel zu rationalen Zahlen). Bereits bei der Motivation der Rechengesetze negativer Zahlen erscheint aber der Einsatz auch eines Koordinatensystems geeignet. Obwohl dies freilich schon mehrfach vorgeschlagen wurde, möchten wir hier ein Beispiel dazu bringen, da es unsere Grundidee der Geometrisierung der Algebra an einem ganz elementaren Fall verdeutlicht (s. Abb. 12). Die beiden in der Abbildung gezeigten Beispiele zeigen auch, dass die Symmetrie hier eine Rolle spielt. Besonders augenfällig wird dies, wenn man später bei der Behandlung von Termen in mehreren Variablen die folgende Aufgabe stellt.

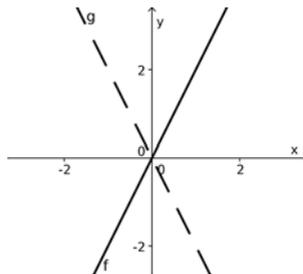


Abb. 12: Die Zuordnungen $f : x \rightarrow 2x$ und $g : x \rightarrow (-2) \cdot x$ verdeutlichen, wie die Rechengesetze für negative Zahlen definiert werden können; nämlich so, dass jeweils eine Gerade entsteht.

Beispiel 1 (Negative Zahlen und Terme im Koordinatensystem)

Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $(x|y)$ ein, für die $x^2 = y^2$ gilt. Dies sind alle Punkte auf den beiden Diagonalen des Koordinatensystems. Gegebenenfalls kann dies mit Aufgaben zum Einzeichnen der Punkte, die jeweils $x - y = 0$, $y - x = 0$, $|x| = |y|$ u.ä. erfüllen, in Zusammenhang gesetzt werden (s. Abb. 13).

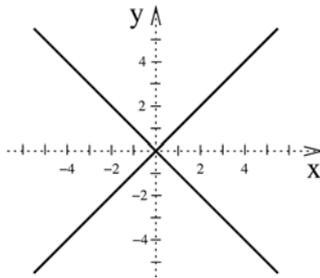


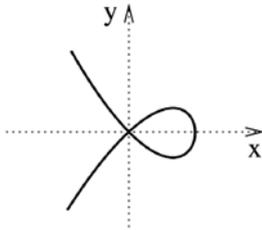
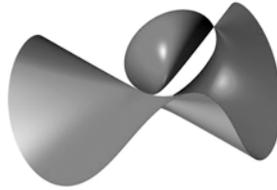
Abb. 13: Die Punkte, die die Bedingung $x^2 = y^2$ erfüllen.

Eine typische Übungsaufgabe bei der Behandlung von negativen Zahlen ist es, komplizierte Terme, in denen auch gerne Klammern und Potenzen vorkommen, ausrechnen zu lassen, etwa „Berechne $(-5)^2 \cdot (-2) - (-3)^3$.“ Da in solchen Aufgaben meist nicht mehr als zwei oder drei verschiedene Zahlen vorkommen, ist auch hier eine naheliegende Visualisierung möglich, die später im Rahmen der Algebra diese mit den obigen Aspekten der Arithmetik verknüpft; zwei solche Aufgaben, die speziell das Arbeiten mit Potenzen fokussieren, sind z.B. folgende:

Beispiel 2 (Punkte auf einer algebraischen Kurve)

Die in Abb. 14 gezeigte Kurve besteht aus allen Punkten $(x|y)$, die die Gleichung $f(x|y) := x^2 - y^2 - x^3 = 0$ erfüllen. Finde heraus, welche der Punkte $P(-3|6)$, $Q(-2|4)$, $R\left(\frac{3}{4} | -\frac{3}{8}\right)$ auf dieser Kurve liegen. Nachrechnen zeigt: $f(P) = f(R) = 0 \neq f(Q)$; Q liegt also nicht auf der Kurve.

Die in Abb. 15 gezeigte Fläche besteht aus allen Punkten $(x|y|z)$, die die Gleichung $xz - x^3 - y^2z - xz^2 = 0$ erfüllen. Welche der folgenden Punkte liegen darauf: $P(-2|2|1)$, $Q(-2|2|-4)$, $R(4|-2|4)$?

Abb. 14: $x^2 - y^2 - x^3 = 0$.Abb. 15: $xz - x^3 - y^2z - xz^2 = 0$

„Vereinfachen“ von Termen, Termumformungen

Das sogenannte „Vereinfachen“ von Termen ist ein weiteres zentrales Thema der Doppeljahrgangsstufe 7/8. Algebraische Kurven und Flächen bieten, insbesondere bei Einsatz geeigneter Software, neue Möglichkeiten, dies zu motivieren, die erstens Vernetzungen zwischen Algebra und Geometrie herstellen und teilweise auch der Kreativität im Mathematikunterricht (siehe auch Weth 1999) Raum geben.

Kontrolle von Termumformungen

Beginnen wir mit einem typischen Ausschnitt eines aktuellen Schulbuches zum Thema „Vereinfachung von Termen“ (s. Abb. 16).

<p>13 Vereinfache die folgenden Terme.</p> <p>a) $7ab - 3ac + 5ac - 5ab$</p> <p>d) $4xy - 3zx - 6xy - 4xz$</p>

Abb. 16: Eine typische Aufgabe aus einem Schulbuch.

Wie in diesem Beispiel kommen in typischen Aufgaben zwei oder drei verschiedene Variablen vor, so dass wir deren Nullstellen visualisieren können. Dies ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern in vielen Fällen, selbst graphisch kontrollieren zu können, ob ihre Vereinfachungen korrekt waren: Wurde nämlich ein Term falsch umgeformt, so hat sich mit großer Wahrscheinlichkeit auch das Bild der zugehörigen algebraischen Kurve bzw. Fläche verändert (eine Ausnahme bilden falsche Umformungen wie z.B. $x^2 = -1$ zu $x^2 = -2$; in beiden Fällen ist die Lösungsmenge leer, aber die Gleichungen sind trotzdem nicht äquivalent). War umgekehrt die Umformung richtig, so ist das neue Bild identisch mit dem alten. Hier ist es möglich, für die typischen Schülerfehler, siehe dazu etwa (Lietzmann 1952)

oder (Furdek 2001), Aufgaben zu finden, für die das Bild sich tatsächlich relevant verändert; ein Beispiel ist folgendes:

Beispiel 3 (Fehler bei Termumformungen und Kurven)

Visualisiere die Kurve mit Gleichung $(x-2y)^2=0$ mit einer geeigneten Software (siehe Abb. 17). Multipliziere die linke Seite aus und visualisiere die neue Gleichung in einer anderen Farbe. Ergibt sich das gleiche Bild?

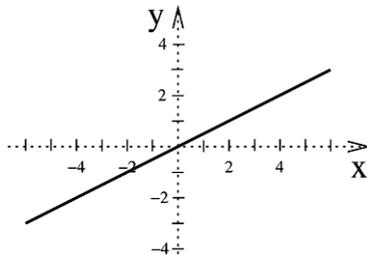


Abb. 17: Die Kurve mit der Gleichung $(x-2y)^2=0$.

Natürlich sollte sich das gleiche Bild ergeben, da wir ja nur eine äquivalente Gleichung produziert haben, nämlich $x^2-4xy+4y^2=0$. Einige typische Fehler, die beim Termumformen auftreten können, sind dann in der Visualisierung unmittelbar als solche erkennbar (s. Abb. 18 bis Abb. 20).

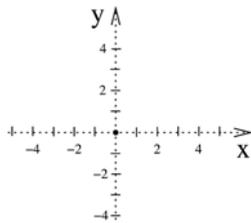


Abb. 18: x^2+4y^2

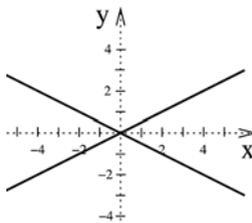


Abb. 19: x^2-4y^2

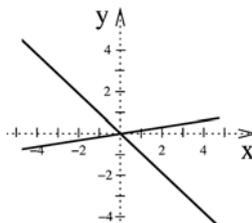


Abb. 20: $x^2-4xy-4y^2$

Die Idee hierzu ist nicht neu; mit Hilfe von Funktionsgraphen kann man analoge Tests durchführen und sogar für algebraische Kurven wurde dieser Aspekt bereits von anderen hervorgehoben, etwa von D. Haftendorn. Wie oben bereits erwähnt, hat die typische Aufgabe in diesem Zusammenhang allerdings drei Variablen, so dass wir in der Domäne der algebraischen Flächen sind, die bisher kaum in Betracht gezogen wurde.

Experimente

Man kann das Betrachten algebraischer Kurven und Flächen parallel zu Termumformungen auch anwenden, wenn man frei mit Termen experimentiert im Sinne der von Schupp vorgeschlagenen Aufgabenvariation (Schupp 2002); die Software Surfer lädt geradezu dazu ein. Andererseits kann man die Experimente auch lenken, indem man neue Parameter einführt, etwa in der folgenden Form.

Beispiel 4 (Experimente mit Flächen)

Wie vereinfacht sich der Term $x^2 - xy^2 + yz^2 - (a-3) \cdot x^2$ für verschiedene Werte von a ? Diese Frage lässt sich hervorragend in Surfer interaktiv untersuchen, indem man den Schieberegler für a bewegt. Auch ist es möglich, einen Film zu erzeugen, bei dem der Parameter a verschiedene Werte durchläuft; Abb. 21 zeigt drei Bilder aus einer solchen Animation. Es fällt dabei auf, dass die aus den Nullstellen des Terms bestehende Fläche für $a = 4$ in zwei Teilflächen zerfällt (rechtes Bild), nämlich in eine (im Bild senkrechte) Ebene und einen (im Bild liegenden) Doppelkegel. Das spiegelt sich auch im Term wieder, denn $-xy^2 + yz^2 = y \cdot (-xy + z^2)$, was als Motivation für das Thema Ausklammern dienen kann.

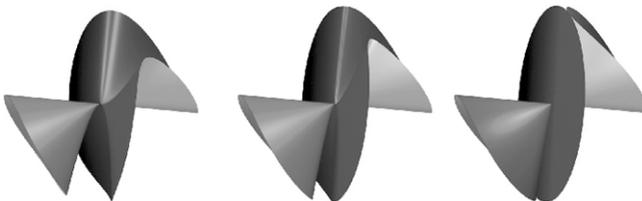


Abb. 21: Die Fläche mit der Gleichung $x^2 - xy^2 + yz^2 - (a-3)x^2 = 0$ für drei verschiedene Werte des Parameters: $a = 3,5; a = 3,9; a = 4,0$.

Variablensubstitution

Sehr interessant sind im Zusammenhang mit dem Vereinfachen von Termen die sogenannten kubischen Flächen (sie werden durch Polynome vom Grad 3 definiert). Diese sehen nämlich recht geschwungen aus, obwohl auf ihnen typischerweise mehrere (genauer: ≤ 27 oder ∞ viele) Geraden liegen. Der Artikel (Holzer 2006) gibt eine Übersicht über diese Flächen und liefert auch explizite Gleichungen, die man in Surfer eintippen kann. Ein Beispiel, das leicht nachzurechnen ist, ist das folgende.

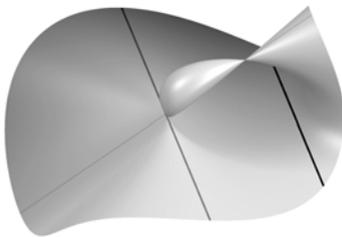
Beispiel 5 (Geraden auf Flächen)

Abb. 22: Auf der Fläche mit der Gleichung $x^3 + xy^2 + x^2z + y^2z + xz^2 - xz = 0$ (Nr. 32 in der Liste in Holzer 2006) liegen genau drei Geraden.

Wir betrachten die Gleichung $x^3 + xy^2 + x^2z + y^2z + xz^2 - xz = 0$, die zugehörige Fläche ist in Abb. 22 zu sehen. Es ist erkennbar, dass hierauf drei Geraden liegen, nämlich die mit den Parametrisierungen $g_1(t) = (-1|t|1)$, $g_2(t) = (0|0|t)$, $g_3(t) = (0|t|0)$. Um zu überprüfen, dass etwa g_1 wirklich in der Fläche liegt, kann man dies für jeden einzelnen Punkt dieser Geraden nachprüfen, indem man die Parametrisierung in die Gleichung f einsetzt:

$$\begin{aligned} f(g_1(t)) &= (-1)^3 + (-1)t^2 + (-1)^2 + t^2 + (-1)t^2 - (-1) \\ &= -1 - t^2 + 1 + t^2 - 1 + 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

für alle t , wie behauptet. Auch für das Einsetzen in implizite Gleichungen von Punkten, deren Koordinaten von einem Parameter t abhängen, existiert eine Version für Kurven. Hierfür sind binomische Formeln und deren Verallgemeinerungen für höhere Exponenten (beispielsweise mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks) sehr hilfreich:

Beispiel 6 (Parametrisierung einer Kurve)

Wir setzen verschiedene Werte $t = -2; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; 2$ in $P(1-t^2|t-t^3)$ ein und zeichnen die zugehörigen Punkte in ein Koordinatensystem ein (Abb. 23 links; für einige der Punkte ist dort der Wert von t markiert, der den Punkt liefert). Auf welcher Kurve liegen diese Punkte? Zwischen den Punkten für $t = -2$ und $t = -1$ ist recht viel Platz; wir fügen daher noch $t = \frac{3}{2}$ und $t = -\frac{3}{2}$ hinzu (mittleres Bild). Nun scheinen alle Punkte auf einem Newtonschen Knoten zu liegen (rechtes Bild). Tatsächlich zeigt das Einsetzen des allgemeinen Punktes $P(1-t^2|t-t^3)$ in die Gleichung

$x^2 - y^2 - x^3 = 0$ des Newtonschen Knotens, dass alle diese Punkte die Gleichung erfüllen: $(1-t^2)^2 - (t-t^3)^2 - (1-t^2)^3 = \dots = 0$.

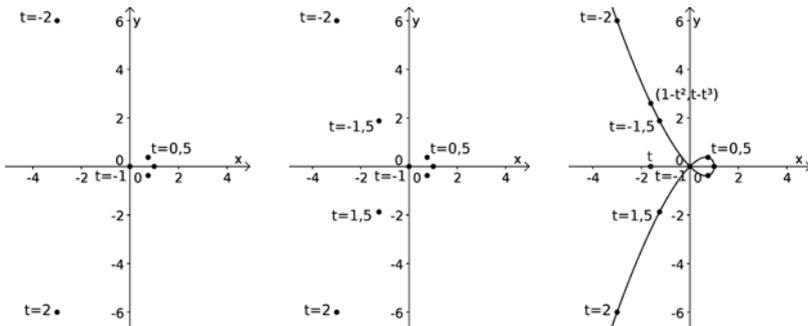


Abb. 23: Einige Punkte auf dem Newtonschen Knoten.

Eine derartige Abbildung $t \rightarrow P_t$, die (zumindest fast) alle Punkte der Kurve trifft, nennt man *Parametrisierung* einer Kurve. Eine Parametrisierung existiert zwar nicht für alle Kurven in der besonders einfachen Form von Polynomen oder rationalen Funktionen als Koordinatenfunktionen (falls doch, so wird die Kurve als *rational* bezeichnet), aber für viele historisch relevante Kurven schon (s. z.B. Schmidt 1949, Wieleitner 1908). Für den Unterricht wurde dies auch in neuerer Zeit schon mehrfach aufgegriffen, da man rationale Kurven auch als Ortskurven von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (sogar nur mit Lineal) erhält und dabei Dynamische Geometrie Software einsetzen kann (s. etwa Schupp/Dabrock 1995, Gawlick 2004, Weiland 2002, Haftdorn 2010).

Kurven- und Flächenscharen

Es gibt auch Flächen, sogenannte *Regelflächen*, die komplett aus (unendlich vielen) Geraden oder anderen rationalen Kurven bestehen. Im Schulunterricht bieten diese die Möglichkeit, Scharen von Kurven zu betrachten, was später in der Analysis der Sekundarstufe II auch wieder auftaucht bei der Behandlung von Funktionenscharen. Auch von einem höheren Standpunkt ist dies sinnvoll, da Deformationen von Kurven und Flächen (die ebenfalls Scharen von solchen darstellen) eine zentrale Rolle bei deren tiefergehendem Studium spielen.

In der eingangs erwähnten Wanderausstellung Imaginary kommen Familien von Flächen oft in der Form $f = ag + (1-a) \cdot h$ vor, wobei a ein reeller

Parameter ist sowie g und h Polynome in x, y, z sind. Dies ist besonders dazu geeignet, erste eigene Experimente zu algebraischen Flächen durchzuführen: Wie verändert sich das Aussehen, wenn der Parameter a sich ändert? Und im zweiten Schritt: warum? Eine erste Erkenntnis hierzu ist etwa, dass Schnittpunkte von $g = 0$ und $h = 0$ immer auch Punkte von $f = 0$ sind. Es gibt aber noch mehr zu entdecken; dies kann man im dritten Schritt erweitern, indem man noch stärker variiert (s. wieder Schupp 2002) und etwa Exponenten ändert, Terme hinzufügt etc.

Beispiel 7 (Familien von Flächen)

Wir betrachten die Familie mit Gleichung $f_a(x | y | z) := x^2 + y^2 - z^2 - a = 0$ vom Grad 2. Für $a = 0$ ergibt sich der sogenannte Doppelkegel (mittleres Bild in Abb. 24) und ansonsten einschalige (links, hier mit $a = -1$) bzw. zweischalige Hyperboloiden (rechts, hier mit $a = 1$).



Abb.24: Eine Deformation des Doppelkegels (Mitte) in einen einschaligen (links) bzw. zweischaligen Hyperboloiden (rechts).

Zum Satz des Pythagoras

Das erste Auftreten impliziter Gleichungen, wie es ja auch die definierenden Gleichungen algebraischer Kurven und Flächen sind, erfolgte im Mathematikunterricht vor einiger Zeit häufig noch im Zusammenhang des Satzes von Pythagoras, da mit ihm schnell die Kreisgleichung folgt. Heute werden implizite Gleichungen meist erst in der Sekundarstufe II betrachtet, weil sie in der Sekundarstufe I nicht wirklich benötigt werden und in keinen Kontext eingebunden sind. Mit einer Vorbereitung wie der in diesem Artikel vorgeschlagenen ist die Betrachtung der Kreisgleichung bereits sehr zeitnah nach der Behandlung des Satzes von Pythagoras sinnvoll. Gleichzeitig wäre dies eine weitere Propädeutik für die später in der Schullaufbahn behandelte analytische Geometrie.

Als Vertiefungen können die Herleitungen der Gleichungen für die räumlichen Varianten dienen, etwa die Kugelgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ oder die Kreiskegelgleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, für die einzig eine geeignete Anwendung des Satzes von Pythagoras nötig ist. Schließt sich dann auch noch die Untersuchung allgemeinerer rotationssymmetrischer algebraischer Flächen an, ist die Kreisgleichung in einen breiten Kontext eingebunden. Zusätzlich liefert die Behandlung der Gleichungen und Visualisierungen von Rotationskörpern wiederum eine Propädeutik für die in der Analysis später betrachteten Rauminhalte von Rotationskörpern.

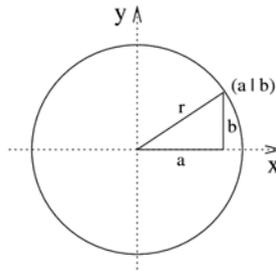


Abb.25: Ein Kreis um den Ursprung mit Radius r kann auch durch die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ beschrieben werden, wie der Satz des Pythagoras zeigt.

Beispiel 8 (Rotationssymmetrische Flächen)

Es wird die Fläche mit $f(x|y|z) = 0$, wobei $f(x|y|z) = x^2 + y^2 + z^3 - z^2$ ist, betrachtet (Abb. 26, linkes Bild).

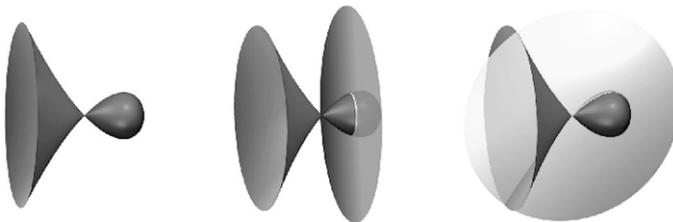


Abb.26: Die Fläche mit Gleichung $x^2 + y^2 + z^3 - z^2 = 0$ ist rotationssymmetrisch. Schnitte mit jeder Ebene $z = a$ liefern Kreise verschiedener Radien, solche mit einer Ebene durch die Rotationsachse (etwa die Ebene $y = 0$) liefern die uns bereits bekannte ebene Kurve namens Newtonscher Knoten.

Möchte man verstehen, warum diese Fläche aussieht wie gezeigt, kann man beispielsweise zunächst verschiedene feste Werte für z einsetzen und die

dann entstehende ebene Kurve in den Variablen x, y studieren (wie im einleitenden Beispiel des Berges mit zwei Gipfeln). Geometrisch entspricht dies dem Schnitt einer Ebene mit Gleichung $z = a$; Einsetzen liefert: $x^2 + y^2 = a^2 - a^3$. Die Untersuchung, für welche a sich dabei ein Kreis, ein Punkt bzw. die leere Menge ergibt, ist nun durch eine Faktorisierung $a^2 - a^3 = a^2 \cdot (1 - a)$ und das Studium des Vorzeichens dieses Ausdrucks durch eine Fallunterscheidung lösbar.

Produkte von Termen

Faktorisieren

Ein Grund, Faktorisieren von Polynomen in einer Variablen zu betrachten, ist, dass dadurch die Nullstellen einer gegebenen Funktion aus der faktorierten Form leichter ablesbar sind, etwa im quadratischen Polynom $x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$. Manchmal wird diese daher auch als starke Form bezeichnet. Bei Verfügbarkeit graphischer Taschenrechner kann man dies bereits visualisieren, auch wenn Quadratwurzeln noch nicht behandelt wurden. Mit Hilfe algebraischer Kurven und Flächen ist eine Geometrisierung ganz analog auch zum Faktorisieren mit mehreren Variablen möglich:

Beispiel 9 (Faktorisieren und Kurven)

Vereinfache den Term $f(x|y) = 5xy + x^2y - 2yx - 2xyx$ und faktoriere ihn soweit wie möglich (bis hierhin ist dies eine übliche Aufgabe); zeichne dann in ein Koordinatensystem die Punkte ein, für die $f(x|y) = 0$ gilt.

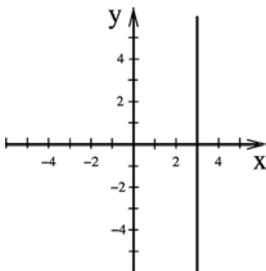


Abb. 27: Drei Geraden.

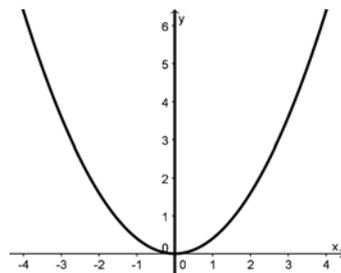


Abb. 28: Die Gerade $x = 0$ und $y = \frac{2}{5}x^2$.

Es ist $f(x|y) = xy(3 - x)$; da ein Produkt genau dann 0 ist, wenn einer der Faktoren es ist, besteht das Bild aus der Vereinigung der drei Geraden

$x=0$, $y=0$ und $3-x=0$, siehe Abb. 27. Ähnlich lässt sich die Menge der Punkte mit $5xy-2x^3=0$ verstehen. Wegen $5xy-2x^3=x(5y-2x^2)$ besteht das Bild aus der vertikalen Geraden $x=0$ und der Parabel mit Gleichung $5y-2x^2=0$ bzw. $y=\frac{2}{5}x^2$ (s. Abb. 28).

Natürlich ist das Zeichnen der Kurve per Hand für die Schülerinnen und Schüler nur dann möglich, wenn der Term in lineare oder einfache quadratische Faktoren zerfällt; die Faktorisierung wird dann im Bild der algebraischen Kurve unmittelbar wiedergespiegelt. Ist ein Werkzeug zum Anzeigen algebraischer Kurven verfügbar, so kann dies auch auf höhere Kurven ausgedeutet werden.

Weitere Themen der Schulalgebra, die im Zusammenhang mit Faktorisierung stehen, finden ebenfalls in naheliegender Weise Anwendung, etwa binomische Formeln.

Beispiel 10 (Binomische Formeln und Kurven)

Faktorisiere den Term $f(x|y)=x^2-4y^2$ und zeichne die zugehörige Kurve $f(x|y)=0$ in ein Koordinatensystem ein. Wegen der binomischen Formeln ist $x^2-4y^2=(x-2y)(x+2y)$ als Produkt schreibbar. Damit sehen wir, wenn wir wieder bedenken, dass ein Produkt genau dann 0 ist, wenn einer der Faktoren es ist, dass die Kurve $f(x|y)=0$ aus der Vereinigung der beiden Geraden mit den Gleichungen $x-2y=0$ und $x+2y=0$ besteht (Abb. 29).

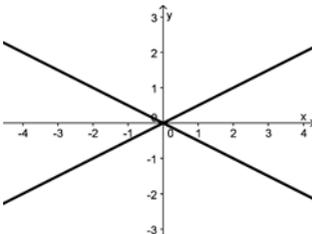


Abb.29: Eine Visualisierung der binomischen Formel $x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$

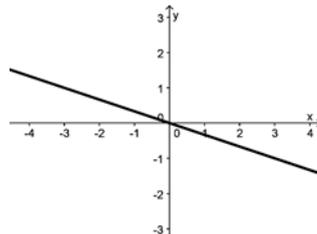


Abb.30: Eine Visualisierung der binomischen Formel $x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2$.

In analoger Weise treten auch die anderen binomischen Formeln auf; beispielsweise ist $x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2$, so dass die Nullstellenmenge nur

aus einer (doppelt zählenden) Geraden besteht (Abb. 30). Eine solche Faktorisierung ist nicht immer möglich; häufig zerfallen Kurven nicht in einfach zu verstehende Teile (z.B. die Hyperbel mit der Gleichung $xy = 1$).

Kreativität, Kugeln, Koordinatensysteme

Man kann auch den umgekehrten Weg gehen und einzelne Terme multiplizieren. Dieselbe Einsicht, dass ein Produkt genau dann verschwindet, wenn einer der Faktoren dies tut, führt dann dazu, dass man hiermit konstruktiv durch Vereinigen von Flächen neue Gebilde entstehen lassen kann und damit der künstlerischen Kreativität im Mathematikunterricht Raum zugehen kann. Bekannt sind hierfür etwa die Aufgaben, aus Parabelabschnitten Gesichter zeichnen zu lassen, indem man für die Parabeln die passenden Formeln in einen Graphischen Taschenrechner eingibt (s. dazu etwa Bärbel Barzels oder Josef Böhms Ideen).

Ein Analogon für Kreise ist, wie oben erwähnt, in der Sekundarstufe I zur Vertiefung des Satzes von Pythagoras in den Unterricht integrierbar und findet sich beispielsweise im Schulbuch Neue Wege 9 RLP. Entsprechende Aufgaben kann man nun unter Benutzung von Surfer selbstverständlich für algebraische Flächen stellen, was der Kreativität noch wesentlich mehr Raum bietet. Möglich ist etwa die Erzeugung einer algebraischen Fläche in Form eines Raumschiffes oder eines Comic-Gesichtes, wie es von Schülern, die unsere Ausstellung Imaginary im Jahr 2008 in Saarbrücken besuchten, vorgeschlagen und realisiert wurde (Abb. 31).

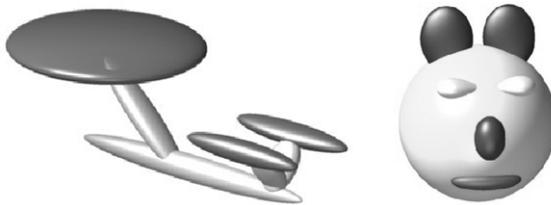


Abb. 31: Raumschiff Enterprise und ein Comic-Gesicht als algebraische Flächen waren nur zwei der vielen Schülerideen, die während der Ausstellung Imaginary entstanden.

Für weitere Bilder, die von Besuchern erzeugt wurden, siehe die Galerien auf der Ausstellungs-Webseite www.Imaginary-Exhibition.com.

Zur Produktion solcher Bilder ist es erforderlich, dass man versteht, wie man einen Kreis, eine Kugel o.ä. über eine Koordinatentransformation verschieben kann, eine Kugel z.B. mit $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$. In der

Software Surfer ist es alternativ auch möglich, das Koordinatensystem zu verschieben oder zu drehen. Diese für die Mathematik ganz wesentliche Möglichkeit der Wahl geeigneter Koordinaten wird in der Schule leider immer noch recht selten thematisiert. Deshalb entspricht das Problem, das Weth in (Weth 1993) bereits konstatierte, sicherlich immer noch der Realität, nämlich jenes, dass eine im Koordinatensystem gedrehte Parabel nicht als solche erkannt wird. Dem kann die Arbeit mit algebraischen Kurven und Flächen entgegen wirken.

Gleichungssysteme

Wie wir oben bereits gesehen haben, liefert das Produkt zweier linearer Terme auf der Geometrie-Seite die Vereinigung zweier Geraden. Deren Schnittpunkte sind natürlich die Lösungen des Gleichungssystems aus den beiden linearen Gleichungen, die entstehen, wenn man beide Terme Null setzt, da es ja gerade die Punkte sind, für die beide Gleichungen erfüllt sind. Zwar wird dies im Normalfall genau ein Punkt sein, doch die Analogie zwischen Algebra und Geometrie greift auch sonst.

Mit Hilfe von Flächen können wir dies direkt verallgemeinern: ein gemeinsamer Schnittpunkt dreier Ebenen im Raum (falls ein solcher existiert) ist eine (meist die eindeutige) Lösung eines gegebenen linearen Gleichungssystems in drei Variablen. Und auch Gleichungssysteme, die Polynome von höherem Grad involvieren, können analog visualisiert und damit graphisch gelöst werden, führen dann nur auf Kurven bzw. Flächen höheren Grades, die sich allerdings auch in mehreren Punkten schneiden können.

Symmetrie

Ein zentraler Aspekt des Arbeitens mit rationalen Zahlen ist, dass das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist, etwa $(-2) \cdot (-3) = 6$ oder $(-2)^2 = 4$. Im Zusammenhang mit Termen heißt dies, dass $x^2 = (-x)^2$ für jedes beliebige x gilt. Wie schon oben im Beispiel der Punkte, die $x^2 = y^2$ erfüllen, hängt das mit gewissen Symmetrieaspekten zusammen. Dies wird insbesondere anhand weniger elementarer Beispiel deutlich.

Beispiel 11 (Symmetrische Kurven)

Welche der Kurven in Abb. 32 bis Abb. 34 gehört zu welcher Gleichung?

$$f: 0 = x^4 - y^2 - x^6$$

$$g: 0 = x^4 - y^2 - y^5$$

$$h: 0 = x^2 - y^2 + x^3$$

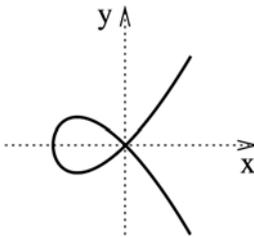


Abb. 32

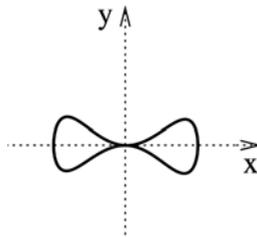


Abb. 33

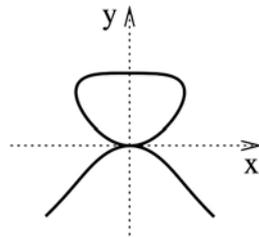


Abb. 34

Die Gleichung f geht sowohl unter $x \rightarrow -x$ als auch unter $y \rightarrow -y$ in sich selbst über, weil beide Variablen nur in geraden Potenzen auftreten; die zugehörige Kurve ist also symmetrisch zu beiden Koordinatenachsen, d.h. es ist die mittlere Kurve. Die Kurve zu Gleichung g ist, da nur x , nicht aber y nur in geraden Potenzen auftritt, nur zur y -Achse symmetrisch, d.h. es ist die rechte Kurve. Dementsprechend gehört h zur linken Kurve; auch dies hätte man sich freilich analog überlegen können.

Man kann das gleiche Problem auch anders einkleiden, etwa wie in folgendem Beispiel; in jedem Fall wird klar, dass gewisse Symmetrie-Eigenschaften direkt am Term abzulesen sind und dass also die Beziehungen zwischen Algebra und Geometrie sowie auch der ebenen und der Raumgeometrie vielfältig sind.

Beispiel 12 (Symmetrische Flächen)

Welche der Achsen im Bild von $x^2 - y^2 - z^3 = 0$ ist die z -Achse (Abb. 35)?

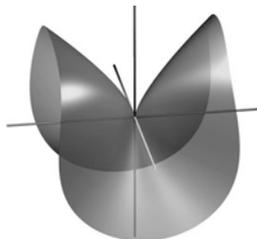


Abb.35: Welche der Achsen ist die z -Achse?

Weniger direkt als Achsen- bzw. Ebenen-Symmetrien sind endliche Rotations-Symmetrien an der Gleichung abzulesen:

Beispiel 13 (Symmetrische Flächen)

Erst ein detailliertes Betrachten erlaubt es, die folgenden Gleichungen und die Bilder in Abb. 36 bis Abb. 38 einander zuzuordnen: Beispielsweise ist h für festes x ein Kreis in y und z und gehört daher zum rechten Bild. f geht durch die Vertauschungen $x \rightarrow -y$, $y \rightarrow x$ in sich selbst über; da dies einer Rotation um 90° um die z -Achse entspricht, gehört f zur Abbildung links.

$$f(x|y|z) = x^2y^2 - z^4 - x^6 - y^6 - z^6$$

$$g(x|y|z) = x^2 - y^2 - x^4 - y^4 - 10z^2$$

$$h(x|y|z) = x^2 - y^4 - y^2 - z^2.$$



Abb. 36



Abb. 37

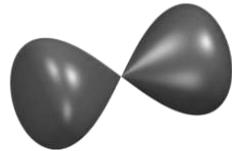


Abb. 38

Mathematisch zwar anspruchsvoller, doch ästhetisch noch reizvoller sind oft algebraische Flächen, die die Symmetrien von platonischen Körpern aufweisen (Abb. 39). Das Thema bietet eine hervorragende Möglichkeit der Einbindung dieses kulturhistorisch so wichtigen Diamants der Geometrie in den Unterricht. Hierzu gäbe es noch vieles zu erläutern; es sei aber nur auf (Labs 2008) verwiesen, wo einige Anwendungen von Symmetrien auf algebraische Flächen vorgestellt werden.

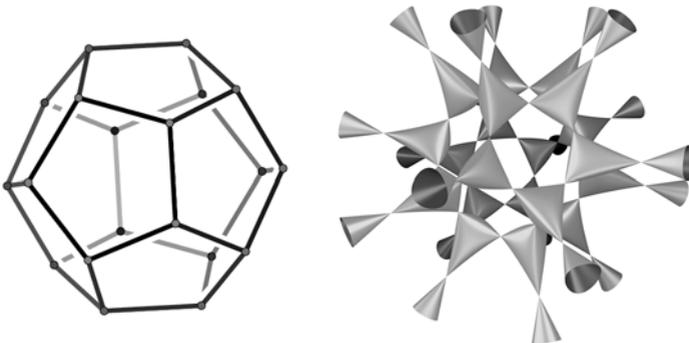


Abb. 39: Die sogenannte Barth-Fläche (rechts); sie besitzt die Symmetrie eines regelmäßigen Dodekaeders (linkes Bild).

