

Andreas Filler
Anselm Lambert (Hrsg.)

Geometrie mit Tiefe

Vorträge auf der 34. Herbsttagung des
Arbeitskreises Geometrie in der
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 8. bis 10. September 2017
in Saarbrücken



Andreas Filler, Anselm Lambert (Hrsg.)

Geometrie mit Tiefe

Arbeitskreises Geometrie 017

Titelbild: Thomas Wainer (Saarbrücken) „Hyperquader a^2b^{2n} “

ISBN 978-3-88120-610-5

1. Auflage 2018

Veröffentlicht im Verlag Franzbecker
Hildesheim

© 2017 Verlag Franzbecker, Hildesheim
www.franzbecker.de

Inhaltsverzeichnis

Editorial	1
Hans-Dieter Sill <i>Zur Didaktik des Geometrieunterrichts in der DDR</i>	3
Edmond Jurczek <i>Ist Logik symmetrisch, und wie logisch ist Symmetrie?</i>	43
Jörg Meyer <i>Symmetrie in beiden Sekundarstufen</i>	59
Hans Walser <i>Klassifikation der Symmetriegruppen der Flächenornamente als Werkzeug</i>	75
Stephanie Gleich <i>Ein „neuer“ Aufgabentyp von Dreieckskonstruktionen?!</i>	91
Dörte Haftendorn <i>Kurven und Tiefe</i>	103
Manfred Schmelzer <i>Mathematische Erschließungsmethoden in der Geometrie</i>	111
Heinz Schumann <i>Raumgeometrische Entdeckungen am Beispiel „Würfelbillard“</i>	135
Heinz Schumann <i>Raumgeometrisches Entdecken an und mit Polyedern</i>	153
Autorenverzeichnis	171

Editorial

Andreas Filler, Anselm Lambert

Der vorliegende Tagungsband enthält Beiträge der Herbsttagung 2017 des Arbeitskreises Geometrie in der GDM, die unter dem übergeordneten Thema *Geometrie mit Tiefe* stand. Einen Schwerpunkt stellten dabei Überlegungen zur Symmetrie als verbindendem Prinzip zwischen Geometrie und anderen Bereichen der (Schul-)Mathematik und darüber hinaus dar. Dies wird nicht nur in den explizit das Thema „Symmetrie“ ansprechenden Beiträgen, sondern auch in einer Reihe weiterer Beiträge dieses Bandes deutlich, in denen Symmetrieüberlegungen auftreten.

Den Hauptvortrag *Zur Didaktik des Geometrieunterrichts in der DDR* hielt *Hans-Dieter Sill*. Sein Beitrag ist nicht nur aus historischer Sicht hinsichtlich von Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen den Herangehensweisen an didaktische Probleme in der DDR und in der Bundesrepublik interessant, sondern vor allem in Bezug auf nach wie vor offene Fragen insbesondere zur Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens und des Könnens im Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben in der Ebene und im Raum. Dazu enthält der Beitrag Vorschläge und empirische Ergebnisse.

Einige Beiträge befassen sich explizit unter verschiedenen Blickwinkeln mit Symmetrie. So zeigt *Edmond Jurczek* in seinem Beitrag *Ist Logik symmetrisch, und wie logisch ist Symmetrie?* anhand von Beispielen aus der Kunstgeschichte, der Biologie, Chemie und der Mathematischen Physik auf, wie Logik, verstanden als Wissenschaft von Denkmustern, zu außerordentlichen Strukturen beziehungsweise symmetrischen Ergebnissen geführt hat.

Jörg Meyer stellt im ersten Teil seines Beitrags *Symmetrie in beiden Sekundarstufen* dar, wie unterschiedliche Facetten des Symmetriebegriffs die Schulmathematik durchziehen. Im zweiten (der Sekundarstufe II zuzuordnenden) Teil wird der Symmetriegedanke in unterschiedlicher Art und Weise für die Erzeugung von Kurven fruchtbar gemacht.

Der Beitrag *Klassifikation der Symmetriegruppen der Flächenornamente als Werkzeug* von *Hans Walser* beschreibt die Nutzung einer derartigen Systematisierung für den Beweis eines anspruchsvollen Satzes aus der Elementargeometrie. Die Idee dabei ist, ein lokales Phänomen in eine Übersichtsdarstellung einzubinden und von daher zu verstehen.

Stephanie Gleich befasst sich in dem Beitrag *Ein „neuer“ Aufgabentyp von Dreieckskonstruktionen?! mit Problemstellungen, bei denen drei Geraden gegeben sind und Dreiecke gesucht werden, in denen diese Geraden besondere Linien (Mittelsenkrechten, Winkelhalbierende, Höhen oder Seitenhalbierende) sind. Anhand zweier Beispiele stellt sie Lösungen derartiger Probleme vor.*

In ihrem Beitrag *Kurven und Tiefe* untersucht *Dörte Haftendorn* bipolare Kurven (Cassini'sche Kurven, Ellipsen, Hyperbeln und allgemeinere Descartes'sche Kurven). Durch ihre einfache Konstruktion mithilfe von GeoGebra sind Erkundungen schon für junge Lernende möglich. Das Verständnis der beobachteten Formen wird unterstützt durch die Darstellung der Konstruktionsbedingungen in einem simultanen zweiten Grafikfenster.

Im Zentrum des Beitrags *Mathematische Erschließungsmethoden in der Geometrie* von *Manfred Schmelzer* stehen Skalierungen im weiteren Sinne, die er – neben anderen Schließungsprinzipien – u. a. für Herleitungen von Flächeninhalts- und Volumenformeln sowie für die Bestimmung von Integralen nutzt.

Von *Heinz Schumann* stammen zwei Beiträge zur Raumgeometrie. Der erste davon, *Raumgeometrische Entdeckungen am Beispiel „Würfelbillard“*, der auf einen bereits auf der Herbsttagung 2016 gehaltenen Vortrag zurückgeht, befasst sich mit der Anwendung heuristischer Methoden bei Billardbahnen in konvexen Polyedern, deren Erkundung sich für raumgeometrische Aktivitäten eignet. Eine wichtige Bedeutung kommt hierbei, wie auch in dem Beitrag *Raumgeometrisches Entdecken an und mit Polyedern* der Nutzung Dynamischer Raumgeometrie-Systeme (DRGS) zu. Dort wird deutlich, wie ausgehend vom Würfel durch Manipulationen und Variationen eine Vielfalt räumlicher Körper konstruiert und untersucht werden kann.

Zur Didaktik des Geometrieunterrichts in der DDR

Hans-Dieter Sill

Zusammenfassung. Im Beitrag werden zunächst die wissenschaftlichen Einrichtungen der DDR, an denen Forschungen zum Mathematikunterricht betrieben wurden, genannt. Dann wird nachgewiesen, dass die Wissenschaften Mathematikmethodik in der DDR und Mathematikdidaktik in der BRD die gleichen Gegenstände haben. Zur Einordnung der vorgestellten Ergebnisse werden dann die Entwicklungsphasen des Mathematikunterrichts in der DDR sowie Rahmenbedingungen und Merkmale für die Forschungen dargestellt. Dann werden generelle Ergebnisse der Forschungen zum Geometrieunterricht vorgestellt und auf Defizite, die auch heute noch bestehen, hingewiesen. Anschließend werden Vorschläge und empirische Ergebnisse zur Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens sowie Vorschläge und empirische Ergebnisse zur Entwicklung des Könnens im Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben in der Ebene und im Raum in Auswertung von zwei Qualifizierungsarbeiten referiert. Der Anhang enthält eine Aufstellung von Dissertationen A und B zum Geometrieunterricht in der DDR.

Anliegen des Vortrages

Nach 1989 gab es von Seiten zahlreicher Mathematikdidaktiker der alten Bundesländer ein großes Interesse an einem wissenschaftlichen Austausch mit ihren neuen Kollegen aus dem Osten. Es kam zu zwei Tagungen, einem gemeinsamen Symposium im Oktober 1990 am IDM und einer Doppeltagung im Jahre 1996 in Osnabrück und Magdeburg, auf denen Vertreter beider Wissenschaftlergruppen sich zu gleichen Themen äußerten. Der Tagungsband zur Doppeltagung erschien erst im Jahre 2003 (Henning und Bender 2003), einige der Beiträge sind auch im ZDM (2003, Heft 4) veröffentlicht. Die Durchführung beider Tagungen ist vor allem den Initiativen von Hans-Georg Steiner vom IDM zu verdanken. Die Reflektion von Forschungsergebnissen aus der DDR hat dann jedoch nachgelassen. Heute findet man nur noch in sehr wenigen wissenschaftlichen Publikationen Verweise auf entsprechende Literatur. So sind im Handbuch der Mathematikdidaktik (2015) von den insgesamt ca. 1700 Literaturangaben nur 18 Angaben zu fachdidaktischen Arbeiten aus der DDR. Und auch im Lehrbuch zur Didaktik der Geometrie (Weigand et al. 2014) gibt es nur zwei Literaturangaben zu fachdidaktischen Arbeiten aus der DDR. Ausnahmen bilden das ver-

breitete Didaktiklehrbuch von Zech und die Monographie von Maier zum räumlichen Vorstellungsvermögen (Maier 1999).

Es gibt eine große Fülle von Publikationen, die es sowohl mit Blick auf den heutigen Mathematikunterricht als auch aus historischer Sicht Wert sind, in die aktuellen wissenschaftlichen Arbeiten einbezogen zu werden. So sind in der Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule“ in den Jahren bis 1990 etwa 1200 Artikel zu konkreten Problemen der Gestaltung des Mathematikunterrichts erschienen. Auf Madipedia habe ich 269 Einträge von Dissertationen und 28 Einträge zu Habilitationen bzw. Dissertationen B in der DDR gefunden. Es ist sehr erfreulich, dass offensichtlich im Ergebnis eines Projektes an der Universität Potsdam, in wahrscheinlich mühseliger Arbeit, die Quellenangaben zu den Qualifizierungsarbeitern zusammengetragen wurden. Die Anzahl der aufgeführten Dissertationen A ist nach meiner Einschätzung allerdings bei weitem nicht vollständig. Mit eigenen Unterlagen habe ich die Liste der Dissertationen B vervollständigen können, es sind allein 40 seit 1975. Die Anzahl dieser Arbeiten in der BRD ist geringer, Burscheid (2003) berichtet von 161 Dissertationen und 28 Habilitationen im Zeitraum von 1966 bis 1990, wobei ein großer Teil der Dissertationen fachwissenschaftliche Arbeiten waren. In der DDR waren Promotionen von Didaktikern im Fach die Ausnahme.

Eine der Ursachen für die weitgehende Nichtbeachtung von Ergebnissen der Mathematikmethodik in der DDR liegt sicher in der Tatsache begründet, dass nur wenige der damaligen Hochschullehrer nach 1990 weiterarbeiten konnten, wie im folgenden Abschnitt genauer angegeben wird. Ein weiterer Hinderungsgrund ist die schwierige Literaturlage. Die für heute interessantesten Ergebnisse sind nicht hauptsächlich in der Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule“ oder den Unterrichtshilfen zu finden, sondern in den Dissertationen, den wissenschaftlichen Zeitschriften der Einrichtungen und der so genannten grauen Literatur. Die Qualifizierungsarbeiten liegen nur in wenigen Exemplaren in den Bibliotheken der Einrichtungen bzw. in der deutschen Nationalbibliothek vor. Es mag aber auch an ideologischen Vorbehalten liegen, jedenfalls spricht dies aus den lapidaren Bemerkungen von Horst Struve zur Mathematikdidaktik in der DDR (Bruder et al. 2015, S. 540).

Mit meinem Vortrag will ich dazu beitragen, das Defizit in der Literaturrezeption zu mindern. Wenn man den realen Mathematikunterricht in

Deutschland und die Unterrichtenden in den Blick nimmt, ist es mir unverständlich, dass die Erfahrungen mit dem deutschen Mathematikunterricht in der DDR, die zahlreichen Ideen und Anregungen aus dieser Zeit fast vollständig ignoriert werden. Die Mehrzahl der Arbeiten in der DDR beschäftigt sich mit Problemen des realen Mathematikunterrichts und könnte damit eine Bereicherung der heutigen Fachdidaktik sein, deren größtes Defizit aus meiner Sicht die geringe Relevanz vieler Forschungen für den Mathematikunterricht in unserem Land ist. Es gibt weiterhin mehr Gemeinsamkeiten des Mathematikunterrichts in Deutschland mit dem in der DDR, als mit dem Unterricht in vielen anderen Ländern der Welt, allein aus kultureller, sprachlicher oder curricularer Sicht.

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. Peter Borneleit für die vielen wertvollen Hinweise und Ergänzungen zu meinem Beitrag.

Wissenschaftliche Einrichtungen zur Didaktik des Mathematikunterrichts in der DDR

Universitäten, Pädagogische Hochschulen (PH) und Institute für Lehrerbildung (IfL)

Die Ausbildung von Lehrern für die Sekundarstufen erfolgte an Universitäten und Pädagogischen Hochschulen. Die Pädagogischen Hochschulen besaßen seit den 70iger Jahren Promotions- und Habilitationsrecht. Zu den Hochschullehrern gehörten die Professoren und Dozenten. Die Berufung zum Dozenten setzte in der Regel die Habilitation und die Lehrbefähigung (*facultas dozendi*) voraus. Eine Professorenstelle entsprach einer C4-Professur und eine Dozentenstelle einer C3-Professur.

Institute für Lehrerbildung (IfL) waren Fachschulen, an denen Unterstufenlehrer (Klassen 1 bis 4) sowie Heimerzieher und Pionierleiter ausgebildet wurden. Sie waren mit den in der BRD zur gleichen Zeit gegründeten Pädagogischen Fachseminaren vergleichbar. Institute für Lehrerbildung gab es in Auerbach, Cottbus, Potsdam, Weimar, Templin, Berlin-Hohenschönhausen, Staßfurt, Nossen, Radebeul, Löbau, Leipzig, Rostock, Nordhausen, Neuzelle. An den IfL wurden nur in wenigen Fällen Forschungsarbeiten durchgeführt, so in Auerbach, Cottbus und Potsdam.

Einrichtung	Hochschullehrer im Studienjahr 1989/90
Humboldt-Universität Berlin	Brigitte Frank, Günter Pietzsch, Werner Stoye, Dieter Ilse, Marianne Grassmann
Karl-Marx-Universität Leipzig	Hans Bock, Peter Borneleit, Peter Göthner
TU Magdeburg	Herbert Henning
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg	Werner Walsch, Lothar Flade
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock	-
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald	Hans-Peter Mangel
Friedrich-Schiller-Universität Jena	Günther Schlosser
Technische Universität Karl-Marx-Stadt	Horst Elfers, Lothar Frenzel, Wolfgang Steinhöfel
PH „Karl Friedrich Wilhelm Wander“ Dresden – Pädagogisches Institut seit 1952, 1967 PH	Klaus Ritter, Siegfried Schneider
PH „Dr. Theodor Neubauer“ Erfurt/Mühlhausen seit 1953, 1969 PH	Theo Glocke, Wolfgang Zilmer
PH „Liselotte Herrmann“ Güstrow – Pädagogisches Institut seit 1952, 1972 PH	Hans-Dieter Sill
Pädagogische Hochschule Halle-Köthen „N.K. Krupskaja“ – Pädagogisches Institut seit 1952, 1972/1974 PH	Klaus Freytag, Werner Jungk, Manfred Gimpel, Eberhard Stöckel
PH „Karl Liebknecht“ Potsdam – Brandenburgische Landeshochschule seit 1948, 1951 PH	Regina Bruder, Horst Müller
PH „Ernst Schneller“ Zwickau – Pädagogisches Institut in Karl-Marx-Stadt seit 1956	-
IfL Auerbach	Wolfram Türke

Von den aufgeführten Hochschullehrern waren nach 1990 nur Marianne Grassmann, Hans Bock, Peter Borneleit, Herbert Henning, Werner Walsch, Hans-Peter Mangel, Hans-Dieter Sill und Regina Bruder als Hochschullehrer tätig. Alle Pädagogischen Hochschulen wurden Universitäten angeschlossen, die Hochschullehrerstellen wurden dabei nicht übernommen.

Wissenschaftliche Institute

Bereits 1949 wurde das „Deutsche Pädagogische Zentralinstitut“ (DPZI) gegründet, das vor allem für die Entwicklung und Erprobung von Lehrplänen für alle Fächer und Stufen verantwortlich war, an dem aber auch jährlich 10 – 15 Doktoranden arbeiteten. Es wurden u. a. Forschungsarbeiten zum Mathematikunterricht zu psychologischen und pädagogischen Themen durchgeführt. Aus dem DPZI ging 1970 die „Akademie der Pädagogischen Wissenschaften“ (APW) mit dem Institut für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht (IMN) und seiner Abteilung Mathematik hervor.

Einrichtung	Professoren und weitere habilitierte Mitarbeiter im Jahr 1990
Institut für Unterstufenmethodik (IfU) Erfurt an der PH Erfurt/Mühlhausen ¹	Elke Bülow, Marianne Franke, Christa Herwig, Horst Starke, Ar- tur Wolf
APW, Abt. Mathematik	Günter Fanghänel, Karlheinz Weber,
Zentralinstitut für Weiterbildung der Lehrer und Erzieher Potsdam/Ludwigs- felde, Abt. Mathematik	Reinhard Stamm

Nach 1990 wurden die APW und damit auch das IMN, das IfU sowie das Zentralinstitut für Weiterbildung vollständig abgewickelt. Nur Marianne Franke konnte sich erfolgreich auf eine Hochschullehrerstelle an der Uni Gießen bewerben.

Zum Verhältnis der Wissenschaften „Methodik des Mathematikunterrichts“ in der DDR und „Didaktik der Mathematik“ in der BRD

Mit dem Befehl Nummer 205 vom Juli 1946 der Sowjetischen Militäradministration in der Sowjetischen Besatzungszone (SBZ) wurde die Lehrerbildung an Universitäten der SBZ in dafür geschaffenen pädagogischen Fa-

¹ Die Geschichte des IfU sowie auch der gesamten Grundschullehrerbildung in der DDR hat Einsiedler (2015) ausführlich dargestellt.

kultäten neu organisiert. In diesem Zusammenhang wurden Professuren und Lehraufträge zur „Methodik des Mathematikunterrichts“ eingerichtet bzw. vergeben (Borneleit 2006). Mit der Bezeichnung „Methodik“ wurde an Traditionen vor 1933 angeknüpft (Walsch 2003). So trugen bedeutende Lehrbücher von Walther Lietzmann den Titel „Methodik des mathematischen Unterrichts“. Es gab aber auch einzelne Stellen mit der Bezeichnung „Didaktik“ (Uni Jena) oder „Methodik und Didaktik der Mathematik“ (Uni Greifswald). In den Pädagogischen Wissenschaften der DDR wurde die Methodik der Unterrichtsfächer als spezielle Didaktik verstanden und mitunter sogar, wie in der Biologie oder Chemie, als Didaktik des Faches bezeichnet (Borneleit 2016).

In der Bundesrepublik Deutschland hatten einige der eingerichteten Professuren zunächst den Begriff „Methodik“ in der Denomination, der aber später in „Didaktik“ umgewandelt wurde (Schubring 2015). Auch damit wurde an Traditionen vor 1933 angeknüpft, so hatte die Stelle von Friedrich Drenckhahn am Pädagogischen Institut in Rostock im Jahre 1930 als erste die Bezeichnung „Didaktik der Mathematik“ (Schubring 2015). In der pädagogischen Literatur der BRD wurde teilweise streng unterschieden zwischen der Didaktik als theoretische Wissenschaft und der Methodik, die sich mit den praktischen Verfahren des Lehrens und Lernens befasst.

Mit Betrachtungen zur Geschichte der beiden Bezeichnungen Methodik und Didaktik lassen sich die Unterschiede offensichtlich nicht erklären. Auch die Auffassungen in den pädagogischen Wissenschaften der beiden Länder sind kein hinreichendes Kriterium. Um die beiden Wissenschaftsdisziplinen zu vergleichen, müssen ihre erklärten Gegenstände genauer betrachtet werden.

Der Gegenstand der Methodik des Mathematikunterrichts wird in einem gemeinsamen Papier der Abteilung Mathematik der APW, der Wissenschaftlichen Rates „Methodik des Mathematikunterrichts“, den Zentralen Fachkommissionen „Methodik des Mathematikunterrichts“ der Universitäten und Hochschulen sowie weiteren Fachkollegen als „Vermittlung und Aneignung mathematischer Bildung im (obligatorischen und fakultativen) Unterricht der allgemeinbildenden Oberschulen und in der außerunterrichtlichen Tätigkeit“ bezeichnet (Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR, Institut für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unter-

richt, Wissenschaftlicher Rat "Methodik des Mathematikunterrichts" 1989, S. 3).

Im 2015 erschienenen Handbuch der Mathematikdidaktik heißt es: „Nach klassischer Auffassung wird die Didaktik als Lehre des Lehrens betrachtet. Für das Fach Mathematik bedeutet dies, dass die Untersuchung von mathematischen Lehr-Lern-Umgebungen damit das Herzstück dessen bildet, was mathematikdidaktische Forschung leisten sollte.“ (Bruder et al. 2015, S. 573)

Die Vermittlung und Aneignung mathematischer Bildung vollzieht sich immer in mathematischen Lehr-Lern-Umgebungen, so dass beide Gegenstandsbeschreibungen als gleichbedeutend anzusehen sind. Häufig wird in beiden Kulturkreisen auch die Formulierung „Lehren und Lernen von Mathematik“ zur Angabe des Gegenstandes verwendet, die auch auf beide Gegenstandsbeschreibungen zutrifft. Eine solche Auffassung ist allerdings aus meiner Sicht zu hinterfragen. Dass Lehren und Lernen im Mathematikunterricht stattfindet, beschreibt lediglich eine äußere Erscheinung. Der Kern des Unterrichts, seine innere Seite sind die bei den Lernenden ablaufenden Prozesse der Herausbildung und Veränderung psychischer Dispositionen. Die Handlungen des Lehrenden sind nur ein Mittel zu diesem Zweck.

Ein Unterschied in den Gegenstandsbeschreibungen besteht in der Weite des Gegenstandes. Während sich der genannte Gegenstand der Methodik des Mathematikunterrichts auf den Unterricht in allgemeinbildenden Schulen und die außerunterrichtliche Tätigkeit bezieht, gibt es bei der Gegenstandsbestimmung für die Didaktik der Mathematik keine Einschränkung auf schulische Unterrichtsprozesse. So gehört auch etwa die mathematische Ausbildung an Universitäten und Hochschulen zum Gegenstand. In der DDR wurden allerdings auch zahlreiche Dissertationen zu diesen Lernprozessen erfasst, so dass in der Praxis durchaus eine Erweiterung des Gegenstandes auf die Hochschulmathematik erfolgte.

Zur weiteren Untersuchung der Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Methodik und Didaktik sollen die Aufgaben und Arbeitsbereiche betrachtet werden. Für die Methodik des Mathematikunterrichts werden als solche formuliert (Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR, Institut für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Wissenschaftlicher Rat "Methodik des Mathematikunterrichts 1989, S. 5–6):

- Erarbeitung von Positionen zu den Ansprüchen an mathematische Allgemeinbildung und zu dem durch den Mathematikunterricht zu erbringenden Beitrag zur Persönlichkeitsentwicklung der Schüler,
- Ausarbeitung entsprechender Lehrgangskonzeptionen,
- Untersuchung zu Grundfragen der Erziehungs- und Aneignungsprozesse in Mathematikunterricht,
- Erarbeitung und Erprobung von Lehrplänen, Lehrbüchern und Unterrichtsmaterialien,
- Unterstützung des Einführungs- und Umsetzungsprozesses der Pläne und Materialien durch spezielle Maßnahmen im Rahmen der Lehreraus- und Weiterbildung,
- wissenschaftliche Bilanzierung der Bewährung der Konzeptionen, Pläne und Materialien,
- Profilierung des Begriffs- und Aussagensystems der Mathematikmethodik als Wissenschafts- und Lehrsystem.

Wie schon in der Gegenstandsbeschreibung erkennbar, konzentrieren sich die Aufgaben der Methodik auf den Mathematikunterricht an den Schulen und insbesondere im Sinne einer Design-Based Research (Reinmann 2005) auf die Entwicklung und Erprobung von Materialien für den Unterricht.

Im Handbuch der Mathematikdidaktik werden folgende Gegenstände und Ziele der mathematikdidaktischen Forschung genannt (Bruder et al. 2015, S. 567–585):

- Festlegung geeigneter Fachinhalte für die unterschiedlichen Jahrgangsstufen und Schulformen und sie hinsichtlich der sich wandelnden Bildungsziele zu legitimieren,
- Aufbereitung der Inhalte zu einem Curriculum (im Sinne eines Lehrplans wie etwa den Bildungsstandards),
- Entwicklung von deskriptiven, explikativen und auch prädiktiven Modellen oder Theorien zum Mathematiklernen,
- Identifizierung und Ausarbeitung von geeigneten Lernmaterialien sowie die Konzeption von Lehr-Lern-Umgebungen,

- Konzeptualisierung der professionellen Kompetenzen bzw. des damit verbundenen professionellen Wissens der Mathematiklehrpersonen als eine Grundlage ihrer Aus- und Fortbildung,
- Untersuchung und Beschreibung von Lernprozessen aus der Perspektive der Schülerinnen und Schüler, insbesondere zur Struktur und Entwicklung mathematischer Kompetenzen, zu Grund- und Fehlvorstellungen.

Ein Vergleich mit den Aufgaben der Mathematikmethodik ergibt eine Übereinstimmung in den meisten Punkten. Während die Formulierung der Aufgaben der Mathematikmethodik eher produktorientiert ist, liegt der Fokus bei den Aufgaben der Mathematikdidaktik auf der Entwicklung von Theorien.

Insgesamt lassen sich auf der Ebene der Gegenstands- und Aufgabenbeschreibung keine wesentlichen Unterschiede zwischen den beiden Disziplinen Methodik des Mathematikunterrichts und Didaktik der Mathematik feststellen. Ihre Bezeichnungen assoziieren allerdings einen unterschiedlichen Grad des Bezuges zur Fachwissenschaft Mathematik. Didaktik der Mathematik bedeutet im klassischen Sinne Lehre des Lehrens von Mathematik. Diese bis weit in die siebziger Jahre hinein vorherrschende Auffassung (Burscheid 2003) spielt aus meiner Sicht auch heute noch bei vielen Äußerungen von Fachwissenschaftlern beziehungsweise aus der Fachwissenschaft kommenden Fachdidaktikern eine Rolle. Didaktik bedeutet in diesem Sinne eine gut strukturierte, geschickte und oft auch vereinfachte Aufbereitung fachlicher Inhalte. Die so genannte didaktische Reduktion ist hier ein zentrales Anliegen. Die bei Lernenden ablaufenden Prozesse der Verinnerlichung der Inhalte spielen bei diesen Betrachtungen keine oder nur eine sehr geringe Rolle. Inhaltsbezogene und personenbezogene Denkweisen sind nach meinen Erfahrungen bei Fachwissenschaftlern oft nicht vereinbar. Die gerade in den ersten Jahren der Entwicklung der Didaktik der Mathematik zu beobachtende enge Anbindung an fachwissenschaftliche Sichtweisen ist unter anderem mit der Rolle von Fachwissenschaftlern in dieser Zeit verbunden. Viele der ersten bedeutenden Fachdidaktiker in der Bundesrepublik aber auch der Fachmethodik in der DDR kommen aus der Fachwissenschaft. Vielen ist aus meiner Sicht der Sprung von der vorrangig fachlichen zu der vorrangig pädagogischen Sichtweise nur in Ansätzen gelungen. Heute zeigt sich dies immer noch in vielen fachdidaktischen Publikationen.

Der starke Bezug zur Mathematik ist auch im Handbuch der Mathematikdidaktik erkennbar. In den Kapiteln 1 und 2 geht es auf 48 Seiten um die Mathematik bzw. Schulmathematik. In den Kapiteln 4 bis 8 zu den fünf Hauptthemengebieten des Mathematikunterrichts geht es auf den 178 Seiten nur sehr selten um konkrete Probleme oder empirische Ergebnisse zum Mathematikunterricht. In den Kapiteln zur Arithmetik und Algebra wird dies sehr knapp in Extraabschnitten behandelt. In den Kapiteln zur Analysis und Geometrie kommt es nur implizit vor und lediglich im Kapitel zur Stochastik findet man längere Ausführungen zu empirischen Ergebnissen und Problemen der konkreten Unterrichtsgestaltung. Der Forschungsgegenstand der Mathematikdidaktik wird im erst im Kapitel 21 auf Seite 573 beschrieben.

Insgesamt gesehen sollte eine Vereinheitlichung der Bezeichnungen der beiden Wissenschaften in der DDR und der BRD zum Mathematikunterricht erfolgen. Aus inhaltlicher Sicht ist die Bezeichnung "Didaktik des Mathematikunterrichts" am treffendsten, ich verwende im Folgenden die abkürzende Bezeichnung „Mathematikdidaktik“ bzw. speziell „Geometriedidaktik“.

Phasen der Entwicklung des Mathematikcurriculums in der DDR

Arbeiten und Forschungen zu fachdidaktischen Fragen waren von Beginn an oft eng verbunden mit der Erarbeitung, Implementation und Evaluation von Lehrplänen, Lehrbüchern und Begleitmaterialien. Deshalb sollen in knapper Weise Phasen der Herausbildung dieser zentralen Planungsgrundlagen für den Mathematikunterricht charakterisiert werden. Eine ausführliche Darstellung findet man bei Borneleit (2003).

Die *erste Phase* der Herausbildung eines Mathematikcurriculums reicht von 1946 bis zum so genannten Mathematikbeschluss im Jahre 1962. In dieser Zeit gab es unterschiedliche Bestrebungen und Resultate, die oft kontrovers diskutiert wurden. So spielten etwa reformpädagogische Ideen durch die politisch bedingte Förderung antifaschistischer pädagogischer Reformkräfte nach 1945 eine wichtige Rolle. Dazu im Gegensatz standen Bemühungen um eine enge Orientierung an der Fachwissenschaft und dem Streben nach einem hohen fachlichen Niveau. Nachdem Anfang der Fünfzigerjahre sehr schnell entwickelte Pläne mit sehr hohen, nicht realisierbaren Anforderungen in Kraft gesetzt wurden, orientierte man sich Mitte der Fünfzigerjahre

mit Stoffkürzungen und Rücknahme der fachwissenschaftlichen Orientierung wieder eher am herkömmlichen Rechen- und Raumlehreunterricht mit reformpädagogischen Ansätzen. Das für eine gesunde Entwicklung notwendige Wechselverhältnis von Unterrichtsentwicklung von unten aus Sicht der realen Gegebenheiten und politischen Vorgaben von oben aus Sicht gesellschaftlicher Erfordernisse konnte sich dann aber nicht weiter entfalten. Die politisch bedingte Forderung nach einem möglichst hohen Niveau mathematischer Allgemeinbildung mit dem Ziel, damit die Überlegenheit des gesellschaftlichen Systems zu beweisen, führte Ende der Fünfzigerjahre zu einer Hypertrophierung des Prinzips der Wissenschaftlichkeit, die bis zum Ende der DDR für den Mathematikunterricht charakteristisch war. Der im Jahre 1959 in Kraft gesetzte neue Lehrplan, der Grundlage aller weiteren Entwicklungen war, wurde durch dieses Prinzip wesentlich bestimmt. Infolge der im Jahre 1958 beschlossenen Erweiterung der obligatorischen Allgemeinbildung für alle um 25 % von 8 auf 10 Jahre, umfasste der Plan erstmalig 10 Schuljahre. 1960 und 61 wurden die Pläne für die erweiterte Oberschule, die die Klassen 9-12 umfasste, in Kraft gesetzt.

Die *zweite Phase* der curricularen Entwicklung begann mit dem im Jahre 1962 gefassten Beschluss der obersten politischen und staatlichen Gremien des Landes zum Mathematikunterricht (Politbüro des ZK der SED und Ministerrat der DDR 17.12.1962). Es war ein in der Geschichte des Mathematikunterrichts einmaliges Ereignis, zu keinem anderen Unterrichtsfach wurde je etwas Analoges beschlossen, was die Wertschätzung und auch Anerkennung der Schwierigkeiten dieses Faches in den Augen der damaligen Politiker zum Ausdruck bringt. Der Beschluss enthielt Festlegungen zur Lehreraus- und Weiterbildung, zum Lehrereinsatz, zur Lehrplan- und Lehrbuchentwicklung. Es war der Beginn der Mathematikolympiaden, die sich heute deutschlandweit verbreitet haben, es wurde die Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule“ ins Leben gerufen, ein Institut für Schulmathematik an der Humboldt-Universität Berlin gegründet und eine „Zentrale Staatliche Kommission für Mathematik“ (ZSKM) berufen, die unter der Leitung des Mathematikers Klaus Härtig bis 1969 tätig war.

Zunächst wurde bereits 1963 der Lehrplan für die Klassen 1-10 präzisiert. Dabei standen fachwissenschaftliche Gesichtspunkte und die Einheitlichkeit des Lehrgangs im Vordergrund. Die Veränderungen betrafen insbesondere die Klassen 1 – 3. 1965 wurden von der ZSKM Entwürfe für weiter entwi-

ckelte Lehrpläne veröffentlicht und breit in der Lehrerschaft und der Didaktik diskutiert. Die Lehrpläne wurden dann bis 1971 schrittweise eingeführt.

Die *dritte Phase* begann Anfang der achtziger Jahre mit der Veränderung der Pläne für die Klassen vier und fünf. Für die anderen Klassenstufen waren ursprünglich nur neu bearbeitete Lehrbücher und Unterrichtshilfen geplant, es zeigte sich aber, dass auch Veränderungen im Lehrplan notwendig sind und so wurde ein neues Lehrplanwerk entwickelt und im Zeitraum 1983 bis 1988 schrittweise eingeführt.

Allen Phasen ist gemeinsam, dass neben der Entwicklung von Lehrplänen auch gleichzeitig entsprechende Lehrbücher, Unterrichtshilfen und didaktische Begleitmaterialien entwickelt wurden, wobei im Laufe der Zeit ein immer höherer Grad der Koordinierung erreicht wurde. In der zweiten Phase wurde zum Beispiel 1975 ein Lehrbuch zur Methodik des Mathematikunterrichts als Gemeinschaftswerk aller Didaktiker veröffentlicht (Walsch und Weber 1975). Die überarbeitete Fassung des Lehrbuches war für 1989 geplant, das fertige Manuskript wurde aber nie publiziert und ist leider verschollen.

Als Curriculum bezeichne ich in Bezug auf die ursprüngliche Bedeutung des Wortes in den siebziger Jahren in seiner vergegenständlichten Form ein abgestimmtes System aus Lehrplan bzw. Rahmenrichtlinie, Schulbüchern, Arbeitsheften u.a. Unterrichtsmitteln sowie einer Darstellung der projektierten Entwicklungsprozesse sowie der Möglichkeiten zu ihrer Gestaltung (Sill 2000). In der DDR handelte es sich in diesem Sinne um eine Curriculumentwicklung, die man heute aus verschiedenen Gründen nicht mehr oder nur in Ansätzen vorfindet.

Rahmenbedingungen und Merkmale der mathematikdidaktischen Forschung in der DDR

Wissenschaftlichkeit des Unterrichts als zentrales Prinzip

Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts wurden wesentlich durch das Prinzip der Wissenschaftlichkeit bestimmt. So wurden etwa in allen Klassenstufen stets die Fachtermini verwendet, wie z. B. Variable und nicht Platzhalter, Exponent und nicht Hochzahl, Kommutativgesetz und nicht Vertauschungsgesetz, Zentriwinkel und nicht Mittelpunktswinkel. Im Geo-

metrieunterricht wurde eine „Hintergrundaxiomatik“ als notwendig angesehen und die Begriffe Kongruenz und Ähnlichkeit streng abbildungsgeometrisch definiert, was nach (Frank 1974) zur Allgemeinbildung gehört. Die Mitarbeiter des Instituts für Schulmathematik hatten bis in die dritte Phase der Curriculumentwicklung einen wesentlichen Einfluss auf die Schullehrbücher.

Eine Folge des Prinzips der Wissenschaftlichkeit war, dass den Fähigkeiten im Definieren, Beweisen und im logischen Denken große Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Eine Gruppe von Didaktikern um Werner Walsch und Hans Bock haben dazu eine Reihe von Forschungsergebnissen erzielt, die in zwei Buchpublikation eingeflossen sind (Walsch 1972; Bock und Walsch 1975). In Lehrplänen und Lehrbüchern waren zahlreiche Beweise gefordert bzw. enthalten. So wurden etwa im Stoffgebiet Ähnlichkeit im Lehrbuch der Klasse 8 zwei Strahlensätze, ihre Umkehrung, Eigenschaften der zentrischen Streckung und der Hauptähnlichkeitssatz bewiesen und es waren zahlreiche weitere Beweisaufgaben enthalten.

Hoher Grad der Koordinierung der Forschung

Die ZSKM enthielt u. a. eine Arbeitsgruppe Forschungskordinierung, aus der 1971 nach Auflösen der ZSKM und Gründung der APW die „Forschungsgruppe“ (später Forschungsgemeinschaft) Mathematik und Mitte der 80er Jahre ein „Wissenschaftlicher Rat“ (WR) hervorging. Den genannten Gremien (am Anfang etwa 20, zuletzt etwa 40 Personen umfassend) gehörten von Anfang an die Leiter der Mathematikmethodik-Bereiche aller Universitäten und pädagogischen Hochschulen an. Diese Gremien trafen sich in der Regel 5-6mal im Jahr für je einen Tag, woraus etwa 100 Zusammenkünfte resultierten, die in ca. 500 Materialien dokumentiert sind. Die Zusammenkünfte im WR wurden genutzt, um

- über generelle schulpolitische Entwicklungen und Materialien zu informieren,
- Grundrichtungen und Konzepte der weiteren Forschungsarbeit zu beraten,
- Entwürfe zu Lehrplänen und andere Forschungsergebnisse der einzelnen Methodikbereiche, Weiterbildungsprogramme, Veröffentlichungspläne der Verlagsabteilung u. a. zu diskutieren,

- gemeinsame Materialien (insbesondere das Lehrbuch „Methodik des Mathematikunterrichts“) oder Veranstaltungen (wie z. B. die jährlichen Doktorandenkolloquien) vorzubereiten.

Anfang der achtziger Jahre wurden Arbeitsgruppen des WR zu folgenden Themen gebildet: Geometrieunterricht, Arithmetikunterricht, Mathematikunterricht in der Unterstufe, Stochastik, Informatik, Erziehung im Mathematikunterricht und zu Spezialschulen. Geplant waren noch eine AG zur Abiturstufe und zur Theorie der Mathematikmethodik. Die Arbeitsgruppen wurden von Vertretern einer Einrichtung in Abstimmung mit der APW geleitet. So war die Humboldt-Universität Berlin für die Arbeitsgruppe Geometrie zuständig. Die Ergebnisse der Beratungen der Arbeitsgruppen sind in der Regel nur in internen Papieren enthalten. Eine Ausnahme bildet die AG Geometrie, die Ergebnisse von zwei wissenschaftlichen Tagungen (1983 und 1987) in Tagungsbänden publizierte.

Hoher Stellenwert und Anteil von Arbeiten zur Curriculumforschung

DDR-Didaktiker waren in alle LP-Entwicklungen eingebunden. Die zentrale Koordinierung und Hauptverantwortung lag in den Händen der Abt. Mathematik der APW. Alle Pläne wurden auf den Beratungen des WR vorgestellt und diskutiert.

Die Entwicklung und Evaluierung von Schullehrbüchern lag in Verantwortung einzelner Didaktikbereiche. So wurden die Arbeiten an den Lehrbüchern der Klassen 5, 6 und 8 von der Humboldt-Universität Berlin verantwortlich geleitet. Für die Klassen 7 und 10 waren die Uni und die PH in Halle und für die Klasse 9 die Uni in Leipzig verantwortlich.

Trotz der erfolgten Absprachen und Koordinierungsbemühungen führte diese Aufteilung doch zu zahlreichen Brüchen in dem Lehrwerk, die insbesondere durchgängige Entwicklungsprozesse betrafen. Dazu gehören u. a. die heuristischen Orientierungen zum Lösen von Sachaufgaben und auch die langfristige Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens.

Zu allen Lehrbüchern wurden Unterrichtshilfen entwickelt, die konkrete Vorschläge zur Stoffverteilung, zu fachdidaktischen Fragen und zur Gestaltung einzelner Unterrichtsstunden bzw. Stoffkomplexe enthielten. Die Unterrichtshilfen für die Klassen 5 bis 10 wurden an der TU Dresden entwickelt und erprobt.

Es gab groß angelegte Forschungsprojekte zur Erprobung und Evaluierung von curricularen Materialien. So gab es einen Großversuch zur Einführung des Taschenrechners. Aber,

- an der Grundstruktur des LP wurde nach 1959 wenig geändert,
- eine Veröffentlichung von Kritik an LP und LB war nicht erwünscht,
- die Bewährungsanalysen waren meist positiv, obwohl der Unterricht oft nicht sinnvoll war,
- es gab keine Entwicklung mehrerer Lehrbuchwerke.

Schulpraxis als Ausgangspunkt und Ziel fast aller Forschungsarbeiten

Neben den unmittelbar auf die schulische Praxis ausgerichteten Forschungsarbeiten zum Curriculum war auch die Mehrzahl der sonstigen Forschungsprojekte, insbesondere die wissenschaftlichen Qualifizierungsarbeiten eng mit der Schulpraxis verbunden. Ausgangspunkt eines Dissertationsvorhabens waren in der Regel empirische Befunde aus der Schulpraxis. In der Mehrzahl der Arbeiten wurden dann Vorschläge für Unterrichtsprozesse im obligatorischen oder fakultativen Unterricht bzw. für die Arbeit mit mathematisch besonders befähigten Schülern entwickelt und erprobt und am Ende Schlussfolgerungen für die Unterrichtspraxis abgeleitet.

Verpflichtende Weiterbildung aller Lehrpersonen durch Fachwissenschaftler und Didaktiker

Der Begriff Weiterbildung in der DDR entspricht dem aktuellen Begriff Fortbildung. Ab dem Schuljahr 1969/70 war Fortbildung für alle Lehrer verbindlich. Im Laufe von 4-5 Jahren musste ein Pflichtprogramm von 100 h in den Ferien absolviert werden. Dazu gab es ein Kurssystem, das alle vier bis fünf Jahre wechselte. In dem ersten Kurs von 1973-1977 dominierten fachwissenschaftliche Themen, darunter Darstellende Geometrie und geometrische Abbildungen. In den folgenden Kursen erhöhte sich der Anteil didaktischer Themen auf etwa 2/3. Im letzten Kurssystem ab dem Schuljahr 1987/88 gab es drei Kurse zur Auswahl, darunter einen zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens.