Schlussbemerkung und Ausblick

Dieser Artikel über verschiedene Möglichkeiten der durchgehenden Geometrisierung der Schulalgebra, beginnend mit der Einführung der Terme durch Visualisierung algebraische Kurven und Flächen, basierend auf deren impliziten Gleichungen, kann kein allumfassender und sämtliche auch didaktischen Aspekte diskutierender Beitrag sein. Vielmehr ist dies als erste Skizze gedacht, die in Zukunft durch weitere Texte, theoretische Untersuchungen, konkrete Aufgabenblätter, Überprüfungen in der Praxis, etc. ergänzt werden muss. Der Text stellt also nur den Beginn eines längerfristigen Projektes dar.

Trotzdem sollen hier wenigstens einige Aspekte hervorgehoben werden: Ganz zentral ist, dass bei der vorgeschlagenen Herangehensweise der oft beklagte und meist auf Graphen von Funktionen $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ beschränkte Kurvenbegriff von Beginn an allgemeiner gehalten wird. In vielerlei Hinsicht liefert das Konzept außerdem, schon durch die oben beschriebenen Beispiele, reichhaltige Möglichkeiten, das Spiralprinzip umzusetzen, etwa, wenn bei der Behandlung der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ bereits auf ähnliche Gleichungen und Bilder zurückgegriffen werden kann. Zusätzlich stellt sich heraus, dass möglicherweise einige zentrale Lücken in der Landschaft der Schulmathematik geschlossen werden können, wenn algebraische Kurven und Flächen eingesetzt werden. Nehmen wir nur die weiter oben erwähnte Tatsache, dass man im bisherigen Unterricht zwar über die Achsensymmetrie von Funktionsgraphen ausführlich redet, doch die naheliegende Betrachtung von Rotationssymmetrien innerhalb des gesteckten Rahmens schon für Drehungen um 90° außen vorlassen muss, ganz im Gegensatz zu der Entsprechung bei algebraischen Kurven oder Flächen. Oder auch jene Tatsache, dass das Faktorisieren von Polynomen in einer Variablen zwar durch das leichtere Finden von Nullstellen annähernd geometrisch motiviert werden kann, doch dass es im Fall von Kurven tatsächlich eine geometrische Bedeutung erhält und dass dadurch der in der Schule beim Lösen linearer Gleichungssysteme übliche Prozess des Schneidens von Geraden in der Ebene somit auch auf natürliche Weise eine Umkehrung erfährt, nämlich die Vereinigung von Geraden beim Multiplizieren zweier linearer Terme.

Einen weiteren Punkt, der uns ganz wesentlich erscheint, möchten wir betonen: Die sehr behutsame Einführung der Visualisierung und späteren Geometrisierung der impliziten Gleichungen, zunächst mit der Visualisierungssoftware als Black Box, die visuell ansprechende und damit faszinierende Bilder liefert, hat den Vorteil, dass damit viele zentrale Aspekte zwar langsam, dafür aber umso nachhaltiger in die Schulmathematik integriert werden können; durch diese kleinen, überschaubaren Schritte erscheint auch eine Akzeptanz bei den Lehrpersonen eher möglich als durch ganze neue Unterrichtseinheiten.

Viele weitere Aspekte wären zu nennen, doch um den beispielorientierten Charakter dieses Textes nicht umzukehren, verweisen wir auf zukünftige Arbeiten. Abschließend möchten wir nur noch eine Bemerkung zur verwendeten Visualisierungssoftware machen. Diese kann im Unterricht zwar bereichernd eingesetzt werden, etwa zum Experimentieren mit algebraischen Kurven und Flächen, ist aber nicht notwendig. Daher können auch Lehrkräfte, für die Computer in der Schule nicht einfach nutzbar sind, trotzdem viele der erwähnten Beispiele und Varianten davon im Unterricht nutzen, wenn sie nur zu Hause für die Vorbereitung die entsprechende Software zur Verfügung haben, um die Visualisierungen zu erstellen. Durch die schrittweise Einführung über Jahre hinweg ist es außerdem an vielen Stellen möglich, Arbeitsblätter bereit zu stellen, die direkt einsetzbar sind, und zwar mit oder ohne Nutzung der Software. Genauso wie weitere theoretische und praktische Untersuchungen sind solche Arbeitsblätter bereits in Planung.

Ich danke den Leitern des Arbeitskreises, M. Ludwig und R. Oldenburg, dafür, dass sie mir die Möglichkeit gegeben haben, dort vorzutragen, und außerdem A. Lambert und seiner Arbeitsgruppe sowie A. Filler und S. Nordheimer für wertvolle Hinweise zur Verbesserung dieses Textes.

Anhang: Ray Tracing

Ein reizvoller Aspekt des Betrachtens von Geraden auf algebraischen Flächen und Schnittpunkten von Geraden mit solchen Flächen ist die Tatsache, dass das Programm Surfer, mit dem die Flächen ja visualisiert werden, selbst ebenfalls genau auf der Technik des Einsetzens einer Geradenparametrisierung in die Flächengleichung beruht. Das sogenannte Ray Tracing

algebraischer Flächen ist nämlich im Wesentlichen eine moderne Version von Dürers Technik (Abb. 40), angewandt jetzt aber auf virtuelle Objekte.

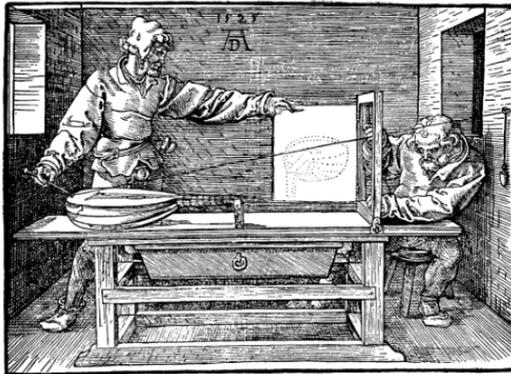


Abb.40: A. Dürer: Mann beim Zeichnen einer Laute, 1525.

Ray Tracing ist die Weiterentwicklung dieser Idee für den Computer.

Möchte man mit dieser Technik eine algebraische Fläche visualisieren, so legt man fest, wo sich der virtuelle Zeichenrahmen und das virtuelle Auge befinden, sowie in welche Richtung dieses blickt. Den Zeichenrahmen teilt man in eine große Anzahl von Quadraten, sogenannten Pixeln, ein, und legt durch das Auge und jeden der Mittelpunkte dieser Quadrate eine Gerade mit Parametrisierung $g(t)$. Diese setzt man in die Gleichung $f = 0$ der Fläche ein und erhält ein Polynom $f(g(t))$ in der Variablen t . Das ist Null genau für jene t , die einen Punkt auf der Flächen liefern. Für diese t muss man nur noch überprüfen, ob sie auch im Blickfeld liegen (und nicht etwa hinter dem Auge, hinter einem anderen Objekt oder zu weit weg). Die Aufgabe ist also zu lösen, indem man wieder allgemeine Punkte in Terme einsetzt und anschließend Nullstellen eines Polynoms bestimmt. Für Flächen höheren Grades ist dies wegen der Galoistheorie mit Hilfe von Wurzeln zwar nicht mehr möglich, doch schon graphische Taschenrechner lösen das Problem der numerischen Nullstellenberechnung von Polynomen in einer Variablen.

Der Name Ray Tracing (d.h. Strahlenverfolgung) kommt nun daher, dass für die Farbgebung der einzelnen Punkte auch Lichtquellen definiert werden können, deren Strahlen dann verfolgt werden, was insbesondere bei spiegelnden Oberflächen eine aufwendige Angelegenheit werden kann. Für die Sekundarstufe II bietet dies aber ansprechende Möglichkeiten zur Vertiefung der Vektorrechnung wie auch der Infinitesimalrechnung. Da algebrai-

sche Flächen vom Grad ≤ 3 nicht nur implizite Darstellungen, sondern auch Parametrisierungen besitzen, sind sie besonders leicht zu handhaben und daher gemeinsam mit anderen parametrisierbaren algebraischen Flächen, wie Bézierflächen oder NURBS, inzwischen auch angewandt (siehe z.B. Glaeser 2005): Oft werden Objekte in CAD-Systemen schon durch Stücke solcher algebraischer Flächen angenähert, nicht nur von Ebenen, Kugeln, Zylindern oder Kegeln.

Literaturverzeichnis

- Bothmer, v. H.-C.; Labs, O. (2006). *Advent Calendar 2006 - Geometrical Animations*. Von www.Calendar.AlgebraicSurface.net abgerufen
- Filler, A. (2006). *Habilitationsschrift: Einbeziehung von Elementen der 3D-Computergrafik*. Berlin.
- Fischer, G. (1994). *Ebene algebraische Kurven*. Braunschweig: Vieweg.
- Furdek, A. (2001). *Fehler-Beschwörer*. Books on Demand.
- Gawlick, T. (2004). *Der Mathematikunterricht* 50, 4. Velber: Friedrich Verlag.
- Glaeser, G. (2005). *Geometrie und ihre Anwendungen*. Heidelberg: Spektrum/Elsevier.
- Haftendorn, D. (2010). *Mathematik sehen und verstehen: Schlüssel zur Welt*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Hohenwarter, M. et al. (2011). *GeoGebra*. Von GeoGebra abgerufen: www.GeoGebra.org
- Holzer, S.; Labs, O. (2006). Illustrating the Classification of Real Cubic Surfaces. In Elkadi, M.; Mourrain, B.; Piene, R. *Algebraic Geometry and Geometric Modeling*. Heidelberg: Springer, S. 119-134.
- Klein, F. (1928). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus I*. Berlin: Springer.
- Labs, O. (2008). *Weltrekordflächen*. Von Imaginary abgerufen: www.Imaginary-Exhibition.com
- Lietzmann, W. (1952). *Wo steckt der Fehler?* Leipzig: Teubner.

- Loria. (1910). *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven - Theorie und Geschichte, Bd. I.* Leipzig: Teubner.
- Loria (1911). *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven - Theorie und Geschichte, Bd. II.* Leipzig: Teubner.
- Maier, P. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen.* Donauwörth: Auer.
- Meyer, H. et al. (2011). *Surfer – Visualisierung reeller algebraischer Flächen.* Von Imaginary abgerufen:
www.Imaginary-Exhibition.com/surfer
- Schmidt, H. (1949). *Ausgewählte höhere Kurven.* Wiesbaden: Kesselring-sche Verlagsbuchhandlung.
- Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen im Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.
- Schupp, H., Dabrock, H. (1995). *Höhere Kurven.* Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag.
- Weiland, H.-G., Weth, Th. (2002). *Computer im Mathematikunterricht.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Weth, T. (1993). *Zum Verständnis des Kurvenbegriffs.* Hildesheim: Franzbecker.
- Weth, T. (1999). *Kreativität im Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.
- Wieleitner, H. (1908). *Spezielle ebene Kurven.* Berlin: Sammlung Göschen.
- Wieleitner, H. (1914). *Algebraische Kurven I.* Berlin: Sammlung Göschen.
- Wolff, G. (1966). *Handbuch der Schulmathematik, Band 4.* Hannover: Schroedel.

Dreiecke im Dreieck

Vermutungen und Entdeckungen – DGS als Wundertüte

Ingmar Lehmann

Zusammenfassung. Dynamische Geometriesoftware (DGS) lässt sich mit Vorteil als Werkzeug in der Schule einsetzen, da sich so Vermutungen leichter aufstellen und erhärten lassen. Eine falsche Vermutung wird durch den Zugmodus widerlegt. Eine richtige Vermutung wird durch den Zugmodus zwar erhärtet; die Einsicht in die Beweisnotwendigkeit wird dagegen eher erschwert. Ich hatte den *Satz von Morley* behandelt und mich im Nachhinein gefragt, welche Figur entsteht, wenn anstelle der Winkel jede Seite eines beliebigen Dreiecks gedrittelt wird. Es drängten sich gleich mehrere Vermutungen und einige Verallgemeinerungen über Schnittfiguren im Dreieck auf. Dynamisches Messen und Rechnen erwiesen sich dabei – im Zusammenspiel mit der Bruchrechnung – als wichtige Werkzeuge. Die folgenden Sätze habe ich (mit Ausnahme der *Sätze von Routh* und *Morgan*) selbst entdeckt. Auch wenn ich später feststellen musste, dass einige davon längst publiziert worden sind, bleibt die schöne Erfahrung, es selbst vermutet und bewiesen zu haben.

Spezielle Ecktransversalen eines Dreiecks

Die beste Art, etwas zu erlernen, ist, es selbst zu entdecken. (Polya 1967)

Am Beispiel der in der Schule behandelten Transversalen eines Dreiecks (Mittelsenkrechten, Winkelhalbierenden, Höhen und Seitenhalbierenden) steigen wir in das Thema ein. Nachdem wir uns in einem Zirkel der *Mathematischen Schülergesellschaft* (MSG) an der Humboldt-Universität zu Berlin mit dem *Satz von Morley* beschäftigt hatten, stellte sich die Frage: Was passiert im Innern eines beliebigen Dreiecks, wenn anstelle der Winkeldrittung jede Seite dieses Dreiecks gedrittelt wird? Sind die entstehenden Dreiecke ebenfalls gleichseitig?

Werden Winkel und Seiten gemessen, berechnete Verhältnisse zweier Flächeninhalte dann per Zugmodus konstant bleiben, drängen sich einige Vermutungen auf. Welche Invarianten verbergen sich hinter konstanten (Näherungs-)Werten? Steht 2,65 für $\sqrt{7}$ oder für $\frac{130}{49}$?

Die Gefahr wurde oft genug benannt. Liefert der Zugmodus stets aufs Neue die Bestätigung der aufgestellten Vermutung, wird dies von den Schülern eventuell vorschnell als „Beweis“ akzeptiert bzw. missverstanden.

Dreiecke im Innern

Satz 1³: Die Seiten $a = BC$, $b = AC$ und $c = AB$ eines Dreiecks $\triangle ABC$ seien gedrittelt (deshalb die hochgestellte „3“). Verbindet man die Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, so entstehen im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ zwei Dreiecke $\triangle P_1P_3P_5$ und $\triangle P_2P_4P_6$ (siehe Abb. 1).

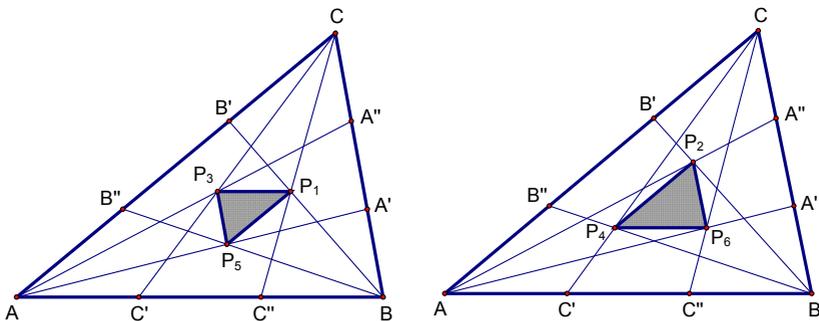


Abb. 1: Dreiecke $\triangle P_1P_3P_5$ und $\triangle P_2P_4P_6$

Dann sind die entstehenden Dreiecke ähnlich zum Ausgangsdreieck und für das Verhältnis der Seiten, Umfänge und Flächeninhalte gilt

$$\frac{a}{P_3P_5} = \frac{b}{P_1P_5} = \frac{c}{P_1P_3} = 5, \text{ also } \frac{u_{\triangle ABC}}{u_{\triangle P_1P_3P_5}} = 5 \text{ und } \frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle P_1P_3P_5}} = 25 \text{ (Rosenbaum, 1981),}$$

$$\frac{a}{P_2P_6} = \frac{b}{P_2P_4} = \frac{c}{P_4P_6} = 4, \text{ also } \frac{u_{\triangle ABC}}{u_{\triangle P_2P_4P_6}} = 4 \text{ und } \frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle P_2P_4P_6}} = 16 \text{ (Vetter, 1988).}$$

Darüber hinaus sind entsprechende Dreiecksseiten zueinander parallel und die Punkte P_i teilen die Drittelungstransversalen im Verhältnis 3 : 2 bzw. 3 : 1. Für die Drittelungstransversalen heißt das

$$AP_5 : P_5P_6 : P_6A' = BP_1 : P_1P_2 : P_2B' = CP_3 : P_3P_4 : P_4C' = 12 : 3 : 5,$$

$$AP_3 : P_3P_2 : P_2A'' = BP_5 : P_5P_4 : P_4B'' = CP_1 : P_1P_6 : P_6C'' = 12 : 3 : 5.$$

Der Beweis, dass die entsprechenden Dreiecksseiten zueinander parallel sind, wollte mir zunächst nicht gelingen. Ich suchte einen elementargeometrischen Beweis, keinen analytischen. Felix, MSG-Schüler der Klasse 12, hat es dann „gepackt“ (siehe Abb. 2; mit abweichenden Bezeichnungen gegenüber Abb. 1):

Betreff: Der Beweis für die Drittelung

Datum: 19.01.2010 17:56

An: ilehmann@math.hu-berlin.de

Sehr geehrter Herr Dr. Lehmann, im Anhang schicke ich ihnen den Beweis, den ich ihnen bisher schuldig geblieben bin. Bis morgen, Felix Schröder (Berlin, Romain-Rolland-Gymnasium)

P_1 ist der Schnittpunkt von $\overline{AA_2}$ und $\overline{CC_1}$
 P_2 — " — " — " — $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_2}$
 P_3 — " — " — " — $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_2}$

Zu zeigen: $\overline{P_1P_2} \parallel \overline{BC}$
 $\overline{P_2P_3} \parallel \overline{AC}$
 und $\overline{P_3P_1} \parallel \overline{AB}$

Lösung: In unserem beliebigen Dreieck fünfeln wir die Seiten anstatt sie zu dritteln. Dann konstruieren wir jeweils 4 Parallelen zu jeder Seite durch die Punkte, die durch diese Fünftelung entstanden sind. Es entsteht eine Art Netz;

In der Mitte entsteht ein Dreieck (rot).
 Dieses Dreieck entspricht dem Dreieck $P_1P_2P_3$, da die Geraden durch dessen Eckpunkte und die Eckpunkte des Dreiecks ABC die gegenüberliegenden Seiten dritteln (Strahlen

Abb. 2: Beweis der Parallelität

Satz 1³ lässt sich verallgemeinern. Interessanter Weise wurde aber nur der Fall des Dreiecks $\Delta P_1P_2P_3$ verallgemeinert und von dem kubanischen Schüler Domingo Lovis (Klasse 11) bewiesen (Rosenbaum, 1981).

Satz 1ⁿ: Werden die Seiten eines Dreiecks ΔABC in n gleiche Teile geteilt (deshalb das hochgestellte „n“), wobei n eine natürliche Zahl mit $n > 2$ sei,

und die am weitesten außen liegenden Teilungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbunden, so entstehen im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ zwei Dreiecke $\triangle P_1P_3P_5$ und $\triangle P_2P_4P_6$ (siehe Abb. 3 für $n = 9$).

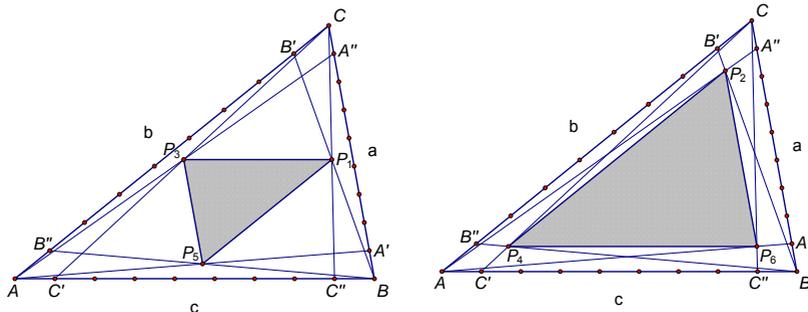


Abb. 3: Dreiecke $\triangle P_1P_3P_5$ und $\triangle P_2P_4P_6$ für $n = 9$

Dann sind die entstehenden Dreiecke ähnlich zum Ausgangsdreieck und für das Verhältnis der Seiten, Umfänge und Flächeninhalte gilt

$$\frac{a}{P_3P_5} = \frac{b}{P_1P_5} = \frac{c}{P_1P_3} = \frac{2n-1}{n-2}, \text{ also } \frac{u_{\triangle ABC}}{u_{\triangle P_1P_3P_5}} = \frac{2n-1}{n-2} \text{ und } \frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle P_1P_3P_5}} = \left(\frac{2n-1}{n-2}\right)^2$$

(Rosenbaum, 1981) sowie

$$\frac{a}{P_2P_6} = \frac{b}{P_2P_4} = \frac{c}{P_4P_6} = \frac{n+1}{n-2}, \text{ also } \frac{u_{\triangle ABC}}{u_{\triangle P_2P_4P_6}} = \frac{n+1}{n-2} \text{ und } \frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle P_2P_4P_6}} = \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^2.$$

Darüber hinaus sind entsprechende Dreiecksseiten zueinander parallel und die Punkte P_i teilen die Teilungstransversalen im Verhältnis $n : (n - 1)$ bzw. $n : 1$. Für die Teilungstransversalen heißt das

$$AP_5 : P_5P_6 : P_6A' = BP_1 : P_1P_2 : P_2B' = CP_3 : P_3P_4 : P_4C' = (n+1) : (n-2) : \frac{2n-1}{n},$$

$$AP_3 : P_3P_2 : P_2A'' = BP_5 : P_5P_4 : P_4B'' = CP_1 : P_1P_6 : P_6C'' = (n+1) : (n-2) : \frac{2n-1}{n}.$$

Beweis (für $\triangle P_2P_4P_6$); siehe auch Walser, 2010b, c:

Nach Voraussetzung („ n -telung“) ergibt sich $A''P_2 : P_2A = A'P_6 : P_6A = 1 : n$, analog $C'P_4 : P_4C = C''P_6 : P_6C = 1 : n$, $B''P_4 : P_4B = B'P_2 : P_2B = 1 : n$. Folglich sind $BC \parallel P_2P_6$, $AB \parallel P_4P_6$ und $AC \parallel P_2P_4$, also $\alpha = \angle BAC = \angle P_2P_4P_6$, $\beta = \angle ABC = \angle P_2P_6P_4$ und $\gamma = \angle ACB = \angle P_4P_2P_6$, d. h., $\triangle P_4P_6 \sim \triangle C''C''C''$,

also $C'C'' : P_4P_6 = CC' : CP_4 = (CP_4 + P_4C') : CP_4 = CP_4 : CP_4 + P_4C' : CP_4 = \frac{n+1}{n}$

bzw. $nC'C'' = (n+1)P_4P_6$ oder

$$P_4P_6 = \frac{n}{n+1} C'C'' = \frac{n}{n+1} (AB - AC' - BC'') = \frac{n}{n+1} \left(AB - \frac{AB}{n} - \frac{AB}{n} \right) \\ = \frac{n}{n+1} \left(AB - \frac{2AB}{n} \right) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n \cdot AB}{n} - \frac{2AB}{n} \right) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} AB = \frac{n-2}{n+1} AB,$$

also $\frac{c}{P_4P_6} = \frac{n+1}{n-2}$; analog $\frac{a}{P_2P_6} = \frac{b}{P_2P_4} = \frac{n+1}{n-2}$. Damit sind die Dreiecke

$\triangle ABC$ und $\triangle P_2P_4P_6$ mit dem Streckfaktor $\frac{n+1}{n-2}$ zueinander ähnlich, d. h., es

gelten $\frac{u_{\triangle ABC}}{u_{\triangle P_2P_4P_6}} = \frac{n+1}{n-2}$ und $\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle P_2P_4P_6}} = \left(\frac{n+1}{n-2} \right)^2$.

Die Eckpunkte von $\triangle P_2P_4P_6$ teilen die Transversalen im Verhältnis $n : 1$,

denn $\frac{AP_2}{P_2A''} = \frac{AP_6}{P_6A'} = \frac{BP_2}{P_2B'} = \frac{BP_4}{P_4B''} = \frac{CP_4}{P_4C'} = \frac{CP_6}{P_6C''} = \frac{n}{1} = n$. Für die Transver-

salen gelten einerseits $AP_5 : P_5A' = n : (n-1)$ und andererseits

$$AP_5 : P_5A' = (n+1) : x, \text{ d. h. } \frac{AP_5}{P_5A'} = \frac{n}{n-1} = \frac{n+1}{x}, \text{ also } x = \frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n}, \text{ d. h.}$$

$$P_6A' = P_5A' - P_5P_6 = n - \frac{1}{n} - (n-2) = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n}. \text{ Insgesamt folgt}$$

$$AP_5 : P_5P_6 : P_6A' = BP_1 : P_1P_2 : P_2B' = CP_3 : P_3P_4 : P_4C' = (n+1) : (n-2) : \frac{2n-1}{n},$$

$$AP_3 : P_3P_2 : P_2A'' = BP_5 : P_5P_4 : P_4B'' = CP_1 : P_1P_6 : P_6C'' = (n+1) : (n-2) : \frac{2n-1}{n}$$

qed.

Mit $n = 3$ erhalten wir den Satz 1^3 als Spezialfall von Satz 1^n , während $n = 5$ die Verhältnisse $A_{\triangle ABC} : A_{\triangle P_1P_3P_5} = 9$ und $A_{\triangle ABC} : A_{\triangle P_2P_4P_6} = 4$ liefert.

Im folgenden Satz werden (wie in Satz 1^3) die Dreiecksseiten zwar wieder gedrittelt, aber nur jede zweite der sechs Transversalen trägt mit ihren Schnittpunkten zu den inneren Figuren bei. Die im Satz zuvor konstatierte Ähnlichkeit lässt sich dann zwar *nicht* bestätigen, aber Entdeckungen sind dennoch möglich.

Satz 2³: Die Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ seien gedrittelt. Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, so entstehen im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ zwei Dreiecke $\triangle Q_1Q_3Q_5$ und $\triangle Q_2Q_4Q_6$.

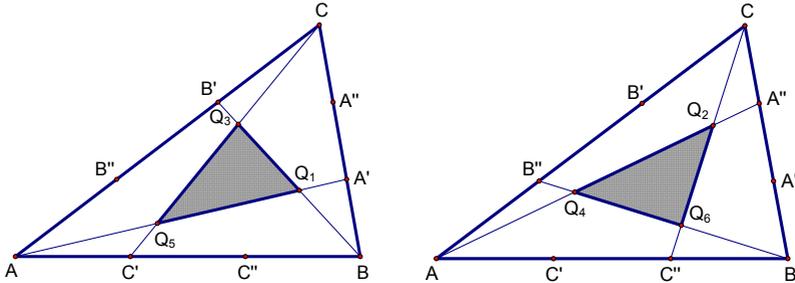


Abb. 4: Dreiecke $\triangle Q_1Q_3Q_5$ und $\triangle Q_2Q_4Q_6$

Dann haben die Dreiecke $\triangle Q_1Q_3Q_5$ und $\triangle Q_2Q_4Q_6$ (siehe Abb. 4) denselben Flächeninhalt und darüber hinaus gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle Q_1Q_3Q_5}} = 7 \quad (\text{Steinhaus, 1959; Sielaff; Usbeck, 1994}) \quad \text{und}$$

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle Q_2Q_4Q_6}} = 7 \quad (\text{Mathematik-Olympiade 241042; 1985; Johnston, 1992}).$$

Darüber hinaus gelten $\frac{AQ_5}{AA'} = \frac{BQ_1}{BB'} = \frac{CQ_3}{CC'} = \frac{3}{7}$ und $\frac{AQ_1}{AA'} = \frac{BQ_3}{BB'} = \frac{CQ_5}{CC'} = \frac{6}{7}$

bzw. $\frac{AQ_4}{AA'} = \frac{BQ_6}{BB'} = \frac{CQ_2}{CC'} = \frac{3}{7}$ und $\frac{AQ_2}{AA'} = \frac{BQ_4}{BB'} = \frac{CQ_6}{CC'} = \frac{6}{7}$,

d. h., die Punkte Q_i teilen die Drittelungstransversalen im Verhältnis 1:6 oder 3:4. Für die Drittelungstransversalen heißt das

$$AQ_5 : Q_5Q_1 : Q_1A' = BQ_1 : Q_1Q_3 : Q_3B' = CQ_3 : Q_3Q_5 : Q_5C' = 3 : 3 : 1,$$

$$AQ_4 : Q_4Q_2 : Q_2A'' = BQ_6 : Q_6Q_4 : Q_4B'' = CQ_2 : Q_2Q_6 : Q_6C'' = 3 : 3 : 1.$$

Darüber hinaus entdecken wir zudem parallele Strecken

$$Q_2Q_3 \parallel Q_5Q_6 \parallel AB, \quad Q_1Q_6 \parallel Q_3Q_4 \parallel AC \quad \text{und} \quad Q_1Q_2 \parallel Q_4Q_5 \parallel BC.$$

Ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig, sind dies auch die Dreiecke $\triangle Q_1Q_3Q_5$ und $\triangle Q_2Q_4Q_6$ und zueinander kongruent.

Der Satz 2³ lässt sich in mehrfacher Hinsicht verallgemeinern (Walser, 2010b).

Satz 2ⁿ: Die Seiten a , b und c eines Dreiecks $\triangle ABC$ seien in n gleiche Teile geteilt, wobei n eine ungerade Zahl sei (siehe Abb. 5 für $n = 5$).

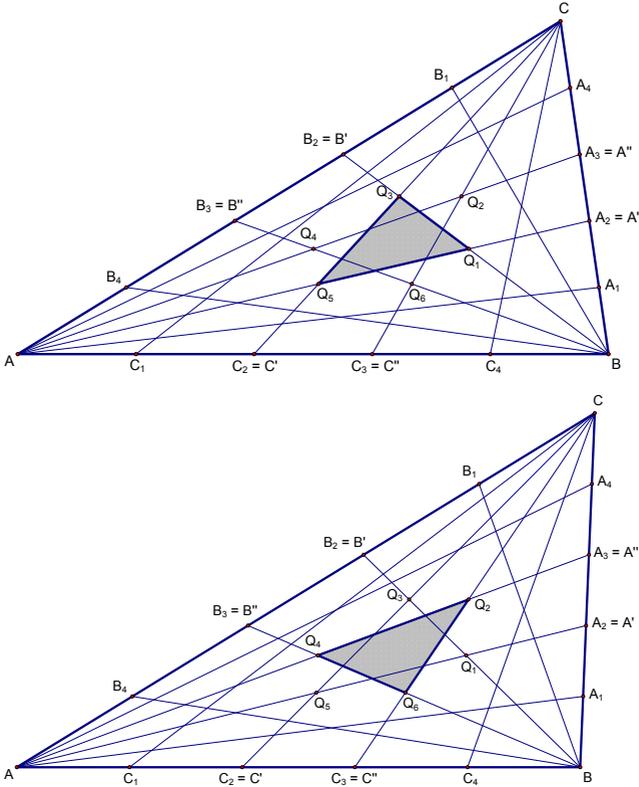


Abb. 5: Dreiecke $\triangle Q_1Q_3Q_5$ und $\triangle Q_2Q_4Q_6$ für $n = 5$

Verbindet man die jeweiligen mittleren beiden dieser n -Teilungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, so entstehen im Innern des Dreiecks

$\triangle ABC$ zwei Dreiecke $\triangle Q_1Q_3Q_5$ und $\triangle Q_2Q_4Q_6$ mit $A'A'' = \frac{BC}{n} = \frac{a}{n}$,

$B'B'' = \frac{AC}{n} = \frac{b}{n}$, $C'C'' = \frac{AB}{n} = \frac{c}{n}$. Dann gilt für das Verhältnis der Flächen-

inhalte

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle Q_1Q_3Q_5}} = \frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle Q_2Q_4Q_6}} = \frac{3n^2 + 1}{4}.$$

Darüber hinaus gelten

$$\frac{AQ_5}{AA'} = \frac{BQ_1}{BB'} = \frac{CQ_3}{CC'} = \frac{2n(n-1)}{3n^2+1} \quad \text{und} \quad \frac{AQ_1}{AA'} = \frac{BQ_3}{BB'} = \frac{CQ_5}{CC'} = \frac{2n(n+1)}{3n^2+1}$$

bzw.

$$\frac{AQ_4}{AA'} = \frac{BQ_6}{BB'} = \frac{CQ_2}{CC'} = \frac{2n(n-1)}{3n^2+1} \quad \text{und} \quad \frac{AQ_2}{AA'} = \frac{BQ_4}{BB'} = \frac{CQ_6}{CC'} = \frac{2n(n+1)}{3n^2+1},$$

d. h. die Punkte Q_i teilen die Transversalen im Verhältnis $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 : \frac{n(n+1)}{2}$

oder $\frac{n(n-1)}{2} : \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. Für die n -Teilungspunkte-Transversalen heißt das

$$AQ_5 : Q_5Q_1 : Q_1A' = BQ_1 : Q_1Q_3 : Q_3B' = CQ_3 : Q_3Q_5 : Q_5C' = \frac{n(n-1)}{2} : n : \left(\frac{n-1}{2}\right)^2,$$

$$AQ_4 : Q_4Q_2 : Q_2A'' = BQ_6 : Q_6Q_4 : Q_4B'' = CQ_2 : Q_2Q_6 : Q_6C'' = \frac{n(n-1)}{2} : n : \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Das bedeutet zudem: $Q_2Q_3 \parallel Q_5Q_6 \parallel AB$, analog gelten $Q_1Q_6 \parallel Q_3Q_4 \parallel AC$ und $Q_1Q_2 \parallel Q_4Q_5 \parallel BC$.

Ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ($a = b = c$), so sind auch die Dreiecke $\triangle Q_1Q_3Q_5$ und $\triangle Q_2Q_4Q_6$ gleichseitig und zudem kongruent ($q_1 = q_2 = q$).

Der *Beweis* lässt sich elementargeometrisch mit Hilfe der *Sätze von Stewart* und *Heron* führen, indem man zunächst die Länge der Strecken auf den Transversalen bestimmt, woraus man auf die Seitenlängen der Dreiecke $\triangle Q_1Q_3Q_5$ und $\triangle Q_2Q_4Q_6$ schließen kann:

$$Q_1Q_3 = \frac{2}{3n^2+1} \sqrt{2n(n-1)c^2 + 2n(n+1)a^2 - (n+1)(n-1)b^2},$$

$$Q_3Q_5 = \frac{2}{3n^2+1} \sqrt{2n(n-1)a^2 + 2n(n+1)b^2 - (n+1)(n-1)c^2},$$

$$Q_5Q_1 = \frac{2}{3n^2+1} \sqrt{2n(n-1)b^2 + 2n(n+1)c^2 - (n+1)(n-1)a^2};$$

analog für $\triangle Q_2Q_4Q_6$. Die Heron-Formel liefert dann einerseits

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \quad \text{und andererseits}$$

$$A_{\triangle Q_1Q_3Q_5} = \frac{\sqrt{-a^4 + 2a^2 \cdot (b^2 + c^2) - b^4 + c^2 \cdot (2b^2 - c^2)}}{3n^2+1}.$$

Analog geht man für das Dreieck $\Delta Q_2 Q_4 Q_6$ vor, was zu

$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{Q_1 Q_3 Q_5}} = \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{Q_2 Q_4 Q_6}} = \frac{3n^2 + 1}{4} \text{ führt.}$$

Es gibt aber (neben Satz 2ⁿ) eine weitergehende Verallgemeinerung von Satz 2³:

Satz 3 (Satz von Routh): Für die Seiten eines Dreiecks ΔABC , die durch drei Ecktransversalen AD , BE und CF geteilt werden, seien die Teilverhältnisse $AF:FB = r$, $BD:DC = s$ und $CE:EA = t$. Verbindet man die entsprechenden Schnittpunkte der Ecktransversalen, entsteht im Innern des Dreiecks ΔABC ein Dreieck ΔXYZ (siehe Abb. 6).