Die wichtigste Quelle zu schulinternen Fortbildungen von Mathematiklehrpersonen war die Zeitschrift „Mathematik in der Schule“. Sie wurde von schätzungsweise 90 % der Mathematiklehrpersonen abonniert, meist regel-

mäßig in den Fachzirkeln der Schulen ausgewertet und war Grundlage für die Arbeit der Fachkommissionen. Sie enthielt alle für die Mathematiklehrpersonen wichtigen Informationen (Lehrplanentwicklungen, Rezensionen, Auswertungen der zentralen Prüfungen u. a. m.). Sie war damit quasi ein zentrales Mitteilungsblatt für alle Mathematiklehrpersonen. Es war allerdings kaum möglich, Artikel mit Vorschlägen zu veröffentlichen, die von dem aktuellen Lehrplan abwichen. Das Hauptargument der dabei sehr rigide vorgehenden Redaktion war, dass man die Lehrpersonen nicht verwirren wollte.

Einheitliche weltanschauliche und erkenntnistheoretische Grundlagen

Als weltanschauliche Grundlage wurde der Marxismus/Leninismus deklariert. Ohne hier näher darauf eingehen zu können sei bemerkt, dass es sich in der Realität bei wesentlichen Fragen weder um Marxismus noch (zum Glück) um Leninismus handelte. Der Kern des Marxismus ist die Anerkennung der objektiven Dialektik aller Dinge und Erscheinungen, das heißt die Anerkennung der gleichzeitigen Existenz einander logisch ausschließender Entitäten als notwendige Bedingung für Entwicklungsprozesse. Diese Grundidee wurde weder bei der Gestaltung des politischen und wirtschaftlichen Systems noch des Mathematikunterrichts beachtet. So wurden etwa den Auffassungen Piaget' zu Lernen als Wechselverhältnis von Akkommodation und Assimilation und von Bruner zum Wechselverhältnis der Darstellungsebenen, die Ansätze der Grundidee in Bezug auf Lernprozesse enthalten, keine Beachtung geschenkt. Mit den in der DDR dominierenden lernpsychologischen Grundlagen von Galperin und Lompscher wird das Lernen eher als ein mechanistischer Vorgang aufgefasst. Die Diskussion und Ausweisung weltanschaulicher und erkenntnistheoretischer Grundlagen sind aus meiner Sicht eine wichtige Voraussetzung für fachdidaktische Forschungen und für das Verständnis ihrer Ergebnisse.

Ergebnisse didaktischer Forschungen in der DDR zum Geometrieunterricht

Die konzeptionellen Grundlagen des Geometrieunterrichts wurden vor allem an der Humboldt-Universität Berlin (HUB) und insbesondere im Institut für Schulmathematik entwickelt. Hauptvertreter waren Brigitte Frank und Manfred Dennert von der HUB sowie der Mathematiker Benno Klotzek

von der PH Potsdam. Sie hatten dann auch wesentlichen Einfluss auf entsprechende Lehrplan- und Lehrbuchinhalte. Die Grundkonzeption entstand Ende der fünfziger Jahre und wurde bis in die dritte Phase der Curriculumentwicklung in wesentlichen Punkten beibehalten. Dazu gehörten u. a. die Orientierung an einem Axiomensystem zur Euklidischen Geometrie, der phasenweise abbildungsgeometrische Aufbau des Geometrielehrgangs und die exakte Definition fast aller verwendeten Begriffe. In der letzten Generation des Curriculums wurden lediglich einige theoretische Überhöhungen zurückgenommen und das teilweise sehr hohe fachliche Niveau reduziert.

Im Folgenden werden ausgewählte Ergebnisse vorgestellt und kommentiert. Auf ausführliche Bezüge zu wissenschaftlichen Arbeiten außerhalb der DDR wird aus Umfangsgründen verzichtet. Ich werde in einigen Fällen meine weiterführenden Überlegungen zur Diskussion stellen.

Publikationen und Tagungen

Anfang der siebziger Jahre erschienen Bücher zum Definieren (Fuhrmann 1973), zum Beweisen (Walsch 1972) und zum logischen Denken (Bock und Walsch 1975), in denen Beispiele aus dem Geometrieunterricht eine wichtige Rolle spielten. Eine vierte Monographie behandelt die Methodik der Darstellenden Geometrie (Gimpel 1973).

In der Reihe „Beiträge zum Mathematikunterricht“ erschienen 8 Titel, von denen kein Titel fachdidaktische Probleme des Geometrieunterrichts behandelte.

Von den 20 fachwissenschaftlichen Publikationen in der Reihe „Mathematik für Lehrer“ befassten sich nur vier mit geometrischen Problemen (Böhm et al. 1974, 1975; Schröder 1974; Klotzek und Quaisser 1978). Für die Grundschullehrererausbildung gab es ein spezielles Fachbuch zur Geometrie mit methodischen Hinweisen zur Unterrichtsgestaltung (Starke und Türke 1972, 1977)

Noch geringer war der Anteil von Dissertationen A und B zum Geometrieunterricht. Von den 269 bisher in Madipedia erfassten Dissertationen A beschäftigen sich nur 18 und von den 43 von mir zusammengestellten Dissertationen B nur vier mit Problemen des Geometrieunterrichts. Die Liste dieser Arbeiten ist im Anhang enthalten. Auch in der Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule“ gibt es im Verhältnis zu den anderen Themengebieten

nach meinem Eindruck wenige Artikel zum Geometrieunterricht. Eine genaue Analyse liegt mir nicht vor.

Dieser geringe Anteil von Arbeiten ist erstaunlich, da in den Klassen 1-4 etwa ein Sechstel und in den Klassen 5-10 etwa ein Drittel der Unterrichtszeit für geometrische Themen verwendet wurde. Eine der Ursachen könnte die Dominanz stoffbezogener Denkweisen zum Geometrieunterricht und die damit verbundene Vernachlässigung schülerbezogenen Denkens sein sowie die aufgrund bildungspolitischer Vorgaben geringen Möglichkeiten zu grundlegenden Veränderungen des Geometrielehrgangs.

Es fanden insgesamt vier Kolloquien zum Geometrieunterricht statt, 1968 in Berlin, 1981 in Potsdam, 1983 in Egsdorf bei Berlin (Humboldt-Univ. Berlin 1984) und 1987 in Wendisch-Rietz bei Berlin (Frank 1988b). Einen Überblick über Hauptinhalte und Ergebnisse der ersten drei Kolloquien gibt Frank auf dem vierten Kolloquium (Frank 1988a).

Zu allgemeinen Fragen des Geometrieunterrichts

Im Folgenden sollen einige Beispiele für die stoffbezogene Denkweise bei der Diskussion allgemeiner Fragen des Geometrieunterrichts angeführt werden. Auf die besondere Rolle, die der „mengentheoretischen Fundierung“ und dem damit verbundenen abbildungsgeometrischen Aufbau des Geometrieunterrichts beigemessen wurde, ist bereits Rembowski in ihrem Beitrag auf der AK-Tagung 2012 ausführlich eingegangen (Rembowski 2013).

In einem Grundsatzbeitrag stellt Frank (1974), die Leiterin der Forschungsgruppe des Bereichs Schulmathematik und Methodik des Mathematikunterrichts an der HUB u. a. folgendes fest. „Bei der Konzipierung des Geometrielehrgangs der allgemeinbildenden Schule können und sollten folgende Gesichtspunkte berücksichtigt werden:

1. Entwicklung eines auf eine Theorie für die euklidische Geometrie bezogenen einheitlichen Begriffssystems, wobei das anfänglich fast ausschließliche experimentelle Herangehen (Verwenden der Anschauung) an die Begriffsbildung über die Schulung des Abstraktionsvermögens der Schüler allmählich durch das Definieren der noch einzuführenden Begriffe abgelöst wird.

2. Erarbeiten eines der zugrunde gelegten Theorie entsprechenden Systems von Aussagen, wobei auch hier das Begründen durch Berufung auf die Anschaulichkeit des jeweiligen Sachverhalts allmählich durch Schulung des Abstraktionsvermögens und der Fertigkeiten im logischen Schließen fast gänzlich verdrängt wird.“ (S. 479 f.)

Frau Frank stellt dann im Weiteren Überlegungen an, wie der Geometrieunterricht noch stärker mit dem übrigen Unterricht verbunden werden kann, indem zum Beispiel bei der Arbeit mit Tabellen und Funktionen Bezüge zu geometrischen Abbildungen hergestellt werden sowie Relationen und Operationen in verschiedenen Gebieten in Beziehung gesetzt werden. Zur Weiterentwicklung des Geometrieunterrichts schlägt sie unter anderem vor, auch andere Axiomensysteme wie etwa das von Schur in Betracht zu ziehen (das dann im anschließenden Artikel von Dennert ausführlich vorgestellt wird) oder die Spiegelung vor der Verschiebung zu behandeln, damit sich die Schüler schneller von den anschaulichen Vorstellungen einer mechanischen Bewegung lösen können.

Es gab durchaus kritische Nachfragen an das Gesamtkonzept von verantwortlicher Stelle. So warf auf der Tagung in Eggsdorf 1983 der Leiter der Abteilung Mathematik der APW, Karlheinz Weber, die Frage auf, ob die abbildungsgeometrische Fundierung des Lehrganges weiterhin als eine angemessene Orientierung anzusehen ist und ob eine Hintergrundaxiomatik erforderlich ist.

Dennert und Lorenz (1984) beschäftigen sich ausführlich mit der Behandlung der Begriffe Kongruenz und Ähnlichkeit und den geäußerten Kritiken zum abbildungsgeometrischen Vorgehen. Sie kommen zu dem Ergebnis, dass die Kongruenzrelation zwar als „deckungsgleich“ eingeführt werden sollte und auch die Ähnlichkeitsrelationen durch das Arbeiten mit maßstäblichen Vergrößerungen und Verkleinerungen vorzubereiten ist, aber eine Behandlung der Abbildungen weiterhin erforderlich sei. Als Begründung führen sie unter anderem an, dass der Begriff „deckungsgleich“ nicht mathematisch erklärt werden kann, weil man damit bei der Kongruenz räumlicher Figuren auf Schwierigkeiten stößt (S. 98). Die Einführung der Ähnlichkeitsabbildung halten sie für erforderlich, um undefinierte und fragwürdige Begriffe wie „entsprechend“ oder „gleichliegend“ zu vermeiden.

Auch 1987 ist Frau Frank trotz der kritischen Hinweise und einiger, wenn auch zaghafter Beschwerden aus der Schulpraxis noch der festen Meinung,

dass „Wissen über geometrische Abbildungen, über einige ihrer Eigenschaften und den Zusammenhang zwischen den geometrischen Abbildungen und der Kongruenz- bzw. Ähnlichkeitsrelation für beliebige Figuren (auch im Raum) zur Allgemeinbildung gehört, ...“ (Frank 1988a, S. 14). Interessanterweise ändert sie ihre Meinung und schlägt 1990 vor, die Ähnlichkeit zweier Figuren über den Begriff „maßstäbliche Darstellung“ zu definieren (Frank 1990).

Viele der Darlegungen in den Schriften aus der DDR zu generellen Problemen des Geometrieunterrichts lassen sich als didaktisch orientierte Sachanalysen ansehen, die in den Anfängen der Entwicklung der Mathematikdidaktik in der BRD ebenfalls eine zentrale und bestimmende Rolle spielten (Burscheid 2003, S. 149). Sie sind aus meiner Sicht auch heute eine durchaus notwendige aber keinesfalls hinreichende Grundlage für Entscheidungen zur Gestaltung des Mathematikunterrichts. So diskutieren Dennert und Lorenz (1982) in einem Zeitschriftenartikel folgende Fragen, zu denen sie Lösungsvorschläge unterbreiten, die auch heute noch von Interesse sind.

- Sollen für eine Strecke und deren Länge unterschiedliche Bezeichnungen verwendet werden?
- Welche besonderen Symbole für Strecken, Strahlen, Geraden, Dreiecke u. a. sollten benutzt werden?
- Sollte bei Relationen vorzugsweise oder gar immer der Relationscharakter durch Hinzufügungen wie „einander“ deutlich gemacht werden?
- Wie steht es mit der Verwendung des unbestimmten und bestimmten Artikels und anderen sprachlogischen Fragen?

Einen ganz anderen Zugang zu allgemeinen Fragen des Geometrieunterrichts als die Kollegen an der Humboldt- Universität in Berlin haben Didaktiker an der PH Potsdam entwickelt. In der Tradition der dortigen Auffassungen zu theoretischen Grundfragen der Mathematikdidaktik haben sie das Arbeiten mit Aufgaben zur Entwicklung von Kenntnissen und Fähigkeiten in den Mittelpunkt gerückt (Müller 1984, s. auch die Dissertationen von Zahn und Brückner im Anhang).

Aus den knapp skizzierten historischen Tatsachen kann man aus meiner Sicht zwei generelle Schlussfolgerungen ziehen, die für die heutige Zeit von Bedeutung sind.

- Die Entwicklung des Mathematikunterrichts wird wesentlich durch zwei komplementäre Denkweisen bestimmt, das stoffbezogene Denken und das auf die Entwicklung psychischer Dispositionen bei Lernenden bezogene Denken. Es gibt am Mathematikunterricht interessierte Mathematiker, bei denen stoffbezogene Denkweisen tief verwurzelt sind. Es gibt aber auch einige, die sich davon lösen und auch die komplementäre Sichtweise einnehmen können.
- Die Ergebnisse von Bewährungsanalysen von Unterrichtsmaterial sind kein hinreichendes Kriterium für die Bewertung dieser Materialien. Es lässt sich im Unterricht vieles realisieren, auch wenn es nicht sinnvoll oder gar notwendig ist. In meinen Lehrbuchanalysen in den neunziger Jahren bin ich auf viele didaktische Unzulänglichkeiten und sogar fachliche Fehler gestoßen.

Über diese generellen Feststellungen hinaus kann man aber ausgehend von den Merkmalen und Erfahrungen des Mathematikunterrichts in der DDR auch folgende kritische Fragen in der heutigen Zeit stellen.

1. Wie ist das Verhältnis stoffbezogenen und lernerbezogenen Denkens bei den folgenden Problemen?
 - Welchen Charakter haben die Leitideen der Bildungsstandards?
 - Worauf beziehen sich fundamentale Ideen?
 - Worauf beziehen sich didaktisch orientierte Sachanalysen?
 - Welchen Charakter haben Aufsätze zu elementar mathematischen Problemen, bei denen am Ende quasi mit einem „didaktischen Schwänzchen“ auf mögliche Verwendung im Mathematikunterricht hingewiesen wird?
2. Welchen Stand hat heute die Curriculumforschung?
 - Im Handbuch der Mathematikdidaktik (Bruder et al. 2015) gibt es nur wenige Aussagen. Die Theorie der konstruktiven Entwicklungsforschung von Wellenreuther und Zech wird nicht erwähnt.
 - Warum gibt es keine Analysen von Lehrplänen und Lehrbüchern?
 - Warum gibt es kaum kritische Betrachtungen zu den Bildungsstandards? Meine Arbeiten dazu werden im Handbuch nicht genannt.
3. Bei wissenschaftlichen Arbeiten muss man sich oft folgendes fragen.

- Welches konkrete Problem des Mathematikunterrichts soll damit bearbeitet werden?
 - Entsprechen die Rahmenbedingungen der empirischen Untersuchungen dem normalen Unterricht?
 - Welche Konsequenzen ergeben sich aus den Resultaten für die Schulpraxis?
4. Wie erreichen wir als Didaktiker heute die Lehrpersonen? Welcher Anteil der Lehrpersonen liest Zeitschriften und geht zu Fortbildungen?
 5. Warum werden bei großen wissenschaftlichen Arbeiten und Projekten die weltanschaulichen und epistemologischen Ansichten der Autoren nicht angegeben?

Aber wird aus meiner Sicht der Bogen bei theoretischen Arbeiten oft weit überspannt. Es werden bereits Theorien über Theorien entwickelt. Ein prägnantes Beispiel ist das Kapitel 24 im Handbuch der Mathematikdidaktik, in dem ohne eine einzige Theorie konkret zu beschreiben Metabetrachtungen über Theorien von Theorien angestellt werden, also praktisch in der dritten Dimension (Theorie³) gearbeitet wird.

Zur Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens

Obwohl in der DDR in Publikationen zu grundsätzlichen Fragen die Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens stets als ein wichtiges Ziel des Geometrieunterrichts genannt wird, gab es dazu in dem Lehrplan und dem Lehrbuch kein durchgängiges Konzept. Während in den Klassen 1-4 ein vielfältiges Aufgabenmaterial eingesetzt wurde, traten in den Klassen 5-10 nur sehr vereinzelt und teilweise keine entsprechenden Inhalte auf. Eine Ausnahme bildet das Stoffgebiet Darstellende Geometrie in der Klasse 7. In diesem Stoffgebiet wurden Elemente der Darstellenden Geometrie wie Projektionsarten, Ein- und Zweitafelbilder, Schrägbilder, wahre Größe von Figuren sowie Lagebeziehungen im Raum behandelt. Es sind vermutlich folgende Überlegungen, die zur Aufnahme des Stoffgebiets Darstellende Geometrie in den DDR-Lehrplan führten. Um das als wichtig erkannte räumliche Vorstellungsvermögen im Sinne einer stoffbezogenen Denkweise an mathematische Inhalte zu koppeln, schien das Thema Darstellende Geometrie besonders geeignet zu sein. Auch ein Bezug zur Kleinschen Reform ist denkbar, bei der neben der Erziehung zum funktionalen Denken die Stär-

kung des räumlichen Anschauungsvermögens ein zentrales Ziel war und sowohl mit einem abbildungsgeometrischen Aufbau als auch mit Elementen der Darstellenden Geometrie verbunden wurde, die im 19. Jahrhundert ein eigenes Schulfach war. Dieser Bezug stellte Neigenfind (1961) her. Weiterhin gibt es einen Zusammenhang mit der damals nachdrücklich vorangehenden Polytechnisierung der allgemeinbildenden Schule. So heißt es in einem vom DPZI herausgegebenen methodischen Handbuch für den Lehrer: „Der darstellenden Geometrie darf nicht nur in den im Lehrplan für sie direkt vorgesehenen Stunden Aufmerksamkeit geschenkt werden. ... Je umfassender und gründlicher die Einführung in die Grundkonstruktionen der darstellenden Geometrie erfolgt, umso besser und schneller wird sich das Raumvorstellungsvermögen unserer Schüler entwickeln. Dadurch wird nicht nur eine wesentliche Voraussetzung für das Fach Technisches Zeichnen, sondern auch für das Verständnis der Wirkungsweise komplizierter technischer Geräte und Anlagen geschaffen.“ (Deutsches Pädagogisches Zentralinstitut, Sektion Unterrichtsmethodik und Lehrpläne 1960, S. 344)

Die Erwartungen an den Beitrag des Stoffgebietes Darstellende Geometrie zur Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens haben sich nicht erfüllt, wie z. B. Goldberg (1989) im Ergebnis ihrer Befragungen von Lehrpersonen der Sekundarstufe I feststellt. Es steht das Trainieren von Standardaufgaben im Vordergrund, die durch Anwendung von auswendig gelernten Verfahren gelöst werden. Auf die Fundierung dieser Konstruktionsverfahren durch räumliche Vorstellungen wird wenig Wert gelegt. Sie stellte weiterhin fest, dass im gesamten Mathematikunterricht von einem Teil der Lehrpersonen kaum oder gar nicht an der Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens gearbeitet wird (S. 495).

Die vorrangig algorithmische Ausrichtung des Stoffgebiets Darstellende Geometrie ist bereits in der Konzeption des Lehrbuches, in den Unterrichtshilfen und dem Lehrbuch von Gimpel zu Methodik der Darstellenden Geometrie (Gimpel 1973) angelegt. Gimpel äußert sich lediglich auf sechs der 222 Seiten zu Problemen der Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens ohne konkrete Faktoren oder Aufgabentypen anzugeben.

Die Feststellungen von Goldberg waren durchaus vielen Didaktikern bereits vorher bekannt. Grundlegende Änderungen des Lehrplans im Hinblick auf eine kontinuierliche Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens wurden aber von keinem vorgeschlagen. Neben der Tatsache, dass Verände-

rungen an Plänen von zentraler Stelle nicht gewollt waren, gab es aber auch kein didaktisches Konzept für diesen Entwicklungsprozess. Wie aus den Vorträgen von Maresch und Gaab auf der 31. Herbsttagung des AK Geometrie 2014 hervorgeht, hat sich die Situation bis heute wenig geändert. Es findet weiterhin keine systematische Entwicklung im Unterricht statt und es gibt dafür kein elaboriertes didaktisches Konzept.

In der DDR wurden als eine Reaktion auf die genannten beiden Tatsachen eine Reihe von Vorschlägen zur Förderung des Raumvorstellungsvermögens in verschiedenen Themengebieten auch außerhalb der Geometrie unterbreitet (Bruchhold 1988, Kimel 1988, Gimpel 1984, Geise 1982). Vor allem der Berliner Didaktiker Kurt Ilgner hat sich diesen Problemen gewidmet (1974, 1978, 1984, 1982). Mit seinen Schulversuchen in den Klassen 2 und 3 in den siebziger Jahren hat er die Aufnahme von zahlreichen Aufgaben zur Raumvorstellung in die Grundschullehrbücher beeinflusst. Durch seinen unerwarteten Tod im Jahre 1984 konnte er viele seiner Projekte nicht beenden, so auch ein Konzept für die langfristige Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens (Frank und Siury 1986).

Die Dissertation von Thamm (1977) zum räumlichen Vorstellungsvermögen enthält eine Reihe interessanter Ansätze. In Auswertung psychologischer Arbeiten aus der Sowjetunion und DDR definierte er die Begriffe Raumwahrnehmung und Raumvorstellung nicht über Faktorentheorien, sondern über relevante Anforderungen.

„Unter Raumwahrnehmung verstehen wir sowohl einen speziellen individuellen Wahrnehmungsprozess, dessen Erkenntnisobjekt die räumlichen Eigenschaften und Relationen der Gegenstände ... sind als auch die als Ergebnis dieses Prozesses entstehenden Abbilder der räumlichen Eigenschaften und Relationen“ (S. 83)

„Unter Raumvorstellung verstehen wir eine spezielle Form der Vorstellung, das heißt einen individuellen Prozess der sinnlichen Widerspiegelung räumlicher Eigenschaften und Relationen, der sich auf der Basis reproduzierter Raumwahrnehmungen ohne unmittelbare Gegenwart der Wahrnehmungsobjekte selbst vollzieht, indem die reproduzierten Abbilder räumlicher Gegebenheiten einer mehr oder weniger stark ausgeprägten Umformung und schöpferischen Verarbeitung unterliegen, ...“ (S. 89f.)

„Das Resultat dieses spezifischen Widerspiegelungsprozesses heißt ebenfalls Raumvorstellung. Durch Raumvorstellung entstandene sinnliche Abbilder

räumlicher Eigenschaften und Relationen ... sind durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

- Sie besitzen einen höheren Verallgemeinerungsgrad und damit eine stärker ausgeprägte rationale Komponente als die Raumwahrnehmungen, auf deren Grundlage sie entstanden sind....
- Sie sind sinnlich-anschaulich ideelle Bilder nicht gegenwärtiger Repräsentanten von Begriffen räumlicher Gegebenheiten...“ S. 90f.

Thamm entwickelte eine Testarbeit, die er 1970/71 mit 582 Schülern der Klassen 7, 8 und 9 im heutigen Mecklenburg-Vorpommern erprobte. Der Median der Ergebnisse betrug 6 von 16 Punkten.

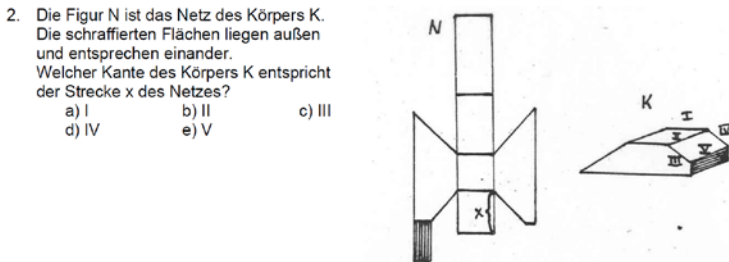


Abb. 1 Aufgabe aus der Testarbeit von Thamm (1977)

Er entwickelte weiterhin einen Lehrgang für einen fakultativen Kurs im Umfang von 40 Doppelstunden über zwei Schuljahre, den er in zwei Kursen erprobte und evaluierte. Zu den Aufgabentypen gehörten Aufgaben zu geometrischen Orten im Raum und Konstruktionen von Durchstoßpunkten, Schnittgeraden und Schnittflächen in räumlichen Darstellungen durch „innere Projektion“.

Maier hat in seiner bemerkenswerten Dissertation (1994, 1999) Anregungen aus der DDR Literatur, insbesondere aus den Arbeiten von Ilgner aufgenommen. Die Arbeit von Thamm hat er allerdings nicht berücksichtigt. In Auswertung psychologischer Literatur unterbreitet Maier einen Vorschlag für ein System von Faktoren des räumlichen Vorstellungsvermögens (1999, S. 52), das eine Grundlage für weitere Arbeiten ist und z. B. von Maresch im Projekt GeodiKon verwendet wird (Maresch 2015). Grüßing (2012) hat seine Kategorisierung für Aufgaben zum Unterrichts und zum Testen räumlicher Fähigkeiten verwendet. Pinkernell (2003) entwickelte ein integratives

Gesamtmodell für räumliches Vorstellungsvermögen, das die Kategorien räumlich-visuelles Operieren, geometrisches Denken und Visualisierungskompetenz umfasst.

Trotz dieser zahlreichen Arbeiten gibt es heute aus meiner Sicht noch folgende Probleme, denen sich der AK Geometrie widmen sollte.

- Grundlegende Begriffe wie räumliches Vorstellungsvermögen, räumliches Denken, räumliche Fähigkeiten, Anschauungsvermögen, Raumwahrnehmung, Visualisierung, Veranschaulichung und andere sind nicht hinreichend bestimmt und voneinander abgegrenzt.
- Es wird oft nicht beachtet, dass Wahrnehmung und Vorstellung sowohl den Prozess als auch das Ergebnis bezeichnen.
- Die Verbindung der Modelle mit den üblichen Unterrichtsinhalten und Aufgabentypen ist noch nicht befriedigend gelöst.
- Es fehlen Konzepte der langfristigen Entwicklung und Integration in den Unterricht.
- Die Rolle von Elementen der Darstellenden Geometrie ist unklar.

Maier (1994) beschrieb die Defizite in sehr deutlicher Weise:

„Wie ... beschrieben, ist einerseits die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens ... an zentraler Stelle verankert, andererseits klafft in Bezug auf eine angemessene unterrichtliche Realisierung dieser Zielforderung eine immense Lücke. So findet kein kontinuierlicher und umfassender Aufbau statt, da:

- *in den Klassen 5-9 im alltäglichen Unterrichtsgeschehen kaum räumliche Geometrie betrieben wird,*
- *eine Vielzahl möglicher handlungsorientierter Tätigkeiten im formenkundlichen und darstellenden Bereich und Aktivitäten zu Kopfgeometrie stark vernachlässigt werden und*
- *wesentliche Komponenten des räumlichen Vorstellungsvermögens und besonders geeignete Inhalte zu Schulung dieser Faktoren weitgehend unbeachtet bleiben.“ S. 313*

In seinen Thesen zu didaktischen Konsequenzen aus der aktuellen Misere forderte er z. B.

„Der derzeitige Geometrieunterricht ist grundlegend zu reformieren, da das bewusste Training des räumlichen Vorstellungsvermögens nur eine untergeordnete Bedeutung besitzt, ...“ S. 416

„Ein kontinuierlicher Aufbau räumlich-visueller Lerninhalte ist unbedingt zu gewährleisten, ...“ S. 418

Zusammen mit Lehrerinnen und Lehrern aus Mecklenburg-Vorpommern habe ich das System der Faktoren des räumlichen Vorstellungsvermögens von Maier im Hinblick auf den Unterricht modifiziert. Wir legen unseren Vorschlägen die folgenden 6 Komponenten des Raumvorstellungsvermögens zugrunde:

K 1: Lesen und Anfertigen von räumlichen Darstellungen

K 2: Lesen und Herstellen von Ansichten

K 3: Arbeit mit Körpernetzen und Papierfaltungen

K 4: Zusammensetzen und Zerlegen von Körpern

K 5: Erkennen und Herstellen von Rotationen

K 6: Räumliche Orientierung

Für diese Komponenten haben wir Mindestanforderungen bestimmt, die wir sicheres Wissen und Können nennen, und entsprechende Musteraufgaben entwickelt. Die Mindestanforderungen für K2 lauten z. B.:

Die Schüler können sicher

- zu einer gegebenen räumlichen Darstellung eines Körpers seine Ansicht von oben, von vorn oder von einer Seite identifizieren, vervollständigen, skizzieren oder zeichnen,
- Ansichten von zwei zusammengesetzten Quadern skizzieren,
- eine zweite Ansicht zu einer gegebenen Ansicht eines elementaren Körpers skizzieren.

Auf der Grundlage der Aufgaben haben wir ein Konzept zur systematischen Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens von Kl. 5 bis 10 entwickelt. Die Aufgabenbroschüre und das Konzept können von der Seite www.mathe-mv.de herunter geladen werden.

Zum Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben

Es gibt aus der DDR zahlreiche Publikationen zur Behandlung geometrischer Konstruktionsaufgaben im Unterricht, die für heutige Forschungen

und Entwicklungen von Interesse sind, z.B. (Wienke 1973), (Wienke und Sill 1981b, 1981a), (Pietzsch 1982), (Dennert und Ilgner 1982), (Lemmitzer 1985), (Dennert 1987), (Lehmann und Scheler 1988), (Scheler 1988) und (Lorenz 1988). Es wurden in den Arbeiten u. a. folgende Fragen diskutiert.

- Welche Ziele sollten mit der Behandlung geometrischer Konstruktionsaufgaben verfolgt werden?
- Welche Aufgabentypen sollten ausgewählt werden?
- Wie sollte die Aufgabenstellung bei Konstruktionsaufgaben formuliert werden?
- Welche Zeichenfertigkeiten sollten ausgebildet werden?
- Welche Zeichengeräte sollten zugelassen werden und wie sollten mit diesen bestimmte Konstruktionen ausgeführt werden?
- Zu welchen Konstruktionsaufgaben sollten Fertigkeiten entwickelt werden und welche sollten als Problemaufgaben behandelt werden?
- Wie können Schüler zum selbstständigen Finden eines Konstruktionsplanes befähigt werden?
- Wie sollten Konstruktionsbeschreibungen formuliert werden? Welche Leistungen im Beschreiben von Konstruktionen sind erstrebenswert und wie können wir die Schüler dazu befähigen?
- Welche Bedeutung kommt den Überlegungen zur Lösbarkeit bzw. zur Anzahl der Lösungen zu?

Wienke (1973) hat sich umfassend mit den Problemen von Konstruktionsaufgaben beschäftigt, ein System heuristischer Orientierungen zum Lösen dieser Aufgaben entwickelt und dieses empirisch erprobt. Im damaligen obligatorischen Unterricht der DDR und auch noch in vielen Fällen heute werden Konstruktionsaufgaben zu Dreiecken mit Kongruenzsätzen algorithmisch gelöst. Bei anderen Figuren wurde dann mit der Methode der Teildreiecke das Problem auf die Konstruktion von Dreiecken zurückgeführt. Es wurden einige Konstruktionen mit Sätzen am Kreis und zur Ähnlichkeit als besondere Fälle gelöst. Mit der von Wienke entwickelten Methode können alle diese Aufgaben mit der gleichen heuristischen Orientierungsgrundlage bearbeitet werden, was schon viele Lehrpersonen bei uns im Land erfolgreich praktizieren.

In Weigand et al. (2014) wird auf diese Methode und die Arbeit von Wienke nicht eingegangen. Für das Lösen von Konstruktionsaufgaben wird ein Modulkonzept vorgeschlagen, bei dem die Lösung problemhafter Aufgaben durch Anwendung von Grund- oder Standardkonstruktionen ausgeführt werden soll. Dabei wird aber teilweise nicht darauf eingegangen, wie man auf die Idee kommt, welche der Module einzusetzen sind. So wird etwa bei der Lösung der Aufgabe zum Konstruieren eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Hypotenuse $c = 8$ cm und der Höhe $h = 3$ cm lediglich die Abfolge der Konstruktionsschritte angegeben (S. 70). Zum Finden von Lösungsideen wird auf allgemeine und spezielle heuristische Strategien hingewiesen. Als Beispiele werden die Strategien zum Auffinden von Teilfiguren, zum Lösen eines Berechnungsproblems und die Strategie zum Weglassen einer Bedingung (n-1-Strategie) genannt.

Wienke knüpft an die bekannte Methode der Bestimmungslinien bzw. geometrischen Örter an. Die Grundidee der Methode besteht in der Anwendung des Rückführungs- und Zerlegungsprinzips:

1. Jede Konstruktionsaufgabe lässt sich auf das Bestimmen von Punkten zurückführen.
2. Einen Punkt erhält man als Schnitt zweier Bestimmungslinien.
3. Eine Bestimmungslinie für einen gesuchten Punkt erhält man, indem man eine der beiden Bedingungen *für sich* betrachtet und die Menge aller Punkte bestimmt, die diese Bedingung erfüllen.
4. Die Anzahl der Lösungen ergibt sich aus der Anzahl der Schnittpunkte der beiden Bestimmungslinien für einen Punkt.

Bei der Konstruktion von ebenen Figuren geht es darum, aus einem gegebenen Stück die Bedingung zu ermitteln, die sich aus dem Stück für einen gesuchten Punkt ergibt. Aus der Beantwortung der Frage, wo alle Punkte liegen, die diese Bedingung erfüllen, erhält man dann eine Bestimmungslinie für den gesuchten Punkt. Die mentale Hürde beim Anwenden der Methode der Bestimmungslinien, die ich in Lehrveranstaltungen mit Studierenden immer wieder erlebt habe, ist die gesonderte Betrachtung der beiden Bedingungen in Anwendung des Zerlegungsprinzips. Um alle Lösungen zu finden, müssen dann auch die beiden Bestimmungslinien in der Regel vollständig gezeichnet werden. Im Denken der Studierenden liegt aber offensichtlich der Fokus auf dem Zeichnen eines Schnittpunktes von Linien.

In der folgenden Tabelle sind die typischen Fälle enthalten, die bei der Konstruktion von Dreiecken auftreten können.

Stück	Bedingung für Punkt C	Bestimmungslinie für C
$a = 5 \text{ cm}$	C hat von B den Abstand 5 cm.	C liegt auf einem Kreis um B mit Radius $a = 5 \text{ cm}$.
$\alpha = 30^\circ$	$\angle BAC = 30^\circ$	C liegt auf dem freien Schenkel des Winkels α angetragen an AB in A.
$h_c = 3 \text{ cm}$	C hat den Abstand 3 cm von der Geraden AB.	C liegt auf einer Parallelen zu AB im Abstand $h_c = 3 \text{ cm}$.
$\gamma = 40^\circ$	Von C aus erscheint die Strecke AB unter einem Winkel von 40° .	C liegt auf dem Bogen BA mit γ als Peripheriewinkel über dem Bogen AB

Tab. 1: Finden von Bestimmungslinien aus Stücken, geg.: Strecke AB ges.: Punkt C

Nach dem Finden der Lösungsideen kann dann ein Lösungsplan mit Bestimmungslinien aufgestellt werden, bei dem für jeden Punkt zwei Bestimmungslinien angegeben werden, z. B.:

- C liegt: 1. auf einem Kreis um A mit dem Radius $b = 5,3 \text{ cm}$
 2. auf einer Parallelen zu c im Abstand von $h_c = 4,4 \text{ cm}$

Die ersten Punkte können ohne Bestimmungslinien direkt festgelegt werden, z. B.: A und B sind durch $c = 5 \text{ cm}$ festgelegt.

Ein Hauptergebnis der Arbeit von Wienke (1973) ist die Entwicklung einer heuristischen Methode, die auf der Verwendung von Abbildungen beruht und sich in die Methode der Bestimmungslinien einordnen lässt. Sie besteht in den folgenden zwei heuristischen Orientierungen.

1. Gibt es für zwei gesuchte Punkte jeweils nur eine Bestimmungslinie, so suche eine Abbildung, die man aus den gegebenen Bedingungen konstruieren kann und bei der einer der gesuchten Punkte das Bild des anderen ist.
2. Das Bild der Bestimmungslinie des einen Punktes ist dann eine zweite Bestimmungslinie für den anderen Punkt.

Als Beispiel zur Anwendung der Methode sei die folgende Aufgabe betrachtet. In Weigand et al. (2014, S. 72) wird sie mit der Strategie des Auf-

findens von Teilfiguren gelöst, wobei unklar bleibt wie man auf die Teilfiguren kommt.

Konstruiere ein Trapez aus $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3,5$ cm und $d = 3$ cm.

Lösungsüberlegungen:

1. Durch $a = 6$ cm sind die Punkte A und B festgelegt.
2. Für C und D kenne ich je eine Bestimmungslinie:
 $C \in K(B, b)$ und $D \in K(A; d)$
3. Bei der Verschiebung \overrightarrow{DC} gilt: $D' = C$
 Die Verschiebung \overrightarrow{DC} ist durch die Seite AB und die Länge von c konstruierbar.
4. Da $D' \in K'(A; d)$ bei der Verschiebung \overrightarrow{DC} und $C = D'$ gilt:
 $C \in K'(A; d)$

Konstruktionsplan:

1. Durch $a = 6$ cm sind die Punkte A und B festgelegt.
2. A' ist das Bild von A bei Verschiebung um $c = 3,5$ cm in Richtung \overrightarrow{AB} .
3. C liegt auf
 - dem Kreis um B mit dem Radius $b = 4$ cm
 - dem Kreis um A' mit dem Radius $d = 3$ cm
4. D ist das Bild von C bei der Verschiebung \overrightarrow{CD} .

Auch bei den folgenden Aufgaben lassen sich mit der Methode der Abbildungen die entscheidenden Lösungsideen finden.

- Konstruiere ein Parallelogramm aus der Länge einer Seite und den Längen der Diagonalen.
- In einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm ist eine Sehne AB der Länge 4 cm und mit einer gegebenen Richtung einzuzichnen.
- Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Eckpunkte auf je einer von drei gegebenen Parallelen liegen.

Bei der letzten, oft diskutierten Aufgabe, kann ein Punkt auf einer Parallelen beliebig festgelegt werden. Die anderen beiden lassen sich dann durch eine Drehung um 60° um den ersten Punkt aufeinander abbilden. Das Bild

einer der Parallelen ist bei dieser Bewegung dann eine zweite Bestimmungslinie für den anderen Punkt. In Weigand et al. (2014, S. 73) wird diese Aufgabe mit der n-1-Strategie bearbeitet, zu deren Anwendung eine DGS erforderlich ist. Für anspruchsvolle Aufgaben sollten im Unterricht durchaus mehrere heuristische Vorgehensweisen verwendet werden können. Zumindest die Lehrperson sollte aber auch die Methode der Abbildungen kennen.

Als eine Grundlage seiner Arbeit hat Wienke zu Beginn empirische Untersuchungen durchgeführt. So hat er 113 Teilnehmern eines Vorkurses für Mathematiklehrpersonen die Aufgabe vorgelegt, ein Trapez aus $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $d = 5$ cm, $\beta = 70^\circ$ zu konstruieren. Nur 5,3 % erreichten die volle Punktzahl, 21,3 % erhielten 0 Punkte.

47 Lehramtsstudierende im 3. Studienjahr und 44 Fernstudenten (aktive Lehrer in Sek I) sollten folgende 4 Aufgaben lösen.

1. Dreieck aus c , h_c und γ
2. Dreieck aus zwei Winkeln und Seitenhalbierende
3. Trapez aus Diagonalen und parallelen Seiten
4. Dreiecke aus $b + c$, h_c und α

Die Erfüllungsquoten betragen für die Studierenden/die Fernstudenten: bei 1.: 4 %/9 %, bei 2.: 19 %/11 %, bei 3.: 2 %/2 %, bei 4.: 51 %/2 %.

Wienke hat auf der Basis seiner Methoden einen Lehrgang für ca. 15 h entwickelt, der aus folgenden Teilen besteht.

- Erarbeitung des Grundverfahrens
- Anwendung des Grundverfahrens auf Aufgaben aus dem obligatorischen Unterricht
- Arbeit mit der Planfigur (Summen und Differenzen von Strecken)
- Verwenden von Abbildungen
- Ähnlichkeitsmethode
- Methode der Hilfsfiguren

Die Erprobung des Lehrgangs fand in 11 Zirkeln mit insgesamt 110 Schülern der Klassenstufen 7 und 8 statt. In einer Testarbeit nach Beendigung des Lehrgangs wurden Erfüllungsquoten von 70 % bis 80 % erreicht.

Literatur

- Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR, Institut für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Wissenschaftlicher Rat "Methodik des Mathematikunterrichts" (1989): Programm für die Disziplin- und Kaderentwicklung im Bereich Methodik des Mathematikunterrichts. Dienstsache. Berlin.
- Bock, H.; Walsch, W. (Hg.) (1975): Zum logischen Denken im Mathematikunterricht. Berlin: Volk und Wissen.
- Böhm, J.; Börner, W.; Hertel, E.; Krötenheerdt, O.; Mögling, W.; Stammler, L. (1974): Geometrie I. Axiomatischer Aufbau der Euklidischen Geometrie. Berlin: Dt. Verl. der Wiss.
- Böhm, J.; Börner, W.; Hertel, E.; Krötenheerdt, O.; Mögling, W.; Stammler, L. (1975): Geometrie II. Analytische Darstellung der euklidischen Geometrie, Abbildungen als Ordnungsprinzip in der Geometrie, geometrische Konstruktionen. Berlin: Dt. Verl. der Wiss.
- Borneleit, P. (2003): Lehrplan und Lehrplanerarbeitung, Schulbuchentwicklung und -verwendung in der DDR. In: ZDM 35 (4), S. 134–145.
- Borneleit, P. (2006): Zur Etablierung der Methodik des Mathematikunterrichts an Universitäten und Hochschulen in der Sowjetischen Besatzungszone (SBZ) 1946–49. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Vorträge auf der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6. 3. bis 10. 3. 2006 in Osnabrück. Hildesheim und Berlin: Verlag Franzbecker, S. 139–142.
- Borneleit, P. (2016): Zur Geschichte der Methodik des Mathematikunterrichts in der SBZ und der DDR. Bemerkungen zu den Ausführungen von Hans-Dieter Sill und Gert Schubring. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (101), S. 27–31.
- Bruchhold, H. (1988): Zu Problemen der Entwicklung eines Raumvorstellungsvermögens im Geometrieunterricht. In: Brigitte Frank (Hg.): Preprint Nr. 172. Neue Folge. Zu Fragen des Geometrieunterrichts der allgemeinbildenden Schule. Wendisch-Rietz, 3. bis 5. November 1987. Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik. Berlin, S. 30–38.
- Bruder, R.; Hefendehl-Hebeker, L.; Schmidt-Thieme, B.; Weigand, H.-G. (Hg.) (2015): Handbuch der Mathematikdidaktik. Aufl. 2015. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Burscheid, H. J. (2003): Zur Entwicklung der Disziplin Mathematikdidaktik in den alten Bundesländern. In: ZDM 35 (4), S. 146–152.
- Dennert, M. (1987): Zur Verwendung geometrischer Transformationen beim Lösen von Konstruktionsaufgaben im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden Schule. In: Wiss. Zeitschrift HUB, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe 36 (9), S. 733–738.
- Dennert, M.; Ilgner, K. (1982): Zum Zeichnen und Konstruieren im Mathematikunterricht unserer Oberschule. In: Mathematik in der Schule 20 (7/8), S. 537–556.