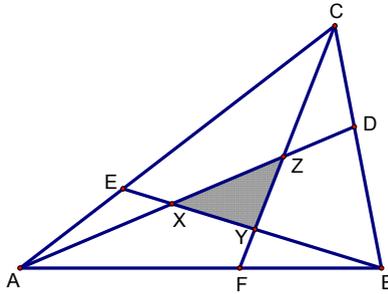


Abb. 6: Dreieck ΔXYZ

Dann gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte von ΔABC und ΔXYZ :

$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta XYZ}} = \frac{(rs + r + 1)(rt + t + 1)(st + s + 1)}{(rst - 1)^2}.$$

Der Satz von Ceva ist mit $X = Y = Z$ ein Spezialfall von Satz 3.

Mit $r = s = t = 2$ (bzw. $r = s = t = \frac{1}{2}$) folgt $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta Q_1 Q_3 Q_5}} = \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta Q_2 Q_4 Q_6}} = 7$ (Satz 2³), mit

$$r = s = t = \frac{n+1}{n-1} \quad (r = s = t = \frac{n-1}{n+1}; n \in \mathbf{N}) \text{ gilt } \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{Q_1 Q_3 Q_5}} = \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{Q_2 Q_4 Q_6}} = \frac{3n^2 + 1}{4}$$

(Satz 2ⁿ); $r = s = t = n$ ($n \in \mathbf{N}$) liefert $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta XYZ}} = \frac{n^2 + n + 1}{(n-1)^2}$, während $r = s = t = \frac{m}{n}$

($m, n \in \mathbf{N}$) und $r = s = t = \frac{1}{n}$ zu $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta XYZ}} = \frac{m^2 + mn + n^2}{(m-n)^2}$ bzw. zu

$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta XYZ}} = \frac{n^2 - n + 1}{(n - 2)^2}$ führen. Die Sätze 1^3 und 1^n sind dagegen keine Spezialfälle von Satz 3.

Sechsecke im Innern

Lassen wir im Innern des Dreiecks ΔABC auch n -Ecke mit $n > 3$ zu, stoßen wir alsbald auf Sechsecke.

Satz 4³ (Walter): Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, entsteht im Innern des Dreiecks ΔABC ein Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ – kurz: P -Sechseck (siehe Abb. 7).

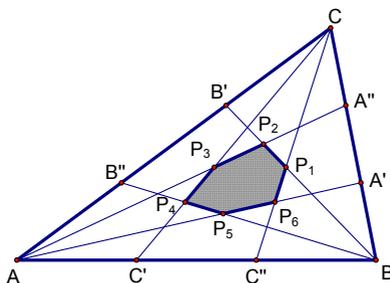


Abb. 7: P -Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$

Dann gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{P\text{-Sechseck}}} = 10$.

Die Diagonalen P_1P_4 , P_2P_5 und P_3P_6 des P -Sechsecks liegen auf den Seitenhalbierenden des Dreiecks ΔABC (Kennedy, 1993). Es lässt sich auch zeigen, dass das Dreieck $\Delta P_2P_4P_6$ das Mittendreieck des Mittendreiecks des Dreiecks ΔABC ist und die Punkte P_2 , P_4 und P_6 die entsprechenden Seitenhalbierenden durch C , A bzw. B halbieren. Schließlich schneiden sich die Geraden $AP_1 = AP_4$, $BP_3 = BP_6$ und $CP_2 = CP_5$ im Schwerpunkt S des Dreiecks ΔABC . Das trifft auch schon für Satz 1^3 zu.

Stehen (in einer Arbeitsgemeinschaft) *affine Abbildungen* zur Verfügung, lässt sich die Invarianz eines Verhältnisses für einen speziellen Fall (etwa für ein *gleichseitiges* Dreieck ΔABC) beweisen. Um ein beliebiges Dreieck

zu erhalten, wendet man dann eine solche Transformation an, die dieses Verhältnis bewahrt.

„Für Fragen der Inzidenz ... sowie Teilverhältnisse auf einer Geraden und Flächenanteile von Polygonen können wir ausnützen, dass jedes Dreieck affin regulär ist, das heißt durch eine affine Abbildung auf ein regelmäßiges Dreieck abgebildet werden kann. Wir können also die entsprechenden Fragen beim regelmäßigen Dreieck untersuchen.“ (Walser, 2010a)

Arbeitet man mit *trilinearen Koordinaten*, bietet sich eine DGS an, die darauf regelrecht zugeschnitten ist, etwa *EucliDraw*. Weisstein (2010) beweist den *Satz 4³* (Walter) z. B. mittels trilinearere Koordinaten.

Ryan Morgan, ein Schüler der 9. Jahrgangsstufe in den USA (Morgan, 1994; Quesada, 2009) verallgemeinerte 1994 den *Satz 4³* (Walter).

Satz 4ⁿ (Morgan): Werden die Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ in n gleiche Teile geteilt, wobei n eine ungerade Zahl sei, und die jeweiligen mittleren

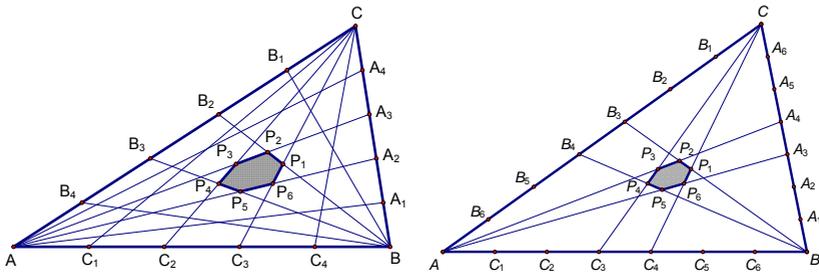


Abb. 8: P -Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ für $n = 5$ und für $n = 7$

beiden dieser n -Teilungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbunden, entsteht im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ ein P -Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ (s. Abb. 8). Dann gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{P\text{-Sechseck}}} = \frac{(3n + 1)(3n - 1)}{8}.$$

Darüber hinaus gelten die in *Satz 1ⁿ* getroffenen Aussagen.

Satz 4³ ergibt sich als Corollar mit $n = 3$. Für $n = 5, 7, 9, 11, 13, 15$ erhalten wir für das Verhältnis der Flächeninhalte 28, 55, 91, 136, 190 bzw. 253.

Wählt man im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ nicht das *kleinste* Sechseck, sondern das *größte* Sechseck, findet man ein anderes invariantes Verhältnis. Die Eckpunkte ergeben sich als Schnittpunkte der jeweiligen äußeren Eck-

transversalen. Für $n = 5$ ist das Dreieck $\triangle ABC$ dann dreimal so groß wie das Sechseck (Walser, 2010a). Im Fall $n = 3$ (Satz 4³) fallen beide Sechsecke zusammen.

Neben dem P -Sechseck von Walter (bzw. dem in der Verallgemeinerung von Morgan) lässt sich aber nun noch mindestens ein weiteres Sechseck entdecken.

Satz 5³: Die Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ seien gedrittelt. Verbindet man die Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, entsteht im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ ein Q -Sechseck $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ mit zueinander parallelen Gegenseiten $Q_2Q_3 \parallel Q_5Q_6 \parallel AB$, $Q_1Q_6 \parallel Q_3Q_4 \parallel AC$ und $Q_1Q_2 \parallel Q_4Q_5 \parallel BC$.

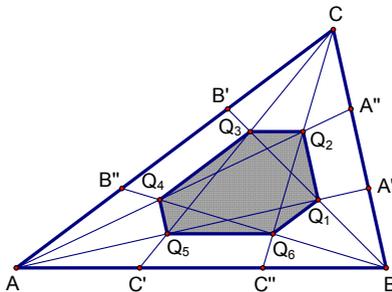


Abb. 9: Q -Sechseck $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$

Dann gilt für das Verhältnis der Umfänge bzw. der Flächeninhalte (Abb. 9)

$$\frac{u_{\triangle ABC}}{u_{Q\text{-Sechseck}}} = \frac{7}{3} \quad \text{und} \quad \frac{A_{\triangle ABC}}{A_{Q\text{-Sechseck}}} = \frac{49}{13}.$$

Im Unterschied zu Satz 4³ ist also auch das Verhältnis der beiden Umfänge eine Konstante.

Ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig, ist das Q -Sechseck zwar nicht gleichseitig, aber gleichwinklig. Alle Winkel betragen 120° .

Wie Satz 4ⁿ (Morgan) eine Verallgemeinerung von Satz 4³ (Walser) ist, lässt sich jetzt auch Satz 5³ generalisieren.

Satz 5ⁿ: Werden die Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ in n gleiche Teile geteilt, wobei n eine ungerade Zahl sei, und die jeweiligen mittleren beiden dieser n -Teilungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbunden, entsteht im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ ein Q -Sechseck $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ mit

zueinander parallelen Gegenseiten $Q_2Q_3 \parallel Q_5Q_6 \parallel AB$, $Q_1Q_6 \parallel Q_3Q_4 \parallel AC$ und $Q_1Q_2 \parallel Q_4Q_5 \parallel BC$.

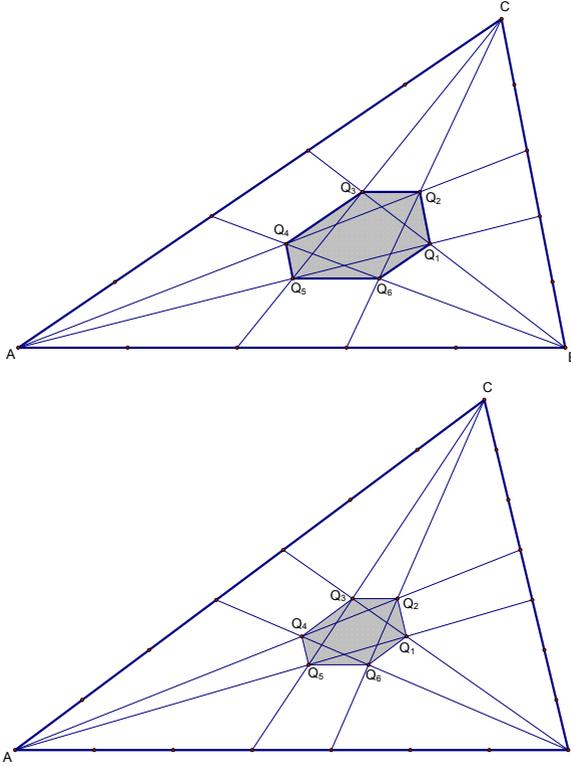


Abb. 10: Q -Sechseck $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ für $n = 5$ und $n = 7$

Dann gilt für das Verhältnis der Umfänge bzw. der Flächeninhalte (siehe Abb. 10)

$$\frac{u_{\triangle ABC}}{u_{Q\text{-Sechseck}}} = \frac{3n^2 + 1}{4n} \quad \text{und} \quad \frac{A_{\triangle ABC}}{A_{Q\text{-Sechseck}}} = \frac{(3n^2 + 1)^2}{8(3n^2 - 1)}.$$

Im Unterschied zu Satz 4ⁿ ist also auch das Verhältnis der beiden Umfänge eine Konstante. Darüber hinaus gelten die in Satz 2ⁿ getroffenen Aussagen.

Chronik einer Entdeckung

Ohne DGS hätte ich diese beiden Vermutungen (Satz 5ⁿ) wohl kaum gefunden! Die DGS zeigt per Zugmodus an, dass die beiden Verhältnisse der gemessenen Umfänge bzw. Flächeninhalte konstant bleiben.

Aber wie lässt sich mit diesen Näherungswerten eine allgemeine Formel finden? Die Hoffnung, den Term von Satz 4ⁿ zu variieren, erwies sich schnell als trügerisch. Die DGS *The Geometer's Sketchpad*, die auch Morgan für seine Verallgemeinerung des Satzes 4³ (Walter) benutzt hat, erlaubt jedoch – wie auch andere DGS – per Einstellung genauere Näherungswerte zu erhalten. Der Schlüssel waren periodische Dezimalbrüche.

Mit Satz 5³ kannte ich die Näherungswerte 2,33333 und 3,76923. Im ersten Fall liegt der Dezimalbruch $2,\bar{3} = \frac{7}{3}$ auf der Hand, im zweiten Fall half der glückliche Umstand, dass die nächste Ziffer (nach der Drei) eine Null ist, sodass sich der Dezimalbruch $3,\overline{769230} = \frac{49}{13}$ anbot. Aber der Versuch,

$\frac{7}{3}$ als $\frac{2 \cdot 3 + 1}{3}$ bzw. $\frac{3 \cdot 3 - 2}{3}$ zu interpretieren, wird bereits durch $n = 5$ widerlegt.

Den nächsten Schritt konnte ich dann erst mit $n = 9$ gehen. Der Quotient der gemessenen Umfänge beträgt 6,77778, sodass mir wieder ein periodischer Dezimalbruch weiterhalf: $6,\bar{7} = \frac{61}{9}$. Mit $\frac{7}{3}$ für $n = 3$ und $\frac{61}{9}$ für $n = 9$ war die Ausgangssituation dann wesentlich günstiger, um eine allgemeine Regel (zunächst für die Umfänge) zu finden. Im Nenner steht offenbar n – aber wie erhalte ich den Zähler? (Eine DGS, die die korrekten Brüche anzeigt, stand mir nicht zur Verfügung; die DGS *Geometry Expressions* soll dies allerdings bereits leisten.) Auch N. J. A. Sloanes *Encyclopedia of Integer Sequences* hilft hier nicht weiter, da mit zwei Eingaben, die noch nicht einmal aufeinanderfolgende Glieder darstellen, wenig zu erreichen ist.

$$n = 7: \quad \frac{u_{\triangle ABC}}{u_{Q\text{-Sechseck}}} \approx 5,28571$$

Bei dieser Ziffernfolge der Nachkommastellen denken wir evtl. an die Periode von $\frac{1}{7} = 0,142857$. Dann liefert die Multiplikation von $x = 5,\overline{285714}$ mit 1 000 000 den Wert $5\,285\,714,\overline{285714}$, also $999\,999 x = 5\,285\,709$, d. h., $x = \frac{5285709}{999999} = \frac{37}{7}$. Ist die Erinnerung an die Periode von $\frac{1}{7}$ verblasst, hilft

auch die folgende Variante. Wir nehmen an, es existieren zwei ganze Zahlen p und q mit $\frac{p}{q} \approx 5,28571$, dann muss auch $p \approx 5,28571 \cdot q$ eine ganze Zahl sein, was $q = 7$ vermuten lässt: $5,28571 \cdot 7 = 36,99997$.

Schließlich war aber auch das geschafft: Zähler = $\frac{3n^2 + 1}{4}$. Die Probe für $n = 3, 5, 7, 9$ liefert die von der DGS angezeigten Näherungswerte.

n	3	5	7	9
$\frac{u_{\triangle ABC}}{u_{Q\text{-Sechseck}}} = \frac{3n^2 + 1}{4n}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{19}{5}$	$\frac{37}{7}$	$\frac{61}{9}$
	$\approx 2,33333$	$= 3,8$	$\approx 5,28571$	$\approx 6,77778$

Für das Verhältnis der Flächeninhalte lag die Vermutung auf der Hand, dass der Zähler das Quadrat von $\frac{3n^2 + 1}{4}$ ist. Mit Blick auf die Zähler der Umfangsverhältnisse (7, 19, 37, 61) stand für die Nenner der Flächenverhältnisse $13 = \mathbf{7} + 6$ für $n = 3$; $37 = \mathbf{19} + 18$ für $n = 5$; $73 = \mathbf{37} + 36$ für $n = 7$; $121 = \mathbf{61} + 60$ für $n = 9$ dann $\frac{3n^2 + 1}{4} + \left(\frac{3n^2 + 1}{4} - 1\right)$ im Raum, also

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{Q\text{-Sechseck}}} = \frac{\left(\frac{3n^2 + 1}{4}\right)^2}{\frac{3n^2 + 1}{4} + \left(\frac{3n^2 + 1}{4} - 1\right)}.$$

Alle Näherungswerte werden durch die gefundene Formel bestätigt, womit die Vermutung erhärtet, aber natürlich nicht bewiesen ist:

n	3	5	7	9
$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{Q\text{-Sechseck}}} = \frac{(3n^2 + 1)^2}{8(3n^2 - 1)}$	$\frac{49}{13}$	$\frac{361}{37}$	$\frac{1369}{73}$	$\frac{3721}{121}$
	$\approx 3,76923$	$\approx 9,75676$	$\approx 18,7534$	$\approx 30,7521$

Wieder einmal bestätigt sich: Ohne Bruchrechnung ist man mit seinem Latein schnell am Ende!

Der *Beweis* lässt sich (wie schon für Satz 2ⁿ) mit Hilfe der *Sätze von Stewart* und *Heron* führen. Für die Seiten des Q -Sechsecks $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$

erhalten wir $Q_1Q_2 = \frac{2(n+1)}{3n^2+1} \cdot a$, $Q_3Q_4 = \frac{2(n+1)}{3n^2+1} \cdot b$, $Q_5Q_6 = \frac{2(n+1)}{3n^2+1} \cdot c$,
 $Q_4Q_5 = \frac{2(n-1)}{3n^2+1} \cdot a$, $Q_1Q_6 = \frac{2(n-1)}{3n^2+1} \cdot b$ und $Q_2Q_3 = \frac{2(n-1)}{3n^2+1} \cdot c$, womit sich

für seinen Umfang $u_{Q\text{-Sechseck}} = \frac{4n}{3n^2+1} (a + b + c)$ ergibt, d. h.,

$$\frac{u_{\Delta ABC}}{u_{Q\text{-Sechseck}}} = \frac{3n^2+1}{4n}.$$

Um den Flächeninhalt des Q -Sechsecks zu bestimmen, zerlegen wir es in die vier Dreiecke $\Delta Q_1Q_3Q_5$, $\Delta Q_5Q_6Q_1$, $\Delta Q_1Q_2Q_3$ und $\Delta Q_3Q_4Q_5$. In diesen vier Dreiecken kennen wir sämtliche Seiten (vgl. Satz 2'' für Q_1Q_3 , Q_3Q_5 , Q_1Q_5). Die Heron-Formel liefert dann die jeweiligen Flächeninhalte, sodass

wir schließlich $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{Q\text{-Sechseck}}} = \frac{(3n^2+1)^2}{8(3n^2-1)}$ erhalten.

Lassen wir im Innern des Ausgangsdreiecks auch *Sterne* zu, stoßen wir auf weitere Invarianzen.

Sechsstern im Innern

Satz 6³: Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, so entstehen im Innern des Dreiecks ΔABC zwei Dreiecke $\Delta P_1P_3P_5$ und $\Delta P_2P_4P_6$, die sich wiederum in den Punkten $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ schneiden (siehe Abb. 11).

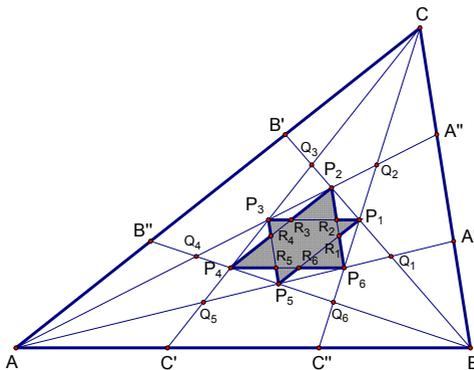


Abb. 11: P -Sechsstern $P_1R_2P_2R_3P_3R_4P_4R_5P_5R_6P_6R_1$

(Es entsteht ein P -Sechsstern $P_1R_2P_2R_3P_3R_4P_4R_5P_5R_6P_6R_1$; dieser P -Sechsstern ist ein nichtkonvexes unregelmäßiges Zwölfeck mit zueinander parallelen Gegenseiten $P_1P_3 \parallel P_4P_6 \parallel AB$, $P_2P_4 \parallel P_1P_5 \parallel AC$ und $P_2P_6 \parallel P_3P_5 \parallel AC$.)

Dann gilt für das Verhältnis der Umfänge bzw. der Flächeninhalte

$$\frac{u_{\Delta ABC}}{u_{P\text{-Sechsstern}}} = \frac{10}{3} \quad \text{und} \quad \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{P\text{-Sechsstern}}} = \frac{100}{7}.$$

Im Fall, dass das Dreieck ΔABC gleichseitig ist, besteht der P -Sechsstern aus den beiden (nichtkongruenten) gleichseitigen Dreiecken $\Delta P_1P_3P_5$ und $\Delta P_2P_4P_6$.

Neben der Drittelung der Dreiecksseiten ließe sich natürlich auch der allgemeine Fall untersuchen; jede der Dreiecksseiten wird in n gleiche Teile geteilt. Stattdessen verbinden wir jetzt die Eckpunkte der beiden Sechsecke $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ und $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ miteinander.

Satz 7³: Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, so entstehen im Innern des Dreiecks ΔABC zwei Dreiecke $\Delta Q_1Q_3Q_5$ und $\Delta Q_2Q_4Q_6$, die sich wiederum in den Punkten $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ schneiden (siehe Abb. 12). (Es entsteht ein Q -Sechsstern $Q_1P_1Q_2P_2Q_3P_3Q_4P_4Q_5P_5Q_6P_6$; dieser Q -Sechsstern ist ein nichtkonvexes unregelmäßiges Zwölfeck.)

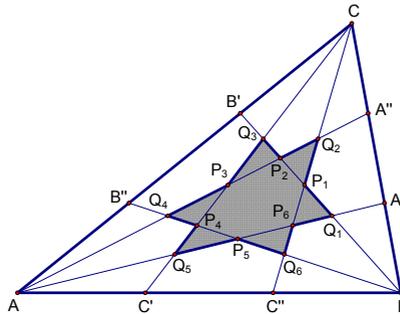


Abb. 12: Q -Sechsstern $Q_1P_1Q_2P_2Q_3P_3Q_4P_4Q_5P_5Q_6P_6$

Dann gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{Q\text{-Sechsstern}}} = \frac{70}{13}$.

Dagegen ist das Verhältnis der beiden Umfänge nicht konstant. Auch hier ließe sich neben der Drittelung der Dreiecksseiten der allgemeine Fall un-

tersuchen; jede der Dreiecksseiten wird in n gleiche Teile geteilt, wobei n eine ungerade Zahl ist.

Im Fall, dass das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist, ist der Q -Sechsstern zwar nicht gleichseitig, aber zu jeder Seite gibt es eine gleichlange Nachbarseite.

Fazit

Dreiecksgeometrie – mit oder ohne DGS – ist ein „weites Feld“. DGS erleichtert Schülern, selbstständig auf Entdeckungsreise zu gehen. Dank Zugmodus lassen sich relativ schnell Vermutungen aufstellen, widerlegen oder erhärten.

Zur Entdeckung von Satz 4" durch den Schüler Ryan Morgan schreiben Watanabe, Hanson, Nowosielski (1996):

“The conjecture that Ryan discovered involved area measurements. The software that Ryan used made it possible for him to obtain the area measurements quickly and accurately. Furthermore, the capability of altering the constructed figures eased the observation of the invariant relationship that existed between two measurements. Such an exploration would be much more difficult, if not impossible, without the aid of this type of technology.”

Die hier betrachteten Sätze beschränken sich auf Dreiecke mit wohlbestimmten Transversalen. Dreiecke, Sechsecke und Sechssterne im Innern eines solchen Dreiecks, die zunächst wenig auffällig erscheinen, liefern (nachdem Strecken, Winkel, Umfänge und Flächeninhalte gemessen worden sind) überraschende Invarianten.

- Welche Verhältnisse (der jeweiligen Umfänge, Flächeninhalte) bleiben konstant?
- Welche Beziehungen lassen sich entdecken, wenn das Ausgangsdreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist? (Letzteres kann gerade für schwächere Schüler eine Chance sein, ebenfalls selbst etwas entdecken zu können.)

Die Vermutung, ein bestimmtes Verhältnis habe stets den Wert 2,65, befriedigt nicht so recht. Wäre diese Konstante ganzzahlig, sähe das eventuell anders aus. 2,65 ist wahrscheinlich ein gerundeter Wert. Wie soll man „erraten“, was sich hinter diesem Näherungswert verbirgt? Hinter 2,65 kann sich zum einen $\sqrt{7}$ (Satz 2³, gleichseitiges Dreieck), zum anderen aber auch

$\frac{130}{49}$ (Sätze 4^3 und 5^3 , Verhältnis der Flächeninhalte von Q -Sechseck zu P -

Sechseck) „verstecken“. Oder ist der Wert korrekt und steht für $\frac{53}{20}$? Da hilft nur „Papier und Bleistift“, um den geometrischen Hintergrund tiefer auszuleuchten.

Das Beweisen nimmt uns der Computer (noch) nicht ab. Hier ist der Lehrer gefordert – zumal das Bedürfnis, etwas beweisen zu sollen, was man per DGS ohnehin „schon sieht“, nicht gefördert wird. DGS als Werkzeug beim Beweisen – dieses Thema muss immer wieder diskutiert werden. *Mit DGS* kann eine Konstruktion sehr schön und eindrucksvoll – für Schüler mitunter überhaupt erst mittels DGS – veranschaulicht werden. Es gilt die WARUM-Frage zu beantworten. Und solange es keinen WARUM-*Knopf* gibt, müssen wir – wohl oder übel – unseren *Kopf* bemühen!

Manchmal ist auch zusätzliche Vorsicht geboten. Per DGS wird ein konstanter Wert vorgegaukelt – zieht man aber „etwas länger“, muss man vielleicht entdecken, dass eine vermutete Konstanz gar nicht existiert (Satz 7^3 : Verhältnis der Umfänge).

Neil Postman hat der Schule einmal attestiert: „Alle Kinder treten als Fragezeichen in die Schule ein und verlassen sie als Punkte.“ Vielleicht bieten DGS und CAS eine Chance, dass aus den Punkten wieder Frage- oder sogar Ausrufezeichen werden.

Literatur

- Coxeter, H. S. M. (1963). Unvergängliche Geometrie. Basel, Birkhäuser, S. 256-257, 266.
- Cuoco, A.; Goldenberg, P.; Mark, J. (1993). Reader reflections – Marion's Theorem. In: Mathematics Teacher 86(8), S. 619.
- Dörrie, H. (1943). Mathematische Miniaturen. Breslau, Hirt, S. 41-42.
- Egli (1983). P 820. Blende [*Satz 4^3 (Walter)*]. In: Praxis der Mathematik 25(4), S. 121; 25(10), S. 313-314.
- Johnston, W. I. (1992). In: Mathematics Teacher 85(2), Titelbild und S. 89, 92, 598.
- Kennedy, J. (1993). (Responds to) Marion's Theorem. Math. Teacher 86(8), S. 619.
- Morgan, R. (1994). No Restriction Needed. Mathematics Teacher 87(9), S. 726.

- Quesada, A. (2009). Theorems Discovered by Students Inspire Teacher's Development. In: Understanding Geometry for a Changing World, 71st NCTM Yearbook 2009. Reston, VA, S. 267-282.
- Rosenbaum, K. (1981). Eine Aufgabe von Prof. Dr. Kurt Rosenbaum. In: alpha 15(1), S. 7; 15(3), S. 66.
- Routh, E. J. (1896). A Treatise on Analytical Statics, with Numerous Examples. Vol. 1 (2nd ed.). Cambridge, Cambridge University Press, S. 82.
- Sielaff, K.; Usbeck, F. W. (1994). Hamburger Schülerzirkel Mathematik 1991-93. Hamburg, Hereus, S. 176-177.
- Specht, E. (2001). geometria – scientiae atlantis. Magdeburg, S. 39, 165-166.
- Steinhaus, H. (1959). Kaleidoskop der Mathematik. Berlin, DVW, S. 17.
- Vetter, W. (1988). Über die Seitendreieilenden im Dreieck. MNU 41(3), S. 141-143.
- Walser, H. (2010a). Dreiecksunterteilung.
<http://www.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/D/Dreiecksunterteilung/Dreiecksunterteilung.pdf>
- Walser, H. (2010b). Der Satz von Lehmann-Rosenbaum.
<http://www.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/L/Lehmann/Lehmann.pdf>
- Walser, H. (2010c). Dritteln der Dreiecksseiten.
<http://www.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/D/Dritteln/Dritteln.htm.pdf>
- Watanabe, T.; Hanson, R.; Nowosielski, F. D. (1996). Morgan's Theorem. In: Mathematics Teacher 89(5), S. 420-423.
- Weisstein, Eric W. (2010). Marion's Theorem. From *MathWorld* – A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/MarionsTheorem.html>

Bei den Kollegen Hans-Jürgen Elschenbroich (Düsseldorf/ Neuss) und Hans Walser (Basel/ Frauenfeld) bedanke ich mich herzlich für nützliche Hinweise und Kommentare.

Geometrische Veranschaulichung und Bruchrechnung

Swetlana Nordheimer

Zusammenfassung. Ähnlich wie in dem Beitrag von Hans Walser in diesem Band geht es in dem vorliegenden Beitrag nicht um den Computer als Werkzeug, sondern um geometrische Veranschaulichungen. Dies soll beispielhaft für Kürzen, Erweitern, Addieren und Subtrahieren von Brüchen anhand von Aufgaben, Schülerlösungen und Lehrerrückmeldungen gezeigt werden. Abgeschlossen wird der Beitrag mit einigen weiterführenden kleinen Ideen zur Verknüpfung von Kenntnissen von Schülern⁶ aus dem Geometrieunterricht mit der Bruchrechnung.

Geometrische Veranschaulichung und „Verstehen“ von Brüchen

Werden Brüche in der Schule eingeführt, so finden sie ihre Entsprechungen im Anschauungsraum der Schüler häufig nicht nur in Torten- und Pizza-Stücken. Sie werden auch durch geometrische Objekte gegebener Größen repräsentiert:

„Eine Größe wie z.B. $\frac{3}{4}$ m lässt sich als solche nicht vorstellen, wohl aber ihr Repräsentant, in unserem Fall Strecken der Länge $\frac{3}{4}$ m. Insbesondere für ein inhaltliches Denken und für eine intuitive Begründung von mathematischen Zusammenhängen sind solche Vorstellungen unerlässlich.“

(Griesel 1981, S. 9, in Gerhard 2009)

Viele Lehrer und Didaktiker berichten von Schwierigkeiten der Schüler, die sich im Unterricht der Bruchrechnung zeigen. So schreibt beispielsweise Padberg, dass nur 30% aller Schüler in erweiterten Kursen anschauliche Bruchvorstellungen gemäß des Bruchs als Teil eines Ganzen und des Bruchs als Teil mehrerer Ganzer besitzen. Anschaulich sehr leicht lösbare Aufgaben werden von Schülern häufig rein formal und ausgehend von den bekannten Regeln gelöst (vgl. Padberg 2002, S. 181). Die Rückmeldung von Klaus P. Wolff vom Studienseminar für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen Rohrbach/Pfalz zum vorliegenden Beitrag gibt Grund zur Annahme, dass die Problematik an diesen Schularten noch schärfer auftritt. Auch die Statistik des Känguru-Wettbewerbs (Abb. 1), an dem Schüler

⁶ Mit „Schüler“ und „Lehrer“ wird die Autorin sowohl Schülerinnen als auch Schüler bzw. Lehrerinnen und Lehrer bezeichnen, es sei denn es sind in konkreten Fällen ausschließlich Schülerinnen bzw. Lehrerinnen gemeint.

verschiedener Schularten freiwillig teilnehmen, stützt die Befürchtungen der Kollegen; nur ein kleiner Anteil der Schüler gab die richtige Lösung (A) an.

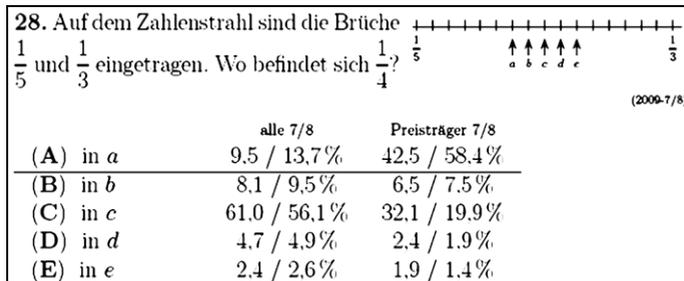


Abb. 1: Känguru-Aufgabe (2009-7/8)

Zwar können korrekte Resultate in der Bruchrechnung mit Hilfe von Regeln ohne inhaltliche Bruchvorstellung erzielt werden; allerdings fällt es uns schwer, in diesem Fall von *Verstehen* zu sprechen (vgl. Wagenschein 1968, 100, 107). Doch was ist mit *Verstehen* gemeint? Was meint beispielsweise Heinrich Winter, wenn er im Zusammenhang mit Zahlenbereichserweiterungen von *verständlich* und *verständlich* spricht?

Die mathematische Allgemeinbildung ist nicht durch das definiert, was ohne Formeln „geht“, sondern ist nur etwas wert, wenn sie den verständigen Gebrauch von Formeln nachdrücklich anstrebt. Eine Formel ist nicht nur ein allgemeines Rechenschema, sondern auch Ausdruck von Gesetzhafem. Den Segen von Formeln kann man allerdings nur erfahren, wenn man kreativ mit ihnen umgehen kann. Besonders eindrucksvoll wird das erlebt, wenn durch Formeln neue geometrische Figuren geschaffen werden.“ (Winter 1995, S. 4)

In dem Zitat wird nicht nur die vermittelnde Rolle der Geometrie zwischen Arithmetik und Algebra angedeutet. Bezugnahme auf geometrische Fragestellungen bzw. Anschauung wird sogar zur Voraussetzung des Verstehens. Dieser Gedanke findet sich in einem von Vollrath formulierten Paradoxon des Verstehens wieder:

Strenge Überlegungen kann man nur verstehen, wenn man bereits anschauliche Vorstellungen davon hat. Angemessene anschauliche Vorstellungen können sich nur aus strengen Betrachtungen entwickeln. (Vollrath 1993, S. 18)

Demnach ist das Verstehen der Mathematik und insbesondere der Regeln der Bruchrechnung scheinbar unmöglich. Doch dieser Schlussfolgerung widersprechen die Erfahrungen von Schülern und Lehrern (vgl. Vollrath 1993, S. 8). Ja, jeder von uns Teilnehmern dieser Tagung meint etwas unter

Bruchrechnung zu verstehen. Was verstehen Sie z. B. unter der Regel für die Division von Brüchen? Wie können Sie diese anschaulich machen bzw. in Geometrie übersetzen? Inwiefern kann geometrische Veranschaulichung zum Verständnis beitragen? Kann eine Veranschaulichung das Verständnis gar beeinträchtigen, indem sie Schüler verwirrt?

Je nach Interpretation des Antwortenden sind unterschiedliche Antworten sinnvoll möglich, die Teilaspekte jeweils betonen könnten. Die Regel für die Division beschreibt die algorithmische Verfahrensweise, die geometrische Veranschaulichung fordert einen intermodalen Transfer, in Anwendungssituationen kann die geometrische Anreicherung eventuell auch eine kognitive Überlastung zur Folge haben, wenn nur das arithmetische Ergebnis schnell und sicher erreicht werden soll. (Wolff 2010, Rückmeldung zu diesem Beitrag)

Die Suche nach weiteren Antworten und dem Wesen des Verstehens im Mathematikunterricht kann in der Auffassung von Mathematik als Sprache ihren Ursprung nehmen (vgl. Maier und Schweiger 1999, Kvasz 2008). Die Auffassung von Sprachen als je verschiedenen Weltansichten geht auf Humboldts Konzeption des Verstehens zurück. Dabei bietet die Vielfalt der Sprachen einerseits Chancen für Bildung, andererseits setzt sie dem Verstehen Grenzen (vgl. Koller 2003, 515); mit den Worten von Humboldt:

Alles Verstehen ist daher immer zugleich ein Nicht-Verstehen, alle Übereinstimmung in Gedanken und Gefühlen zugleich ein Auseinandergehen. (Humboldt 1830-1835, 439 zitiert in Koller 2003, 515)

Der Mathematiker und Philosoph Ladislav Kvasz (2008, S. 14-29) beschäftigte sich mit den Möglichkeiten und Grenzen verschiedener Sprachen innerhalb der Mathematik. So beschreibt er die in der Geschichte der Mathematik erste symbolische Sprache, nämlich die Sprache der Arithmetik, als „nonexplanatory language“. Demnach ermöglicht es die symbolische Sprache der Arithmetik zwar, Regeln oder Rezepte für viele konkrete Rechenaufgaben (auch der Bruchrechnung) aufzuschreiben. Jedoch zum Aufstellen bzw. zum Aufschreiben von allgemeinen formalen Regeln reicht die Symbolsprache der Arithmetik nicht aus. Im Mathematikunterricht werden deshalb die Regeln der Bruchrechnung in Sätzen der deutschen Sprache oder einer anderen Muttersprache der Schüler formuliert. Anders ist es mit der geometrischen Sprache, die nach Kvatz ikonisch ist. Geometrische Zusammenhänge können mit Hilfe von Zeichnungen dargestellt werden und sich von den konkreten arithmetischen Werten ablösen. Die Zeichnungen sind in diesem Sinne keine Variablen, die Objekte bezeichnen, sondern diese reprä-

sentieren (vgl. Kvasz 2008, S. 14-29). Die Sprache der Geometrie erlaubt es eher als die Sprache der Arithmetik, bestimmte allgemeinere Aussagen zu machen, ohne auf die Sätze der Muttersprache zurückgreifen zu müssen.

Nach Kvasz erlaubt die ikonische Sprache der synthetischen Geometrie sogar das Führen von Beweisen für allgemeine arithmetische Aussagen, welche in der symbolischen Sprache nicht beweisbar sind. Wir werden im Folgenden sehen, wie Regeln für das Kürzen, Erweitern, Addieren und Subtrahieren von Brüchen anschaulich-geometrisch, wenn nicht bewiesen, so immerhin begründet bzw. erklärt werden können. Aber auch die ikonische Sprache der Geometrie hat ihre Grenzen. So kann hierin beispielsweise die Unmöglichkeit der Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal zwar aufgedeckt, jedoch nicht begründet werden. Die Mittel dafür liefert erst die symbolische Sprache der Algebra. Auch die Regeln der Bruchrechnung können in ihrer Strenge und Allgemeinheit erst in der Sprache der Algebra aufgeschrieben und bewiesen werden (vgl. Kvasz 2008, S. 14-29).

Eine weitere vielversprechende Perspektive auf die Bruchrechnung und das Verstehen bietet die sogenannte Theorie des intermodalen Transfers von Bruner. Demnach ist die Sprache (Muttersprache) auf allen Darstellungsebenen (enaktiv, ikonisch, symbolisch) von Bedeutung. Daraus lässt sich eine besondere Sorgfalt bei der Formulierung von Arbeitsaufträgen, die sich auf die Veranschaulichung von Brüchen beziehen, herleiten. Eine tiefere Synthese der vorgestellten Ansätze auf theoretischer Ebene würde den Rahmen des vorliegenden Artikels sprengen (vgl. Zech 1996, 104ff.).

Bruchrechnung als Hintertür für Geometrie

Welche weiteren Gründe sprechen für die Bruchrechnung mit Hilfe der Geometrie? Geometrie als einer „*strengen deduktiven Wissenschaft*“ und der „*Lehre vom Anschauungsraum*“ wird einerseits besondere Bedeutung im Kanon der Allgemeinbildung zuerkannt (vgl. Holland 2007, Winter 1995). Auf der anderen Seite bleibt im Unterricht immer weniger Zeit dafür. Während Bruchrechnung einen sicheren Platz im Schulcurriculum für die 5. bzw. 6. Klassenstufe hat, wird Algebra im deutschsprachigen Raum meistens erst in den späteren Klassenstufen eingeführt. Aber auch für die gemäß den Lehrplänen vorgeschriebene Geometrie wird nicht zuletzt aufgrund der Einführung der Stochastik weniger Zeit eingeräumt. Insofern kann durch die

Veranschaulichung der Bruchrechnung auch der Deduktivität und der Anschaulichkeit der Geometrie mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Auch wenn die Definition des „*Anschauungsraums*“ sich in der Pädagogik u.a. wegen der Nähe zu „Weltanschauung“ als heikles Thema erwies, ermöglicht der Begriff einen Anschluss an traditionelle und aktuelle Diskussionen in der Didaktik (vgl. Führer 2002, 62). So betont beispielsweise auch Jahnke (2001, S.5) die Bedeutung des Konzepts der Anschauungsräume für das Verstehen. Unter diesem Gesichtspunkt scheint es hilfreich zu sein, den „*Anschauungsraum*“ u.a. in Anlehnung an Holland als eine subjektive kognitive Struktur festzuhalten:

„Der Anschauungsraum ist psychologisch nicht als ein Aktual-Unendliches a priori da und argumentativ verfügbar (Struve), er wird im Geiste erfahrener Nichtbegrenzung ideativ konstruiert und durch Erfahrung mit geometrischen Entwürfen begrifflich angereichert.“ (Führer 2002, S. 64)

Die Darstellung von Brüchen durch Zeichnungen von ebenen und räumlichen Figuren, der Vergleich und die Modifikation solcher Zeichnungen, das Ausführen von Bewegungen usw. können zum Ausbau von *Anschauungsvorstellungen* beitragen. Bei derartigen geometrischen Repräsentationen von gemeinen Brüchen spielen insbesondere Maßbegriffe (Längen von Strecken, Winkelgrößen, Flächeninhalte, Volumina) eine wichtige Rolle. Auch Relationen wie *kongruent, zerlegungsgleich, ähnlich, symmetrisch* können bei der Darstellung und dem Vergleich von Brüchen hilfreich sein. Geometrische Darstellungen von Brüchen können darüber hinaus in ein-, zwei- und dreidimensionale, sowie in kontinuierliche und diskrete unterschieden werden (vgl. Padberg 2002, S. 40). Sehr empfehlenswert sind an dieser Stelle die Vorschläge von Stoye (2010), der für alle wichtigen Themen der Bruchrechnung Veranschaulichungen vorschlägt und diskutiert.

Hinsichtlich deduktiver Aspekte der Geometrie und ihrer Verbindung mit der Bruchrechnung fallen mir drei unterschiedliche Perspektiven ein:

- *Lokal deduktive Theorien* der Geometrie können u.a. durch algebraische und arithmetische Werkzeuge im Sinne der Herleitung von Formeln für die Berechnung von Flächeninhalten und Volumina hergestellt werden. Einige dieser Formeln enthalten Brüche und erfordern deren inhaltliches Verständnis.
- Geometrie kann helfen, die Regeln der Bruchrechnung *lokal deduktiv* zu ordnen, indem sie allgemeine Regeln ohne Zahlen, son-

dem mit Hilfe von geometrischen Figuren und Abbildungen darstellt. Solche Veranschaulichungen können das Lösen von Problemen bei der Bruchrechnung erleichtern.

- Anschauliche Probleme der Bruchrechnung können wiederum so formuliert werden, dass zu ihrer Lösung komplexere geometrische Überlegungen erforderlich sind. Somit könnten Schüler sowohl in Geometrie wie auch in Arithmetik nicht nur gefördert, sondern auch gefordert und vielleicht sogar herausgefordert werden.

Wie nun die beschriebenen Besonderheiten der Geometrie und ihrer ikonischen Sprache als Werkzeuge in der Schule berücksichtigt werden und vertieft werden können, ist der Gegenstand des folgenden Abschnitts.

Ein Blick in die schulische Unterrichtspraxis

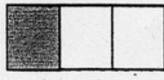
Wie sieht es mit der geometrischen Veranschaulichung von Brüchen in der schulischen Praxis aus? In den im Berliner Lehrplan formulierten Anforderungen für die 5./6. Klasse heißt es z.B.: Schüler können „arithmetische Vorstellungen mithilfe von geometrischen Veranschaulichungen stützen und begründen“ (Rahmenlehrplan Grundschule, Berlin, 2004, S. 39). Diese Formulierung war entscheidend für die Wahl des Titels und der zentralen Begrifflichkeiten des vorliegenden Beitrages. Als Inhalte werden dazu vor allem Brüche genannt. Wie das genau geschehen soll, bleibt offen.

Ein Ausschnitt aus einer Klassenarbeit für die Klasse 5 (Abb.2) illustriert, wie diese Anforderungen von einer Lehrerin interpretiert wurden. Zwei der fünf vorgestellten Aufgaben beziehen geometrische Darstellungen von Brüchen mit ein. Die in der Aufgabe 1 angegebenen geometrischen Darstellungen lassen mindestens zwei verschiedene Antwortmöglichkeiten zu. Die eine bezieht sich auf den Anteil der gefärbten und die andere auf den Anteil der nicht gefärbten Fläche. Die Teilaufgaben 1c) und 1d) beziehen sich auf Brüche als Teile mehrerer Ganzen bzw. gemischte Zahlen. In der Teilaufgabe 1d) wird darüber hinaus die Räumlichkeit herangezogen. Besonders interessant ist die Aufgabe 1b), weil hier das Ganze nicht wie in den anderen Aufgaben aus kongruenten und inhaltsgleichen Anteilen besteht. Sie kann nur durch Schätzen gelöst werden. Da die Teilfiguren nicht gefärbt sind, kann die Aufgabe auch so interpretiert werden, dass der Zähler Null ist. Demnach wäre die Aufgabe nicht lösbar. Schließlich ist die Teilaufgabe 1e) durch eine weitere Unterteilung in Teilrechtecke zu lösen.

Mathematik Klasse 5: Bruchdarstellungen und -anteile
1. Welcher Bruch ist dargestellt?

/7

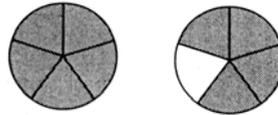
a)



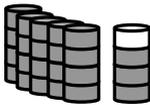
b)



c)



d)



e)



f)



g)


2. Begründe, welche Brüche aus Nr. 1 echt und welche unecht sind.

 Benutze dabei bitte **Fachbegriffe**.

/6

3. Erkläre bitte an einem eigenen Beispiel, wie man gemischte Zahlen in unechte Brüche umwandelt. (Extrablatt)

/3

4. Zeichne folgende Brüche als Grafik auf die Rückseite:

/7

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, 1\frac{10}{12} \text{ und } \frac{29}{15}$$

Abb. 2: Vergleichsarbeit, Aufgaben 1-4

In der 2. Aufgabe werden Begriffe wie *echte* und *unechte* Brüche mit Hilfe von gegebenen Bildern abgefragt. Diese Aufgabe hat sehr wenig mit Darstellungen zu tun. Auch die nächste Aufgabe zielt eher auf arithmetische Umwandlung als auf geometrische Darstellung. Die 4. Aufgabe ist die Umkehrung der 1. Aufgabe. Hier sollen die Schüler geometrische Darstellungen sogar selbst anfertigen. Es handelt sich hierbei um eine sehr offene Aufgabe, denn die Schüler haben die Möglichkeit, selbst geometrische Objekte zur Darstellung zu wählen. Bei der 3. Aufgabe wird dem Schüler überlassen, ob er graphische Darstellungen benutzt oder nicht.

Somit sehen wir hier ein Beispiel dafür, wie knapp gehaltene Lehrplanempfehlungen von einer Lehrerin, die in einer 5. Klasse unterrichtet, interpretiert werden können. Nach Aussage der Lehrerin fiel die Arbeit gut aus. Die Arbeit zeigt das Interesse der Lehrerin an der Thematik, was für eine Zusammenarbeit entscheidend ist. Daher soll die Klassenarbeit als Anknüpfungspunkt für die Entwicklung entsprechender Unterrichtsmaterialien gewählt werden. Zunächst ist ausgehend von der Aufgabe 1e) nach weiteren

geometrischen Darstellungen von gemeinen Brüchen zu suchen, die sich nicht nur auf kongruente Figuren beziehen. Als Repräsentationen von Brüchen können den Schülern geometrische Figuren angeboten werden, die zuerst mit Hilfslinien in kongruente Figuren unterteilt werden müssen, um das Verhältnis der Flächeninhalte und somit den zu repräsentierenden Bruch zu bestimmen. Derartige Unterteilungen können auch etwas anspruchsvollere geometrische Überlegungen berücksichtigen.

Vorschläge für die 5. Klasse – Darstellen, Kürzen, Erweitern

Nachdem die Fünftklässler die in Abb. 2 wiedergegebene Arbeit geschrieben hatten, wurde gemeinsam mit der Lehrerin das in Abb. 3 dargestellte Arbeitsblatt entwickelt und den Schülern vorgelegt.

1) Welche Brüche sind dargestellt?
Tipp: Unterteile Figuren weiter.

a) b) c)

d) Tipp: Es geht um einen unechten Bruch.

2) Stellt $\frac{3}{4}$ und $2\frac{1}{2}$ dar, indem ihr entsprechende Teilfiguren des Sechsecks auf dem Hilfsblatt ausmalt.

3) Welche weiteren Brüche könnt ihr mit Hilfe des Sechsecks und seiner Teilfiguren ausmalen?

4) Erklärt mit Hilfe von Bildern, wie man gemischte Zahlen in unechte Brüche umwandelt. Nutzt dafür das Hilfsblatt.

Abb. 3: Arbeitsblatt: Brüche im Sechseck

Das Arbeitsblatt enthält zunächst (wie der Test auch) Aufgaben zu Darstellungen von Brüchen sowie entsprechende „Umkehrungen“. Ihre Lösung erfordert im Vergleich zu den Testaufgaben etwas anspruchsvollere geometrische Überlegungen bzw. Zeichnungen. Die Aufgabenstellungen lassen die Interpretation der Einfärbung offen. Zu dem Arbeitsblatt gehört ein Hilfsblatt, das mehrere nicht ausgemalte Vielecke im Kreis (wie in der Aufgabe 1) als Vorlage zum Ausmalen enthält.

Die Aufgaben wurden von den Schülern innerhalb einer Stunde in kleinen Gruppen mit weiteren Wiederholungsaufgaben bearbeitet und anschließend den Mitschülern präsentiert. Die Formulierungen der Aufgabenstellungen ähneln sehr stark denen der Lehrerin, um die Schüler nicht zu sehr zu irritieren. Da die Schüler dieser Klasse wussten, was die Lehrerin beispielsweise unter der Frage „*Welche Brüche sind dargestellt?*“ versteht, habe ich an der Stelle auf die Modifikation der Fragestellung verzichtet.

Im Nachhinein hat sich herausgestellt, dass die Kreise um die Vierecke in der ersten Aufgabe die Schüler eher irritiert haben. Beim Lösen der 1. Aufgabe diskutierten die Schüler zunächst, was als Ganzes gelten kann und ob die Kreisteile dazu gehören. Mit der Begründung, es wäre schwer den Kreis weiter in gleiche Teile einzuteilen, entschieden sie sich dann für die Umriss-Sechsecke als entsprechenden Ganzen. Eine Gruppe schnitt die Figur aus und versuchte die Aufgabe durch Auslegen zu lösen. In einer anderen Gruppe wurden zusätzliche Radien eingezeichnet und die Figur somit weiter unterteilt. Berücksichtigung von Symmetrien erleichterte das Zählen. So wurde das gesamte Sechseck in sechs gleiche Dreiecke eingeteilt. Jedes dieser Dreiecke entsteht wiederum aus sechs kleineren Dreiecken. Das Sechseck enthält demzufolge 36 Dreiecke (Abb. 4). Das weitere Unterteilen zeigt, dass die erreichten Teile untereinander flächengleich sind und dass ihre Anzahl wächst. Da die Anzahl der gleich großen Teile, die das Ganze repräsentieren, und die Anzahl der Teile, die den Bruch repräsentieren um den gleichen Faktor größer werden, kann dadurch Erweitern repräsentiert werden. Analog kann auch das Erklären des Kürzens geometrisch unterstützt werden. In Abhängigkeit davon, wie die einzelnen Teile gezählt werden, kann folgende Zeichnung entweder als $1\frac{1}{2}$ oder als $\frac{54}{36}$ gelten.

Das Bild aus der Aufgabe 1d) in Abb. 3 kann außerdem „umsortiert“ werden. Die gleiche Abbildung kann zur anschaulichen Erklärung für das Umwandeln von gemeinen Brüchen in gemischte Zahlen benutzt werden.

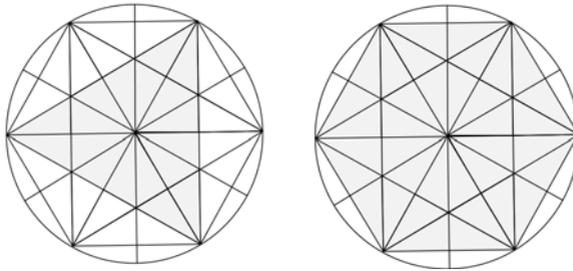


Abb. 4: Gemeine Brüche

Die Anordnung der Teilaufgaben in der 1. Aufgabe erwies sich als etwas ungünstig, weil die Schüler durch einen „Gewöhnungseffekt“ nach der Bearbeitung der Aufgaben 1 a, b, c auch in der Aufgabe 1 d zu einer identischen Bearbeitung verleitet wurden und immer wieder erklärt werden musste, dass es sich hier um einen unechten Bruch handelt.

Während die Aufgabe 2 noch von den Schülern bearbeitet werden konnte, erwiesen sich die Aufgaben 3 und 4 als zu schwierig. Während die Aufgabe 3 möglicherweise noch erfolgreich bearbeitet werden könnte, wenn die Schüler mehr Zeit hätten, stellt die Aufgabe 4 einen sehr hohen kognitiven Anspruch. Sie kann im Sinne einer inneren Differenzierung zur Förderung von stärkeren Schülern eingesetzt werden. Im Anschluss war die kreative Konstruktivität der Schüler im Rahmen von freiwilligen Hausaufgaben gefragt. Sie wurden aufgefordert, ausgehend von der Figur auf den Bildern, ihre eigenen Aufgaben zu entwickeln. Eine solche Aufgabe ist in der Abbildung 5 dargestellt. In einer der Teilaufgaben löst sich der Schüler vom Sechseck und bevorzugt Säulen als Darstellungen. Die dargestellten Brüche als Kästchen-Säulen werden nicht alle auf die gleiche Einheit (das Ganze) bezogen, sondern auf unterschiedlich große Ganze. Dies kann daran liegen, dass der Schüler seine Aufgabe als Gesamtheit von verschiedenen Teilaufgaben sieht. Es kann aber auch nicht völlig ausgeschlossen werden, dass der zu bildende Bruchbegriff bei dem Schüler noch nicht abgesichert ist.

In einer anderen Teilaufgabe (siehe Abb. 6) zeichnet ein anderer Schüler selbst mehrere Sechsecke. Er zeichnet zunächst einen Kreis und stellt sich der schweren Aufgabe, sechs Punkte gleichmäßig auf der Kreislinie zu verteilen. Dies gelingt ihm nicht auf allen Zeichnungen gleich gut. Bei der Erstellung der Zeichnungen mussten u.a. Symmetrien berücksichtigt werden. Somit wurden Kenntnisse über Brüche mit den Fertigkeiten aus dem Geometrieunterricht verknüpft. Es wäre interessant, zu erfahren, wie der

Schüler beispielsweise für das Erstellen der Zeichnung die Kreislinie in sechs Teile unterteilt. Dazu bietet die Aufgabe jedoch keine Information.

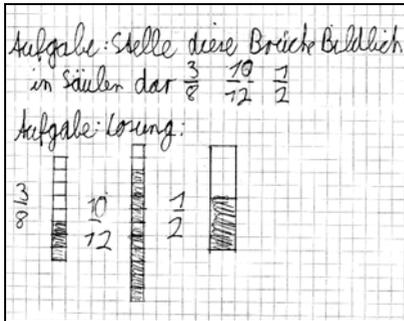


Abb. 5: Brüche als Balken

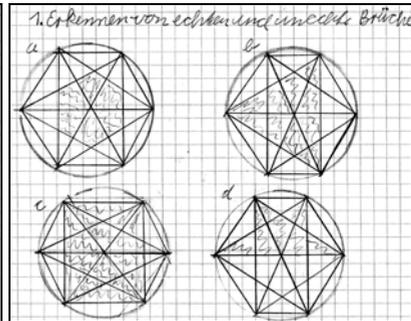


Abb. 6: Brüche zeichnen

Vorschläge für die 6. Klasse – Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren

Regeln für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von gemeinen Brüchen werden meistens in der 6. Klasse unterrichtet. In einer 6. Grundschulklasse, die von der gleichen Lehrerin wie die bereits erwähnte 5. Klasse unterrichtet wurde, erhielten die Schüler am Ende des Jahres die Aufgabe, diese Regeln mit Hilfe des Tangram-Spiels zu erklären (Abb. 7).

Zunächst haben die Schüler folgende Vermutungen aufgestellt:

- Der Flächeninhalt des kleinen Quadrats beträgt $\frac{1}{9}$ des gesamten Flächeninhalts.
- Der Flächeninhalt des kleinen Quadrats beträgt $\frac{1}{8}$ des gesamten Flächeninhalts.

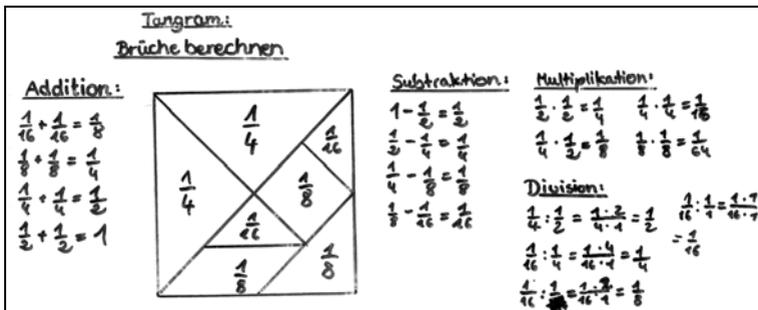


Abb. 7: Präsentationsfolie (Gymnasium)

Die erste Vermutung ging von der Frage aus, wie oft der quadratische Stein in der gesamten Figur enthalten ist. Die zweite Vermutung entstand aus der Frage, wie oft das kleine Dreieck in den quadratischen Stein und in das gesamte Spiel hineinpasst. Das genaue Nachmessen erklärte den Unterschied zwischen den Vermutungen. Demnach wurde die zweite Vermutung als Grundlage der weiteren Überlegungen gewählt. Ausgehend davon wurden auch den weiteren Steinen ihre Anteile an dem Flächeninhalt zugeordnet. Durch Umlegen von Steinen gelang es den Schülern, passende Beispiele für Addition und Subtraktion zu finden. Bei der Erklärung der Regeln für Multiplikation und Division haben sich die Schüler vom Spiel abgelöst und die Regeln zwar an Zahlenbeispielen, jedoch rein formal erklärt.

Dieselbe Aufgabe wurde Sechstklässlern an einem Berliner Gymnasium angeboten. Wie die Schülerinnen in einer kleinen Gruppe damit umgegangen sind, kann im Folgenden dem Beobachtungsprotokoll eines Lehramtsstudenten entnommen werden.

Auszug aus dem Hospitationsprotokoll

Gruppenarbeitsphase: *In der Gruppe wurden direkt zu Beginn der Gruppenarbeitsphase (10:08) Aufgaben verteilt. So begann Schülerin a, die gleich eine Führungsposition einnahm, damit, die Aufgabe vorzulesen, während Schülerin d beauftragt wurde, die Folie für die Präsentation der Arbeit zu gestalten. Der erste Vorschlag bzw. Ansatz zu einer Lösung der Aufgabe kam nun auch von a, nämlich, dass man die einzelnen Figuren als Anteile am Flächeninhalt des mittels des Tangram gelegten Quadrates betrachten könne. So schlug sie vor, dass das große Dreieck $\frac{1}{4}$ sei. Dieser*

Vorschlag verlief jedoch erst einmal im Sand, da sich die einzelnen Schülerinnen nun zunächst einmal mit anderen Dingen als der konkreten Aufgabenstellung beschäftigten. Nachdem c und a (Schülerin a: „Guckt mal, ich hab 'ne Kirche!“) jeweils für sich mit den Spielsteinen andere Figuren zu legen versuchten, e die einzelnen Figurenbestandteile ausmalte (allerdings nicht gleichwertige Figuren bezüglich des Flächeninhalts mit gleicher Farbe, sondern wahllos in unterschiedlichen Farben) und eine Diskussion über die Überschrift für die Folie, in der sich auf „Brüche berechnen“ geeinigt wurde und an der jeder einzelne beteiligt war und Vorschläge abgab, abgehalten wurde, besann man sich um 10:22 wieder auf die Aufgabenstellung.

Hierbei zeigten sich aber einige Unsicherheiten im Umgang mit dem Rechnen mit Brüchen. So schlug e vor, dass $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{16}$ wären, also bei der Addition von Brüchen jeweils Zähler und Nenner miteinander zu addieren sind, während a $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$ anbrachte. Daraufhin gab e ihr Recht mit der Begründung, das $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ ja $\frac{2}{8}$ wären und man dies zu $\frac{1}{4}$ kürzen könne. Da man sich unsicher war und sich nicht einigen konnte, fragten die Schülerinnen mich, was denn nun richtig sei. Da ich aber nicht in die Unterrichtssituation eingreifen wollte, half ich ihnen an dieser Stelle nicht weiter.

Die Diskussion beschränkte sich an dieser Stelle fast nur noch auf die Schülerinnen a und c, die mittlerweile aufgestanden und zu a gegangen war. Sie bemerkte, dass alle Brüche aufaddiert zusammen 1 ergeben müssten, was ihnen an dieser Stelle auch nicht weiter half. Indes (10:28) hatte d im Schulbuch nachgeschlagen und sich nochmal informiert, wie die Addition von Brüchen gelingt. So konnte um 10:29 schließlich damit begonnen werden, die Folie zu beschriften. Schülerin c merkte nun an, dass man die Subtraktion schon „habe“, denn aus $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ folge ja, dass $1 - \frac{1}{2}$ gleich $\frac{1}{2}$ sei. Im Folgenden verloren die Schülerinnen den Bezug zum Tangram eigentlich völlig. Die Diskussionen über das Verrechnen von Brüchen liefen nicht mehr auf Grundlage der Bestandteile des Tangram-Spiels ab, sondern eher auf dem Vorwissen der Schülerinnen und dem, was im Schulbuch darüber stand. So notierten sie zwar im folgenden die Subtraktion und Multiplikation in Beispielen von Brüchen, die als anteilige Flächeninhalte am Gesamtflächeninhalt des Tangrams vorkommen, aber begründeten dies nicht mit dem Spiel selbst. Während a, c und nun auch b über die Division diskutierten und e zuhörte, bekam d nur noch Anweisungen, das aufzuschreiben, was die anderen als Ergebnisse erhielten. Dies wurde besonders deutlich, als sie sich um 10:37 einbrachte, dass $\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ gleich $\frac{1}{8}$ wären, da man Zähler und Nenner multiplizieren müsse. Dieser Vorschlag und das Bedürfnis nach Aufklärung wurde wegen dem drohenden Ende der Arbeitsphase von a allerdings mit „Schreib es einfach, Nadja, schreib es einfach!“ abgetan und die Schreibtätigkeit daraufhin sogar von c übernommen.

Präsentation: *Es folgten ab 10:40 die Präsentationen (Abb. 7) der Gruppen. Ich werde hier nur auf die Präsentation der Gruppe 1 (10:54-10:01) eingehen. Hierbei gingen a und c zum Vorstellen des Erarbeiteten nach vorne, wobei c mündlich vortrug und a das Gesagte anhand der auf dem Projektor aufliegenden Folie zu verdeutlichen versuchte. Dabei versuchten sie bei der Addition noch, mit dem Tangram zu arbeiten und merkten erst jetzt, dass $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ gar nicht so leicht mit dem Tangram zu zeigen ist.*

Bei der Subtraktion wichen die beiden wieder von dem Spiel ab, woraufhin Frau G. sie dazu anhielt, den Bezug zum Tangram zu wahren mit dem Einwand, dass man die Subtraktion noch glaubhaft zeigen könne. Für die Multiplikation/Division folgten dann keine Erklärungen mehr, sondern es wurde von a nur noch die den Brüchen entsprechenden Tangram-Teile gezeigt.

Nach jeder Präsentation konnten von den restlichen Schülern Fragen gestellt werden. Ein Schüler fragte sich dabei, warum denn die Division und Multiplikation überhaupt in die Bearbeitung eingeflossen sind, da diese ja nicht am Tangram erklärt wurden. Die Antwort der Schülerinnen c war: „Das stand da so.“ Dies wurde von Frau G. damit kommentiert, dass der Einwand berechtigt gewesen wäre. Die Multiplikation und Division sind nicht einfach durch das Tangram zu erklären, was den Schülerinnen ja auch nicht gelungen sei. Damit wurde die Präsentation der Gruppe 1 beendet.

Das Protokoll zeigt, wie die Schülerinnen ihre Kenntnisse aus Geometrie und Bruchrechnung „vernetzen“. Abgesehen davon, dass das Tangram die Schüler zum spielen verleitet hat, zeigten sich weitere Schwierigkeiten. Einige von ihnen wurden durch das Zitat von Padberg am Anfang des Kapitels angedeutet.

- Den Schülerinnen gelingt es, inhaltsgleichen Figuren Brüche zuzuordnen, auch wenn es sich nicht um kongruente Figuren handelt.
- Die Schülerinnen lösen sich schnell von der anschaulichen Ebene.
- Die Schülerinnen können sich nicht mehr an die formalen Regeln erinnern. Sie sind in der Lage, mit Hilfe des Lehrbuchs Regeln für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf die vor kommenden Brüche formal anzuwenden.

- Die Schülerinnen sind in der Lage spontan (in der Präsentation) Addition und Subtraktion auf Anforderung der Lehrerin mit Hilfe des Tangrams zu veranschaulichen.
- Den Schülerinnen gelingt es nicht, Multiplikation und Division von Brüchen am Tangram zu veranschaulichen. Auch die Lehrerin zeigt an dieser Stelle ihre Skepsis.

Die Schwierigkeiten sind u.a. mit den inhaltlichen Anforderungen der Aufgabe, aber auch mit einem hohen Grad an Offenheit zu begründen. Um diesen Schwierigkeiten zu begegnen empfiehlt es sich, in Anlehnung an die „offene“ Aufgabe Teile davon in „konkrete“ Aufgaben umzuformulieren. Derartige Teilaufgaben könnten mit Hilfe von umgangssprachlichen Formulierungen die Kluft zwischen den geometrischen Anschauungen und formalen Regeln überbrücken.

Vorschläge für die 7. Klasse – Wiederholen, Vorgreifen

Um Erkenntnisse aus den vorangegangenen Erprobungen zu berücksichtigen, wurden im nächsten Schritt weitere Arbeitsblätter entwickelt. Diese wurden in den ersten drei Stunden im Unterricht einer 7. Klasse am Gymnasium ausprobiert. Das Hauptanliegen des Lehrers war, einen Einblick in die Kenntnisse der Bruchrechnung seiner neuen Schüler zu bekommen, denn die Schüler haben ihre ersten sechs Schuljahre an verschiedenen Grundschulen Berlins absolviert.

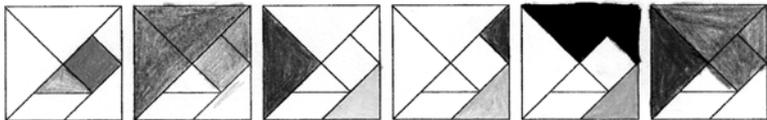
Im Folgenden werden Ausschnitte aus von Schülern bearbeiteten Arbeitsblättern präsentiert und kommentiert. Auch wenn die Impulse in den Aufgaben 1 und 2 (siehe Abb. 8) sehr stark durch die Abbildungen und Formulierungen der Aufgabenstellungen vorstrukturiert sind, unterscheiden sich die Ergebnisse der Schüler voneinander. So markiert beispielsweise Malena nicht nur Figuren, sondern auch die entsprechenden Brüche mit der gleichen Farbe (Abb. 8). Ohne lange über das „Medium Farbe“ zu reflektieren, sehen der Lehrer und die Schülerin sofort, was gemeint ist. Anders dokumentiert Jasmin ihre Lösung (Abb. 9): Sie arbeitet sehr sorgfältig mit den Hilfslinien. Diese veranschaulichen für Jasmin das Erweitern, indem sie die gesamte Figur in 16 Dreiecke einteilen. Auch auf formaler Ebene dokumentiert Jasmin die Suche nach dem gemeinsamen Nenner sehr sorgfältig und kürzt ihre Ergebnisse, wenn dies möglich ist.

1) Ermittelt den grau eingefärbten Bruchteil. Ergänzt diesen Bruch zur Eins und schreibt die Additionsaufgaben.



$\frac{1}{16} + \frac{15}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$
 $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} \checkmark$
 $\frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$
 $\frac{4}{16} + \frac{12}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$
 $\frac{5}{16} + \frac{11}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$
 $\frac{6}{16} + \frac{10}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$

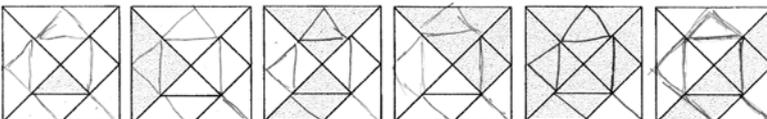
2) Löst die Aufgaben mit Hilfe dieser Figur, indem ihr die beiden Brüche mit verschiedenen Farben einträgt. Bestimmt und notiert das Ergebnis.



$\frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{16} \checkmark$
 $\frac{3}{16} + \frac{11}{16} = \frac{14}{16} \checkmark$
 $\frac{4}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \checkmark$
 $\frac{1}{8} + \frac{11}{16} = \frac{3}{4} \checkmark$
 $\frac{5}{16} + \frac{1}{8} = \frac{7}{16} \checkmark$
 $\frac{7}{16} + \frac{11}{16} = \frac{18}{16} \checkmark$

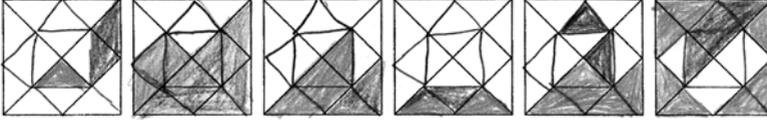
Abb. 8: Malenas und Magdalenas Lösung

1) Ermittelt den grau eingefärbten Bruchteil. Ergänzt diesen Bruch zur Eins und schreibt die Additionsaufgaben.



$\frac{1}{16} + \frac{15}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$
 $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} \checkmark$
 $\frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$
 $\frac{4}{16} + \frac{12}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$
 $\frac{5}{16} + \frac{11}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$
 $\frac{6}{16} + \frac{10}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$

2) Löst die Aufgaben mit Hilfe dieser Figur, indem ihr die beiden Brüche mit verschiedenen Farben einträgt. Bestimmt und notiert das Ergebnis.