- Dennert, M.; Lorenz, G. (1982): Zu einigen Fragen der Terminologie und Symbolik im Geometrieunterricht unsere Schule. In: *Mathematik in der Schule* 20 (7/8), S. 606–622.
- Dennert, M.; Lorenz, G. (1984): Zur Behandlung von Kongruenz und Ähnlichkeit im Schulunterricht. In: Humboldt-Univ. Berlin (Hg.): Preprint Nr. 72. Neue Folge. Zu Fragen der Weiterentwicklung des Geometrieunterrichts der zehnklassigen allgemeinbildenden Oberschule der DDR. Egsdorf, 17. u. 18. Oktober 1983. Berlin, S. 89–112.
- Deutsches Pädagogisches Zentralinstitut, Sektion Unterrichtsmethodik und Lehrpläne (Hg.) (1960): *Mathematikunterricht - methodisches Handbuch für den Lehrer*. Ausgearbeitet von einem Kollektiv pädagogischer Wissenschaftler und Lehrer unter Leitung von Heinz Junge und Dr. Fritz Neigenfind. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag.
- Einsiedler, W. (2015): *Geschichte der Grundschulpädagogik. Entwicklungen in Westdeutschland und in der DDR*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Frank, B. (1974): Potenzen im Geometrielehrgang der allgemeinbildenden Schule - Möglichkeiten für seine Intensivierung und Weiterentwicklung. In: *Wiss. Zeitschrift HUB, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe* 23 (5), S. 479–485.
- Frank, B. (1988a): Eröffnungsvortrag zum Geometriekolloquium. In: Brigitte Frank (Hg.): Preprint Nr. 172. Neue Folge. Zu Fragen des Geometrieunterrichts der allgemeinbildenden Schule. Wendisch-Rietz, 3. bis 5. November 1987. Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik. Berlin, S. 1–19.
- Frank, B. (Hg.) (1988b): Preprint Nr. 172. Neue Folge. Zu Fragen des Geometrieunterrichts der allgemeinbildenden Schule. Wendisch-Rietz, 3. bis 5. November 1987. Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik. Berlin.
- Frank, B. (1990): Das Stoffgebiet Ähnlichkeit - bleibt es ein Sorgenkind? In: *Mathematik in der Schule* 28 (7/8), S. 491–509.
- Frank, B.; Siury, E. (1986): Zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens bei Kindern - Ein Beitrag zum Gedenken an Dr. Kurt Ilgner. In: *Wiss. Zeitschrift HUB, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe* 35 (8), S. 761–765.
- Fuhrmann, E. (1973): *Zum Definieren im Mathematikunterricht*. Berlin: Volk und Wissen.
- Geise, G. (1982): Zur Notwendigkeit und über Möglichkeiten, räumliches Vorstellungsvermögen auszubilden. In: *Mathematik in der Schule* 20 (7/8), S. 506–510.
- Gimpel, M. (1973): *Zur Methodik der darstellenden Geometrie der zehnklassigen allgemeinbildenden Oberschule der DDR*. Berlin: Volk und Wissen.
- Gimpel, M. (1984): *Räumliche Geometrie im Mathematikunterricht der polytechnischen Oberschule*. In: Humboldt-Univ. Berlin (Hg.): Preprint Nr. 72. Neue Folge. Zu Fragen der Weiterentwicklung des Geometrieunterrichts der zehnklassigen allgemeinbildenden Oberschule der DDR. Egsdorf, 17. u. 18. Oktober 1983. Berlin, S. 47–58.

- Goldberg, E. (1989): Zum Stand des Raumvorstellungsvermögens in Klasse 7 und Möglichkeiten seiner Weiterentwicklung durch Arbeiten mit Aufgaben. In: *Mathematik in der Schule* 27 (7/8), S. 492–510.
- Grüßing, M. (2012): *Räumliche Fähigkeiten und Mathematikleistung. Eine empirische Studie mit Kindern im 4. Schuljahr*. Zugl.: München, Tech. Univ., 2012. 1. Aufl. Münster: Waxmann (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, 12).
- Henning, H.; Bender, P. (Hg.) (2003): *Didaktik der Mathematik in den alten Bundesländern – Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR. Bericht über eine Doppeltagung zur gemeinsamen Aufbereitung einer getrennten Geschichte*. Osnabrück, Magdeburg, 1996. Otto-von Guericke-Universität Magdeburg, Universität Paderborn. Magdeburg. Online verfügbar unter <http://www.math.uni-magdeburg.de/private/henning/tagung.htm>, zuletzt geprüft am 25.08.2017.
- Humboldt-Univ. Berlin (Hg.) (1984): Preprint Nr. 72. Neue Folge. Zu Fragen der Weiterentwicklung des Geometrieunterrichts der zehnklassigen allgemeinbildenden Oberschule der DDR. Egsdorf, 17. u. 18. Oktober 1983. Berlin.
- Ilgner, K. (1974): Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens von Klasse 1 bis 10. In: *Mathematik in der Schule* 12, S. 693–714.
- Ilgner, K. (1978): Gedanken zur Berücksichtigung der räumlichen Geometrie im Mathematikunterricht der polytechnischen Oberschule. In: *Wiss. Zeitschrift HUB, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe* 27 (1978), Heft 6 (6), S. 675–684.
- Ilgner, K. (1982): Anregungen für die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens im Stereometrieunterricht. In: *Mathematik in der Schule* 20 (7/8), S. 490–505.
- Ilgner, K. (1984): Zur systematischen Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens im Mathematikunterricht. In: Humboldt-Univ. Berlin (Hg.): Preprint Nr. 72. Neue Folge. Zu Fragen der Weiterentwicklung des Geometrieunterrichts der zehnklassigen allgemeinbildenden Oberschule der DDR. Egsdorf, 17. u. 18. Oktober 1983. Berlin, S. 26–46.
- Kimel, K. (1988): Potenzen des gegenwärtigen Lehrplans Mathematik der Klasse 5 für die Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens der Schüler. In: Brigitte Frank (Hg.): Preprint Nr. 172. Neue Folge. Zu Fragen des Geometrieunterrichts der allgemeinbildenden Schule. Wendisch-Rietz, 3. bis 5. November 1987. Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik. Berlin, S. 46–52.
- Klotzek, B.; Quaisser, E. (1978): *Nichteuklidische Geometrie. (Eine Einführung)*. Berlin: Dt. Verl. der Wiss.
- Lehmann, H.; Scheler, K. (1988): Zum Beschreiben geometrischer Konstruktionen im Mathematikunterricht der Klassen 5 und 6. In: *Mathematik in der Schule* 26 (2/3), S. 119–130.
- Lemnitzer, K. (1985): Zur methodischen Behandlung geometrischer Konstruktionsaufgaben in Klasse 6. In: *Mathematik in der Schule* 23 (6), S. 412–422.

- Lorenz, G. (1988): Zum Konstruieren im Planimetrielehrgang. In: Brigitte Frank (Hg.): Preprint Nr. 172. Neue Folge. Zu Fragen des Geometrieunterrichts der allgemeinbildenden Schule. Wendisch-Rietz, 3. bis 5. November 1987. Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik. Berlin, S. 93–108.
- Maier, P. H. (1994): Räumliches Vorstellungsvermögen. Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule. Zugl.: Freiburg (Breisgau), Pädag. Hochsch., Diss., 1994. Frankfurt am Main, Wien u.a.: Lang (Europäische Hochschulschriften : Reihe 6, Psychologie, 493).
- Maier, P. H. (1999): Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen; mit didaktischen Hinweisen für den Unterricht. Zugl. Kurzfassung von: Freiburg (Breisgau), Pädag. Hochsch., Diss., 1994. 1. Aufl. Donauwörth: Auer.
- Maresch, G. (2015): Raumvorstellungsvermögen: Beiträge des Geometrieunterrichts und Genauigkeit der Richtungsanzeige. In: Andreas Filler und Anselm Lambert (Hg.): Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen Raumgeometrie. AK Geometrie 2014. Hildesheim und Berlin: Franzbecker, S. 3–32.
- Müller, H. (1984): Fähigkeitsentwicklung im Geometrieunterricht durch Aufgabebearbeitung. In: Humboldt-Univ. Berlin (Hg.): Preprint Nr. 72. Neue Folge. Zu Fragen der Weiterentwicklung des Geometrieunterrichts der zehnklassigen allgemeinbildenden Oberschule der DDR. Egsdorf, 17. u. 18. Oktober 1983. Berlin, S. 146–157.
- Neigenfind, F. (1961): Zur Einführung des neuen Lehrplanes für den Mathematikunterricht an den erweiterten Oberschulen (Teil I). In: Mathematik, Physik, Astronomie in der Schule 8 (7), S. 436–446.
- Pietsch, G. (1982): Überlegungen zur Behandlung von Konstruktionsaufgaben. In: Mathematik in der Schule 20 (7/8), S. 520–536.
- Pinkernell, G. (2003): Räumliches Vorstellungsvermögen im Geometrieunterricht. Eine didaktische Analyse mit Fallstudien. Zugl.: Münster, Univ., Diss., 2002. Hildesheim: Franzbecker (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, 25).
- Politbüro des ZK der SED und Ministerrat der DDR (17.12.1962): Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR. In: Mathematik und Physik in der Schule 10 (2), S. 141–150.
- Reinmann, G. (2005): Innovation ohne Forschung? Ein Plädoyer für den Design-Based Research- Ansatz in der Lehr-Lernforschung. In: Unterrichtswissenschaft 33 (1), S. 52–69.
- Rembowski, V. (2013): Begriffsbildung – „Los von Euklid!“ und wieder zurück? In: Andreas Filler und Matthias Ludwig (Hg.): Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. 29. Herbsttagung des Arbeitskreises

- Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Saarbrücken, 14. bis 16. September 2012. Hildesheim und Berlin: Franzbecker, S. 3–62.
- Scheler, K. (1988): Zum Beschreiben geometrischer Konstruktionen in den Klassen 4 bis 6. In: Sprachliche Tätigkeit der Schüler und intensives Lernen im Mathematikunterricht. 2. Kolloquium des WB Methodik. Leipzig, 21. April 1988. Karl-Marx-Universität Leipzig (Preprint, 4/88), S. 28–34.
- Schröder, E. (1974): Darstellende Geometrie. Berlin: Dt. Verl. der Wiss.
- Schubring, G. (2015): Ein historischer Blick auf die Stoffdidaktik. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (98).
- Sill, H.-D. (2000): Ziele und Methoden einer Curriculumforschung. In: Michael Neubrand (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2000. Vorträge auf der 34. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 28. Februar bis zum 3. März 2000 in Potsdam. Hildesheim: Franzbecker, S. 611–614.
- Starke, H.; Türke, W. (1972): Fachtheoretische Grundlagen des Geometrieunterrichts und methodische Hinweise zur Unterrichtsgestaltung, Bd. 1. Berlin: Volk und Wissen.
- Starke, Horst; Türke, Wolfram (1977): Fachtheoretische Grundlagen des Geometrieunterrichts und methodische Hinweise zur Unterrichtsgestaltung, Bd. 2. Berlin: Volk und Wissen.
- Thamm, Horst (1977): Untersuchungen zur Entwicklung des Raumwahrnehmungs- und des Raumvorstellungsvermögens. theoretische Grundlagen für die Konzipierung eines Lehrgangs und zugehöriger Lehr- und Lernmaterialien zur planmäßigen Entwicklung dieser Fähigkeiten bei Schülern ab Klassenstufe 7 ; Ausarbeitung und Erprobung eines Orientierungsprogramms und einiger Nachfolgematerialien für außerunterrichtliche Zirkel. Dissertation. Pädagogische Hochschule Güstrow, Güstrow.
- Walsch, W. (1972): Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Berlin: Volk und Wissen.
- Walsch, W. (2003): Methodik des Mathematikunterrichts als Lehr- und Wissenschaftsdisziplin. In: ZDM 35 (4), S. 153–156.
- Walsch, W.; Weber, K. (Hg.) (1975): Methodik des Mathematikunterrichts. Berlin: Volk und Wissen.
- Weigand, H.-G.; Filler, A.; Hölzl, R.; Kuntze, S.; Ludwig, M.; Roth, J. et al. (2014): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. 2., verb. Aufl. 2014. Berlin: Springer Spektrum (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).
- Wienke, K. (1973): Untersuchungen zur Arbeit mit heuristischen Regeln beim Lösen von Konstruktionsaufgaben. ein Beitrag für die außerunterrichtliche Tätigkeit in mathematischen Schülerzirkeln der Klassenstufen 7 und 8. Dissertation. Pädagogische Hochschule Güstrow, Güstrow.

Wienke, K.; Sill, H.-D. (1981b): Zum Lösen von Konstruktionsaufgaben in Arbeitsgemeinschaften für Schüler der Klassen 6 - 8. In: *Mathematik in der Schule* 19 (7/8), S. 622–629.

Anhang

Dissertationen zur Didaktik des Geometrieunterrichts in der DDR in chronologischer Reihenfolge

Gimpel, M. (1967): *Prinzipien zur methodischen Gestaltung eines Grundlehrganges in darstellender Geometrie an der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule auf der Grundlage einer fachmethodischen Analyse*. Diss. Martin-Luther-Universität Halle, Phil. Fak.

Bittner, R. (1968): *Ebene Bewegungen und ihre vorbereitende Behandlung in den unteren Klassen*. Dissertation, Humboldt-Universität zu Berlin.

Almeroth, H. (1972): *Effektivität und Disponibilität eines Lehr- und Übungsprogramms zur Entwicklung der Fähigkeit des räumlichen Vorstellens für das Lesen technischer Zeichnungen*. Dissertation, Universität Leipzig.

Wienke, K. (1973): *Untersuchungen zur Arbeit mit heuristischen Regeln beim Lösen von Konstruktionsaufgaben - Ein Beitrag für die außerunterrichtliche Tätigkeit in mathematischen Schülerzirkeln der Klassenstufen 7 und 8*. Dissertation, Pädagogische Hochschule Güstrow.

Dennert, M. (1975): *Untersuchung einiger mathematischer Fragen zur weiteren Ausgestaltung des Geometrieunterrichts in den unteren Klassen der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule*. Dissertation, Humboldt-Univ. Berlin, Math.-Naturwiss. Fak.,.

Bruchhold, H. (1977): *Aspekte der Führung des Aneignungsprozesses beim Einsatz von Unterrichtsmitteln im Geometrieunterricht, dargestellt am Beispiel des Unterrichts in darstellender Geometrie*. Dissertation, Pädagogische Hochschule Halle.

Thamm, H. (1977): *Untersuchungen zur Entwicklung des Raumwahrnehmungs- und Raumvorstellungsvermögens : theoretische Grundlagen für die Konzipierung eines Lehrgangs und zugehöriger Lehr- und Lernmaterialien zur planmäßigen Entwicklung dieser Fähigkeiten bei Schülern ab Klassenstufe 7; Ausarbeitung und Erprobung eines Orientierungsprogramms und einiger Nachfolgematerialien für außerunterrichtliche Zirkel*. Dissertation, Pädagogische Hochschule Güstrow.

Scheler, K. (1977): *Zum Wirksamwerden von Unterrichtsmitteln im Geometrieunterricht am Beispiel des Lehrplanabschnittes "4.2. Verschiebung" der Klasse 4*. Dissertation, Pädagogische Hochschule Halle.

Hörschelmann, M. (1977): *Über den Einfluss der transformatorischen Behandlung des Geometriestoffes auf die Entwicklung schöpferischer geistiger Tätigkeiten:*

- untersucht am Beispiel des Beweisens in Klasse 6. Dissertation, Pädagogische Hochschule Erfurt-Mühlhausen.
- Gabr, S. (1978): Möglichkeiten zur Entwicklung von mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten beim Lösen planimetrischer Konstruktionsaufgaben und ihre Realisierung in den allgemeinbildenden Schulen der DDR. Dissertation, Humboldt-Universität zu Berlin.
- David, G. (1980): Über die Erhöhung der Effektivität des Mathematikunterrichts beim Lösen von Beweisaufgaben: untersucht am Beispiel des Geometrieunterrichts der Klasse 6. Dissertation, Friedrich-Schiller-Universität Jena.
- Zipfel, R. (1981): Untersuchungen zur Behandlung der elementaren Bewegungen im Geometrieunterricht der Klassen 4 und 5 in der Reihenfolge Spiegelung, Verschiebung, Drehung. Dissertation, Pädagogische Hochschule Halle.
- Niemann, K.-D. (1982): Zum Einsatz von Unterrichtsmitteln bei der Behandlung geometrischer Konstruktionsaufgaben im Geometrieunterricht. Dissertation, Pädagogische Hochschule Halle.
- Sonnemann, U. (1984): Untersuchungen zum vektoriellen Arbeiten im Rahmen der perspektivischen Weiterentwicklung des Geometrieunterrichts in der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule der DDR. Dissertation, Pädagogische Hochschule Potsdam.
- Zahn, G. (1985): Untersuchungen zu Zielen und Inhalten sowie zur methodischen Behandlung von Elementen der räumlichen Geometrie im Rahmen einer perspektivischen Weiterentwicklung des Geometrielehrganges. Dissertation, Pädagogische Hochschule Potsdam.
- Brückner, A. (1986): Untersuchungen zur Realisierung des aufgabentheoretischen L-S-A-Modells in einem Teilbereich des Geometrielehrgangs. Dissertation, Pädagogische Hochschule Potsdam.
- Koch, A. (1988): Untersuchungen zum Aufbau der Ähnlichkeitsgeometrie und Schlußfolgerungen daraus für die Arbeit mit Schülern. Dissertation, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.
- Elstermann, R. (1992): Konzept zur instrumentalen Nutzung spezieller Kongruenzordnungen in der Sekundarstufe I. Diss. Humboldt-Univ. Berlin.

Dissertationen B zur Didaktik des Geometrieunterrichts in der DDR in chronologischer Reihenfolge

- König, H. (1973): Heuristik beim Lösen geometrischer Probleme. Theoretische und empirische Untersuchungen unter besonderer Berücksichtigung der Arbeit in Seminaren mit Mathematiklehrerstudenten und in mathematischen Arbeitsgemeinschaften mit Schülern. Dissertation B, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

Türke, W. (1980): Über die Arbeit mit geometrischen Begriffen in den unteren Klassen der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule: ein Beitrag zu einer konzeptionellen Entwicklung eines Lehrplanes und weiterer Unterrichtsmaterialien in Geometrie. Dissertation B, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. (M)

Müller, H. (1984): Untersuchungen zur perspektivischen Entwicklung des Geometrieunterrichts in der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule der Deutschen Demokratischen Republik. Dissertation B, Pädagogische Hochschule Potsdam, Pädag.-psycholog. Fak.

David, G. (1986): Zur Bestimmung des Schwierigkeitsgrades geometrischer Beweisaufgaben auf der Grundlage einer objektiven Anforderungsstruktur. Dissertation B, Friedrich-Schiller-Universität Jena

Ist Logik symmetrisch, und wie logisch ist Symmetrie?

Edmond Jurczek



Asymmetrie ist selten lediglich Abwesenheit von Symmetrie¹

Zusammenfassung. Der Vortrag gestaltet sich asymmetrisch; denn die Symmetrie-Eigenschaften der Logik sind schnell aufgezählt; umgekehrt – also mit der Logik der Symmetrie – sieht es ganz anders aus: Logik, verstanden als Wissenschaft von Denkmustern, hat aus der Erfahrung mit anderen Denk-Herausforderungen, namentlich zum Beispiel mit der Erfahrung der Ästhetik, zu außerordentlichen Strukturen beziehungsweise symmetrischen Ergebnissen geführt. Aufgeführt werden hierzu vor allem Beispiele aus der Kunstgeschichte, der Biologie und Chemie sowie aus der Mathematischen Physik der Elementarteilchen.

¹ Titelbild: L'impero perduto, Arte buddhista da Khara Khoto (X-XIII secolo), Fondazione Thyssen-Bornemisza, Villa Favorita, Lugano, 1993.

Wie logisch ist Symmetrie? – Symmetrie verstanden als Ebenmass

In der Umgangssprache bedeutet das Adjektiv *symmetrisch* etwas wie wohlproportioniert, ausgeglichen, und das Nomen *Symmetrie* meint jene Art der Konkordanz mehrerer Teile, durch welche sie zu einem Ganzen zusammenschließen.

Schönheit ist mit Symmetrie eng verknüpft. So wird das Wort von Polyklet benützt, der ein Buch über Proportionen geschrieben hat und von den Alten wegen der harmonischen Vollkommenheit seiner Skulpturen besonders gepriesen wurde. Dürer folgte ihm, indem er einen Kanon für die menschliche Gestalt aufstellte [1]. In diesem Sinn ist die Idee der Symmetrie keineswegs auf räumliche Dinge beschränkt; das gelegentlich als Synonym für Symmetrie gebrauchte Wort ‚Harmonie‘ deutet mehr auf akustische und musikalische als auf geometrische Anwendungen hin.

Ebenmass ist ein gutes deutsches Äquivalent für das griechische Wort *Symmetrie*, begründet Hermann Weyl [2].

Symmetrie, ob man die Bedeutung weit oder eng fasst, ist eine Idee, vermöge derer der Mensch durch die Jahrtausende seiner Geschichte versucht hat, Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu begreifen und auch zu schaffen. Plato hatte angenommen, dass die *mathematische Idee* der Ursprung der Symmetrie in der Natur sei: die mathematischen Gesetze, welche die Natur beherrschen, seien der Ursprung der Symmetrie in der Natur. Und ihr Ursprung in der Kunst ist die intuitive Erfassung dieser Idee im Geist des schöpferischen Künstlers.