$\frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{16} \checkmark$
 $\frac{3}{16} + \frac{13}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$
 $\frac{4}{16} + \frac{12}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$
 $\frac{5}{16} + \frac{11}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$
 $\frac{6}{16} + \frac{10}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$
 $\frac{7}{16} + \frac{9}{16} = \frac{16}{16} \checkmark$

Abb. 9: Jasmins Lösung

Sehr originell ist die Lösung von Jonathan (Abb. 10). Er färbt nicht nur die gesuchten Flächen gelb, sondern scheint fasziniert vom Einteilen der Figur in immer kleiner werdende ähnliche Teilfiguren zu sein. Die beiden Bilder in der Mitte veranschaulichen die Brüche mit den Nennern 64 und 128. Für die Lösung der Aufgabe ist eine solche Erweiterung nicht notwendig, sie lädt jedoch dazu ein, weitere Bezüge zwischen dem Einzeichnen von Hilfslinien und dem Äquivalenzklassenkonzept der Bruchrechnung herzustellen.

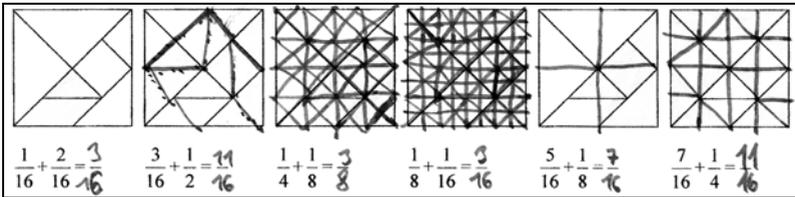


Abb. 10: Jonathans Lösung

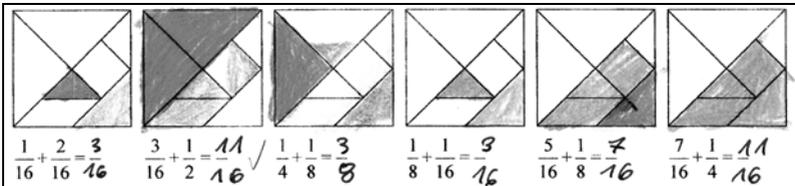


Abb. 11: Lösung von Linus

Interessant an der Lösung von Linus ist, dass er nicht die Teilfiguren innerhalb der umrandeten Linien ausmalt, sondern durch das Ausmalen die Grenzen markiert (Abb. 11).

Nach dem Lösen der beiden Aufgaben wurden die Schüler mit einer offeneren Fragestellung konfrontiert: *Wie könnt ihr die Regeln für Addition und Subtraktion von gleichnamigen und ungleichnamigen Brüchen mit Hilfe des Tangram veranschaulichen?* Das Wort „veranschaulichen“ sorgte für Unklarheiten unter den Schülern und musste oft als „zeichne ein Bild dazu“ oder „erkläre die Addition und Subtraktion mit Hilfe der gelösten Aufgaben“ übersetzt werden. Im Folgenden werden repräsentative Schülerantworten auf diese Frage dargestellt und ausgewertet. Für Adrian scheint die Skizze fast selbsterklärend zu sein (Abb. 12). Allerdings schreibt er dann noch eine kurze Bemerkung dazu, die sich auf verschiedene äquivalente Darstellungen eines Bruches bezieht.

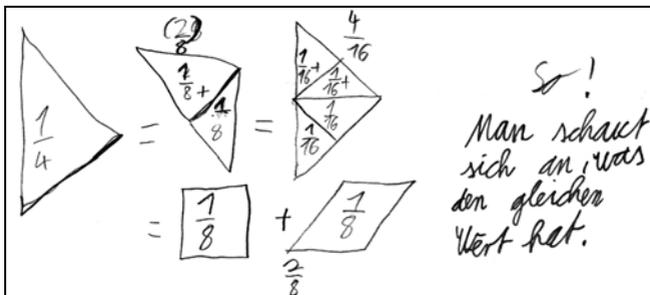


Abb. 12: Adrians Lösung

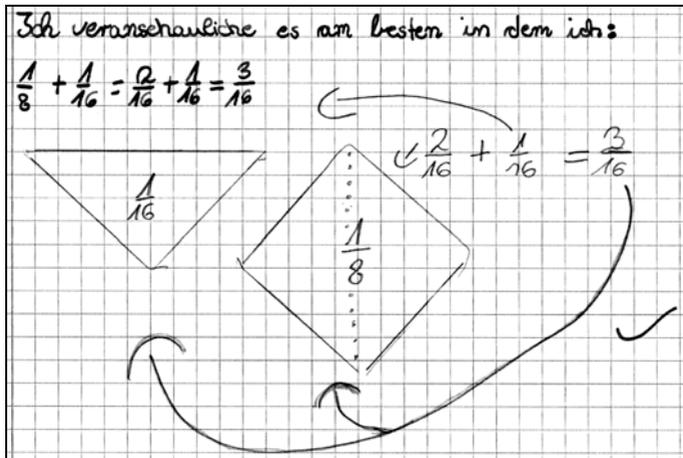


Abb. 13: Lisas Lösung

Auch Lisa ist sehr sparsam mit Worten und „vernetzt“ mit Pfeilen (Abb. 13). Stella schreibt einen kleinen Text, der etwas über die enaktive Ebene der Aufgabenlösung verrät (Abb. 14). Larissa geht ähnlich wie Stella vor, schreibt aber nichts zu ihrem Vorgehen auf (Abb. 15).

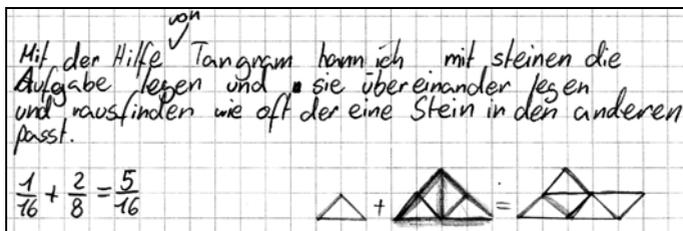


Abb. 14: Stellas Lösung

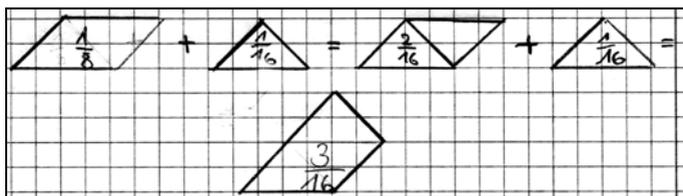


Abb. 15: Larissas Lösung

Das Gemeinsame an den schon kommentierten Lösungen ist, dass die Schüler das Ganze des Bruchs nicht veranschaulichen. Die Ursache dafür könnte in einer reduzierten Bruchvorstellung, die das Ganze nicht mit einbezieht, liegen. Eine andere Ursache könnte darin liegen, dass die Schüler sich das

ganze Spiel als Ganzes zwar vorstellen, jedoch nicht in ihrer Zeichnung darstellen. Anders sieht es z. B. bei Robert und Konstatin aus (Abb. 16 und 17). Sie beziehen in ihre Darstellung auch das Quadrat als Ganzes ein.

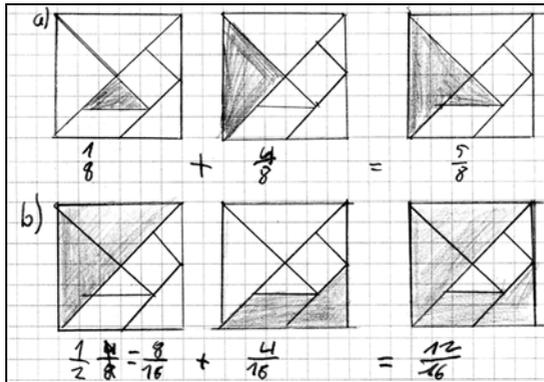


Abb. 16: Roberts Lösung

Konstantin schreibt zusätzlich einen Text, in dem er allgemein auf das Vorgehen bei gleichnamigen und ungleichnamigen Brüchen eingeht. Dafür weicht er von dem vorgegebenen Tangram-Muster ab (siehe Abb. 17).

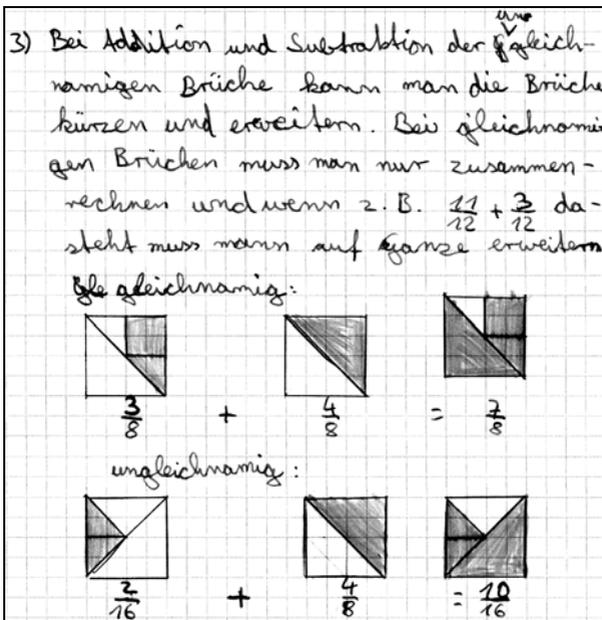


Abb. 17: Konstantins Lösung mit zugehörigen Überlegungen

Bemerkenswert sind die weiteren Überlegungen von Linus (Abb. 18 a). Denn auch er wählt ein eher zum Tangram unpassendes Beispiel und wird vorsichtig darauf hingewiesen, dass ein Tangram nicht für alle Beispiele günstig sei. Das bringt ihn auf neue Gedanken (Abb. 18b). Abgesehen von Rechtschreibfehlern wird deutlich, dass Linus beginnt, konkrete Brüche mit geometrischen Figuren zu verbinden. Was beim Kürzen mit den geometrischen Darstellungen der Brüche geschieht, bleibt an dieser Stelle unklar.

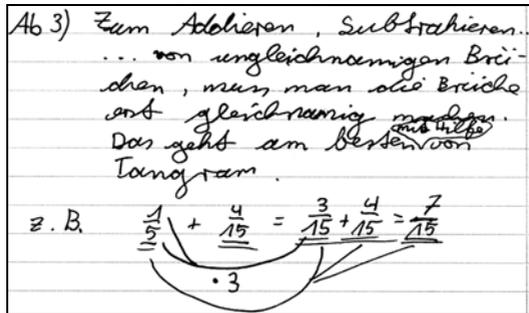


Abb. 18a: Überlegungen von Linus I

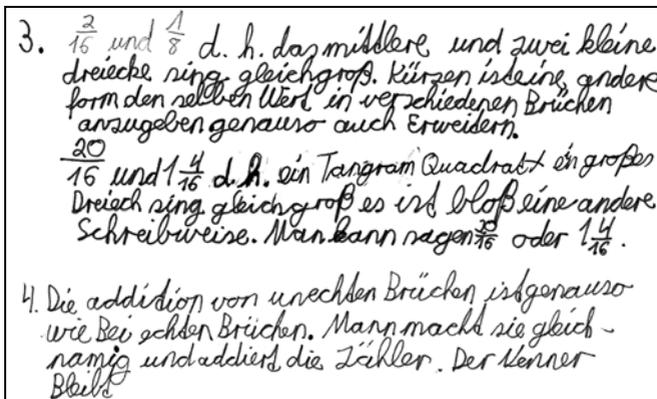


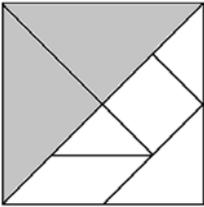
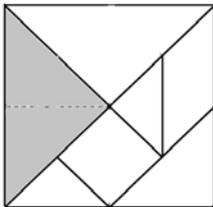
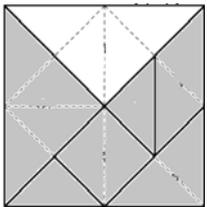
Abb. 18b: Überlegungen von Linus II

Weniger erfolgreich war der Einsatz der Arbeitsblätter zur Erklärung von Multiplikation und Division. Die Misserfolge werden im Folgenden jedoch nicht dargestellt, um zu zeigen, dass es nicht sinnvoll ist, nach Wegen zu suchen, auch Division und Multiplikation geometrisch darzustellen, sondern mit dem Ziel, dem Suchenden Umwege zu ersparen. Darüber hinaus sei auf eine Untersuchung zur Veranschaulichung der Bruchdivision von Chen und Li (2008) verwiesen, die zu positiven Ergebnissen geführt hat.

Die Regeln der Addition und Subtraktion konnten enaktiv durch Aneinanderfügen der Steine oder auch durch Bilder, allenfalls mit minimalen verbalen Erklärungen, ikonisch dargestellt werden. Im Gegensatz dazu können Darstellungen von Multiplikation und Division nur mit Hilfe von beschreibenden Texten oder Hilfwörtern verstanden werden (siehe hierzu z. B. Stoye 2010, S. 106-112). So griff ich bei der ersten Aufgabe auf den „von-Ansatz“ von Padberg zurück (Abb. 19). In der Aufgabe 3 ist die Formulierung „Wie oft ist ... in ... enthalten?“ von Bedeutung.

Multiplikation und Division von Brüchen

- 1) Bestimmt die Ergebnisse und füllt die Textlücken aus.
- 2) Welche weiteren Multiplikationsaufgaben könnt ihr mit Hilfe des Tangrams veranschaulichen. Benutzt dafür Tangram-Steine und haltet eure Ergebnisse fest.

		
Die Hälfte von einer Hälfte des Flächeninhalts des Quadrates beträgt ein Viertel des Flächeninhalts.	Die Hälfte von einem Viertel des Flächeninhalts des Quadrates beträgt ein des Flächeninhalts.
$\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -$	$\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -$	$\frac{1}{12}$ von $\frac{3}{4} = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4} = -$

- 3) a) Wie oft ist das kleine Dreieck in dem großen Dreieck enthalten?
b) Wie oft ist das kleine Dreieck in dem Quadrat enthalten?
c) Wie oft ist das mittlere Dreieck in dem großen enthalten?
- 4) Gelingt es euch $\frac{1}{8} : \frac{1}{4} =$ mit Hilfe von Tangram darzustellen? Begründet euer Vorgehen.
- 5) Formuliert die Regeln für die Multiplikation und Division von Brüchen und veranschaulicht diese an geeigneten Beispielen mit Hilfe von Tangram.

Abb. 19: Multiplizieren und Dividieren mit Tangram

Die Aufgaben des Arbeitsblattes (Abb. 19) wurden in einer Stillarbeitsphase bearbeitet und anschließend ausgewertet. Dabei ist aufgefallen, dass sich kein Schüler für die Aufgaben 2 und 5 gemeldet hat. Offensichtlich haben die Formulierungen die Schüler nicht angesprochen. Die ersten beiden Teilaufgaben der Aufgabe 1 wurden erfolgreich bearbeitet. Der Schritt zwischen den Teilaufgaben der Aufgabe 1 erwies sich als zu weit. Interessant war, dass die Aufgabe 3 ohne Probleme bearbeitet wurde. Die Schüler haben für die Teilaufgabe 3 d mehrere verschiedene Vorschläge unterbreitet. Zu der Aufgabe 4 gab ein Schüler wider Erwarten des Lehrers eine anschauliche Begründung der richtigen Lösung. Robert sagte: „Hätte ich eine Säge, so würde ich ein großes Dreieck nehmen und in zwei Hälften zersägen. So hätte ich zwei mittlere Dreiecke. Diese sind Achtel von dem Ganzen. So kommt in der Aufgabe $\frac{1}{2}$ raus, weil ich das Dreieck halbiere.“ Der Lehrer lobte die Lösung und fragte danach, was man machen würde, falls man keine Säge hat. Daraufhin kamen die Schüler zu dem Schluss, dass Division nicht für alle Aufgaben mit Hilfe des Tangrams erklärt werden kann. Sie merkten, dass in diesem Fall der Divisor nicht größer als der Dividend sein sollte. Diese Übung wurde eingefügt damit die Schüler darüber reflektieren, dass Geometrie nicht für alle Aufgaben Erleichterungen bringt.

In einem Auswertungsgespräch mit dem Lehrer stellte sich heraus, dass er die Übungen zur Addition und Subtraktion als Verknüpfung mit den Flächeninhalten für sinnvoll hielt. Er sah Anknüpfungspunkte zwischen der Bruchrechnung und der Herleitung von Formeln für Flächeninhalte. Auch dort können die Zerlegung und Ergänzung von Figuren sowie das Zeichnen von Hilfslinien, wie bei den Aufgaben mit dem Tangram, eine Rolle spielen. So hoffte er, dass die Brüche, die in den Formeln vorkommen, durch die Übung mit dem Tangram nicht nur formal, sondern auch geometrisch im Sinne von „Anteil am Flächeninhalt“ interpretiert werden. Ein Beispiel dafür ist die Formel des Flächeninhalts für das Dreieck. Aus der Sicht des Lehrers sollte bedacht werden, dass Veranschaulichungen von Brüchen auf diese Weise zum selbständigen Unterrichtsstoff werden. Im Falle der Multiplikation und Division erleichterten die Darstellungen von Regeln mit Hilfe des Tangrams nur für einen Teil der Schüler das Verständnis und der Lehrer würde in seinem zukünftigen Unterricht lieber darauf verzichten, zumal die Schüler formal die Regeln sehr gut beherrschten.

Wie kann darüber hinaus durch derartige Aufgaben die Einführung von Variablen durch Längen, Flächeninhalte und Volumina vorbereitet werden?

Der Nachteil eines derartigen geometrischen Zugangs zu Variablen besteht darin, dass Schüler häufig Buchstaben als Bezeichnungen für geometrische Objekte (Strecke, Fläche, Körper) und nicht für Größen dieser Objekte sehen. Wird ein Bruch im Unterricht durch verschiedene zwar flächengleiche, aber nicht kongruente geometrische Figuren repräsentiert, so werden Schüler dafür sensibilisiert, zwischen dem Objekt und seiner Größe zu unterscheiden. So kann diesem häufig in der Literatur beschriebenen Nachteil begegnet werden (vgl. Bertalan, zitiert in Gerhardt 2009).

Weitere Möglichkeiten, gemeine Brüche mit Geometrie zu verbinden

Nachdem verschiedene Möglichkeiten, Bruchrechnung in den Klassenstufen 5/6 und ansatzweise 7 geometrisch zu veranschaulichen, vorgestellt und ihr Potenzial für Geometrie, Arithmetik und Algebra diskutiert wurden, sollen in diesem Abschnitt einige weitere Beispiele für andere Klassenstufen der Primar- und Sekundarschule vorgestellt werden.

Hierzu sind zunächst die Aufgaben von Paul Eigenmann (1981) zu nennen, die für sich selbst „sprechen“ und auf verschiedenen Wegen gelöst werden können. So präsentiert Heinrich Winter eine elegante Lösung der Aufgabe 133 (Abb. 20) in seinem Aufsatz „Gestalt und Zahl“. Michael Schneider beschreibt eine andere interessante Schülerlösung zu der gleichen Aufgabe. Die Aufgaben 133' und 133'' zeigen schlichte Variationen von 133, die zu neuen Brüchen, aber auch neuen geometrischen Überlegungen führen.

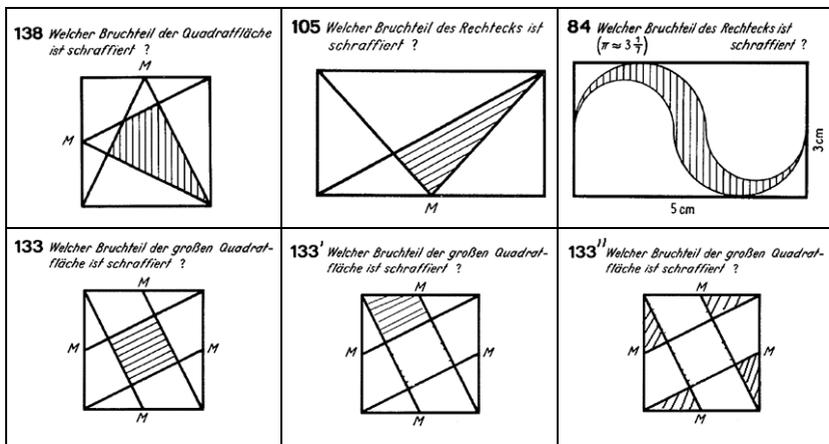


Abb. 20: Eigenmanns Aufgaben und Variationen

Durch die folgenden Aufgaben (Abb. 21 und Abb. 22) können Brüche im Unterricht der räumlichen Geometrie angesprochen werden. Sie erfordern räumliches Vorstellungsvermögen und Kenntnisse von Begriffen aus der räumlichen Geometrie, aber auch Kenntnisse des Soma-Würfels.

Welcher Bruchteil der Würfeloberfläche ist grün? Welcher Bruchteil der Würfeloberfläche ist orange?

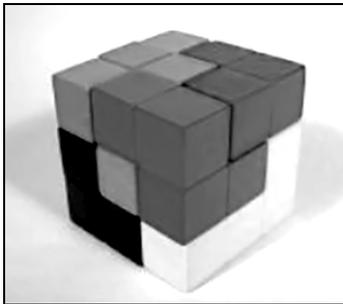


Abb. 21: Soma-Würfel

Welchen Anteil hat dieser Körper an dem Volumen des ganzen Soma-Würfels? Welche Anteile haben die einzelnen Soma-Teile an dem Volumen des gesamten Soma-Würfels?

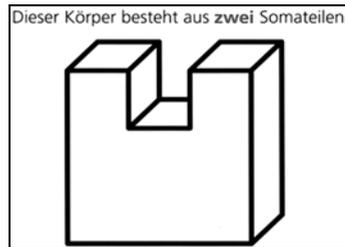


Abb. 22: Soma-Körper

Die folgende Aufgabe kann mit Hilfe einer Zeichnung (siehe Abb. 23) oder auf der enaktiven Ebene durch die Betrachtung der Modelle bearbeitet werden. Sie bietet darüber hinaus Anknüpfung an den Stochastikunterricht, wenn die jeweiligen Körper als Spiel-Würfel interpretiert werden.

Ordne den sichtbaren Flächen der platonischen Körper ihren Anteil an dem gesamten Oberflächeninhalt des jeweiligen Körpers als Bruch zu. Welche weiteren Perspektiven auf die fünf platonischen Körper sind möglich? Welche Brüche gehören dazu?



Abb. 23: Platonische Körper

Im Folgenden seien zwei kleine Aufgaben angegeben, die über verschiedene Klassenstufen betrachtet werden können. Die erste Aufgabe kann so formuliert werden (siehe Abb. 24): *Welcher Bruchteil der gesamten karierten Fläche ist rot bzw. blau?* Diese Aufgabe zielt auf den Pythagoras-Satz,

kann aber auch schon in der Primarstufe durch Abzählen der Kästchen gelöst werden.

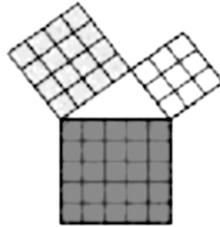


Abb. 24: „Rittersport“ oder „Pythagoras“?

Ausgehend von der Pythagoras-Figur lassen sich Pythagoras-Bäume konstruieren, die zur Darstellung der Bruchaddition eingesetzt werden können. So lässt sich die Aufgabe in der Abb. 25 durch Einzeichnen von Hilfslinien und Unterteilen der Figuren in Dreiecke auch schon in der Primarstufe lösen. Sie kann aber auch durch Berücksichtigung von Symmetrien oder einfach durch Ausschneiden und Übereinanderlegen von Teilfiguren gelöst werden. Nach den Empfehlungen von Lehrern sollte der Pythagoras-Baum am Anfang weniger Stufen als in der Abb. 25 enthalten.

A1: Ermittle den grau eingefärbten Bruchteil. Ergänze diesen Bruch zu Eins und schreibe die Additionsaufgaben auf.

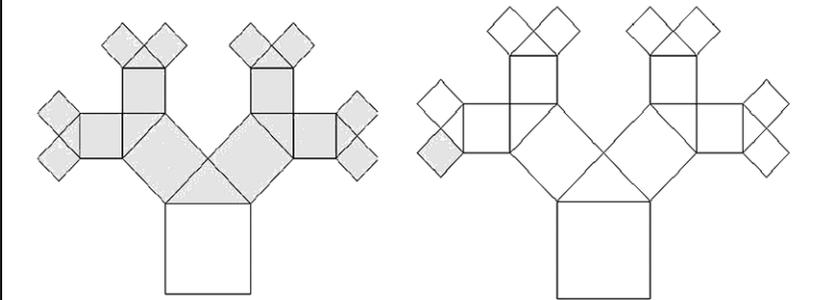


Abb. 25: Pythagoras-Bäume

Die hier präsentierten Vorschläge ergänzen die wunderbaren Ideen, wie sie beispielsweise in den SINUS-Materialien, bei Heinrich Winter (1999) oder bei Müller-Sommer und seinen Kollegen (2009) zu finden sind. Sie laden zu weiteren Variationen ein und zeigen, dass der Reichtum der Möglichkeiten, gemeine Brüche geometrisch darzustellen, bei weitem noch nicht ausgeschöpft ist.

... und ganz zum Schluss eine Schüleraufgabe...

Eine weitere Ideenquelle bieten von Schülern selbst entwickelten Aufgaben. Einige von ihnen habe ich im Zusammenhang mit „Einkleidungen“ in Nordheimer (2010) ausführlicher dargestellt. Eine ähnliche bisher noch nicht präsentierte Aufgabe (siehe Abb. 26) wurde von den Schülern einer 6. Klasse eines Berliner Gymnasiums entwickelt.

a) Eine Tafel Schokolade enthält 100g. enthält
Wie viel Gramm jedes Stück? im Tangramm eingeterte Stück?

Dreieck A:	$\frac{1}{4}$	=	25 g
Dreieck B:	$\frac{1}{4}$	=	25 g
Dreieck C:	$\frac{1}{8}$	=	12,5 g
Dreieck D:	$\frac{1}{16}$	=	6,25 g
Dreieck E:	$\frac{1}{16}$	=	6,25 g
Quadrat:	$\frac{1}{8}$	=	12,5 g
Parallelogr.:	$\frac{1}{8}$	=	12,5 g

Abb. 26: Schokolade

Durch geometrische Figuren verwandelten die Schüler gemeine Brüche in Schokoladenstückchen, durch Angaben in Gramm gaben sie den Brüchen „Gewichte“. Darüber hinaus bereitete eine Schokoladentafel von 100 g den Weg für die Prozentrechnung. Aber was kann schon ein *Werkzeug* wie eine Tafel Schokolade über gemeine Brüche, die Paradoxie des Verstehens, formale Strenge der Mathematik und angemessene Anschauung sagen?

Literatur

Eigenmann, P. (1981): Geometrische Denkaufgaben, Stuttgart: Klett.

Führer, L. (2002): Über einige Grundfragen künftiger Geometriedidaktik. In: *Mathematica didactica* 25, Bd. 1, Berlin: Franzbecker, S. 55-75.

Gerhard, S. (2009): Variablen im geometrischen Kontext. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*, Münster: WTM-Verlag.

- Chen, X., Li, Y. (2008): Instructional coherence in Chinese mathematics classroom – a case study of lessons on fraction division. In: *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8 (4), Berlin: Springer, S. 711-735.
- Holland, G. (2007): *Geometrie in der Sekundarstufe. Entdecken - Konstruieren - Deduzieren. Didaktische und Methodische Fragen*, Berlin: Springer.
- Jahnke, T. (2001): *Kleines Aufgabenrevier, Zur Klassifizierung von Aufgaben im Mathematikunterricht*, SINUS Materialien, Potsdam: PLIB.
- Koller, H.-C. (2003): Alles Verstehen ist daher immer zugleich ein Nicht-Verstehen. Wilhelm von Humboldts Beitrag zur Hermeneutik und seine Bedeutung für eine Theorie interkultureller Bildung. In: *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 6 (4), Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwissenschaften, S. 515 – 531.
- Kvasz, L. (2008): *Patterns of Change. Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*, Basel: Birkhäuser.
- Maier, H., Schweiger, F. (1999): *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht*, Wien: öbv & hpt.
- Müller-Sommer, H. (2009): Aufgaben zur Division von Brüchen. In: Affolter, W.; Amstad, H.; Doebeli, M. (Hrsg.): *Das Mathematikbuch. Lernumgebungen. Schülerbuch 6. Schuljahr*. Ausgabe N, Berlin: Klett.
- Nordheimer, S. (2010): „Einkleidungen“ als Modell-Vernetzungen im MU. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010*, Münster: WTM-Verlag.
- Padberg, F. (2002): *Didaktik der Bruchrechnung*, Heidelberg: Spektrum.
- Schneider, M. (2009): Problemlösen im Kontext der Basiskompetenzen. In: *Basiskompetenzen in der Geometrie, GDM-AK Geometrie 2009/10*. Marktbreit 2010.
- Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport. (2004): *Rahmenlehrplan. Grundschule. Mathematik*. Berlin.
- Stoye, W. (2010): *Vorstellungen entwickeln beim Mathematiklernen. Wie man Lernschwierigkeiten vermeiden kann*, Berlin: Pro Business.
- Unger, A. (2011): Der Känguru-Mathematikwettbewerb. Wettstreit und Aufgabekultur. Vortrag im Berliner Seminar „Mathematik und ihre Didaktik“ [10.01.2011].
- Vollrath, H.-J. (1993): Paradoxien des Verstehens von Mathematik. *Journal für Mathematikdidaktik* 14 (1), Berlin: Springer, S. 35-58.
- Vollrath, H.-J. (2001): Mit geometrischen Formeln Beziehungen erkennen. Beitrag zu Modul 5 des BLK-Modellversuchs SINUS: blk.mat.uni-bayreuth.de/material/mathe.html. [8.06.2011]
- Vollrath H.-J. (2001): Themenstränge, Themenkreise und Themenkomplexe im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, Beitrag zu Modul 5 des BLK-Modellversuchs SINUS: blk.mat.uni-bayreuth.de/material/mathe.html. [8.06.2011]

Wagenschein, M. (1968): Verstehen lehren, Basel: Beltz.

Winter, H. (1995): Mathematik und Allgemeinbildung, SINUS Materialien:
<http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienDB/45>. [8.06.2011]

Winter, H. (1999): Gestalt und Zahl. Beitrag aus dem Berichtsband zum Symposium über Kreatives Denken und Innovationen in mathematischen Wissenschaften Friedrich-Schiller-Universität Jena, Fakultät für Mathematik und Informatik, Abteilung Didaktik, Jena.

Zech, F. (1996): Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik, Basel: Beltz

Die Zukunft der Raumgeometrie liegt in Menschenhand - Raumgeometriesoftware und ihre Schnittstellen zum Menschen

Markus Ruppert, Jan Wörler

Zusammenfassung. Während 2D-DGS inzwischen ihren Weg in den MU gefunden hat, steht eine ähnliche Entwicklung für 3D-DGS noch aus. Als ein wesentlicher Grund hierfür kann die optimierungsbedürftige Schnittstelle zwischen Mensch und Computer identifiziert werden. Vor diesem Hintergrund sollen technische Strömungen der Gegenwart aufgegriffen und ihre Relevanz für den „Raumgeometrieunterricht der Zukunft“ herausgearbeitet werden.

Obwohl die Raumvorstellung bereits von Thurstone (1938) als einer der Primärfaktoren für Intelligenz erkannt wurde und deren Schulung im Rahmen des Mathematikunterrichts als Aufgabe des Raumgeometrieunterrichts gesehen wird (vgl. z. B. KMK-Bildungsstandards, 2004; Weigand, 2009), kommt der Raumgeometrie in der Unterrichtsrealität häufig nur eine untergeordnete Rolle zu. Becker (1992) stellt fest, dass sich die Raumgeometrie der Sekundarstufe auf „die Bestimmung von Oberfläche und Volumen einiger Körper“ beschränkt. Wesentliche Komponenten der Raumvorstellung, z. B. das Erkennen räumlicher Beziehungen und die räumliche Orientierung (vgl. Maier, 1999), oder konkreter das Operieren mit Körpern im Raum, werden im Mathematikunterricht nicht in angemessener Form gefördert.

Für diese Diskrepanz lassen sich im Wesentlichen zwei Gründe ausmachen:

- Die traditionelle Trennung von ebener Geometrie und Raumgeometrie.
- Das Fehlen schülergerechter Veranschaulichungsmöglichkeiten und Werkzeuge zum Operieren mit Körpern im dreidimensionalen Raum.

Die Probleme bei der Entwicklung geeigneter Computerwerkzeuge für den Einsatz im Raumgeometrieunterricht liegen vor allem in der Gestaltung der Schnittstellen zwischen Mensch und Computer begründet. So genügt weder die klassische Mauseingabe noch die Darstellung räumlicher Situationen am 2D-Bildschirm den Anforderungen an eine intuitive Arbeitsumgebung für die Raumgeometrie im Mathematikunterricht. Die neue Welle der Euphorie auf dem Gebiet der 3D-Technologie im Heimkino- und Spielkonsolenbereich verspricht jedoch Entwicklungen, die diese Probleme überwinden könnten. Auf der Grundlage des Fusionsgedanken von ebener Geometrie

und Raumgeometrie (vgl. z. B. Klein, 1908) können geeignete Computerwerkzeuge einen Beitrag dazu leisten den Stellenwert der Raumgeometrie im Mathematikunterricht zu verbessern und somit das Bild von Mathematik mit ihren geistes- und naturwissenschaftlichen Aspekten abzurunden.

Im Folgenden wird zunächst der genannte Fusionsgedanke ins Gedächtnis gerufen und die aktuelle Stellung der Raumgeometrie wird beleuchtet. Anschließend werden Kriterien zur Einschätzung aktueller Entwicklungen im Bereich der Schnittstellen Mensch-Computer und deren Relevanz für den Mathematikunterricht vorgestellt und verschiedene Trends auf der Grundlage dieser Kriterien untersucht.

Der Fusionsgedanke und die Stellung der Raumgeometrie im Geometrieunterricht

Der Mathematikunterricht und die damit verbundene Perspektive auf das Verhältnis zwischen ebener Geometrie und Raumgeometrie stehen nach wie vor stark in der Tradition Euklids. In Euklids *Elementen* (2005) findet sich die ebene Geometrie in den Büchern I bis IV und VI wieder, während der Raumgeometrie die Bücher XI bis XIII gewidmet sind. In den Lehrplänen manifestiert sich diese Tradition der strikten Trennung von ebener Geometrie und Raumgeometrie in zwei weitgehend separaten Themensträngen. Weder durch die Reihenfolge der Themen noch durch die inhaltliche Ausformulierung wird eine Verbindung von ebener Geometrie und Raumgeometrie offenbar oder gar gefordert. Auch in den gängigen Schulbüchern, die den Ausführungen der Lehrpläne meist recht streng folgen, weisen diese Stränge deshalb nur wenige Querverbindungen auf. Zudem finden sich Kapitel zur Raumgeometrie oft ganz am Ende des Lehrgangs. Auch hierdurch wird der geringe Stellenwert der Raumgeometrie im Mathematikunterricht deutlich, denn in der Unterrichtsrealität werden aus Zeitgründen die letzten Themen eines Lehrbuchs oft nur recht knapp oder überhaupt nicht behandelt – ein Umstand, der gerade der Raumgeometrie nicht gerecht wird. Will man den Schülern Grunderfahrungen im Umgang mit geometrischen Körpern (z. B. Aufbau, Lagebeziehungen und Lageveränderungen von Körpern oder Operationen wie das Konstruieren oder Schneiden von Körpern) ermöglichen, so sind praktische Erfahrungen wie das Basteln von Körpern und das Erzeugen von Schnittflächen ebenso wichtig wie der Umgang mit zweidimensionalen (insbesondere computerunterstützten) Darstel-

lungsmöglichkeiten und das Thematisieren damit verbundener Schwierigkeiten. Bereits an dieser Stelle liegt die Verknüpfung der Raumgeometrie mit der Geometrie der Ebene nahe.