Spiegelsymmetrie und Drehsymmetrie in der Antike

Ein Körper, ein räumliches Gebilde, ist *spiegelsymmetrisch* in Bezug auf eine gegebene Ebene E , wenn es durch Spiegelung an E in sich selbst übergeführt wird.

Unter allen Völkern der antiken Welt scheinen die Sumerer für strenge Spiegelsymmetrie eine besondere Vorliebe gehabt zu haben. Eine typische Zeichnung auf der berühmten silbernen Vase des Königs Entenema (Abbildung 1), der um 2700 v. Chr. in der Stadt Lagasch regierte, zeigt einen löwenköpfigen Adler mit gespreizten Schwingen en face; seine beiden Fänge

packen je einen Hirsch in Seitenansicht, der wiederum frontal von einem Löwen angegriffen wird.

Die Übertragung der exakten Spiegelsymmetrie des Adlers auf die anderen Tiere verlangt naturgemäß deren Verdopplung.

Nicht viel später erhält der Adler zwei Köpfe, nach entgegengesetzten Seiten gewandt. Dieses sogenannte heraldische (Wappen-)Muster lässt sich dann nach Persien, Syrien und später Byzanz verfolgen. Vielleicht erinnert sich ein Leser an den doppelköpfigen Adler im Wappen des zaristischen Russland und der österreichisch-ungarischen Monarchie aus der jüngeren Vergangenheit.

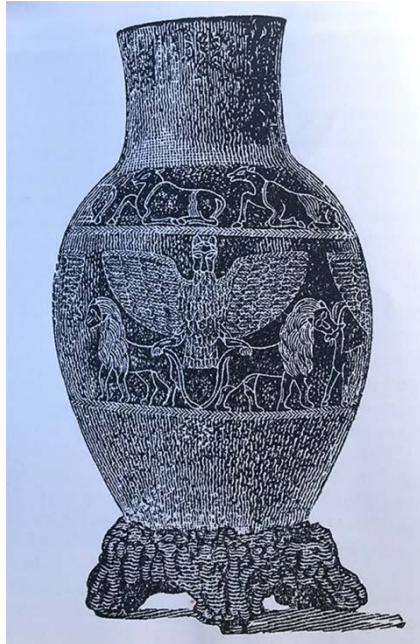


Abb. 1: Spiegelsymmetrie in der Antike

Betrachten wir nun das sumerische Bild mit zwei adlerköpfigen Männern, das fast spiegelsymmetrisch ist (Abbildung 2). Warum ist es nicht ganz spiegelsymmetrisch? Es ist es nicht, weil der Künstler eine Symmetrie erstrebte durch eine halbe Umdrehung: so ist zum Beispiel der niederhängende Flügel in der linken Figur der rechte Flügel, in der rechten Figur aber der linke Flügel. Es handelt sich hier um eine Drehsymmetrie mit 180 Grad Drehwinkel.



Abb. 2: Drehsymmetrie in der Antike

Dreh- und Spiegel-Symmetrien waren in der Antike offenbar beide geläufig. Aus heutiger Perspektive ist daran interessant, dass offenbar sowohl *eigentliche* wie auch *uneigentliche* Symmetrieeoperationen bekannt waren.

Man stelle sich zum Beispiel eine rechte Hand vor, die um 180 Grad gedreht wird, dann ist das immer noch eine rechte Hand, weswegen man bei einer Drehung (wie auch bei einer Verschiebung) von einer *eigentlichen Symmetrieeoperation* spricht. Spiegeln wir hingegen eine rechte Hand an einer Ebene, so entsteht daraus als Bild eine linke Hand, weswegen sich für Spiegelungen der Name *uneigentliche Symmetrieeoperation* eingebürgert hat (Abbildungen 3 und 4).

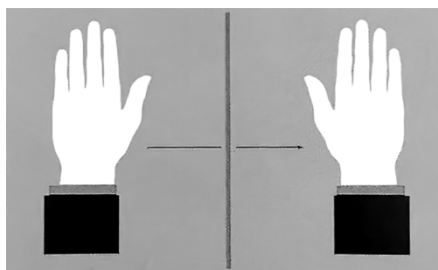


Abb. 3: Spiegelung als uneigentliche Symmetrieeoperation

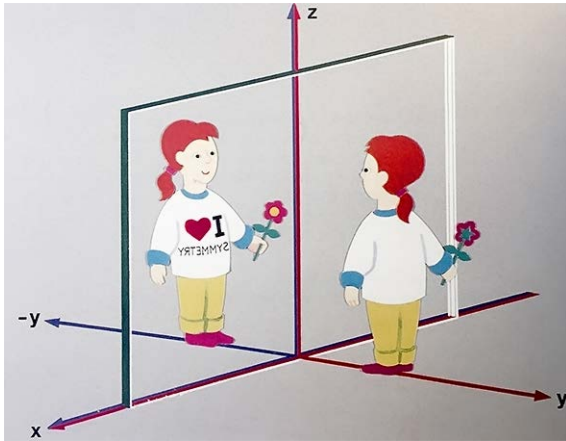


Abb. 4: Spiegelung verändert die Händigkeit (Chiralität)

Von der Kunst zur Natur:

Die *Indiscernibilität* – das Relativitätsprinzip von Leibniz

Unter dem *speziellen Relativitätsprinzip* versteht man das von Einstein aufgestellte Prinzip über die Gültigkeit von Naturgesetzen in Bezugssystemen, die sich gleichförmig – also unbeschleunigt – relativ zueinander bewegen. Diese Theorie heißt Spezielle Relativitätstheorie (SRT).

Es mag erstaunen, dass zwei äußerst ähnliche Relativitätsprinzipien bereits Jahrhunderte vorher niedergeschrieben wurden, namentlich von Galilei und Newton. Die eigentliche Leistung Einsteins ist denn auch in der sogenannten Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) anzusiedeln, die selbst beschleunigte Systeme zu behandeln weiß, und namentlich der Gravitationskraft eine *rein geometrische* Bedeutung zuzumessen versteht (→ Raumkrümmung).

An die Abbildung 4 anknüpfend ist zu sagen, dass es für den wissenschaftlichen Geist keinen Unterschied, keine Polarität zwischen links und rechts, so wie zum Beispiel zwischen männlich und weiblich gibt oder zwischen dem Vorder- und dem Hinter-Ende eines Tieres.

Es erfordert einen Akt willkürlicher Wahl, um festzustellen, was links oder rechts ist. Nachdem die Wahl jedoch für einen Körper getroffen ist, ist sie für jeden Körper festgelegt. Im Raum betrifft die Unterscheidung zwischen links und rechts die Orientierung einer Schraube.

Wenn wir das eben gesagte nun in einer von Leibniz geprägten Ausdrucksweise wiederholen, dass links und rechts ununterscheidbar (*indiscernibile*) sind, so wollen wir ausdrücken, dass die innere Struktur des Raumes uns eigentlich nicht gestattet, eine Links- von einer Rechtsschraube zu unterscheiden, außer durch willkürliche Wahl.

Leibniz führte dazu auch religiöse Gründe an: seiner Meinung nach hätte es keinen Unterschied gemacht, wenn Gott zuerst eine ‚rechte‘ statt einer ‚linken‘ Hand geschaffen hätte. Er stand damit übrigens im Widerspruch zu Clarke, einem Geistlichen der als Wortführer für Newton auftrat [3].

Das Ganze lässt sich noch mathematischer formulieren, wenn wir den von Helmholtz eingeführten Begriff der *Kongruenz* verwenden: Eine Transformation, welche die Raumstruktur erhält, die genauer gesagt, je zwei kongruente Figuren in zwei ebensolche verwandelt, heißt *Automorphismus*.

Was wir also seit Leibniz mit der Behauptung meinen, dass links und rechts wesensgleich sind, ist die Tatsache, dass die Spiegelung an einer Ebene ein Automorphismus ist. Das war für Leibniz also schlicht logisch.

Der Vollständigkeit halber sei hier auch erwähnt, dass Leibniz mit seiner Methode der *Gradualisierenden Analogie* einer weiteren Logik folgte: die *Gradualisierende Analogie* ist eine Wissenschaft von Denkmustern, die über die Welt der Physik und Mathematik hinausreicht und in andere Naturwissenschaften sowie in die Geisteswissenschaften hinein reicht [4], [5]. Die Idee ist eng verknüpft mit der Integral- und Differenzialrechnung [6]. Zudem beinhaltet sie im Rahmen seiner berühmten Monaden-Lehre eine Erklärung für seine beiden Masse-Begriffe *Erstmaterie* und *Zweitmaterie*; streng genommen hat Leibniz damit Einsteins berühmte Formel $E = m \cdot c^2$ vorweggenommen; denn die linke Seite der Gleichung steht für *Erstmaterie* und die rechte Seite der Gleichung für die *Zweitmaterie*. Die *Erstmaterie* besteht für Leibniz nicht aus Ausdehnung, sondern im Verlangen nach Ausdehnung; er nannte dieses Verlangen auch *appetitus* [6].

In seinem 1955 verfassten Buch über Symmetrie schreibt denn auch Hermann Weyl, dass in der ganzen Physik nichts zum Vorschein gekommen ist, was auf einen Wesensunterschied zwischen links und rechts hinweise. Und das fand wohlgemerkt lange nach Entdeckung der Atomphysik, der Quantentheorie, der Relativitätstheorie sowie der Quantenfeldtheorie statt.

Raum – sowohl *Gegenstand* der Geometrie als auch *vermittelndes Element* physikalischer Geschehnisse

In der Theoretischen Physik ist also mindestens bis und mit 1955 der Glaube an die Gleichwertigkeit von links und rechts aufrechterhalten worden, dies selbst angesichts gewisser biologischer Tatsachen, die gleich erwähnt werden sollen. Nun ist es aber so, dass der Raum sowohl *Gegenstand* der Geometrie als auch *vermittelndes Element* physikalischer Geschehnisse ist. Und während wir einerseits a priori wissen, wie es geometrischen Größen bei einer Spiegelung ergeht, müssen wir andererseits die Natur befragen, wie sich die physikalischen Größen benehmen.

Es nützt also nichts, wenn man zugesteht, dass zwei geometrische Welten die durch eine automorphe Transformation auseinander hervorgehen, als dieselbe Welt anzusehen sind; denn die Naturgesetze bestimmen die eine Welt, die tatsächlich existiert, nicht zwingend eindeutig. Diese Einsicht war der *große Schock* in der Theoretischen Physik im Jahre 1957, doch davon später. In der Biochemie war das Phänomen einer Asymmetrie zwischen links und rechts schon länger bekannt:

Wir gehen dazu als erstes ins Reich der Symmetrien der Kristalle: es gibt so genannte *enantiomorphe* Kristalle, die in einer Links- und einer Rechtsform vorkommen, wobei die eine Form das Spiegelbild der anderen ist. Wenn die Linksform in der Natur existiert, sollte man annehmen, dass die Rechtsform ebenfalls existiert und dass beide im Durchschnitt mit der gleichen Häufigkeit vorkommen.

Wir verwenden im Folgenden den Begriff der *razemischen Säure*: der Begriff *Racemat* für eine Mischung zweier Enantiomere zu gleichen Teilen leitet sich aus der lateinischen Bezeichnung für Traubensäure (Acidum racemicum) ab. Im Jahre 1848 machte Pasteur die Entdeckung, dass, wenn Natrium-Ammonium-Salz (von optisch inaktiver razemischer Säure) aus einer wässrigen Lösung bei niedrigerer Temperatur wieder auskristallisiert, der Niederschlag aus zwei Arten von winzigen Kristallen bestand, welche Spiegelbilder voneinander waren. Sie wurden vorsichtig getrennt und es stellte sich heraus, dass die aus den beiden Kristallen gewonnen Säuren dieselbe chemische Zusammensetzung hatten wie die razemische Säure, aber die eine war optisch linksdrehend und die andere rechtsdrehend aktiv. Die letztere nun erwies sich als identisch mit der in gärenden Trauben vorhan-

denen Weinsäure, die andere aber war noch nie zuvor in der Natur beobachtet worden – welch eine Asymmetrie!

Die Abbildungen 5.1 und 5.2 zeigen Modelle zweier enantiomorpher Strukturen, die einzig durch eine Spiegelung ineinander übergeführt werden können, nicht aber durch Verschiebungen und/oder Drehungen im Raum [7].

„Selten“, sagte F.M. Jaeger in seinen Vorträgen *On the principle of symmetry and its application in natural science* „hat eine wissenschaftliche Entdeckung so weitreichende Folgen gehabt wie diese von Pasteur“ [2]. Dass die Natur bloß die eine Händigkeit zeigt, und es Pasteur vorbehalten blieb, die andere herzustellen, ist schon seltsam. Pasteur entwickelte eine *enzymatische Methode*, welche die eben enzymatische Wirkung von Bakterien, Schimmel- und Hefepilzen dazu benutzte, die Links- und Rechtsformen gewisser Substanzen voneinander zu isolieren. Auf diese Weise fand er, dass die ursprünglich inaktive Lösung eines gewissen Razemats allmählich links-drehend wurde, wenn man *Penicillium glaucum* zog.

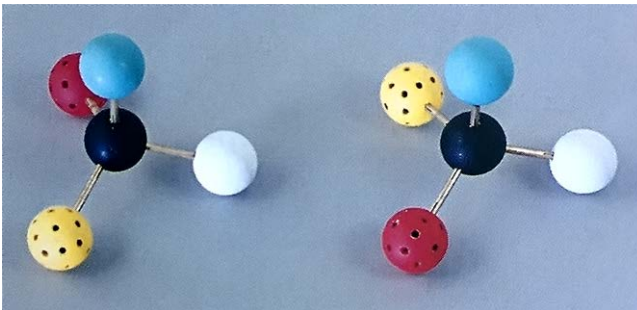


Abb. 5.1: zwei enantiomorphe Moleküle

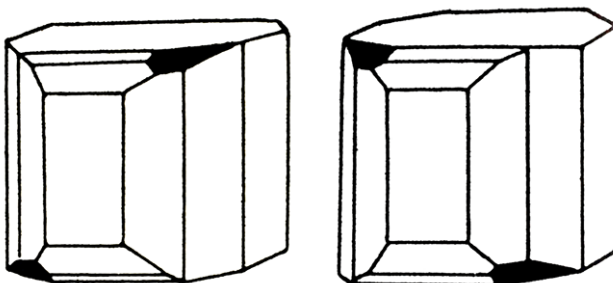


Abb. 5.2: zwei enantiomorphe Kristallstrukturen

Offenbar wählte der Organismus zu seiner Ernährung diejenige Form des Weinsäuremoleküls, die seiner eigenen asymmetrischen Konstitution am besten angepasst war! So enthält unser eigener Körper zum Beispiel die rechtsdrehende Form von Glukose und die linksdrehende von Fruktose.

Wie die Asymmetrie in die Welt kam

Offensichtlich entscheiden gewisse schwer zu kontrollierende Zufälligkeiten, ob an einer bestimmten Stelle der betrachteten Lösung ein Links- oder ein Rechtskristall entsteht. So sind denn, im Einklang mit dem symmetrischen weil optisch inaktiven Charakter der anfänglich einheitlichen racemischen Lösung (vergleiche mit Abb. 6) mit dem *Gesetz des Zufalls*, die zu einem beliebigen Moment des Kristallisationsprozesses in der einen oder anderen Form niedergeschlagenen Substanzmengen gleich oder nahezu gleich.

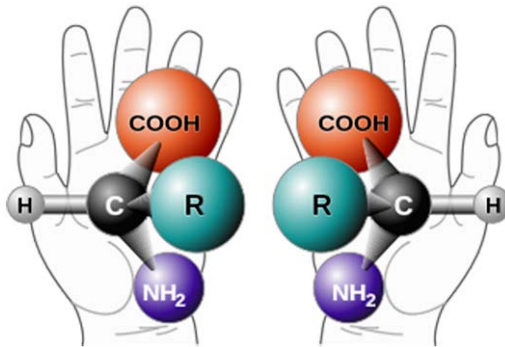


Abb. 6: Beispiel einer racemischen Form

Die nüchterne physikalische Erklärung liegt in der Tatsache, dass bei einer niedrigeren Temperatur ein Gemisch der beiden entgegengesetzt aktiven Weinsäureformen stabiler ist als die inaktive racemische Form.

Eine Erklärung der dennoch beobachteten Asymmetrie liegt in der Annahme, dass die Kristallisationsentwicklung wohl eine gleichmäßige Verteilung der enantiomorphen Formen begann, dass diese Verteilung jedoch einen *labilen Gleichgewichtszustand* darstellte, der bei geringer Zufallsstörung (durch einen Gradienten) zerfiel.

Solche Gradienten können zum Beispiel durch Licht bzw. durch elektromagnetische Felder oder chemische Gradientenfelder bestimmt sein.

Das bedeutet, dass bei Organismen bei Vorhandensein möglichst weniger natürlicher Gradienten am ehesten mit einer Kugelsymmetrie zu rechnen ist. Die Erde wäre auch eine Kugel, wenn sie sich nicht um eine Achse drehte. Die Drehung plattet sie an den Polen ab, aber die Dreh- oder Zylindersymmetrie um ihre Achse bleibt erhalten.

Auch eine Oberflächenspannung einer Flüssigkeit kann einen Gradienten bewirken. Wie sehen folglich Symmetrien in der Tiefsee aus – wo auch das Licht nicht mehr durchdringt – wenn nicht wesentlich kugelförmig? Die Abbildungen 7-9 aus der Tiefsee-Flora bzw. -Fauna geben bildhaften Aufschluss [8].

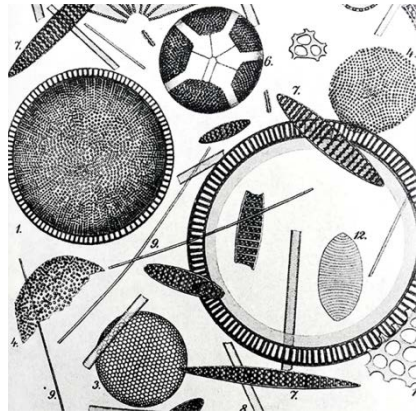


Abb. 7: stark kugelförmiger Tiefseeschlamm (5000-6000 muM)

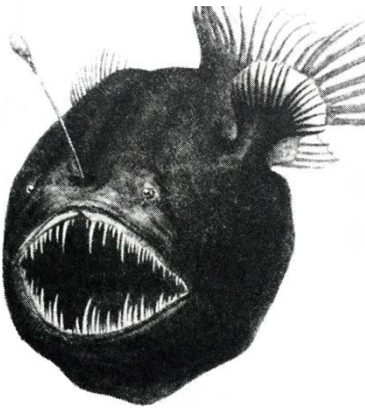


Abb. 8: beinahe kugelförmiger Tiefsee-Fisch



Abb. 9: Polarachse der Seelilie durch Licht-Gradienten

Der menschliche Körper ist, wie der der Wirbeltiere überhaupt, grundsätzlich spiegelsymmetrisch gebaut. Alle Asymmetrien, die sich in ihm finden, sind sekundären Charakters, und die wesentlichen von ihnen, die die inneren Organe betreffen, vornehmlich dadurch bedingt, dass das primär geradlinig zu denkende Darmrohr mit Grösserwerden des Körpers seine Oberfläche unverhältnismässig mehr vergrösserte, sich also stark in die Länge ziehen musste, was zu asymmetrischer Lagerung führte (Abb. 10).



Abb. 10: Asymmetrie seitens der inneren Organe des Menschen

Im Falle einer asymmetrischen Entwicklung der Muskeln und Glieder würde sich naturgemäss eine schraubenartige anstatt einer geradlinigen Bewegung ergeben. Das mag zur Erklärung des Umstandes beitragen, dass unsere Glieder das Spiegelsymmetriegesetz strenger befolgen als unsere inneren Organe.

Emmy Noether: Erhaltungssätze als logisches Resultat von Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit

Wie eingangs erwähnt, ist beim Raum (und auch der Zeit) zu unterscheiden, ob wir ihn entweder als *Gegenstand* mathematischer Operationen oder als *vermittelndes Element* physikalischer Geschehnisse betrachten.

Die deutsche Mathematikerin Emmy Noether (gest. 1935) mit grundlegenden Beiträgen sowohl zur abstrakten Algebra als auch zur Theoretischen Physik fand 1918 heraus, dass die wesentlichen Erhaltungssätze der Theoretischen Physik, namentlich Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung tatsächlich folgen aus:

- Impulserhaltung folgt aus der Homogenität des Raumes.
- Drehimpulserhaltung folgt aus der Isotropie des Raumes.
- Energieerhaltung folgt aus der Homogenität der Zeit.

Mit *Homogenität* ist dabei die Gleichheit einer physikalischen Eigenschaft über die gesamte Ausdehnung des Raumes gemeint, und mit *Isotropie* die Richtungs-Unabhängigkeit einer physikalischen Eigenschaft.

Solche Erhaltungssätze empfinden wir Menschen bzw. die Denkstrukturen unseres Geistes seither, wohl auch als Erfolg von Ausbildung, als *logisch*.

Die hier angesprochene Invarianz gegenüber gewissen Koordinatentransformationen wird in den Naturwissenschaften als *Symmetrie* angesehen: Symmetrie eines Objektes nämlich als die Invarianz einer seiner Eigenschaften beim Ausführen einer bestimmten mathematischen Operation.

So folgt zum Beispiel aus der Isotropie des vierdimensionalen Raumes, in den auch die Zeit eingeht, die Lorentz-Invarianz der Naturgesetze.