Wie fruchtbar eine solche Verbindung auch außerhalb der darstellenden Geometrie sein kann, zeigt sich bereits in der Methodenlehre von Archimedes. Zum einen bedient sich Archimedes beim Finden von Hypothesen zum Kugelvolumen einiger Analogien zwischen ebener Geometrie und Raumgeometrie:

„Durch diesen Lehrsatz, daß eine Kugel viermal so groß ist als der Kegel, dessen Grundfläche der größte Kreis, die Höhe aber gleich dem Radius der Kugel, ist mir der Gedanke gekommen, daß die Oberfläche einer Kugel viermal so groß ist als ihr größter Kreis, indem ich von der Vorstellung ausging, daß, wie ein Kreis einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie die Kreisperipherie, die Höhe aber dem Radius des Kreises gleich, ebenso ist die Kugel einem Kegel gleich, dessen Grundfläche die Oberfläche der Kugel, die Höhe aber dem Radius des Kugel gleich.“

(Archimedes: Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen. Abschnitt II)

Zum anderen verwendet er zum Beweis dieser Hypothesen Methoden, die ihm bereits bei der Bestimmung des Kreisinhaltess geholfen haben. Statt einbeschriebener und umbeschriebener Polygone verwendet Archimedes bei der Bestimmung des Kugelvolumens entsprechende einbeschriebene und umbeschriebene Rotationskörper.

Eine der Grundideen der „Fusionsbestrebungen“ zu Beginn des 20. Jahrhunderts ist es, diese so weitreichende Strategie der Analogiebildung für eine stärkere Vernetzung der ebenen Geometrie und der Raumgeometrie auch im Mathematikunterricht nutzbar zu machen und zu thematisieren. So fordert z. B. Klein (1908) „... von vornherein Ebene und Raum gleichzeitig nebeneinander (zu) behandeln, um unser Denken nicht erst künstlich auf zwei Dimensionen zu beschränken.“ Er erkennt aber auch, dass sich die Arbeit mit Modellen geometrischer Grundkörper schnell im Kennenlernen einfachster Grundbegriffe und Lagebeziehungen erschöpft und sieht deshalb „(...) die Notwendigkeit, räumliche Konstruktionen zeichnerisch durchführen und Körper auf die Ebene abbilden zu müssen“. Dabei ergeben sich jedoch weitere Probleme: Lassen sich z. B. Schnitte ebener Figuren mit Papier und Bleistift ohne Informationsverlust darstellen, ist man bei der Darstellung analoger Situationen im Raum auf komplizierte Schrägbildkon-

struktionen angewiesen, die zudem gewisse Informationen nur implizit enthalten; Stellen Zirkel und Lineal einfach zu handhabende Werkzeuge der ebenen Geometrie dar, sind analoge Werkzeuge für räumliches Konstruieren nicht realisierbar.

Diese Gründe trugen dazu bei, dass die Ideen der „Fusionisten“ in der Gestaltung von Lehrplänen und in der Entwicklung von Schulbüchern bislang keinen Niederschlag fanden. Erst G. Becker (1992) greift diese Ideen wieder auf und macht konkrete Vorschläge, wie mittels Analogiebildung eine Integration von ebener Geometrie und Raumgeometrie gelingen kann. So schlägt Becker z. B. vor, „*räumliche Objekte als Anlaß zur Begriffsbildung und Untersuchung ebener Objekte*“ oder „*ebene Sachverhalte als Begründungshilfen für Aussagen über räumliche Objekte*“ heranzuziehen. Er erkennt aber auch:

„Es scheint auch nicht absehbar zu sein, ob der Einsatz von Computern und geeigneter Software zu einer wesentlichen Änderung beitragen könnte.“

Die Ideen Beckers erscheinen jedoch vor dem Hintergrund der Möglichkeiten, die sich durch dynamische Raumgeometriesoftware ergeben, in einem anderen Licht. Schumann (2007) kommt mit seinem Konzept des „interaktiven Analogisierens“ auf die Ideen Beckers zurück und zeigt anhand der dynamischen Raumgeometriesoftware Cabri3D, dass die virtuelle Darstellung von Körpern und das virtuelle Operieren mit Körpern potenziell dazu geeignet sind, eine neue Sicht auf die möglichen Inhalte der Raumgeometrie zu eröffnen. Dabei wird der Fusionsgedanke zugunsten einer neuen Aufgabekultur wiederbelebt und es werden die Darstellungsmöglichkeiten der virtuellen Welt genutzt, um neue Wege zur Schulung der Raumvorstellung vorzuschlagen. Schumann zeigt auf, wie man unter Zuhilfenahme der Software zunächst auf der Objektebene und der Relationsebene Analogiebildungen zwischen ebener Geometrie und Raumgeometrie unterstützen kann, um anschließend Konstruktionsmethoden auf räumliche Situationen zu übertragen. Denkt man diese Ideen weiter, lassen sich auch Strategien für das Finden von Hypothesen oder Beweisstrategien analogisieren (man denke z. B. an den Umkreis eines Dreiecks in der ebenen Geometrie und die Umkugel eines Tetraeders als räumliches Analogon).

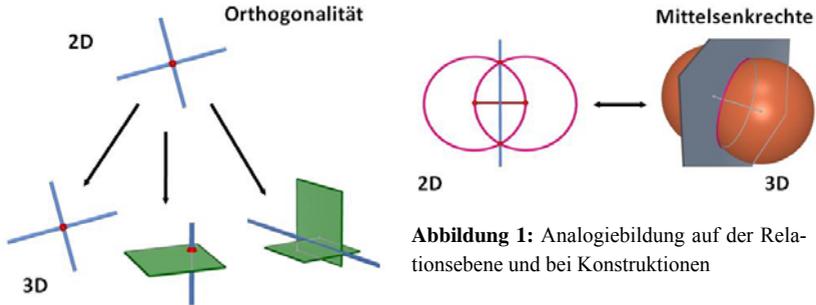


Abbildung 1: Analogiebildung auf der Relationsebene und bei Konstruktionen

Die Analogiebildung zwischen ebener Geometrie und Raumgeometrie unter Zuhilfenahme geeigneter Computerwerkzeuge kann demnach einen Beitrag zur Ausbildung mathematischer Begriffe und Strategien in diesen Bereichen liefern. Schumann (2007) fordert deshalb:

„Die interaktive Analogisierung von ebener zu räumlicher Geometrie ist ein Beispiel für produktive Vernetzung von Wissen. Deshalb ist ihre explizite Vermittlung im aktuellen Geometrieunterricht zu fordern.“

Dynamische Raumgeometriesoftware und die Mensch-Computer-Schnittstelle

Als größte Hindernisse für die Umsetzung obiger Fusionsbestrebungen (F. Klein, G. Becker, H. Schumann) im Unterricht erweisen sich jedoch – trotz des Potentials, das die vorhandenen dynamischen Raumgeometrieprogramme bergen – die Handhabung der Software und die Darstellung der geometrischen Objekte. Während 2D-DGSysteme das Konstruieren mit Zirkel und Lineal auf Papier simulieren und um dynamische Aspekte erweitern, kann der Simulationsprozess bei 3D-Software nicht vom „realen“ Konstruieren übernommen werden. Die Bedienung mit Maus und Tastatur ist deshalb wenig intuitiv (s. u.) und die Darstellung am zweidimensionalen Bildschirm setzt Fähigkeiten im Bereich der Raumvorstellung voraus, die ja durch die Handhabung des Programms erst geschult werden sollen. Etwas allgemeiner formuliert ist also vor allem eine Verbesserung der Schnittstelle „Mensch-Computer“ notwendig, um das Potential, das in der virtuellen Darstellung räumlicher Objekte verborgen liegt, voll auszuschöpfen.

Dabei müssen die folgenden zwei Aspekte im Mittelpunkt der Verbesserungsbemühungen stehen:

Verbesserungen auf der Eingabeebene

Hier geht es zum einen darum, eine möglichst intuitiv zu bedienende Hardware-Schnittstelle zu entwickeln, die den speziellen Anforderungen genügt, die ein zusätzlich darzustellender Freiheitsgrad mit sich bringt.

Zum anderen muss die jeweilige Software-Schnittstelle (z. B. Bedienmenüs, 3D-Werkzeuge etc.) auf die neue Eingabetechnik, aber auch auf neue Arten der Darstellung räumlicher Szenen angepasst werden.

Verbesserungen auf der Ausgabebene

Eine Verbesserung der Ausgabebene zielt natürlich wesentlich darauf ab, möglichst realistische 3D-Darstellungen zu erreichen. Korrespondierend mit den Komponenten der Raumvorstellung (vgl. Maier, 1999) ist für die Art der Umsetzung dabei entscheidend, ob der Benutzer Teil der Szene sein soll, oder ob er als außenstehender Beobachter einer dreidimensionalen Welt auftritt. Außerdem gilt es hinsichtlich des Mathematikunterrichts geeignete Lernumgebungen zu schaffen, die einen didaktischen Mehrwert z. B. bei der Schulung der Raumvorstellung versprechen.

Kriterien zur Beurteilung aktueller Entwicklungen

Sollen aktuelle Trends bezüglich ihres Potentials zur Verbesserung der beschriebenen Schnittstellenproblematik und bezüglich ihrer Relevanz für den Raumgeometrieunterricht bewertet werden, um daraus Prognosen für den „Raumgeometrieunterricht der Zukunft“ aufstellen zu können, müssen Beurteilungskriterien formuliert werden. Bei der Entwicklung derartiger Kriterien müssen die folgenden beiden Grundsatzfragen berücksichtigt werden:

- Welche Entwicklungen sind für den Raumgeometrieunterricht sinnvoll?
- Welche Entwicklungen sind bei den gegebenen Rahmenbedingungen realistisch?

Diese Fragen führen nach unserer Auffassung auf vier Kriterien, die im Folgenden für eine Beurteilung aktueller Entwicklungen zu Grunde gelegt werden sollen:

1. Wird die Arbeit mit räumlichen Objekten intuitiver?

Die Bedienung von neuen Geräten und Programmen soll hier als *intuitiver* bezeichnet werden, wenn sie den natürlichen Verhaltens- und Wahrnehmungsgewohnheiten besser angepasst ist als bisher gängige Produkte.

2. Ist die ökonomische Verfügbarkeit in den nächsten 10 Jahren realistisch?

Mit *ökonomischer Verfügbarkeit* ist hier einerseits gemeint, dass der Nutzen, den die Realisierung einer neuartigen Schnittstelle mit sich bringt, den finanziellen Aufwand im Rahmen eines Schulbudgets rechtfertigen muss. Andererseits sollte es für die Schüler auch zu Hause ohne größere finanzielle Aufwendungen möglich sein, die Vorteile einer neuen Schnittstelle zu nutzen.

3. Ist eine reibungslose Einbettung in den Unterricht möglich?

Um die Verbreitung einer neuen Soft- oder Hardwarekomponente zu erreichen, darf deren Nutzung im Unterricht nicht mit einem größeren Aufwand verbunden sein. Im Softwarebereich muss sich die Einarbeitungszeit für den Lehrer und vor allem für die Schüler in engen Grenzen halten, während im Hardwarebereich größere Aufbauten oder gar die Notwendigkeit bestimmter Räumlichkeiten nicht akzeptabel wären.

Etwas weiter gefasst bezieht sich diese Frage wiederum auch auf die häuslichen Einsatzmöglichkeiten, z. B. im Rahmen der Hausaufgaben oder der Unterrichtsvorbereitung.

4. Steht zu erwarten, dass die neue Schnittstelle von Lehrern und Schülern akzeptiert wird?

Der Umgang mit neuen Geräten oder Anwendungen kann aus verschiedenen Gründen mit geringer Akzeptanz behaftet sein. So geht beispielsweise das Aufsetzen einer Laborbrille im experimentellen Chemieunterricht oder das Sprechen mit Headset in einem Sprachlabor mit Hemmungen seitens der Schüler einher.

Ein ganz anderer Aspekt sind in diesem Zusammenhang Gesundheitsbedenken oder real auftretende Beschwerden wie die cybersickness, die z. B. bei der Benutzung von 3D-Brillen zum Eintauchen in virtuelle bewegte Welten auftreten kann (s. u.).

Eine schulpolitische Prognose

Bevor auf der Grundlage dieser Kriterien eine Prognose zur Entwicklung der Mensch-Computer-Schnittstelle im Bereich der 3D-Technologien gewagt werden kann, ist es notwendig, eine Vorhersage über die Bedingungen zu treffen, in deren Rahmen sich die technischen Entwicklungen vollziehen werden. Hierzu ist es hilfreich, die Entwicklung des „normalen“ Schulunterrichts in den letzten Jahren, Jahrzehnten oder gar Jahrhunderten zu betrachten. Dabei fällt auf, dass das System "Schulunterricht" schon sehr lange recht ähnlich ist: eine Gruppe von Lernenden befindet sich zusammen mit einem "Lehrer" in einem Raum. Die Lernenden haben einen mehr oder weniger festen Arbeitsplatz und arbeiten dort allein oder in der Gruppe. Die Lehrperson organisiert und moderiert das Unterrichtsgeschehen. Natürlich ist diese Perspektive sehr pauschal; dennoch kann man daraus eine Erwartung für die Zukunft formulieren: in den kommenden zehn Jahren wird sich an dieser Situation nichts Grundlegendes ändern. Auch 2020 wird sich im normalen Unterricht eine Gruppe von etwa 20 bis 35 Schülerinnen und Schülern zusammen mit einer Lehrkraft in einem Raum befinden. Es wird Tische und Stühle geben, ggf. Strom und Internet an jedem Platz. Revolutionäre Neuerungen sind – aus unserer Sicht – hier aber nicht zu erwarten.

Erfahrungsgemäß dringen technologische Neuerungen nur sehr langsam in den regulären Unterricht durch. Ein Beispiel hierfür ist der immer noch geringe Verbreitungsgrad von graphischen Taschenrechnern bzw. CAS-Handheld-Geräten. Wird eine neue Technologie als didaktisch gut und sinnvoll erkannt – was alleine schon ein langer Prozess ist – müssen erst Lehrpläne, Schulbücher und die Lehramtsaus- und -weiterbildung entsprechend angepasst werden. Nicht zuletzt spielt für die Ausgestaltung des Unterrichts auch die finanzielle Ausstattung der Schulen, die aus heutiger Sicht keine größeren Umwälzungen erlaubt, eine bedeutende Rolle. Auch in diesen Punkten sind innerhalb der nächsten zehn Jahre keine großen Veränderungen zu erwarten.

Auf Basis dieser Überlegungen wagen wir zwei Prognosen:

Prognose I: „Auch 2020 werden rund 30 Schülerinnen und Schüler zusammen in einem Raum sein; es wird Stühle, Tische geben. Ggf. Strom, Internet an jedem Platz.“

Prognose II: „Die äußeren Vorgaben (Finanznot der Schulen, Trägheit der Lehrpläne) sind im Jahr 2020 ähnlich wie heute.“

Eine technische Prognose

Will man eine Vermutung über die technische Ausstattung des Geometrieunterrichts im Jahr 2020 wagen, so ist es sicherlich sinnvoll, dies auf der Basis der schulpolitischen Prognose zu versuchen. Demnach wird nur solche Technologie einen (ersten) Weg in die Unterrichtspraxis gefunden haben, die heute bereits (ggf.: außerhalb des Unterrichts) existiert, bezahlbar und auch anwendbar ist. Wir zeichnen daher fünf Wege in die Zukunft, von denen wir glauben, dass sie für den Unterricht im Jahr 2020 relevant sein könnten.

WEG I: Die 6-D Maus

Heute ergänzt die Computermaus am PC selbstverständlich die Eingabe von Steuerbefehlen durch eine Tastatur. Die Bewegung der Maus auf dem Tisch wird im Rechner als Bewegung des Mauszeigers auf dem Bildschirm umgesetzt; es handelt sich also um einen x-y-Controller. Für das Konstruieren im Zweidimensionalen ist das ausreichend, da jeder Punkt auf dem Zeichenblatt mit der Maus erreicht werden kann. 2D-DGS werden heute daher in der Regel durch das Setzen von Punkten in der Ebene bedient.

Um im virtuellen dreidimensionalen Raum navigieren und schließlich auch konstruieren zu können, sind zusätzliche Steuerbefehle oder -konzepte erforderlich. So wird in professioneller 3D-Modellierungssoftware (etwa: 3D Studio Max, Maya) eine Dreitafelansicht zum Konstruieren herangezogen. Jede der Ansichten ist hier eine 2D-Projektion der Raumszene, deshalb kann hier mit der Maus wie im Zweidimensionalen operiert werden.

Bei 3D-Software für den Mathematikunterricht bewegt sich der Mauscursor ebenfalls in zweidimensionalen Teilräumen, nämlich beispielsweise auf einem virtuellen Zeichenblatt (Cabri 3D) oder aber in der Bildebene (Archimedes Geo3D). Durch Rotieren und Verschieben der Szene können

die Punkte im Raum mit dem Cursor erreicht werden. Hierfür sind jedoch weitere Steuereingaben per Tastatur oder Maustastenkombinationen nötig – eine Bedienung, die wenig intuitiv ist, da der Nutzer in jedem Fall allein für das Navigieren im Raum Zusatzbefehle kennen muss.

Auf der Suche nach neuen Bedienkonzepten steht man vor Problemen, die sich in ähnlicher Weise bei der Entwicklung der Computermaus in den frühen achtziger Jahren stellten. Damals lag jedoch der Controller bereits vor, ohne dass es flächendeckend Anwendungen (z. B. graphische Bedienoberflächen) dafür gab. Heute hingegen stellen viele Anwendungen bereits 3D-Technik zur Verfügung in der Hoffnung, dass ein geeignetes Eingabegerät in naher Zukunft entwickelt werden kann.

Eines dieser Geräte ist möglicherweise die sog. "6D-Maus". Dieser Controller lässt sich in x- und y-Richtung schieben und zusätzlich in z-Richtung drücken bzw. ziehen. Weitere drei Freiheitsgrade kommen durch Drehen und Kippen des Steuerknüppels hinzu. Die Technologie wurde in den 1970er Jahren am DLR (Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt) unter dem Namen „DLR SpaceMouse“ entwickelt und ist heute für weniger als 100 Euro im Handel verfügbar; dies allein rechtfertigt natürlich noch nicht die Auflistung des Gerätes im hier aufgeführten Zusammenhang.



Abbildung 2: Die 6D-Maus „SpaceNavigator“ der Fa. 3D Connexion

Interessant ist aus didaktischer Sicht aber eine Studie, die vom Hersteller des Gerätes angeführt wird. Darin wurden 190 CAD-Konstrukteure zum Umgang mit einer 6D-Maus befragt. Ein Ergebnis war, dass rund 50% der Befragten angaben, Fehler in ihren Konstruktionen durch die neuartige Maus deutlich besser erkennen zu können. Genauer heißt es dazu: *"Nach*

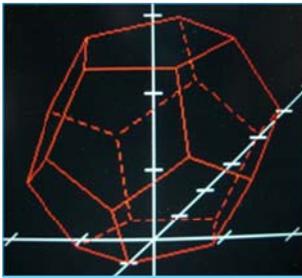
Meinung der befragten Anwender waren sie mit einer 6D-Maus in der Lage, ihre Konstruktionen und Designs viel einfacher zu drehen, zu prüfen und zu untersuchen" (Technology Assessment Group, Mai 2008). Natürlich sind die Ergebnisse einer solchen Studie nicht ohne weiteres auf die Situation im Unterricht übertragbar: Hier hat man CAD-Experten, dort in der Regel DRGS-Einsteiger. Auch ist ein derart spezielles Zusatzgerät schon allein aus ökonomischen Gründen für den flächendeckenden Einsatz in Schulen wohl kaum geeignet. Der Aspekt, dass allein eine verbesserte Navigation in DRGS die Fehlerhäufigkeit bei räumlichen Konstruktionen verringert, scheint uns allerdings durchaus relevant für die Zukunft von Raumgeometriesoftware im Unterricht zu sein. Alternative, „intuitivere“ Navigationsmöglichkeiten könnten demnach einen Zugewinn für das Arbeiten und Konstruieren im Raum bieten.

WEG II: Verbesserte 3D-Darstellung

Die Darstellung dreidimensionaler Objekte oder Szenen auf zweidimensionalen Bildflächen (Monitor, Kinoleinwand,...) hat sich in den vergangenen Jahren rasant entwickelt. Kaum ein Kinofilm kommt heute ohne computer-generierte Raumszenen aus, Zeichentrickfilme wurden durch Animationsfilme abgelöst. Aufwändige Technik ermöglicht für diese Zwecke inzwischen fotorealistische 3D-Darstellung auf der Leinwand.

Was im Kino vom Band kommt, kann man – mit kleineren Abstrichen – auch am PC in Echtzeit erleben: In Computerspielen werden dank geschickter Programmierung und immensen Leistungen heutiger Grafikkarten 3D-Welten generiert, die vom Kinofilm nur wenige Details entfernt sind. Dabei ist die Geschichte solcher Spiele noch gar nicht so alt: sie haben sich seit den 1980er Jahren aus einfachsten Strichszenen entwickelt.

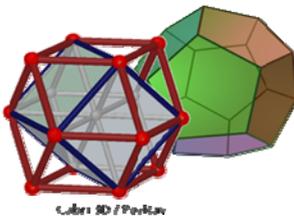
Parallel dazu hat sich auch das Erscheinungsbild von Geometriesoftware, insbesondere im Bereich der Raumgeometriesoftware, in ähnlicher Weise verändert. Erste Programme zeigten einfache, stark verpixelte Schrägbilder von Kantenmodellen geometrischer Körper. Heute sind Farbtiefe und Auflösung deutlich höher, die 3D-Darstellung ist "realistischer" geworden.



3D



Mystery House (1980)



CRYENGINE 3

Abbildung 3: Entwicklung perspektivischer Darstellungen bei RGS und Computerspielen

Doch was heißt „realistisch“ im Kontext virtueller 3D-Modelle? Was macht den Tiefeneffekt bei der Abbildung einer dreidimensionalen Raumszene aus?

In der Gestaltpsychologie werden dabei vor allem sechs monokulare Effekte unterschieden, mit deren Hilfe die räumliche Ausdehnung oder Anordnung von Körpern auf einer zweidimensionalen Bildebene dargestellt werden kann (vgl. Goldstein, 2008):

- Verdeckte Objekte (etwa verdeckte Kanten bei Gittermodellen)
- perspektivische Verzerrungen (Zentralperspektive, Kavaliersperspektive,...)
- Bewegungsparallaxe (nahe Objekte bewegen sich schneller am Betrachter vorbei als weit entfernte)
- Luftperspektive (Objekte, die weit entfernt sind, wirken heller und leicht vernebelt)

- Tiefenschärfe (Objekte außerhalb der Fokusebene erscheinen unscharf)
- Lichteffekte und Schattenwurf

Im Laufe der letzten 20 bis 30 Jahre wurden nach und nach all diese Effekte in die meisten DRGS implementiert. Cabri 3D beispielsweise lässt Geraden nach "hinten" dünner werden, ein Nebeneffekt hüllt entfernt liegende Objekte oder Objektteile in einen hellen Schleier. In Archimedes Geo3D kann die Tiefenwirkung durch den Schattenwurf der Objekte verstärkt werden. 3D-Computerspiele berücksichtigen in der Darstellung zusätzlich Tiefenschärfefeffekte: Bereiche außerhalb der Fokusebene werden (leicht) unscharf dargestellt.

Bei der Darstellung dreidimensionaler Objekte oder Szenen auf der zweidimensionalen Bildebene eines Monitors hat man heute also alle zur Verfügung stehenden monokularen Effekte ausgenutzt. Es gibt schlichtweg keine weiteren Möglichkeiten, auf diese Weise räumliche Tiefenwirkung zu erzeugen. Man muss also, will man die 3D-Darstellung realistischer machen, zusätzlich binokulare Tiefeneffekte ausnutzen.

Dieser Gedanke ist nicht neu. Schon mit der Erfindung der Fotografie war man sich des Problems bewusst, dass die ebene Abbildung einer räumlichen Situation notwendigerweise mit einem Informationsverlust verbunden ist. Und so versuchte man schon früh durch stereographische Aufnahmen (Doppelaufnahmen, Stereoskope) zumindest starre 3D-Bilder mit einer echten Tiefenwirkung zu erzeugen. Im Laufe der Jahre und Jahrzehnte entwickelten sich immer neue Techniken zur Darstellung von 3D-Szenarien. Ihnen allen ist gemeinsam, dass für das rechte und das linke Auge jeweils ein eigenes zweidimensionales Bild zur Verfügung gestellt wird. Das Gehirn setzt die zwei (leicht unterschiedlichen) Einzelbilder dann zu einem räumlichen Eindruck zusammen.

Im Vorfeld der Fußball-WM 2010 eine technische Neuerung auf, die kurze Zeit vorher in der PC- und Konsolenspielerbranche (Nvidia „3D Vision“) auf den Weg gebracht worden war: die Shuttertechnik. Dabei werden die Bilder für rechtes und linkes Auge in schneller Abfolge hintereinander gezeigt und eine synchronisierte Brille blockiert für jedes Auge jeweils eines der Bilder. Damit bewegte Bilder mit dieser Technik ruckel- und damit ermüdungsfrei gezeigt werden können, muss die Brille jedes Auge mindestens 60 Mal pro Sekunde verschließen. Während 3D-fähige TV-Geräte gerade erst auf den

Markt kommen und daher noch sehr teuer sind, unterscheiden sich 3D-LCD-Monitore für den PC preislich nicht von herkömmlichen 2D-Geräten.

Schulrelevante Software wurde zum Teil bereits an die neuen Darstellungsmöglichkeiten angepasst. So ist z. B. im 3D-Softwarepaket "CyberClassroom" der Firma Vinsenso auch ein Mathematik-Modul enthalten. Grundlage der Darstellung ist dabei die Shuttertechnik in Verbindung mit einem 3D-Fernseher. Problematisch an dem Programm – das noch in den Kinderschuhen steckt – ist allerdings die Bedienung und Menüführung, die sich noch zu stark an der üblichen 2D-Darstellung orientiert. Auch die Geometrie-Software „Archimedes Geo3D“ ist für die Unterstützung der Shuttertechnik vorbereitet.

WEG III: Gestensteuerung

Grafiktablets und Tablet-PCs bieten seit einiger Zeit die Möglichkeit, einen Computer alternativ zur Maus mit einem Stift bedienen zu können. Da diese Bedienung an den alltäglichen Umgang mit Schreibgeräten angelehnt ist, lassen sich ebendiese Alltagsarbeiten, wie etwa das schnelle Erstellen von Skizzen und Mindmaps, leicht auf den Computer übertragen.

Zusätzlich zur Handschrifterkennung kann der Benutzer aber auch spezielle Steuerzeichen mit dem Stift auf den Bildschirm oder das Grafiktablett „malen“, die zur Bedienung verschiedener Software dienen können. Man spricht hierbei von Gesten.



Abbildung 4: Das Grafiktablett „Bamboo Pen & Touch“ stellt dem Benutzer die Wahl zwischen einem Eingabestift und den eigenen Fingern als Eingabecontroller frei.

Im mathematischen Umfeld werden solche Gesten etwa durch die Schrift- und Formenerkennung der SMART Notebook-Software, die automatische Skizzenerkennung im DGS Cinderella oder das Sketch Tool von Algodoo unterstützt: näherungsweise aufgemalte Kreise werden im Computer in ideale Kreise verwandelt, wackelige Rechtecke in saubere Figuren, usw.

In vielen Fällen hat man den Bedienstift heute durch den menschlichen Finger als Eingabecontroller ersetzt: Berührungsempfindliche Oberflächen erlauben es, virtuelle Tastaturen (wie auch bei Handys, PDAs, ...) zu bedienen, digitale Dokumente mit einem Finger weiter zu blättern oder virtuelle Konstruktionen per Fingerzug dynamisch zu variieren, wie z. B. die Bedienung von GeoGebra am interaktiven Whiteboard.

Eine Weiterentwicklung im Bereich berührungsempfindlicher Oberflächen bilden sogenannte „Multitouchoberflächen“. Diese können die Berührung durch einen Finger von der Berührung durch mehrerer Finger unterscheiden und so entsprechend auch anders deuten. Dadurch kann die Bedienung eines Computers auch intuitiver werden, sofern die Multitouchgesten an den natürlichen Umgang mit Objekten angelehnt sind. So ist z. B. die Verwendung von Daumen und Zeigefinger als „Zirkel“ denkbar um in DGS Kreise zu erzeugen. Das Entwicklerteam um „Cinderella“ forscht derzeit an solchen „intuitiven Gesten“. Erste Testgeräte, an denen DGS mit zwei Händen (also bis zu zehn Fingern) auf einem Multitouchtisch bedient werden können, sind in den letzten Monaten von diesem Team gebaut worden.



Abbildung 5: DGS Cinderella am Multitouchtisch

Für die Zukunft ist vorstellbar, dass Gesten, die man mit beiden Händen in die Luft „schreibt“, von Kamerasystemen abgefragt werden und dann als Controller in einer Software – auch DRGS – dienen (s. u.).

WEG IV: Facetrackig, Headtracking

Wir Menschen erschließen uns den uns umgebenden Raum auch dadurch, dass wir ihn abschreiten, uns darin bewegen. Oft genügt es schon, den Kopf leicht zu neigen, sich etwas nach vorn zu beugen oder in die Hocke zu gehen, um die Ausdehnung oder Anordnung von Objekten zu erfassen. Kleine Veränderungen der Blickrichtung und des Blickwinkels reichen meist aus, um relevante Informationen über unser dreidimensionales Umfeld zu sammeln. Entgegen dieser Alltagserfahrung ist die Darstellung dreidimensionaler Objekte am Bildschirm von der Blickrichtung des Betrachters unabhängig.

Es wäre im Hinblick auf die bessere Bedienbarkeit solcher Programme wünschenswert, wenn sich das Bild wie gewohnt an die Blickrichtung und den Blickwinkel des Betrachters anpassen würde. Technisch müsste hierfür die Position der Augen bestimmt und verfolgt werden. Die entsprechende Änderung der virtuellen Raumszene wird dann in Echtzeit vom Computer errechnet und am Bildschirm dargestellt (Eyetracking).

Die Firma Nintendo hat mit der Spielkonsole "Wii" einen Controller auf den Markt gebracht, der zur Positionsbestimmung des Spielers (oder besser: seiner Hand und ihrer Bewegungen) dient. Der Controller, der in der Hand gehalten wird, kommuniziert dabei per Infrarotübertragung mit einer Sensorenleiste und bestimmt (unter anderem) aus der Lage von IR-LEDs in der Leiste seine Position im Raum. Aus diesem Controller lässt sich mit etwas handwerklichem Geschick und der nötigen Software (nach einer Idee von John Chung Lee) leicht ein entsprechendes Positionsbestimmungssystem zur Softwaresteuerung zusammenbasteln. Hierzu wird die Sensorenleiste z. B. auf einem Brillengestell befestigt und mit dem Wii-Controller abgefragt, der sich direkt über dem Bildschirm befindet.

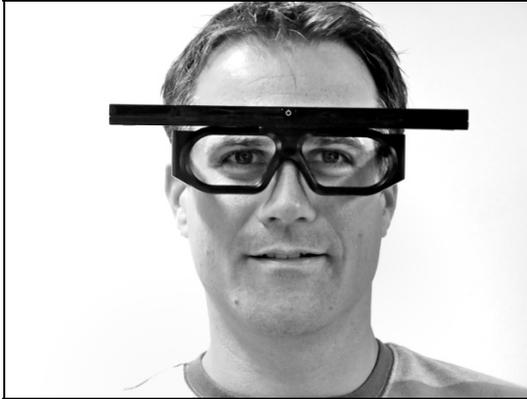


Abbildung 6: Aus dem Controller der Spielkonsole Nintendo Wii und der zugehörigen Sensorenleiste lässt sich ein Headtrackingssystem aufbauen. Hier: Sensorenleiste mit Brille als Haltegestell

Eleganter sind Lösungen, die ohne zusätzliche Positionsmarker am Kopf auskommen und auf Hardware zurückgreifen, die zur Standardausrüstung heutiger PCs oder Laptops gehört. Hierfür kann etwa die interne Webcam eines Laptops (oder aber eine externe Kamera auf oder unter dem Bildschirm) in Verbindung mit einer Gesichtserkennungssoftware dienen: aus der Position der Augen des Betrachters im Kamerabild werden alle nötigen Größen zur Bestimmung seiner Blickrichtung und seines Blickwinkels errechnet. Erste Applets hierzu findet man derzeit im Internet z. B. unter <http://www.boffswana.com/> als Flashanwendungen.



Abbildung 7: Wie gut und schnell Facetrackingalgorithmen heute bereits funktionieren, zeigt Funsoftware für Webcams in Echtzeit.

WEG V: AUGMENTED REALITY

Im Alltag wird das Operieren mit Gegenständen (z. B. das Drehen eines Holzwürfels) in der Regel am einfachsten durch Anfassen des Objektes verwirklicht. Und genau das macht die Interaktion mit virtuellen Objekten auch so schwer: man kann sie nicht berühren.

Zwar wurden aufwändige Force Feedback-Geräte entwickelt, die taktile und haptische Reize von virtuellen Objekten auf die Haut des Benutzers übertragen sollen (z. B. „Datenhandschuhe“). Diese Geräte sind aber weit davon entfernt, für die Unterrichtsrealität bezahlbar und anwendbar zu sein.

Ein an sich simpler Trick könnte – aus unserer Sicht – das enaktive Interagieren mit virtuellen Objekten zumindest einen Schritt näher an die reale Erfahrung rücken: Man macht einen realen Gegenstand zur Basis für ein Koordinatensystem der virtuellen, dreidimensionalen Welt. Dreht man nun den Gegenstand in der Realität, so dreht sich auch der virtuelle Raum und mit ihm die virtuelle Szene. Aufgrund der Vermengung realer und virtueller Objekte spricht man dann von „mixed reality“ oder auch „augmented reality“ (erweiterte Realität).

Die technische Umsetzung ist heute relativ einfach möglich: eine Kamera (bspw. eine Webcam) wird mit einem Computer verbunden und vor die Kamera als reales Objekt ein sog. „Marker“ gehalten. Es kann sich dabei um eine einfache Pappkartonkarte mit einem gut lesbaren, nicht drehsymmetrischen Muster handeln. Eine Software errechnet aus der Verzerrung des Musters im Kamerabild die Lage des Markers im Raum und setzt auf das Kärtchen ein Koordinatensystem so auf, dass eine Achse des Systems senkrecht auf der Oberfläche des Kärtchens steht. Wird nun ein virtuelles Objekt, etwa ein Würfel, in diesem Koordinatensystem dargestellt, so überträgt sich jede Bewegung des Kärtchens, jedes Kippen und Drehen, direkt in eine entsprechende Bewegung des virtuellen Würfels. Am Computerbildschirm wird schließlich das Kamerabild in Echtzeit mit dem perspektivisch korrekt gezeichneten virtuellen Objekt überlagert und ausgegeben (vgl. Abbildung 8).

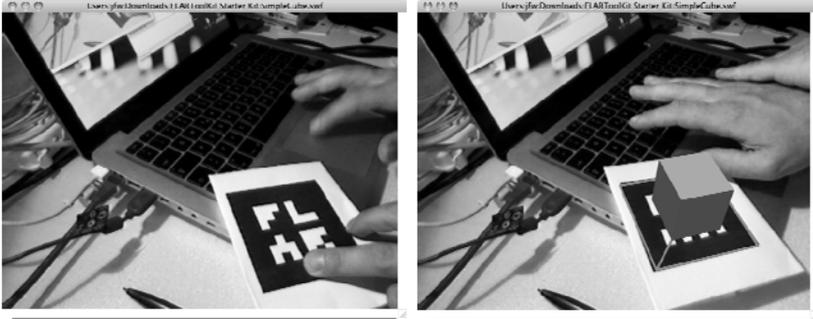


Abbildung 8: Über einen Marker (schwarz-weißes Muster) werden virtuelle Objekte, hier ein Würfel, in reale Szenen hinein gerechnet.

In den Raumgeometrieunterricht der nahen Zukunft wird diese Technik leicht einzubinden sein, da man schon heute nur Standardhardware dafür benötigt, es fehlen bislang aber noch die notwendigen Schnittstellen mit der gängigen Raumgeometriesoftware.

Zusammenfassende technische Prognose

Die Navigation im virtuellen dreidimensionalen Raum mit Hilfe der vorgestellten 6D-Maus erfordert einerseits die Anschaffung eines Zusatzgeräts, das auf absehbare Zeit nicht zur Massenware und damit finanziell für Schüler und Schulen erschwinglich werden wird. Zusätzlich ist der Umgang mit diesem Gerät erst noch zu erlernen. Dies widerspricht ebenso der Forderung nach intuitiver Bedienbarkeit wie die Tatsache, dass dieses Zusatzgerät zwar eine komfortablere Navigation im virtuellen Raum ermöglicht, der Benutzer die Raumszene aber immer noch als außenstehender Beobachter erlebt. Eine Anpassung der Raumszene auf Veränderungen der Betrachterposition oder des Blickwinkels ist mit diesem Gerät nicht möglich.

Auch in Schulen wird in regelmäßigen Abständen die (Computer-)Ausstattung erneuert. Dies gilt insbesondere für Computermonitore. Wie sich auf dem Markt bereits abzeichnet, werden neue Computermonitore auch im niedrigen Preissegment spätestens in zwei Jahren standardmäßig 3D-fähig sein. Eine Verbesserung der 3D-Darstellung etwa durch eine geeignete Shuttertechnik ist für den Einsatz in der Schule jedoch nur dann interessant, wenn dafür neben 3D-fähigen Computermonitoren keine weiteren Zusatzgeräte erforderlich sind. Für Shutterbrillen beispielsweise steht einerseits

nicht zu erwarten, dass es sich hierbei in den nächsten Jahren um ein erschwingliches Massenprodukt handeln wird, mit dem an Schulen jeder Arbeitsplatz ausgestattet werden kann. Auf der anderen Seite ist durch die Inbetriebnahme eines Zusatzgeräts, das vielleicht gar nur in eigens dafür vorgesehenen Räumlichkeiten zur Verfügung steht, immer der Unterrichtsfluss gestört. Für Shutterbrillen bestehen außerdem berechtigte gesundheitliche Bedenken, so wird bei der dauerhaften Benutzung derartiger Brillen vor Augenreizungen, Kopfschmerzen und Übelkeit gewarnt. Ob die Benutzung einer Brille für die Verwirklichung einer virtuellen 3D-Darstellung bei Schülern Hemmungen hervorruft, bleibt abzuwarten.

Gestensteuerungen im Single-Touch oder im Multi-Touch-Modus sind für Anwendungen etwa auf Tablet-PCs und interaktive Whiteboards seit einiger Zeit bei der Entwicklung von Mathematiksoftware Gegenstand intensiver Forschung. Im Mittelpunkt steht hier die Bedienung von Softwareprodukten durch Gesten als Alternative zu klassischen Eingabemenüs. Da für 3D-Anwendungen insbesondere diese Mensch-Computer-Schnittstelle neu gedacht werden muss, werden diese Entwicklungen auch für Eingaben im 3D-Modus von großem Interesse sein. Gelingt hier ein Durchbruch, so wird dies auf absehbare Zeit auch für die Anwendung in der Schule interessant, da die Lösungen hier auf der Softwareebene gefunden werden müssen und somit keine Zusatzgeräte erforderlich sein werden.

Besonders für die intuitive Bewegung im dreidimensionalen virtuellen Raum sind Facetracking- bzw. Headtracking-Systeme interessant. Sie ermöglichen eine Anpassung der Raumszene bei Bewegungen oder Blickwinkelveränderungen des Beobachters. Dies entspricht der täglichen Erfahrung im uns umgebenden Raum – das Erlernen einer Navigation in der Raumszene kann deshalb entfallen. Die neuesten Entwicklungen zeigen, dass in absehbarer Zukunft derartige Trackingsysteme ohne Zusatzgeräte auskommen werden. Eine reibungslose Einbindung in Unterrichtsabläufe und die ökonomische Realisierbarkeit sind aus unserer Sicht für 2020 denkbar.

Augmented Reality bietet die Möglichkeit, ohne Zusatzgeräte virtuelle Objekte in die reale Welt zu projizieren. Mit diesen virtuellen Objekten kann dann annähernd wie mit realen Objekten hantiert werden. Für den Raumgeometrieunterricht könnte dies bedeuten, dass in absehbarer Zukunft Softwareumgebungen entwickelt werden, die das Operieren mit virtuellen geometrischen Grundkörpern im Sinne einer Grunderfahrung ermöglichen.

Die letzten Einschätzungen werden nochmals in der folgenden Übersicht dargestellt:

	6D-Maus	Verbesserte 3D-Darstellung	Gestensteuerung	Facetracking / Headtracking	Augmented Reality
Intuitives Arbeiten	+/- Vorerfahrung	+	+	++	++
Ökonomische Verfügbarkeit	-	+	+	++	++
Einbettung in den Unterricht	-	O	+	+	+
Akzeptanz	O	- Brillen	+	+	++

Tabelle 1: Bewertung technischer Entwicklungen auf der Grundlage des Kriterienkatalogs

Hält man sich nun vor Augen, dass alle diese Entwicklungen gleichzeitig fortschreiten, dann erscheint eine Verschmelzung der verschiedenen Technologien am realistischsten. Sind Trackingsysteme so weit ausgereift, dass sie auch Gesten im Raum interpretieren können, dann rückt die Steuerung eines Raumgeometrieprogramms durch geeignete Gesten in greifbare Nähe – Geraden können mit den Händen „aufgezogen“, Kreise und Ebenen können „geformt“ werden. Lassen sich diese Objekte und Gesten wiederum als Objekte in eine Augmented Reality einbetten, so werden auch Bewegungen, Verformungen oder Konstruktionen denkbar; erste Ansätze hierzu gibt es mit „Construct3D“ an der TU Wien (vgl. H. Kaufmann, in diesem Heft). Gelingt es zusätzlich diese virtuelle Welt ohne Zusatzgeräte wie Shutterbrillen oder Trackingballs so dreidimensional darzustellen, dass die Veränderung der Raumszene als Reaktion auf die Aktionen des Benutzers erfolgt, kann man von einer Umgebung sprechen, in der auch Konzepte der Raumgeometrie als Grunderfahrung ermöglicht werden, die über bloßes Rechnen hinaus gehen – eine Verschmelzung von Ideen und Arbeitsmethoden der ebenen Geometrie mit denen der Raumgeometrie wird greifbar.



Abbildung 9: Prognose für die Entwicklung verschiedener 3D-Technologien

Auch die zentralen Aussagen unserer technischen Prognose wollen wir abschließend in Form zweier Thesen festhalten:

Prognose III: 2020 werden in Klassenzimmern 3D-Monitore, 3D-Beamer – oder allgemeiner: 3D-Anzeigeräte – vorhanden sein.

Prognose IV: Die Zukunft der Eingabe und die Optimierung der Ausgabe liegt in einer Weiterentwicklung und Zusammenführung geeigneter Trackingsysteme.

Ergänzungen

- Die Firma Fujifilm hat mittlerweile mit der Fotokamera "Finepix REAL 3D" ein Gerät auf den Markt gebracht, das durch zwei Linsensysteme und Bildverarbeitungskanäle in der Lage ist, stereoskopische Bilder aufzunehmen. Die Bilder können bereits auf einem eingebauten 3,5 Zoll 3D-Spezialdisplay in ihrer Tiefenwirkung betrachtet werden – und das ohne Brille! (<http://www.finepix.de/>)
- Die Firma Microsoft hat ihre Spielkonsole XBOX 360 inzwischen mit dem optionalen Sensor "KINECT" ausgestattet, einem System das das Auslesen der Körperposition und -haltung der Mitspieler ohne weitere Zusatzgeräte ermöglicht. Die virtuellen Charaktere im Computerspiel können nun also durch die entsprechenden Bewegungen des echten Spielers gesteuert werden. (<http://www.xbox.com/de-DE/kinect>)

- *Die Firma Microsoft hat sich in diesen Tagen den light-induced shape-memory polymer display screen patentieren lassen, einen Bildschirm, der auch Oberflächenstrukturen simulieren kann. (<http://appft.uspto.gov/>, Patentnummer: 20100295820)*
- *Mit „Diminished Reality“ wird das Prinzip der Augmented Reality umgekehrt. Die Technische Universität Ilmenau hat ein System entwickelt, mit dem einzelne reale Objekte in Echtzeit aus Live-Kameraaufnahmen entfernt werden können. (<http://www.tu-ilmenau.de/>)*
- *QR-Codes sind zweidimensionale schwarz-weiße Pixelmuster, die insbesondere zur Visualisierung von Webadressen dienen. Sie werden per Handy oder Webcam mit einem QR-Reader ausgelesen und führen dann auf den entsprechenden Link. Denkbar wäre hier eine gleichzeitige Verwendung der Codes als Marker für webbasierte Augmented Reality-Applikationen.
Software zum Erzeugen von QR-Codes: <http://goqr.me/>
QR-Reader: <http://www.mobile-barcodes.com/qr-code-software/>*
- *Die Verknüpfung von virtuellen Raumszenen mit selbsterstellten Markerkärtchen kann z. B. mit der Software buildAR hergestellt werden. Mit der Open-Source-Software blender können Raumszenen im erforderlichen Dateiformat generiert werden. (<http://buildar.com/>, <http://www.blender.org>)*

Literatur

- Becker, G. (1992): Integration von ebener und räumlicher Geometrie durch Bildung von Analogien. In: *Mathematica Didactica* 15(1), S. 5-14.
- Euklid (2005): *Die Elemente – Bücher I-XIII*. Übersetzt von Clemens Thaer. Harry Deutsch: Frankfurt a. M.
- Goldstein, E. B. (2008): *Wahrnehmungspsychologie – Der Grundkurs*. Deutsche Ausgabe von Irtel, H. (Hrsg.). Spektrum Akademischer Verlag: Berlin, Heidelberg (7. Aufl.).
- Klein, F. (1909): *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus II*. Teubner: Leipzig.
- Kultusministerkonferenz (KMK) (2004): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. Wolters Kluwer: München.
- Lazzeri, G.; Bassani, A.; Treutlein, P. (1911): *Elemente der Geometrie*. Teubner: Leipzig.
- Maier, P. H. (1999): *Räumliches Vorstellungsvermögen*. Auer: Donauwörth.
- Schumann, H. (2007): *Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum*. Franzbecker: Hildesheim.

- Thurstone, L. L. (1938): Primary mental abilities. The University of Chicago Press: Chicago, Illinois.
- Tönnis, M. (2010): Augmented Reality – Einblicke in die Erweiterte Realität. Berlin; Heidelberg: Springer.
- Weigand, H.-G. (2009): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Spektrum Akademischer Verlag: Heidelberg.

Die Suche nach der angemessenen Darbietung räumlicher Strukturen – Analyse von Präsentationsformen und Beschreibungsmodell der Körperkomplexität

Jürgen Steinwandel, Matthias Ludwig

Zusammenfassung. In diesem Artikel wird der aktuelle Stand einer wissenschaftlichen Arbeit vorgestellt, in der untersucht wird, welche Auswirkungen drei unterschiedliche Arbeitsumgebungen (Bildumgebung, interaktive Computersimulation bzw. Pappmodell) auf das Erkennen und Bearbeiten räumlicher Strukturen haben. Hierzu zeigt die derzeitige Literatur kein einheitliches Bild. Diese Uneinheitlichkeit könnte mehrere Ursachen haben, z.B. die raumgeometrischen bzw. arithmetischen Fähigkeiten der Probanden oder die Komplexität der raumgeometrischen Aufgabe. Getestet wurde die Arbeitsumgebung an Haupt-, Realschulen und Gymnasien der Klassenstufen 5 bis 9 in insgesamt 12 Klassen. Es kristallisiert sich heraus, dass die Arbeitsumgebung „Modell“ den anderen beiden Präsentationsformen (Bild bzw. interaktive Computersimulation) in weiten Teilen überlegen ist. Des Weiteren wird untersucht, inwiefern es möglich ist, den Komplexitätsgrad eines regulären bzw. halbregulären Körpers zu quantifizieren. Dies ist mit Abstrichen gelungen.

Einführung

Im Schulunterricht werden zur Erfassung räumlicher Strukturen von Polyedern (z.B. Anzahl ihrer Flächen, Art ihrer Flächen, Anzahl ihrer Kanten, Symmetrien, usw.) Realmodelle, Bilder sowie Computeranimationen (beobachtend bzw. interaktiv) eingesetzt. Bisherige Untersuchungen konzentrieren sich in diesem Kontext vorwiegend auf den Verdrehwinkel zweier zu vergleichender Abbildungen und analysieren hierbei z.B. die Bearbeitungsgeschwindigkeit oder die Fehlerhäufigkeit (Glück 2005). Dabei werden weitere Variablen wie z.B. das Alter oder das Geschlecht der Teilnehmer in den Blickwinkel genommen. Weitere Arbeiten analysieren die Wirkungsweise von Computerumgebungen und deren Trainingseffekte (Ahmad 2009; Hellmich et.al 2002; Souvignier 1999/2000). Die diesbezüglichen Befunde sind teilweise uneinheitlich bzw. widersprüchlich.

Theoretische Grundlagen

Von verschiedenen Autoren (z.B. Franke 2009; Senftleben 1999) wird die große Bedeutung der räumlichen Fähigkeiten als Faktor der menschlichen Intelligenz und als menschliche Qualifikation mit lebenspraktischer Bedeutung stark betont. Dabei scheint es jedoch sehr schwierig zu sein, dieses

komplexe Konstrukt zu definieren. Es werden Begriffe wie räumliche Fähigkeiten, Raumvorstellung, Raumorientierung, Raumwahrnehmung und räumliches Denken, um nur einige zu nennen, verwendet. J. Glück nennt als mögliche Ursache für die uneinheitliche Begriffsbestimmung und Begriffsverwendung die hohe Komplexität des zugrunde liegenden Sachverhalts. Glück selbst spricht von *Raumvorstellungsleistungen* und meint damit „den Umgang mit visueller, nichtsprachlicher Information [...], die im Gedächtnis gespeichert, meist in irgendeiner Form transformiert bzw. manipuliert und/ oder wieder abgerufen werden muss.“ Franke hingegen verwendet den Begriff *räumliche Fähigkeiten* als Oberbegriff und unterscheidet dann zwischen visueller Wahrnehmung und räumlichem Vorstellungsvermögen (vgl. Glück et al. 2005; Franke 2007).

Linn und Petersen (1985, 1986) identifizieren im Rahmen einer Meta-Analyse drei grundlegende Faktoren:

- *Mental Rotation* ist die Fähigkeit, zwei- oder dreidimensionale Figuren in Gedanken rotieren zu können.
- *Spatial Visualization* umfasst die Fähigkeit, einen Prozess zu analysieren und räumliche Beziehungen zu erfassen.
- *Spatial Perception* beinhaltet das Erkennen der spezifischen Ausrichtung von räumlichen Gegebenheiten.

Diese drei Faktoren können gegenseitig nicht gänzlich isoliert betrachtet werden, da entsprechende Abhängigkeiten bzw. Einflüsse bestehen. So ist z.B. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind Fähigkeiten im Bereich *Mental Rotation*, jedoch in den beiden anderen Bereichen keinerlei Kompetenzen besitzt, kaum gegeben. In den letzten Jahren konzentrierten sich zahlreiche Arbeiten unter verschiedensten Beobachtungsschwerpunkten auf die Analyse des Faktors *Mental Rotation*; z.B. wurde die Trainierbarkeit dieser Kompetenz untersucht (vgl. Baenninger/Newcombe 1989; Glück et al. 2005; Hellmich/Hartmann 2002; Souvignier 2000). Des Weiteren wurden Einflussfaktoren bzw. Dispositionen, wie z.B. das Geschlecht, Leistungsgruppen, Alter, Muttersprache, usw. evaluiert (vgl. Hirnstein et.al. 2009; Kruger/Krist 2009; Peters/Battista 2008). Die entsprechenden Auswertungen zeigen zwar Trends, geben aber teilweise keine eindeutigen Hinweise, die auch unter detaillierten Betrachtungen gänzlich stabil bleiben. So wurden geschlechtsspezifische Fähigkeitsvorteile seitens männlicher Probanden immer wieder in Frage gestellt, indem Analysen unter verschiedenen Filterun-

gen der unabhängigen Variablen durchgeführt wurden (vgl. Jordan et al., 2002; Newcombe et al. 1983). Andererseits sinkt die Leistungsfähigkeit von Frauen bei einem negativen Selbstkonzept, während Männer dadurch eher motiviert werden (vgl. Moe 2009).

Ein weiteres Forschungsfeld evaluiert Zusammenhänge mehrerer Faktoren. So wurde die Abhängigkeit der Bearbeitungsgeschwindigkeit bzgl. des Rotationswinkels eines verdrehten Körpers untersucht (vgl. Shepard/Metzler 1971; Glück et al. 2005; ter Horst et.al. 2010). Hier zeigte sich teilweise ein nahezu linearer Zusammenhang. Trotzdem bleiben diese Untersuchungen beschränkt auf zusammengesetzte Würfelkörper, welche im Unterricht eine untergeordnete Rolle spielen. Testungen bzgl. Körpern der Sekundarstufe I wie z.B. Würfel, Quader, Pyramiden, usw. spielen eine sehr untergeordnete Rolle. Bei der hier vorgestellten Untersuchung wird versucht, Gebilde hinsichtlich ihrer Komplexität zu beschreiben. Dazu verwenden wir ein einfaches und leicht verständliches Bestimmungsmodell und definieren die Komplexität (K) eines Körpers wie folgt:

$K = \text{Anzahl der Außenflächen} + \text{Anzahl der Kanten} + \text{Anzahl der Ecken}.$

Betrachtet man Arbeiten aus der pädagogischen Psychologie bzw. der Psychologie zum allgemeinen Thema „Lernen mit Animationen in computerbasierten Lernumgebungen“ und aus der mathematikdidaktischen Forschung zum speziellen Thema „Lernen von raumgeometrischen Inhalten“ bzw. „Training der Raumvorstellung“ mit und ohne Computer, so zeigt sich auch hier ein uneinheitliches Bild in der Wirksamkeit dieser Lernumgebungen. Lowe (2003) weist in einer Studie (Probanden: Studierende der Wetterkunde) nach, dass eine multimediale Lernumgebung nicht notwendigerweise einen positiven Einfluss auf das Lernergebnis haben muss. Er schreibt, dass in vielen Fällen Pfeile als Bewegungsrepräsentanten und Bilderserien für ausreichendes Verständnis sorgen würden. Weiter scheint es so, dass der potentiell unterstützende Effekt der Animation verloren geht, weil die Individuen weniger Kontrolle über den eigenen Lernweg haben. In einer an raumgeometrische Inhalte angelehnten Studie stellen Schwan und Riempp (2004) wiederum fest, dass Probanden das Schnüren von nautischen Knoten mit interaktiven Videos (die Probanden können selbst unterbrechen und zurückspulen) signifikant schneller lernen als mit nicht interaktiven Videos. Andererseits widerlegen bzw. relativieren andere Untersuchungen die Wirksamkeit von multimedialen Umgebungen (Reiss/Albrecht 1994; Souvignier 1999; Reiss/Hartmann 1999; Hellmich/Hartmann 2002; Cohen 2005).

Bei der Auseinandersetzung mit den aktuellen Forschungsfeldern fallen mehrere Aspekte auf, deren genauere Betrachtung sinnvoll erscheint. So stehen die meisten Forschungen in der Tradition der Psychologie und haben ihre primären Fragen kaum unmittelbar für den Unterricht gestellt. Die Beschreibungen der zu vergleichenden Rotationskörper beschränken sich im Allgemeinen auf den Rotationswinkel – eine Betrachtung weiterer Attribute wie z.B. Anzahl der Flächen, Ecken, usw. blieb bisher zumeist aus. Aussagen bzgl. der Präsentationsarten und deren Wirkung – auch im Zusammenhang mit Trainingswirkungsevaluationen – wurden bisher nicht hinreichend präzise beschrieben. Hieraus ergeben sich entsprechende Forschungsfragen.

Forschungsfragen

Die hier vorgestellte Arbeit sieht ihren Schwerpunkt im Bereich der Unterrichtsoptimierung das räumliche Vorstellungsvermögen betreffend. Hierbei soll vor allem geprüft werden, inwieweit es möglich ist, räumliche Körper hinsichtlich ihrer Komplexität zu beschreiben. Des Weiteren ist von Interesse, welche Präsentationsform für einen Lernenden ganz individuell optimal ist. Als Untersuchungskörper werden reguläre und halbrekuläre Körper gewählt. Dabei sind zwei Forschungsfragen zentral:

- Wie stark profitieren verschiedene Leistungsgruppen von den Präsentationen „Bildumgebung, interaktive Computersimulation bzw. Pappmodell“ (kurz: Bild, Computer, Modell) in Bezug auf die Bearbeitung von entsprechend spezifischen Fragestellungen (Anzahl der Ecken, Kanten, Flächen und Art der Außenflächen) ?
- Ist es möglich, die Komplexität eines Körpers aufgrund spezifischer Eigenschaften (Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten) zu beschreiben und inwieweit behält ein solches Modell seine Gültigkeit für verschiedene Leistungsgruppen ?

Untersuchungsdesign

Getestet wurden N=242 Schüler in insgesamt 12 Klassen der Klassenstufen 5 bis 9 an 5 Schulen der Schularten „Haupt-, Realschule und Gymnasium“. Zunächst wurden zwei Vortests durchgeführt: ein Arithmetiktest mit Inhalten zum Zahlverständnis und zu den Grundrechenarten (dieser Test bzw. entsprechende Auswertungen werden hier nicht thematisiert), sowie der

Bausteine-Test (BST) von Birkel/Schumann (2002). Mit Hilfe der Daten des BSTs wurden die Schülergruppen skaliert und so den Präsentationsumgebungen (Bild, Computer, Modell) des Strukturfassungstests zugewiesen, dass möglichst drei leistungsgleiche Vergleichsgruppen entstanden, wobei gleichzeitig auf das Geschlecht geachtet wurde. Bei dem anschließenden „Strukturfassungstest“ waren insgesamt 8 reguläre und halb-reguläre Körper zu bearbeiten. Der Test geschah unterrichtsbegleitend. Jeder Schüler arbeitete allein an der ihm zugewiesenen Lernumgebung.

Erste Befunde

Der Bausteinetest (BST)

Bei dem Bausteinetest von Birkel/Schumann (2002) wird vorwiegend die Fähigkeit *Mental Rotation* getestet. Die Grundstruktur aller verwendeten Körper sind zusammengesetzte Würfel, die mehr oder weniger gedreht im Raum repräsentiert werden. Dabei sollen die Probanden beurteilen, welche zwei Würfelkörper aus einer Auswahl von vieren für einen zusammengesetzten Körper benötigt werden (vgl. Abb. 1).

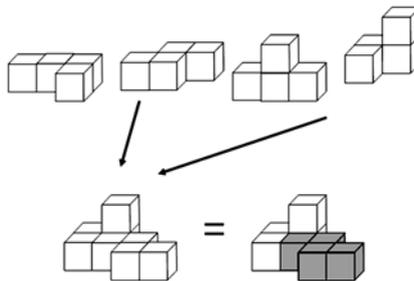


Abb. 1: Zusammengesetzte Körper des BSTs

Insgesamt waren 40 zusammengesetzte Körper in einer Zeit von 20 Minuten zu bearbeiten. Zu Beginn wurden zwei exemplarische Beispiele mit den Schülern gemeinsam gelöst.

Im Folgenden wurden aufgrund der Testergebnisse im BST drei leistungsgleiche Teilgruppen gebildet. Da die Prüfung der Gesamtdaten auf Normalverteilung negativ ausfällt, jedoch ein normalverteilt ähnlicher Verlauf vorliegt, wird vorsichtig mit einem T-Test argumentiert, der durch den nichtparametrischen U-Test (Mann-Whitney) komplettiert wird (vgl. Abb. 2 und Tabelle 1).

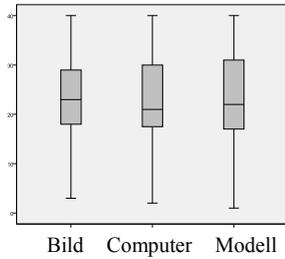


Abb. 2: Bausteinetest-Boxplot

ONEWAY deskriptive Statistiken

Bausteine-Test				
	Bild	Computer	Modell	Gesamt
N	123	114	119	356
Mittelwert	24,81	24,49	24,34	24,55
Standardabweichung	8,034	7,861	8,404	8,085
Standardfehler	,724	,736	,770	,429
95%-Konfidenzintervall für den Mittelwert				
Untergrenze	23,38	23,03	22,81	23,71
Obergrenze	26,25	25,95	25,86	25,39
Minimum	3	7	1	1
Maximum	40	40	40	40

Tabelle 1: deskriptive Statistiken (Strukturerafassungstest)

Der durchgeführte T-Test unabhängiger Variablen zeigt folgende Mittelwertszusammenhänge (Signifikanz, 2-seitig):

Bild-Computer = ,756; Bild-Modell = ,652; Computer-Modell = ,885

Mann-Whitney-Test (asymptotische Signifikanz, 2-seitig):

Bild-Computer = ,716; Bild-Modell = ,620; Computer-Modell = ,974

Sowohl der T-Test, als auch der U-Test zeigen eine hinreichende Vergleichbarkeit der gebildeten Untergruppen, so dass im Folgenden entsprechende Vergleiche zulässig sind.

Der Strukturerafassungstest (STR)

Der Strukturerafassungstest von Ludwig/Steinwandel behandelt insgesamt 8 reguläre und halbreuläre Körper (K1 bis K8) (vgl. Abb. 3). Es waren jeweils 6 Fragen aus zwei Niveaus zu beantworten. Fragen des Niveaus A (Fragen nach der Art der Außenflächen und Anzahl der Kanten/Flächen, die einen Eckpunkt berühren) sind ohne die Kompetenzen *Mental Rotation* und *Spatial Visualization* beantwortbar, während für die Items des Niveaus B (Fragen nach der Anzahl der Flächen, Kanten und Eckpunkten) diese notwendig waren. Exemplarisch wurden alle notwendigen Begrifflichkeiten (z.B. Kante, Eckpunkt, Fläche) an einem Körper (Würfel) mit den Schülern im Vorfeld thematisiert. Ebenfalls wurde der Hinweis gegeben, dass es sich bei allen Gebilden ausnahmslos um regelmäßige Strukturen handelt.

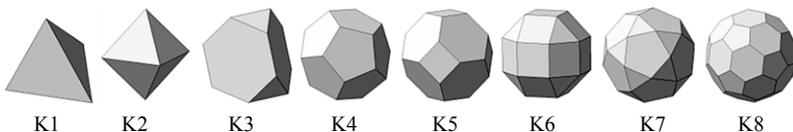


Abb. 3: Die verwendeten regulären und halbreulären Körper des STR

Die Bearbeitungszeit je Körper wurde kontrolliert und in Abhängigkeit vom erwarteten Komplexitätsgrad gesetzt (z.B. K1 → 1 min., K4 → 2:30 min.). Diese Zeiten wurden aus den Erfahrungen einer Voruntersuchung abgeleitet. Somit betrug die Gesamtbearbeitungszeit 22 Minuten.

Erste Auswertungen und Analysen bzgl. der Arbeitsumgebungen

Im Folgenden soll der Frage nachgegangen werden, mit welcher Lernumgebung (Bild, Computer, Modell) die teilnehmenden Schüler am erfolgreichsten die gestellten raumgeometrischen Fragestellungen beantworten können. Die Prüfung der Gesamtdaten auf Normalverteilung fällt ebenfalls negativ aus. Entsprechend der Argumentation beim BST wird vorsichtig mit einem T-Test, der durch einen U-Test (Mann-Whitney) gestützt wird, interpretiert.

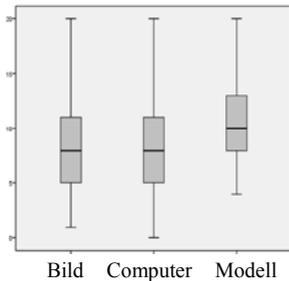


Abb. 4: Strukturerrfassungstest-Boxplot, Fragegruppe B

ONEWAY deskriptive Statistiken

Strukturerrfassungstest gesamt Niveau B

	Bild	Computer	Modell	Gesamt
N	123	114	119	356
Mittelwert	8,26	8,06	10,88	9,07
Standardabweichung	4,141	3,546	3,606	3,984
Standardfehler	,373	,332	,331	,211
95%-Konfidenzintervall für den Mittelwert				
Untergrenze	7,52	7,40	10,23	8,66
Obergrenze	9,00	8,72	11,54	9,49
Minimum	1	0	4	0
Maximum	20	20	20	20

Tabelle 2: deskriptive Statistiken (Strukturerrfassungstest, Fragegruppe Niveau B)

Für die dargestellte Datenanalyse (Abb. 4, Tabelle 2) wurden nur Datensätze, die im Niveaubereich A mindestens insgesamt 18 Punkte zeigen, ausgewertet. Dabei wird die These vertreten, dass Schüler, die dieses Niveau trotz Einführungsphase nicht erreichen, entweder nicht über das notwendige Begriffsverständnis verfügen oder nicht motiviert waren. Die anschließenden Auswertungen beziehen sich entsprechend auf die Daten des Fragenniveaus B, da nur diese Items das räumliche Vorstellungsvermögen betreffen.

Der durchgeführte T-Test unabhängiger Variablen zeigt folgende Mittelwertszusammenhänge (Signifikanz, 2-seitig):

Bild-Computer = ,693; Bild-Modell = ,000; Computer-Modell = ,000

Mann-Whitney-Test (asymptotische Signifikanz, 2-seitig):

Bild-Computer = ,972; Bild-Modell = ,000; Computer-Modell = ,000

Aufgrund beider Testanalysen darf interpretiert werden, dass eine Computersimulationsumgebung keinen signifikanten Bearbeitungsvorteil gegen-

über der Arbeitsumgebung Bild (jeweils 2 perspektivenverschiedene Screenshots der Computersimulation) bringt. Demgegenüber ist die Modellumgebung diesen beiden Präsentationen überlegen. Weitere Filterungen, deren Beschreibung hier zu weit führen würde, stützen diesen Befund.

Um ein noch detaillierteres Bild zu erhalten, werden im Folgenden die Daten in einem Streudiagramm (BST-STR, vgl. Abb. 5) betrachtet. Hierfür wurden die Wertepaare zusätzlich bzgl. ihrer Präsentationszuweisung kodiert. Die zuvor gesetzte Datenfilterung wird beibehalten. Des Weiteren beschränkt sich die Analyse auf die Körper 2 bis 6. Dadurch soll eine Datenanalyse ohne „Extremkörper“ (bezogen auf das gesetzte Komplexitätsgradmodell) vorgenommen werden. Darüber hinaus differenzierten die beiden komplexesten Körper 7 und 8 schlecht, da nur richtige Lösungen gewertet wurden – eine Annäherung wurde nicht berücksichtigt.

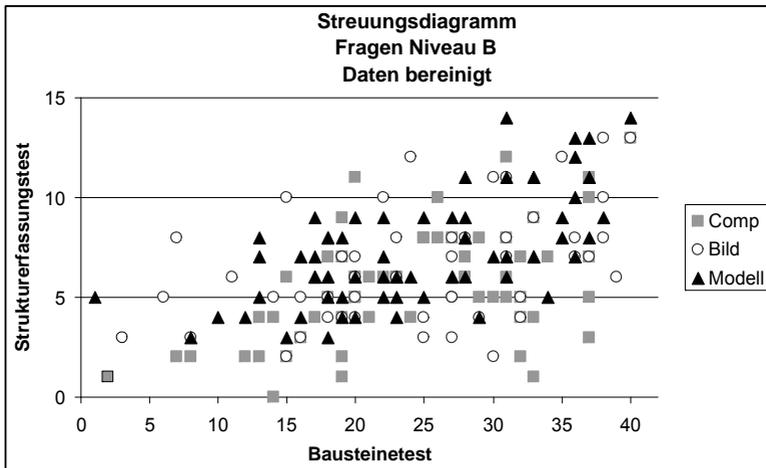


Abb. 5: Streudiagramm der Ergebnisse der Fragen Niveau B mit Beschränkungen bzgl. des Bausteine-Tests
Korrelationen (Pearson): Computer = 0,542; Bild = 0,467; Modell = 0,688

Zunächst zeigt das Diagramm (Abb. 5) beim Vergleich der drei Präsentationen unterschiedliche arealbezogene Verteilungen, so dass eine detailliertere Betrachtungsweise angezeigt ist. Tendenziell kann abgelesen werden, dass die Modellumgebung die geringste Streuung zeigt und die höchste Korrelation aufweist. Zu erkennen ist des Weiteren, dass die schwächsten Ergebnisse im Strukturfassungstest mit der Lernumgebung „Computer“ erzielt wurden. Schüler im hohen Leistungsbereich (BST = 30...40) profitieren am

ehesten von der Modellumgebung, gefolgt von der Bildumgebung, jedoch am wenigsten von der Computerumgebung. Der direkte Vergleich der Modell- mit der Computerumgebung zeigt, dass im Mittel die Modellumgebung die besseren Ergebnisse liefert. Die Schüler mit der Bildumgebung erreichen sowohl Spitzenwerte als auch sehr schwache Ergebnisse.

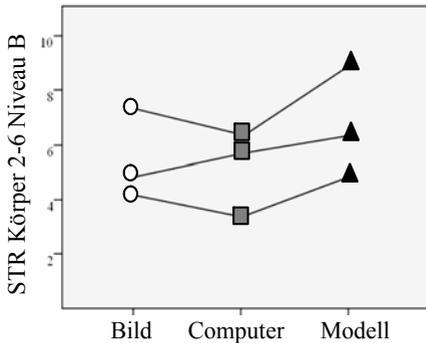


Abb. 6: STR-Leistungsvergleiche der verschiedenen Arbeitsumgebungen von schwachen, mittleren und starken Schülern im BST

In Abbildung 6 werden drei Leistungsgruppen (schwache, mittlere und starke Schüler bezogen auf den BST) individuell dargestellt, um ein noch differenzierteres Bild zu erhalten. Die bisherigen Dateneinschränkungen wurden ebenfalls beibehalten. Für starke und schwache Schüler scheint die interaktive Computerlernumgebung am wenigsten hilfreich zu sein. Für Probanden mit mittleren Leistungen ist es nahezu unerheblich, mit welcher Präsentation sie arbeiten, wobei ein Trend hin zum Modell erkennbar ist.

Zusammenfassend wird festgestellt, dass die Bild- und Computerumgebungen gegenseitig wenig Vorteile bringen, wobei ein möglicher Trend von Leistungsgruppe zu Leistungsgruppe variieren kann. Die Modellumgebung bringt bei der Bearbeitung der Fragestellungen Vorteile für alle Subgruppen, wobei die Ausprägung je Teilgruppe variiert und bei den starken Schülern am deutlichsten erscheint.