Bereits Poincaré hat festgestellt, dass die im vierdimensionalen Raum ausführbaren Symmetrioperationen mathematisch eine Gruppe bilden. Mit seinen Arbeiten ist vermutlich zum ersten Mal die Gruppentheorie als mathematische Methode über die Untersuchung der geometrischen Symmetrien hinaus zur Klärung allgemeiner Gesetzmässigkeiten der Physik verwendet worden!

Der Isospin – Heisenbergs *logisches Hoch auf abstrakte Räume*

Damit wurden – man mag darob wirklich staunen – Tore geöffnet in abstrakte Räume: Der *Isospinerhaltungssatz* ist ein solcher. Von Heisenberg eingeführt, um eben mit diesem Isospin die Ladungsunabhängigkeit der in einem Atomkern zwischen Nukleonen wirkenden Kräfte zu beschreiben, erklärten Gell-Mann & Nishijima 1953/54 die Isospin-Erhaltung bei der so genannten starken Wechselwirkung als Folge einer *Symmetrie bzw. Transformations-Invarianz* in einem abstrakten Isospinraum.

Ebenso wurde in den 70iger Jahren die ganze Elektrodynamik allein logisch aus der *Eichinvarianz* abgeleitet, der Unabhängigkeit der Bewegungsgleichungen also unter so genannten Eichtransformationen, die für lokal veränderliche Massstäbe stehen.

Die Verletzung der Spiegelungsinvarianz im Jahr 1957 – ein Schock!

Mit der Verletzung der Spiegelungsinvarianz bei der schwachen Wechselwirkung bekam 1957 die Welt der Theoretischen Elementarteilchen-Physik einen unbeschreiblichen Schlag verpasst (Paritäts-Verletzung), siehe Abb. 11. Abb. 12 zeigt die daran beteiligten so erfolgreichen Naturwissenschaftler; das Experiment betrifft Symmetrieeigenschaften der so genannten Schwachen Wechselwirkung. Die nachgewiesene Asymmetrie in der Teilchenzahl betrug etwa 40% ([9], S. 521).

The image shows the front page of The New York Times from Wednesday, January 16, 1957. The masthead is at the top, followed by the date and price. The main article is titled "Basic Concept in Physics Is Reported Upset in Tests" and discusses the violation of parity conservation in nuclear theory. Other prominent headlines include "MACMILLAN GETS EISENHOWER WISH FOR ALL SUCCESS" and "3.1° Sets 2-Year City Low; Snowfall Imperils Traffic". The page is filled with text, including sub-headlines and small snippets of news.

Abb. 11: Zeitungsartikel der New York Times, 1957



Abb. 12: Zeitungsartikel: Herr E.P. Wigner (TU Berlin), Frau Chien-Shiung WU (Columbia University), Herr Chen-Ning YANG (Princeton University), Herr Tsung-Dao LEE (Columbia University)

Experimentalphysiker waren davon weniger überrascht, zumal es Beispiele zweier zueinander spiegelsymmetrischer, also enantiomorpher, Molekeln gibt, die mit keiner reellen geometrischen Operation wie Verschiebung oder Drehung – die in dem von den Molekeln aufgespannten Raum ausgeführt wird – miteinander zur Deckung gebracht werden können ([9], S. 522). Zudem waren den Experimentalphysikern vergleichbare Ergebnisse aus der Biologie bewusst (vgl. z. B. die hier erwähnten Versuche von Pasteur).

Das darauf hin entwickelte sogenannte CPT-Theorem (C für Ladungskonjugation, P für Parität und T für Zeitumkehr) hatte diese Welt dann ein wenig gerettet.

Nun, aus der Tatsache, dass die Spiegelungssymmetrie nicht streng erfüllt ist, kann nicht der Schluss gezogen werden, dass die *Symmetrieprinzipien* ihre Bedeutung für die Elementarteilchenphysik verloren hätten. Es hat sich nämlich herausgestellt, dass sich mit Hilfe der Gruppentheorie (SU-2-, SU-3-Symmetrien) Elementarteilchen so erfolgreich systematisieren liessen, dass sogar neue Erscheinungen vorhergesagt werden konnten!

Wie Prophezeiungen dank ihrer Symmetrie-Logik wahr wurden!

Ein sehr anschauliches Beispiel für einst unbekannte Elementarteilchen, die aufgrund von Symmetrieeigenschaften prophezeit werden konnten, und dann auch tatsächlich experimentell nachgewiesen wurden, ist der halbreguläre archimedische Körper (acht gleichseitige Dreiecke, sechs Quadrate) für das Mesonen-Oktett, dargestellt in Abb. 13 (siehe [9], S. 527).

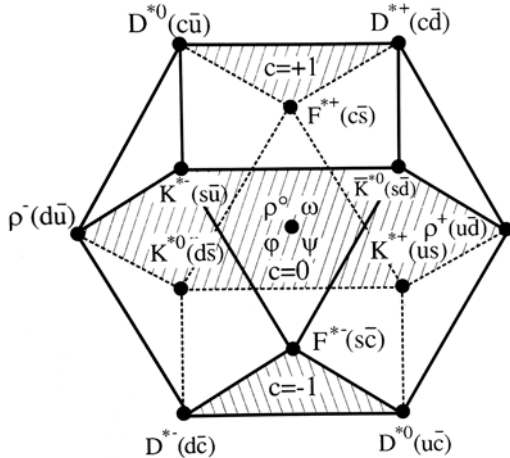


Abb. 13: Mesonen-Oktett: theoretische Vorhersage & experimenteller Nachweis

Wie symmetrisch ist Logik? – Des Vortrags zweiter Teil

Dass sich mein Vortrag dermassen auf die zweite Fragestellung des Titels konzentrierte, bedeutet eine klar asymmetrische Antwort. Das liegt daran, dass die erste Fragestellung des Titels – Wie symmetrisch ist Logik? – eine einfache Antwort zur Folge hat; denn Symmetrie kann ein Attribut logischer Verknüpfungen sein, ebenso wie solche zum Beispiel transitiv oder reflexiv sein können. Viel mehr lässt sich kategorisch gar nicht behaupten.

Soweit die theoretische Sicht – aus praktischer Sicht ließe sich dieselbe Frage auch folgendermassen fassen: Wie symmetrisch ist die Logik des Beobachters oder Forschers ausgebildet? Dies zumal eine Symmetrieauffassung an die Beobachter oder Forscher und an ihren Zeitgeist – beziehungsweise an ihre aktuelle Theorievorstellung und an ihre daran ausgerichteten Messverfahren – gebunden sind. Die dabei im Forschungsprozess auftretenden Asymmetrien beziehungsweise Symmetriebrüche sind oft wesentlicher Anlass, die Denkstrukturen heuristisch so zu ergänzen, dass wieder Symmetrie auf höherer Erkenntnisstufe möglich wird.

Schluss und Dank

Ich meine hiermit aufgezeigt zu haben, dass Logik, verstanden als Wissenschaft von *Denkmustern*, aus der Erfahrung mit anderen Denk-Herausforderungen, namentlich wie zum Beispiel mit der Erfahrung der Ästhetik, zu ausserordentlichen Strukturen beziehungsweise drehsymmetrischen und/oder spiegelungssymmetrischen Ergebnissen geführt hat.

Die biochemischen Versuche von Pasteur haben der Wissenschaft erstmals Einsicht in asymmetrische Ausprägungen in der Natur geschenkt, dies auf Basis enantiomorpher Kristallstrukturen. In der Mathematischen Physik der Elementarteilchen dauerte es bis ins Jahr 1957, bis erstmals eine Verletzung der Spiegelsymmetrie aufgedeckt wurde. Das war gleichzeitig Anstoss zur Einführung bzw. Entdeckung komplexerer Symmetrien, wie z. B. der des CPT-Symmetrietheorems ([10], S. 232). Das öffnete weitere kreative Symmetrie-Ansätze in abstrakten Räumen, die der Hochenergie-Physik so manche Entdeckung neuer Elementarteilchen bescherte.

Als extremes Beispiel an kreativer Abstraktion diene zum Schluss das so genannte Ausschlussprinzip von Nobelpreisträger Wolfgang Pauli, mit

dem das Periodensystem der Elemente überhaupt erst verstanden werden kann. Es postuliert einen sogenannten Spin $\frac{1}{2}$ der Elektronen mit symmetrischen Werten $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$. Der Spin $\frac{1}{2}$ kann weder anschaulich noch halb-klassisch durch eine Drehbewegung erklärt werden. Pauli selbst wehrte sich energisch gegen jede Art von Bild eines ‚rotierenden Elektrons‘ mit entsprechendem Drehimpuls ([10], S. 224). Eine formale Begründung wurde 1928 in der relativistischen Quantenmechanik entdeckt (Spin-Statistik-Theorem). Die Quantenphysik hat der Logik neue Freiräume an Denkmustern verschafft, jenseits der Logik der Anschauung. Hermann Weyl höchst persönlich bezeichnete die Idee von Pauli als ‚seltsam‘, wenn auch erwiesenermassen höchst erfolgreich [2].

Danken will ich vor allem Herrn Prof. em. Dr. Erwin Engeler vom Mathematik-Departement der ETH Zürich, der mich sowohl zu eigenen Nachforschungen angeregt als auch zur Ausführung dieser Arbeit ermuntert hat.

Literatur

- [1] Hinz B. (2011). Albrecht Dürer: Vier Bücher von menschlicher Proportion (1528). Berlin: Akademie Verlag.
- [2] Weyl H. (2017). Symmetrie. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- [3] Cassirer E. (1904). Philosophische Werke von W.G. Leibniz Bd. 1. Leipzig: Felix Meiner Verlag.
- [4] Busche H. (1997). Leibniz' Weg ins perspektivische Universum. Hamburg: Felix Meiner Verlag, S. 501.
- [5] Jurczek E. (2004). Security for Healthy Growth – Analysis of the combination of Oriental awareness and Occidental consciousness leading to a new, era-marking theory of perception. CH-6062 Wilen: ART-TECH Verlag, ISBN 3-9520161-7-9.
- [6] Jurczek E. et al (2016). Vergleichende Betrachtungen zum 300. Todestag von G.W. Leibniz – ein Protokoll. CH-6062 Wilen: ART-TECH Verlag, ISBN 3-9520161-8-7.
- [7] Heilbronner E. (1993). Reflections on Symmetry. Basel: Helvetica Chimica Acta.
- [8] von Klewitz A. (2013). Die Entdeckung der Tiefsee. Berlin: parthas.
- [9] Simonyi K. (2001). Kulturgeschichte der Physik. Frankfurt am Main: Harri Deutsch.
- [10] Meier C.A. (1992). Wolfgang Pauli und C.G. Jung – ein Briefwechsel (1932-1958), Berlin, Heidelberg: Springer.

Symmetrie in beiden Sekundarstufen

Jörg Meyer

Zusammenfassung. Im ersten Teil wird dargestellt, inwiefern unterschiedliche Facetten des Symmetriebegriffs die Schulmathematik der Sekundarstufe I durchziehen, und zwar sowohl im durch die Bildungsstandards definierten Kern als auch in dessen Randbereichen. Im zweiten (eher der Sekundarstufe II zuzuordnenden) Teil wird der Symmetriegedanke in unterschiedlicher Art und Weise für die Erzeugung von Kurven fruchtbar gemacht.

Fast alle Beweise der Sek I-Geometrie benutzen Symmetrie (oder deren Brechung)

Die beiden Standard-Beweise zum Satz des *Thales* schaffen symmetrische Strukturen (Abb. 1).

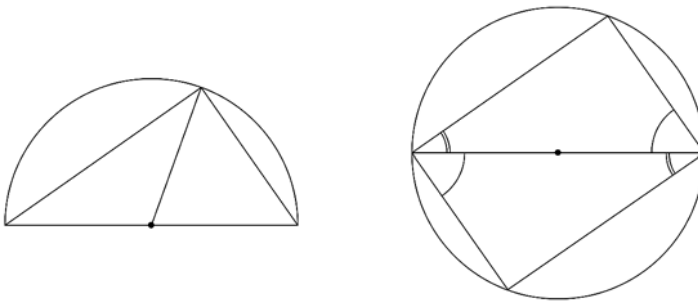


Abb. 1: Zwei Begründungsmöglichkeiten zum Satz des Thales

Die üblichen *Kopunktalitätsbeweise* der Dreiecksgeometrie gehen aus von einer symmetrischen Konfiguration und brechen diese auf (Abb. 2).

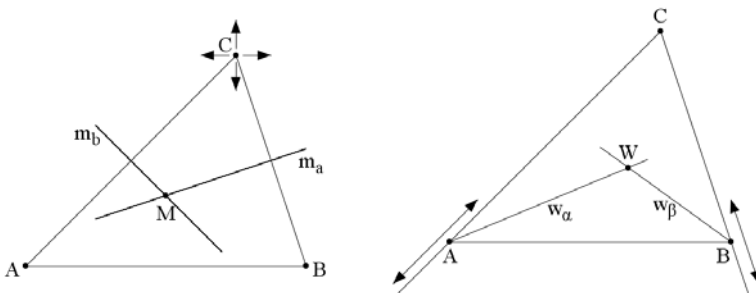


Abb. 2: Zur Kopunktalität der Mittelsenkrechten und der Winkelhalbierenden

Auch ein möglicher Beweis zum *Cosinussatz* geht von einer symmetrischen Figur aus und gewinnt daraus durch Symmetriebrechung eine asymmetrische Aussage (Abb. 3).

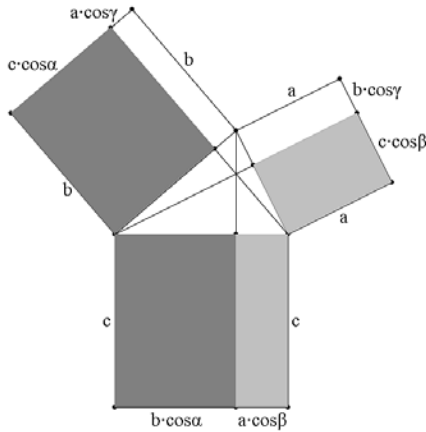


Abb. 3: Zum Beweis des Cosinussatzes

Bei einem der möglichen Beweise zum Satz des *Pythagoras* ist es wieder umgekehrt: Hier wird eine wenig symmetrische Figur symmetrisiert (Abb. 4).

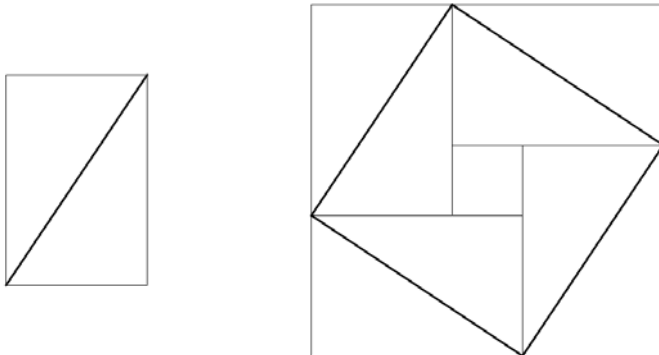


Abb. 4: Zum Beweis des Satzes von Pythagoras

Eine Symmetrisierung geschieht auch bei der arabischen Lösung von *quadratischen Gleichungen*, wie man etwa bei $x^2 + 10 \cdot x = 30$ sieht (Abb. 5).

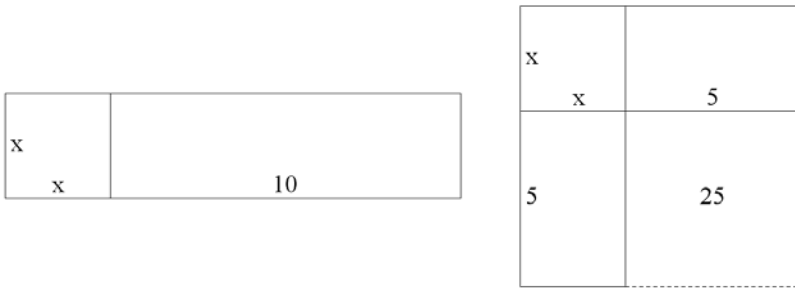


Abb. 5: Zur Lösung einer quadratischen Gleichung

Hier verdeckt die offensichtliche Symmetrie den Zugang zum Kern des Problems, da sich die Vorgehensweise nicht direkt auf beliebige quadratische Gleichungen übertragen lässt.

Offensichtlich ist: Der Begriff der Symmetrie spielt schon in der herkömmlichen Sek I-Mathematik eine Rolle, ohne allerdings immer explizit benannt zu werden.

Was versteht man eigentlich unter „Symmetrie“?

Abgesehen von der engen Bedeutung von „Symmetrie“ als gemeinsames Maß lässt sich dieser Begriff auch weiter fassen: Man tut etwas, und jenseits der Spiegelachse tut sich Analoges. Man spricht über etwas, und in einer anderen Sprache bedeuten die Sätze etwas Analoges.

So kann man fragen: Was bedeutet der Satz des *Thales* in der Koordinatengeometrie (nach Meyer 1997 a)? Die beiden Katheten stehen aufeinander senkrecht, also ist $m_1 \cdot m_2 = -1$, was zu $a^2 + b^2 = r^2$, also dem Satz des *Pythagoras* (in einem anderen Dreieck) führt (Abb. 6).

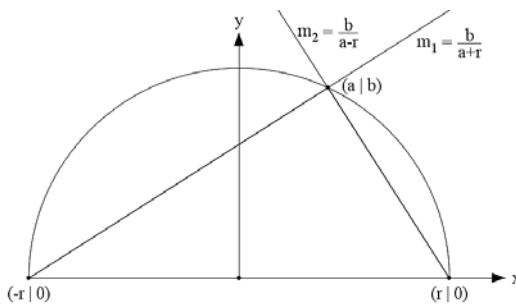


Abb. 6: Zum Satz des Pythagoras

Auch andere *Übersetzungen* sind möglich: Was passiert mit dem Satz des *Thales*, wenn man von Kreispunkten zu Tangenten übergeht? Beim Kreismittelpunkt ergibt sich dann stets ein rechter Winkel (Abb. 7).

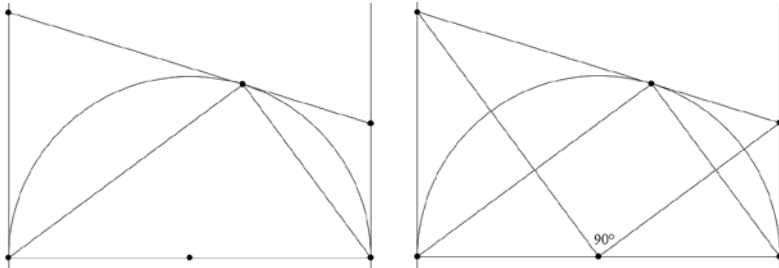


Abb. 7: „Dualisierung“ des Satzes von Thales

Analoges stellt man bei der „Dualisierung“ des *Umfangswinkelsatzes* fest: Der Winkel beim Kreismittelpunkt ist unabhängig von der Lage des Peripheriepunktes (Abb. 8).

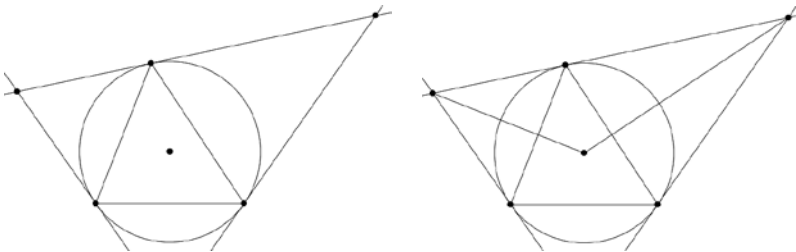


Abb. 8: „Dualisierung“ des Umfangswinkelsatzes

Symmetrie beim Problemlösen

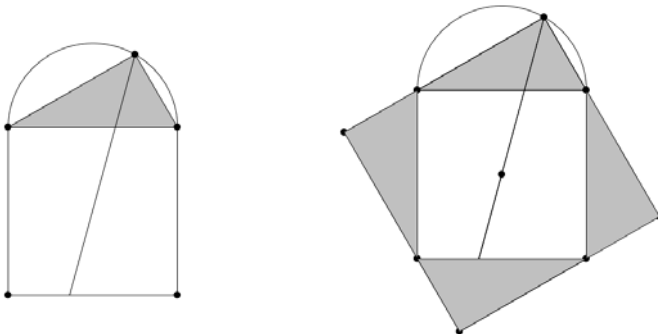


Abb. 9: Zum Satz von Eddy

Hierzu gibt es viel Literatur; als nicht so bekanntes Beispiel sei hier auf den Satz von *Eddy* verwiesen: Die innere Winkelhalbierende des rechten Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck teilt das Hypotenusenquadrat in zwei gleich große Teile. Durch Symmetrisierung ergibt sich der einfache Beweis (Abb. 9).

Symmetrie in einem geometrisierbaren Kontext: Potenzsummen

Lässt sich der „Trick des kleinen *Gauß*“ zur Berechnung der Summe $1+2+\dots+99+100$ auf *Quadratsummen* verallgemeinern? Die Antwort lautet „ja!“ (Abb. 10). Statt wie bei Gauß die Summe zweimal hinzuschreiben (und sie beim 2. Mal um 180° zu drehen), schreibt man sie dreimal hin und dreht jeweils um 120° (vgl. Meyer 1993, S. 61). Legt man die Dreiecke in Abb. 10 übereinander (vgl. Alsina et al. 2010, ch. 1.2.), ergibt sich als Summe immer 11. Die Anzahl der Elfen ist $1+2+3+4+5$. Die Verallgemeinerung auf n Summanden ist augenfällig.