Das Komplexitätsgrad-Bestimmungsmodell

Abb. 7 wurde ausschließlich mit den Daten des Niveaus B erstellt. Die Datenvisualisierung zeigt, dass das angewandte Komplexitätsgrads-Berechnungsmodell paarweise teilweise nicht hinreichend differenziert – es kann lediglich eine Tendenz bestätigt werden. So werden im Mittel die Körperpaare 1+2, 3+4 bzw. 5+6 vergleichbar erfolgreich bearbeitet, obgleich das gesetzte K-Modell jeweilige Leistungsunterschiede prognostiziert.

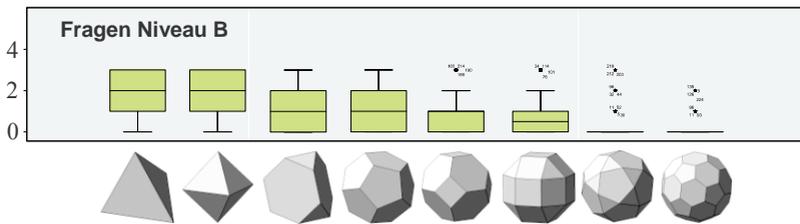


Abb. 7: Boxplot-Betrachtungen des STR, Fragen Niveau B für jeden einzelnen Körper

Um ein noch differenzierteres Bild zu erhalten, werden nachfolgend bzgl. des STR fünf Leistungsgruppen getrennt bewertet und visualisiert. Die entsprechenden graphischen Darstellungen aller Einzelbetrachtungen (Abb. 8) zeigen jeweils einen Verlauf, der sich weitestgehend parallel sowohl zum Gesamtdatenverlauf (Abb. 7), als auch untereinander verhält. Dies legt die Interpretation nahe, dass Schüler aller Leistungsklassen ein ähnlich relatives „Komplexitätsgradempfinden“ („ist leichter als“, „ist schwerer als“, „ist gleich schwer“) haben. Die relative „Schwierigkeitswirkung“ der verschiedenen Körper verhält sich demzufolge ähnlich für alle Leistungsklassen, jedoch auf einem unterschiedlichen Niveau.

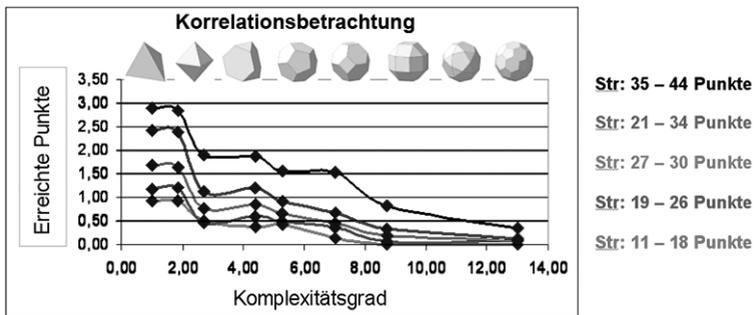


Abb. 8: Ergebnisse des STR in Abhängigkeit von der Komplexität des Körpers für verschiedene Leistungsgruppen

Zusammenfassung

Aufgrund der ersten Befunde werden zwei „vorsichtige“ Thesen formuliert:

- Das Arbeiten am und mit dem Modell ist am hilfreichsten beim Lösen raumgeometrischer Fragestellungen. Dieser Effekt besteht tendenziell für alle Leistungsgruppen, variiert jedoch in seiner Ausprägung. Besonders stark von dieser Lernumgebung profitieren Teilnehmer mit ausge-

prägtem räumlichem Vorstellungsvermögen. Der direkte Vergleich zwischen der Bild- und Computerumgebung zeigt dahingehend ein uneinheitliches Bild, als dass sowohl schwache als auch starke Teilnehmer bessere Ergebnisse mit einer Bildumgebung erzielen, während Schüler mit mittleren Kompetenzen mit dem Computer erfolgreicher arbeiten. Diese Hinweise müssen allein schon deshalb vorsichtig ausfallen, da mit einer sehr eingeschränkten Körperumgebung gearbeitet wurde, bei der Variablen wie z.B. der Flächenaußenwinkel nicht thematisiert wurden.

- Das hier eingesetzte Komplexitätsgradmodell differenziert nicht hinreichend. Es ist zwar eine Tendenz nachzuweisen. Dies ist jedoch nicht besonders verwunderlich. Für eine Beschreibung einer Lern- oder Testumgebung im Bereich der Raumgeometrie ist dieses Modell jedoch zu ungenau. Die Auswertungen legen die Annahme nahe, dass die Anzahl der Außenfläche, -Kanten und Ecken drei Variablen in einem Variablenkomplex darstellen und somit Einfluss auf die Gesamtkomplexität haben dürften. Weitere Eigenschaften (z.B. Flächenwinkel, Rotationsebenen, Außenflächenkomposition, usw.) werden zu berücksichtigen sein, deren gegenseitige Einflüsse und Gewichtungen schwer zu beurteilen sein dürften (vgl. auch Shepard, Metzler 1971; Glück, Kaufmann et.al. 2005; ter Horst, van Lier et.al. 2010). Die differenzierte Komplexitätsgradanalyse gibt den Hinweis, dass Schüler unterschiedlicher Leistungsklassen ein ähnlich relatives „Komplexitätsgradempfinden“ haben.

LITERATUR

- Ahmad, R.; Khairulnauar, S. (2009): Practising mental rotation using interactive Desktop Mental Rotation Trainer (iDeMRT). In: *British Journal of Educational Technology*, Volume 40, Number 5, S. 889-900(12).
- Birkel, P.; Schein, S. A.; Schumann, H. (2002): Bausteine-Test (BST), Ein Test zur Erfassung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Göttingen u.a.: Hogrefe.
- Cohen, C.A. (2005): The Influence of Spatial Ability on the Use of Dynamic, Interactive Animation in a Spatial Problem-Solving Task. In: *Barkowsky, T.; Freksa, C.; Hegarty, M.; Lowe, R. (Hg.): Reasoning with Mental and External Diagrams: Computational Modeling and Spatial Assistance*. California: Menlo Park.
- Franke, M. (2009): Didaktik der Geometrie in der Grundschule. 2. Aufl. [Nachdr.]. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl. (Mathematik Primar- und Sekundarstufe).
- Glück, J.; Kaufmann, H.; Dünser, A.; Steinbügl, K. (2005): Geometrie und Raumvorstellung – Psychologische Perspektiven. In: *Informationsblätter der Geometrie (IBDG)*, H. 24 No. 1, S. 1–13.

- Glück, J.; Kaufmann, H.; Dünser, A.; Steinbügl, K. (2006): Geometrie und Raumvorstellung. Psychologische Perspektive. Fakultät für Psychologie, Univ. Wien.
- Hellmich, F.; Hartmann, J. (2002): Aspekte einer Förderung räumlicher Kompetenzen im Geometrieunterricht. Ergebnisse einer Trainingsstudie mit Sonderschülerinnen und -schülern. In: *ZDM*, H. 34, S. 56–61.
- Hirstein, M.; Bayer, U.; Hausmann, M. (2009): Sex-Specific Response Strategies in Mental Rotation. In: *Learning and Individual Differences*, v19 n2, S. 225–228.
- Jordan, K.; Wuestenberg, T.; Heinze, H. J.; Peters, M.; Jaencke, L. (2002): Women and men exhibit different cortical activation patterns during mental rotation tasks. In: *Neuropsychologia*, H. 40, S. 2397–2408.
- Kruger, M.; Krist, H. (2009): Imagery and Motor Processes – When Are They Connected? The Mental Rotation of Body Parts in Development. In: *Journal of Cognition and Development*, H. v10 n4, S. 239–26.
- Linn, M. C.; Peterson, A. C. (1985): Emergence and characterization of sex differences in spatial ability. In: *Child Development*, H. 56, 6, S. 1479–1498.
- Linn, M. C.; Peterson, A. C. (1986): A meta-analysis of gender differences in spatial ability. In Hyde; Linn (Eds.). In: *The psychology of gender*, Baltimore, S. 67–101.
- Lowe, R. (2003): Animation and learning: Selective processing of information in dynamics graphics. In: *Learning and Instruction*, H. 13, S. 157–176.
- Lowe, R. (2004): Interrogation of a dynamic visualization during learning. In: *Learning and Instruction*, H. 14, S. 257–274.
- Moe, A. (2009): Are Males Always Better than Females in Mental Rotation? Exploring a Gender Belief Explanation. In: *Learning and Individual Differences*, v19 n1, S. 21–27.
- Newcombe, N.; Bandura, M. M.; Taylor, D. G. (1983): Sex differences in spatial ability and spatial activities. In: *Sex Roles*, H. 9, S. 377–386.
- Peters, M.; Battista, C. (4/2008): Applications of Mental Rotation Figures of the Shepard and Metzler Type and Description of a Mental Rotation Stimulus Library. In: *Brain and Cognition*, v66 n3, S. 260–264.
- Schwan, S.; Riempp, R. (2004): The cognitive benefits of Interactive videos: learning to tie nautical knots. In: *Learning and Instruction*, H. 14, S. 293–305.
- Shepard, R. N.; Metzler, J. (1971): Mental rotation of three-dimensional objects. In: *Science*, H. 171, S. 701–703.
- Souvignier, E. (Hg.) (2000): Förderung räumlicher Fähigkeiten. Trainingsstudien mit lernbeeinträchtigten Schülern. Münster: Waxmann (Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie, 22).
- Souvignier E. (1999): Die Verbesserung räumlicher Fähigkeiten durch computerunterstützte Fördermaßnahmen: Zwei Evaluationsstudien. In: *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, H. 13, S. 4–16.
- ter Horst, A. C.; van Lier, R.; Steenbergen, B. (2010): Mental rotation task of hands: differential influence number of rotational axes. In: *Experimental Brain Research*.

Der Baustein ist das Werkzeug

Hans Walser

Zusammenfassung: In einer arbeitsteiligen Welt sind die Grenzen zwischen Werkzeug, Rohmaterial und Produkt fließend geworden. Das gilt insbesondere in der Geometrie bei Verwendung von DGS (dynamische Geometrie-Software) und anderen elektronischen Hilfsmitteln. Ein Kreis muss nicht mehr mit dem Werkzeug „Zirkel“ gezeichnet werden, sondern steht auf Abruf bereit. Dabei wird allerdings das Werkzeug „Zirkel“ durch das Werkzeug „Software“ ersetzt.

Es werden exemplarisch gegebene Formen wie Quadrat, gleichseitiges Dreieck, gleichschenkliges Trapez als „Werkzeuge“ eingesetzt. Als Werk-Plattformen werden regelmäßige Raster verwendet. Einem regulären Sechseck werden Quadrate und gleichschenklige Trapeze aufgesetzt. Es erscheinen die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt. Ein passendes Gelenkmodell führt zum Kehrwert einer Zahl.

Einführung

Zum Stichwort *Werkzeuge* fallen einem nostalgisch Säge und Hammer ein. In der Tat: Trennen (*Säge*, Analyse) und Verbinden (*Hammer*, Synthese) sind die beiden Grundelemente menschlicher Kreativität. Allerdings finden sich in heutigen Haushalten als Werkzeuge fast nur noch einige Inbusschlüssel (Innensechskantschraubenschlüssel) eines bekannten Möbelhauses.

In der Geometrie denken wir bei *Werkzeug* an Zirkel und Lineal. Dabei habe ich seit 20 Jahren keinen Zirkel mehr in der Hand gehabt, in dynamischer Geometrie-Software stehen ja Kreise vorgefertigt auf Anklicken bereit. Statt von *Konstruieren* müssten wir wohl eher von *Assembling* reden.

Wir verwenden im Folgenden als vorgefertigte Werkzeuge ausschließlich die drei Grundfiguren *Quadrat*, *gleichseitiges Dreieck* und *regelmäßiges Sechseck* sowie die zugehörigen Raster. Etliche Überlegungen wurden durch [1] angeregt.

Die Basisfigur

Wir beginnen mit einem regulären Sechseck und setzen sukzessive Quadrate an. Dies ist zunächst eine rein spielerische und nicht zielorientierte Varia-

tion des Ansetzens von Quadraten an den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, wie wir dies von der Pythagoras-Ikone her kennen.

In den Zwischenräumen werden zunächst Dreiecke und dann symmetrische Trapeze (so genannte *gleichschenklige Trapeze*) sichtbar. Die Quadrate dienen als Spannwerkzeuge für die Figur (Abb. 1). Eine Variante ist das Ansetzen von Rechtecken mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ wie bei den DIN-Formaten (vgl. [3, S. 25] und [6]).

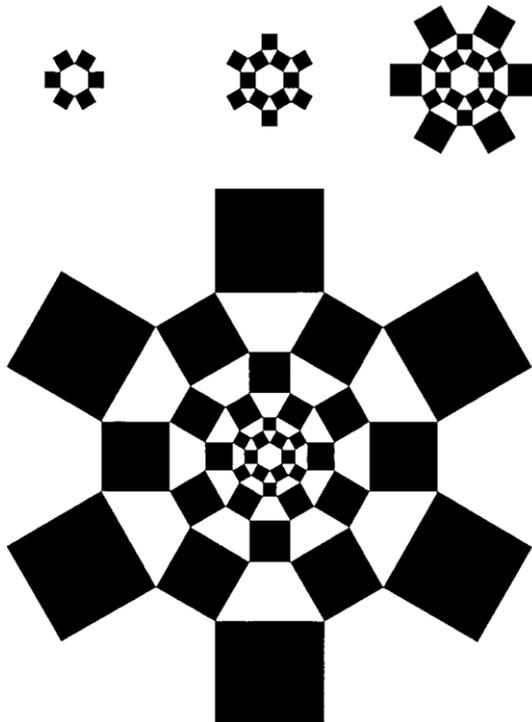


Abb. 1: Ansetzen von Quadraten

Fibonacci-Quadrate

Die Kantenlängen der Quadrate bilden die Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, Bildungsnahe Pädagogen vermissen hier wohl die Geschichte mit Fibonacci's Kaninchen. Sie fängt so an: Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur. Jemand sperrt ein Kaninchenpaar in ein allseitig ummauertes Gehege, um zu erfahren, wie viele Nachkommen (paarweise

gezählt) dieses Paar im Laufe eines Jahres haben werde. Es wird dabei vorausgesetzt, jedes Kaninchenpaar bringe monatlich ein neues Paar zur Welt, und die Kaninchen würden vom zweiten Monat nach ihrer Geburt an gebären. Ferner soll kein Kaninchen sterben oder von außen dazu kommen. Für die Anzahlen der Kaninchenpaare je Monat ergeben sich die Fibonacci-Zahlen.

Diese Aufgabe ist nicht sehr realistisch. Wir haben hier ein frühes didaktisches Beispiel eines an den Haaren herbeigezogenen „Anwendungsbezuges“ der Mathematik. Das Beispiel wurde aber zu einer Ikone für die Fibonacci-Folge und droht die eigentliche mathematische Leistung Fibonaccis, nämlich den Transfer der (arabischen) Mathematik ins mittelalterliche Europa, in den Hintergrund zu drängen. Realistischer wäre etwa der Stammbaum einer Drohne (vgl. [5], S. 89/90).

Die heute nach Fibonacci benannte Folge war allerdings schon vor Fibonacci bekannt [4]. Ihre früheste Erwähnung findet sich in der indischen Mathematik unter dem Namen *mātrāmeru* („Berg der Kadenz“) in den Chandahsūtras („Kunst der Prosodie“) des Sanskrit-Grammatikers Pingala (zwischen 5. und 2. Jh. v. Chr.). Ausführlich behandelten später Virahānka (6. Jh.) und Ācārya Hemacandra (1089–1172) die Fibonacci-Folge [2]. Ācārya Hemacandra beruft sich dabei auf den indischen Mathematiker Gopala, der diese Folge im Jahre 1135 untersucht hat. Über arabische Quellen hat Fibonacci wahrscheinlich Arbeiten der Sanskrit-Grammatiker kennen gelernt.

Auch in der westlichen Welt waren die Fibonacci-Zahlen schon früher erwähnt worden, dann aber offenbar wieder in Vergessenheit geraten. Nikomachos von Gerasa (100 n. Chr.) soll diese Folge neben anderen Zahlenfolgen aufgelistet haben.

Dass wir es in unserem Kontext mit Fibonacci-Zahlen zu tun haben, kann mit Raster-Werkzeugen eingesehen werden, indem wir die Seitenlängen der Quadrate durch Rasterung sichtbar machen. Das Quadratraster dient zunächst als Mess- oder Zählwerkzeug gemäß Abbildung 2.

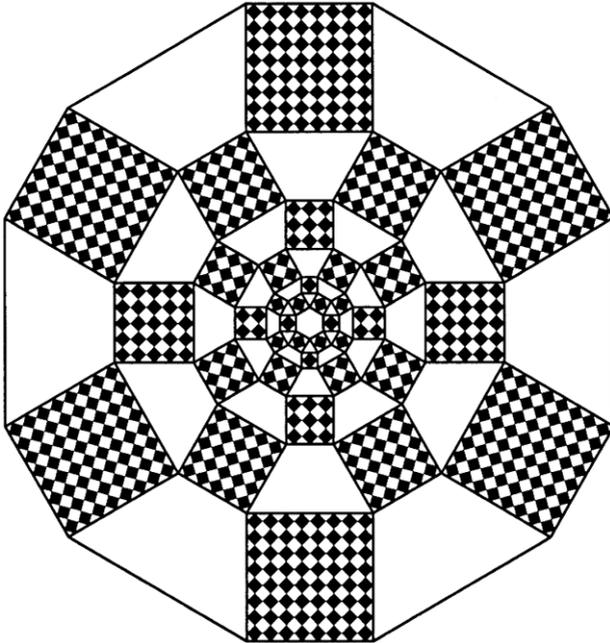


Abb. 2: Fibonacci-Quadrate

Das ist jetzt allerdings noch kein Beweis dafür, dass die Seitenlängen der Quadrate sich wie die Fibonacci-Zahlen verhalten; die Rasterungen könnten ja unterschiedlich groß sein. Wenn wir aber auch die Trapeze geeignet rasteren, sehen wir, dass die Rasterungen der Quadrate konsistent sind (Abb. 3). Nun dienen die Raster als Beweismittel.

Fibonacci-Trapeze

Die Trapeze haben also als Seitenlängen drei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen. Wir sprechen von *Fibonacci-Trapezen*. Sie passen in ein reguläres Dreiecksraster.

Die Frage ist, ob sich die Gesamtheit der Fibonacci-Trapeze flächendeckend und überlappungsfrei in ein Dreiecksraster packen lässt. Die Trapeze, welche eben als Resultat erschienen sind, werden nun instrumentalisiert (siehe Abb. 4).

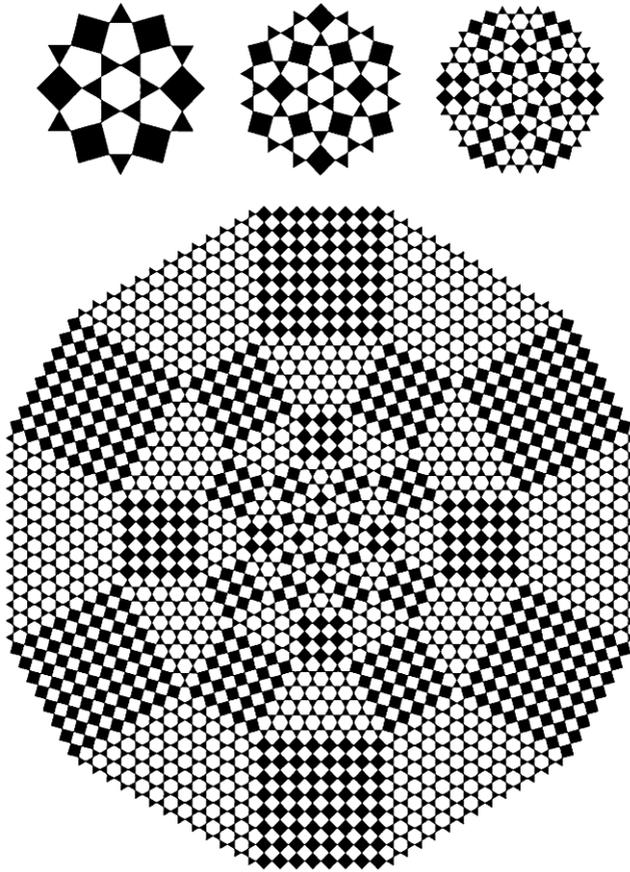


Abb. 3: Fibonacci-Quadrate und Fibonacci-Trapeze

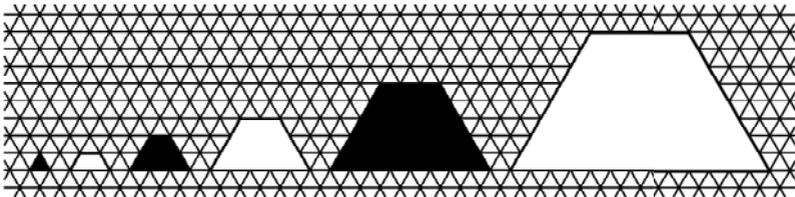


Abb. 4: Die einzelnen Fibonacci-Trapeze

Mit diesen Trapez-Bausteinen kann im Dreiecksraster der *Fibonacci-Stern* gebildet werden (Abb. 5).

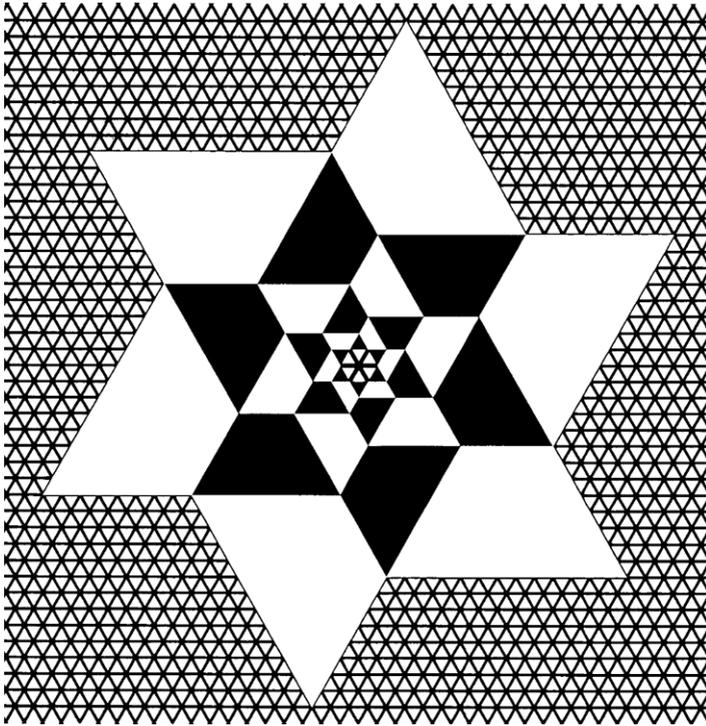


Abb. 5: Fibonacci-Stern

Die Fibonacci-Rekursion

Durch Einzeichnen eines regulären Dreiecks in den Fibonacci-Trapezen wird die Rekursion $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ sofort sichtbar (Abb. 6). Das Trapez dient nun auch als kognitives Werkzeug.

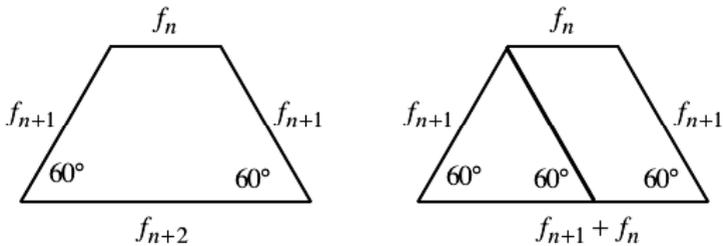


Abb. 6: Visualisierung der Fibonacci-Rekursion

Das goldene Trapez

Wir normieren die Schenkellängen der Fibonacci-Trapeze auf 1 und führen den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch. Für die Fibonacci-Zahlen gelten die beiden Grenzwerte (vgl. [5], S. 87f):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618.$$

Es entsteht daher das *goldene Trapez* (Abb. 7) mit der Deckparallelennlänge ρ , der Schenkellänge 1 und der Basislänge τ .

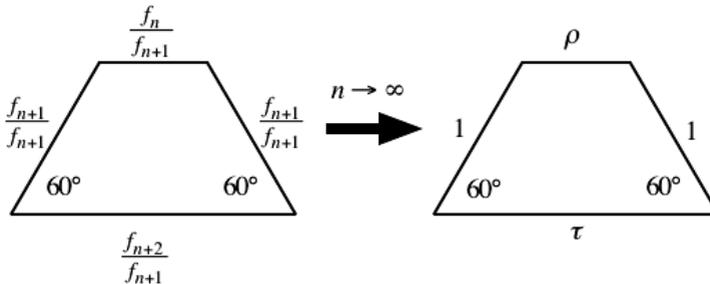


Abb. 7: Goldenes Trapez

Goldener Stern

Goldene Trapeze, deren Basislängen eine geometrische Folge mit dem Quotienten τ bilden, lassen sich zum goldenen Stern zusammensetzen (Abb. 8).

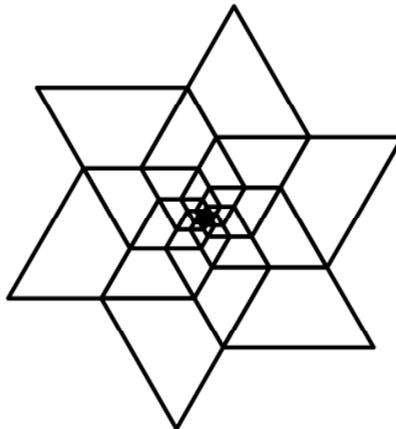


Abb. 8: Goldener Stern

Diagonale im goldenen Trapez

Wie lang ist die Diagonale d im goldenen Trapez (Abb. 9)?

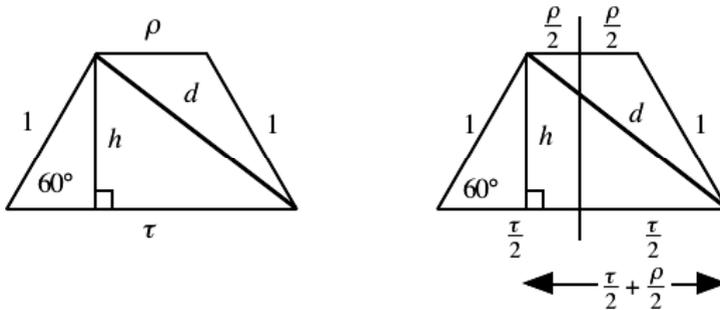


Abb. 9: Diagonale, Höhe und Symmetrieachse

Zunächst gilt $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Unter Ausnutzung der Symmetrie finden wir $d^2 = h^2 + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\rho}{2}\right)^2$. Wegen $\tau + \rho = \sqrt{5}$ ergibt sich schließlich:

$$d = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3+5}{2}} = \sqrt{2}.$$

Im goldenen Trapez erscheinen die Zahlen $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ (Abb. 10).

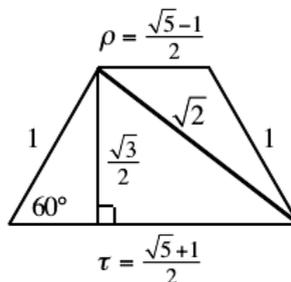


Abb. 10: Maßverhältnisse im goldenen Trapez

Vergleich mit dem Quadrat. Gelenkmodell

Im goldenen Trapez haben wir zwei Seiten der Länge 1 und Diagonalen der Länge $\sqrt{2}$. Dasselbe trifft auch für das Einheitsquadrat zu (Abb. 11).

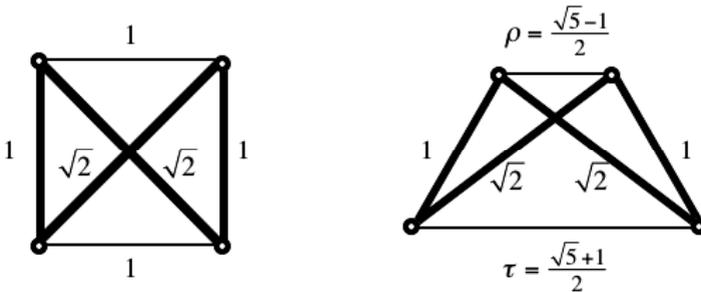


Abb. 11: Vergleich mit Einheitsquadrat

Das gibt Anlass zum Bau eines Gelenkmodells mit zwei Einheitsstäben und zwei Stäben der Länge $\sqrt{2}$, die abwechslungsweise an den Enden gelenkig verbunden sind. Ein solches Modell kann aus Pappe mit Mustertütenklammern als Gelenken hergestellt werden (Abb. 12).

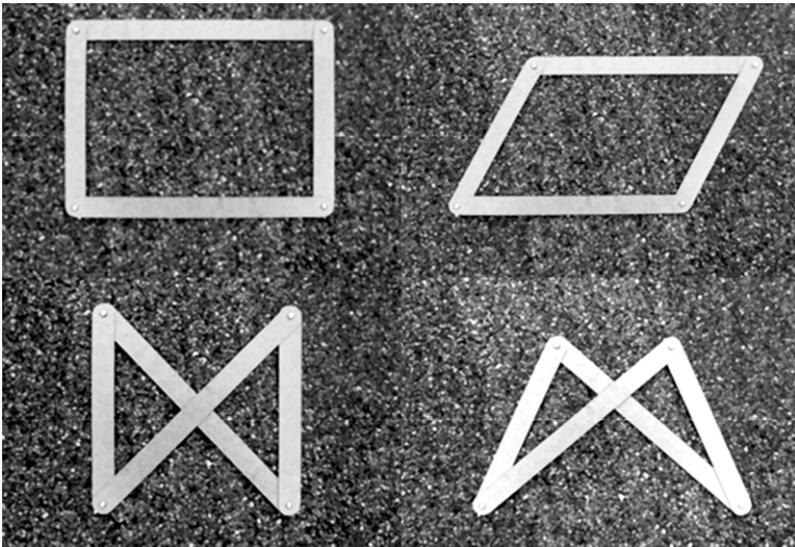


Abb. 12: Gelenkmodell

Mit dem Gelenkmodell kann zum Beispiel ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ (wie bei den DIN-Formaten) gebildet werden, und bei Überkreuzen der Stäbe der Länge $\sqrt{2}$ eben das Einheitsquadrat oder das goldene Trapez.

Kehrzahl

Es ist $\tau\rho = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5-1}{4} = 1$. Das Einheitsquadrat und das goldene Trapez haben also zusätzlich gemeinsam, dass das Produkt der Längen der unteren und der oberen Parallelseiten 1 ergibt.

Dies trifft sogar für alle Trapeze zu, die mit dem Gelenkmodell gebildet werden können (Abb. 13).

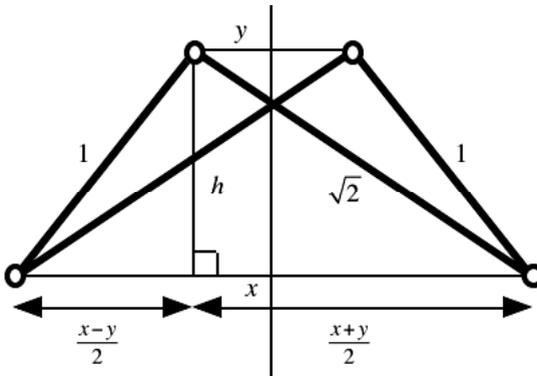


Abb. 13: Beliebige Einstellung des Gelenkmodells

Mit den Bezeichnungen der Abb. 13 gilt für die Höhe h :

$$\text{Rechtwinkliges Dreieck links: } h^2 = 1^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$\text{Rechtwinkliges Dreieck rechts: } h^2 = (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Gleichsetzen ergibt:

$$2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$1 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2) = xy$$

Der Beweis kann auch mit dem Satz des Ptolemäus geführt werden. Der Satz des Ptolemäus besagt, dass in einem Sehnenviereck mit den Seiten a , b , c , d und den Diagonalen e und f (Abb. 14) die Relation $ef = ac + bd$ gilt.

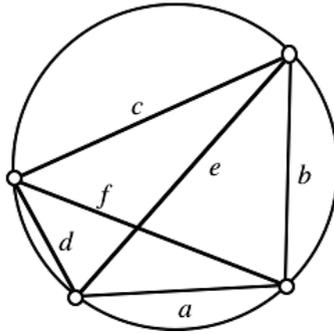


Abb. 14: Sehnenviereck

Ein gleichschenkliges Trapez ist ein spezielles Sehnenviereck. In unserem Sonderfall ist $e = f = \sqrt{2}$, $a = x$, $c = y$ und $b = d = 1$. Somit haben wir:

$$\sqrt{2}\sqrt{2} = xy + 1 \cdot 1 \quad \text{also} \quad 1 = xy$$

Das Gelenkmodell ist ein Inversionswerkzeug, allerdings mit beschränkter Reichweite, da $x \in [\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$.

Literatur

- [1] Deshpande, M. N. : Proof Without Words: Beyond Extriangles. *MATHEMATICS MAGAZINE*. Vol. 82, No. 3, June 2009, p. 208.
- [2] Lehmann, Ingmar: FIBONACCI-Zahlen – Ausdruck von Schönheit und Harmonie in der Kunst. *MU Der Mathematikunterricht*. Jahrgang 55, Heft 2, S. 51-63.
- [3] Nelsen, Roger B.: *Proofs without Words II*. Washington, DC, Mathematical Association of America, 2000, S. 25 (A Putnam Dodecagon; Problem I-1, 24th Putnam Competition, 1963).
- [4] Singh, Parmanand: Acharya Hemachandra and the (so called) Fibonacci Numbers. *The Mathematics Education Siwan*, 20(1), 1986, p. 28-30.

- [5] Walser, Hans: *Der Goldene Schnitt*. 5., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2009.
- [6] Walser, Hans: DIN-Format und Fibonacci Zahlen. *MNU Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 63/3 (15. 4. 2010), S. 151.

Autorenverzeichnis

Prof. Dr. Andreas Filler
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
D-10099 Berlin
filler@math.hu-berlin.de

Dr. Michael Gieding
Fach Mathematik
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Keplerstraße 87
D-69120 Heidelberg
gieding@ph-heidelberg.de

RL Dr. Olaf Knapp
Theodor-Heuss-Realschule
Zähringer Platz 1
D-78464 Konstanz
olafknapp@yahoo.de

Dr. Oliver Labs
Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Geb. E2.4
D-66123 Saarbrücken
mail@OliverLabs.net

PD Dr. Ingmar Lehmann
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
D-10099 Berlin
ilehmann@math.hu-berlin.de

Prof. Dr. Matthias Ludwig
Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik
Goethe-Universität Frankfurt
Senckenberganlage 9
D-60325 Frankfurt
ludwig@math.uni-frankfurt.de

Swetlana Nordheimer
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
D-10099 Berlin
nordheim@mathematik.hu-berlin.de

Markus Ruppert
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg
Am Hubland
D-97074 Würzburg
ruppert@mathematik.uni-wuerzburg.de

Jürgen Steinwandel
Fachbereich Mathematik
Pädagogische Hochschule
Kirchplatz 1
D-88250 Weingarten
steinwandel@ph-weingarten.de

Dr. Hans Walser
Mathematisches Institut
Universität Basel
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel
hwalser@bluewin.ch

Prof. Dr. Hans-Georg Weigand
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg
Am Hubland
D-97074 Würzburg
weigand@dmu.de

Jan Wörler
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg
Am Hubland
D-97074 Würzburg
woerler@mathematik.uni-wuerzburg.de