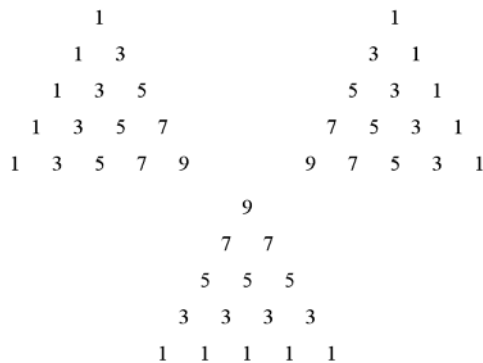


Abb. 10: Zur Summe der ersten 5 Quadratzahlen

Ein einfacher Zugang zu *Kubensummen* führt über die $1*1$ -Tafel (vgl. Meyer 1993, S. 62), siehe Abb. 11.

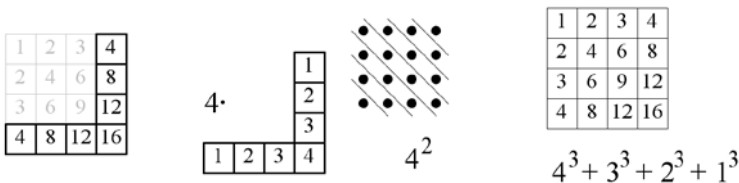


Abb. 11: Ein anderer Weg zur Kubensumme

Ordnet man die Einträge der 1*1-Tafel zeilenweise, so bekommt man

$$1 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) \cdot$$

Unvermutete Symmetrien bei magischen Quadraten

Magische Quadrate liefern schöne Anlässe zu nichttrivialen linearen Gleichungen, wie etwa der folgende Auftrag zeigt: „Vervollständige die Figur zu einem magischen Quadrat mit der magischen Summe 15“ (Abb. 12).

4	9	2
x		

4	9	2
11-x	13-x	2x-9
x		

4	9	2
11-x	13-x	2x-9
x	x-7	22-2x

Abb. 12: Aufgabe zu magischen Quadraten

Man sieht hier: Die Operationszeichen werden in der Algebra zu Bestandteilen eines Zahlenamens. Doch nun zurück zu Symmetrien! Schreibt man das in Abb. 13 links stehende Quadrat viermal hin, so erkennt man entlang der Pfeile rechts eine einfache Zahlenfolge.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	1	6	8	1	6
3	5	7	3	5	7
4	9	2	4	9	2
8	1	6	8	1	6
3	5	7	3	5	7
4	9	2	4	9	2

Abb. 13: Symmetrie eines magischen Quadrats

Fünfreihe magische Quadrate weisen eine analoge Struktur auf; der Beginn der Pfeilkette ist in Abb. 14 angegeben.

17	24	1	8	15	17	24	1	8	15
23	5	7	14	16	23	5	7	14	16
4	6	13	20	22	4	6	13	20	22
10	12	19	21	3	10	12	19	21	3
11	18	25	2	9	11	18	25	2	9
17	24	1	8	15	17	24	1	8	15
23	5	7	14	16	23	5	7	14	16
4	6	13	20	22	4	6	13	20	22
10	12	19	21	3	10	12	19	21	3
11	18	25	2	9	11	18	25	2	9

Abb. 14: Symmetrie eines fünfreiigen magischen Quadrats

Symmetrien erzeugen Muster

Man kann mit einem *beliebigen Viereck* (das gar nicht konvex zu sein braucht) die Ebene pflastern, indem man das Ausgangsviereck jeweils an den Mittelpunkten seiner Seiten spiegelt (Abb. 15). Die Begründung dieser Tatsache führt zu einer fruchtbaren Wiederholung bekannten geometrischen Wissens.

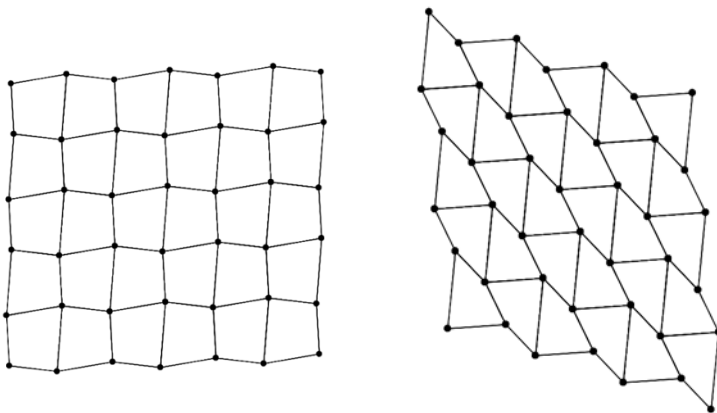


Abb. 15: Pflasterungen mit Vierecken

Aber mit beliebigen Sechsecken geht es nicht mehr (Abb. 16).

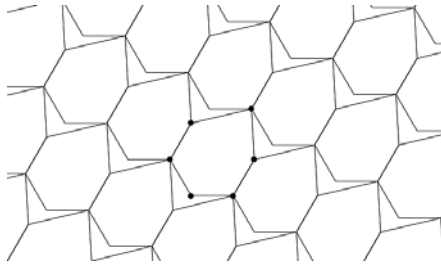


Abb. 16: Mislungene Pflasterung mit Sechsecken

Zusammensetzung von Symmetrieabbildungen

Die Kombination von Achsenspiegelungen wird in den (momentan aktuellen) bundesdeutschen „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“ von 2003 nicht explizit erwähnt und wird daher nicht von allen Lehrkräften zum Thema gemacht. Aber auch wenn das geschieht, wird wohl die folgende Frage nur selten behandelt: Was ist, wenn man zwei *Drehungen* (mit verschiedenen Drehzentren) *kombiniert*? Hier ist die Verwendung von dynamischer Geometrie-Software sehr hilfreich.

In Abb. 17 wird die „1“ erst um Z_1 gegen den Uhrzeigersinn gedreht, d. h. erst an a und dann an b gespiegelt. Das Endresultat wird dann um Z_2 gegen den Uhrzeigersinn gedreht, d. h. erst an c und dann an d gespiegelt.

Man bekommt das (im Bild nicht gezeigte) Endresultat durch die (von rechts nach links zu lesende) Spiegelungsfolge $Sp_d \circ Sp_c \circ Sp_b \circ Sp_a$.

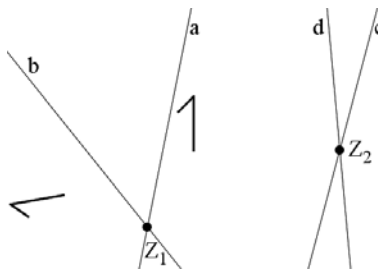


Abb. 17: Zur Komposition zweier Drehungen

Wählt man b und c so, dass beide miteinander übereinstimmen, so hat man nur noch die Spiegelungsfolge $Sp_d \circ Sp_a$ und mithin eine Drehung. Die

beiden Geraden b und c stimmen genau dann überein, wenn b durch Z_1 und c durch Z_2 geht. Das Drehzentrum ist der sich dann ergebende Schnittpunkt von a und d . Weitere Überlegungen führen auch zum Drehwinkel.

Spiegelungen an Kurven

Symmetrie hat mit Spiegelungen zu tun. Man kann auch an *Kurven* spiegeln, etwa an der *Parabel*. Will man etwa die Gerade $g: y = v$ punktweise an der Normalparabel spiegeln, könnte man wie folgt vorgehen: Man sucht zu jedem Geradenpunkt L den zugehörigen Parabelpunkt P , der zu L den kürzesten Abstand hat, und vollführt anschließend eine Punktspiegelung von L an P mit dem Resultat C (Abb. 18).

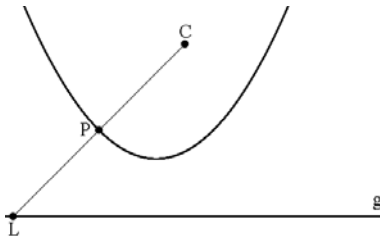


Abb. 18: Eine Art, an einer Parabel zu spiegeln

Die Suche nach P führt allerdings auf eine Gleichung 3. Grades (da es von manchen Punkten drei Normalen auf die Parabel gibt). Lernende sollten erfahren, dass der naive Weg Fallstricke haben kann, man aber durch Umkehr der Blickrichtung (nicht von L ausgehen, sondern von P) trotzdem zu einer

einfachen Lösung kommt: Von jedem Punkt $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ der Normalparabel

wird die Normale mit dem allgemeinen Punkt $X(s) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot t \\ 1 \end{pmatrix}$ ge-

bildet; diese schneidet die Gerade g für $s = v - t^2$ in

$$L = X(v - t^2) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + (v - t^2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ v \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für C die Beschreibung $C(t) = X(-v + t^2)$, also ist

$$C(t) = \begin{pmatrix} t \cdot (1 + 2 \cdot v) - 2 \cdot t^3 \\ 2 \cdot t^2 - v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Hieraus lässt sich die implizite Gleichung gewinnen, indem man von $t^2 = \frac{y+v}{2}$ und von $x^2 = t^2 \cdot \left((1+2 \cdot v)^2 - 4 \cdot (1+2 \cdot v) \cdot t^2 + 4 \cdot t^4 \right)$ ausgeht und so zu $2 \cdot x^2 = (y+v) \cdot (y-v-1)^2$ gelangt.

Man bekommt (je nach Größe von v) unterschiedlich kubische Kurven (Abb. 19); diese können einen Doppelpunkt (wie bei der *Tschirnhaus-Kubik*) oder eine Spitze (wie bei der *Neil'schen Parabel*) oder zwei Wendepunkte (wie bei der *kubischen Duplikatrix*) aufweisen.

Lernende neigen oftmals dazu, die Kurve nur für einen einzigen Wert von v zu besichtigen. Die Erkundung des Formenreichtums durch systematische Variation ist ein sinnvolles Unterrichtsziel!

Man erhält diese Kurven übrigens auf unterschiedliche Weise auch als *Hüllkurven* (Meyer (1997 b)).

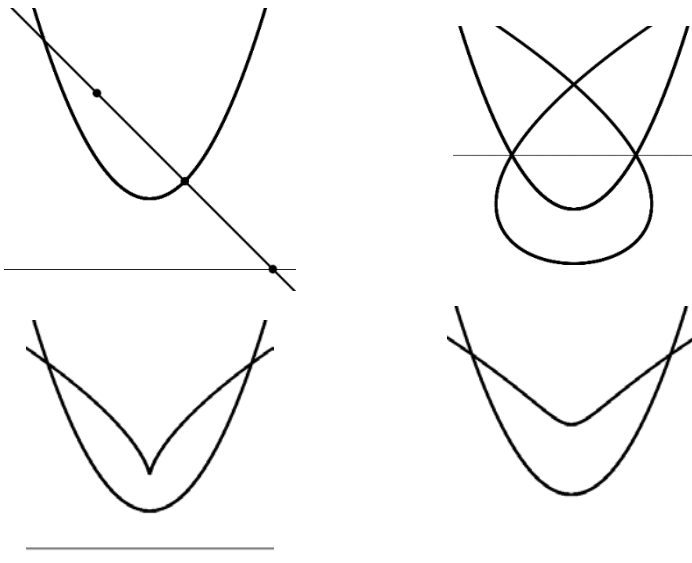


Abb. 19: Kubische Kurven durch Spiegelung an einer Parabel

Man hätte die Parabelspiegelung auch anders definieren können: Man nehme einen Punkt auf der Parabelachse und spiegele ihn an allen Parabeltan-

genten. Auch hier bekommt man (je nach Lage des Ausgangspunktes) unterschiedliche (kubische) Kurven (Abb. 20); auch hier sind die Phänomene des Doppelpunktes, der Spitze und der Wendepunkte zu beobachten.

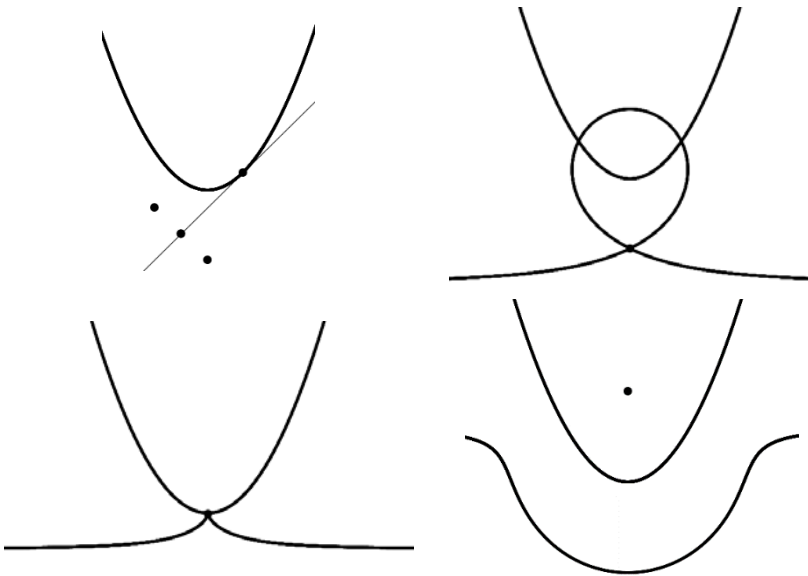


Abb. 20: Andere kubische Kurven durch andere Spiegelungen an der Parabel

In Meyer (1998) wird dargestellt, dass man alle symmetrischen rational parametrisierbaren kubischen Kurven durch geeignete Spiegelungen an der Parabel erhält.

Der hier verwendete Begriff „Spiegelung“ sollte übrigens nicht den Eindruck erwecken, dass dessen zweimalige Anwendung wieder die Originalkurve liefert.

Die eben beschriebenen Spiegelungen lassen sich natürlich auch mit der (der Einfachheit halber gleichseitigen) *Hyperbel* durchführen; allerdings machen hier die Resultate einen weniger ästhetischen Eindruck (Abb. 21).

Besser, d. h. schöner wird es wieder, wenn man diese Operationen am *Kreis* ausführt (vgl. Meyer 20xx), siehe (Abb. 22).

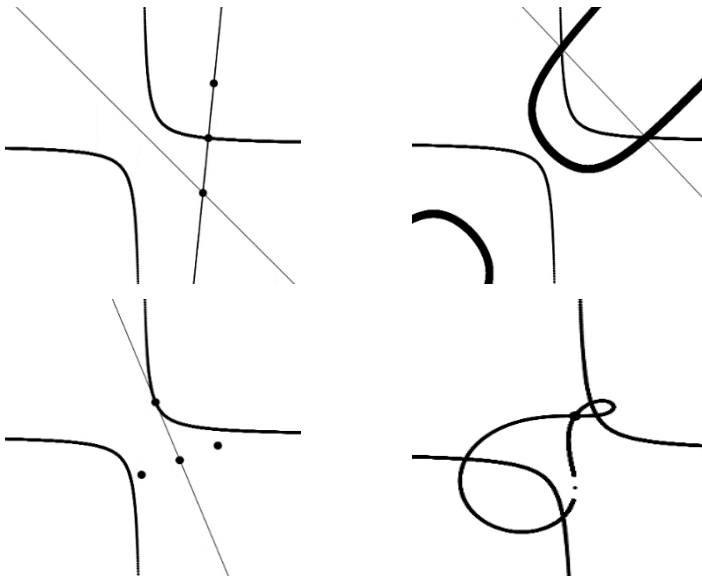


Abb. 21: Kurven durch Spiegelung an der Hyperbel

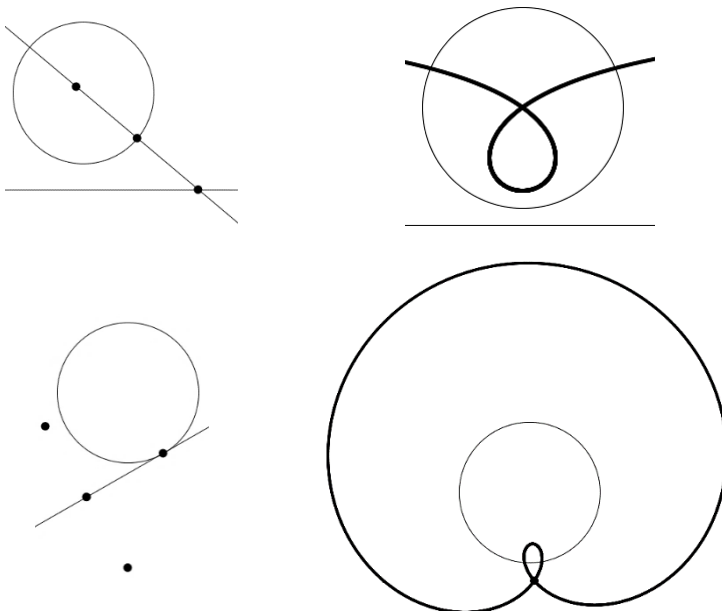


Abb. 22: Kurven durch Spiegelungen am Kreis

Zusammensetzung von Kreisbewegungen

Was passiert, wenn man zwei (gleichförmige) Bewegungen auf zwei verschiedenen Kreisen addiert?

Das Resultat ist noch wenig überraschend; es ergibt sich ein großer Kreis (Abb. 23). Ändert man den Abstand beider Ausgangskreise, ändert sich am Ergebnis nichts. Ändert man den Radius von einem der Ausgangskreise, so bleibt das Resultat ein großer Kreis (mit allerdings anderem Radius).

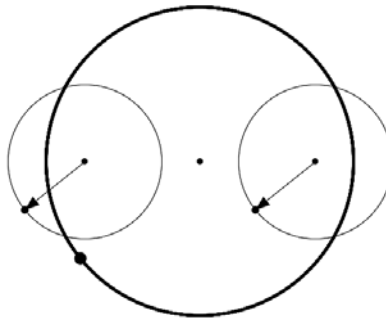


Abb. 23: Erste Addition zweier Kreisbewegungen

Interessanter ist der Fall, dass sich der Punkt auf dem einen Ausgangskreis doppelt so schnell bewegt wie der der Punkt auf dem anderen Ausgangskreis (Abb. 24). Wieder ist der Abstand beider Ausgangskreise irrelevant. Ändert man den Radius des einen Ausgangskreises, so kann die Schleife zu einer Spitze entarten bzw. ganz verschwinden.

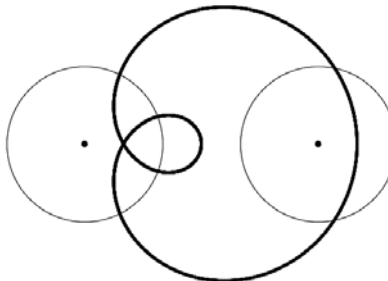


Abb. 24: Zweite Addition zweier Kreisbewegungen

Schöne Bilder ergeben sich bei den Geschwindigkeitsverhältnissen 5:1 oder 5:3 (Abb. 25).

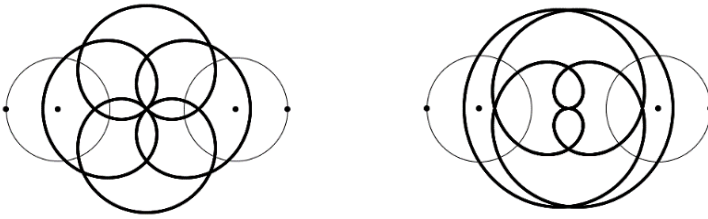


Abb. 25: Dritte Addition zweier Kreisbewegungen

Der Fall, dass sich die Kreisbewegungen gegenläufig mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, ist uninteressant, da sich eine Gerade ergibt. Wiederum interessanter ist der Fall, dass das Geschwindigkeitsverhältnis 1:2 beträgt. Auch hier ist der Abstand der Originalkreise irrelevant, aber nicht das Radienverhältnis (Abb. 26).

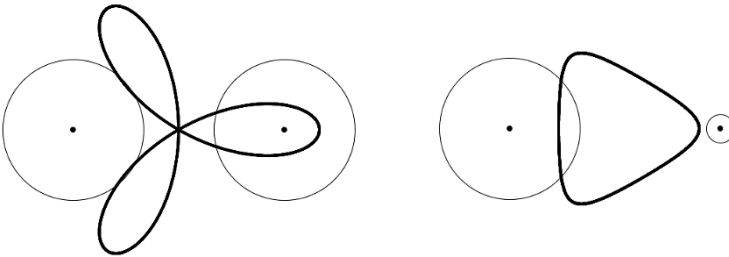


Abb. 26: Vierte Addition zweier Kreisbewegungen

Schöne Ergebnisse bekommt man auch, wenn man Phasenwechsel einbaut (Abb. 27).

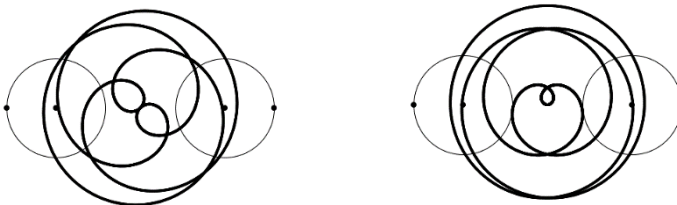


Abb. 27: Fünfte Addition zweier Kreisbewegungen

Natürlich braucht man bei zwei Kreisen nicht stehen zu bleiben (vgl. etwa Meyer(2017)). Wichtiger als die Einordnung in den (für Lernende ohnehin nicht aussagekräftigen) „Kurvenzoo“ ist das Erleben des Formenreichtums!

Schlussbemerkung

Sicherlich wurde in den beiden letzten Abschnitten dem Spieltrieb gefrönt. Nun wird man als Lehrperson den Lernlingen nicht vorschreiben wollen, welche Radienverhältnisse oder welche Operationen an welchen Kurven vorgenommen werden sollen. Wenn dann der (durchaus mathematikträchtige) Spieltrieb bei den Lernenden geweckt wird, wenn diese überrascht sind, welche schöne Kurven entstehen können (und welche Symmetrien sie haben), dann muss das der Motivation, der Freude und dem Interesse an weiteren Untersuchungen nicht abträglich sein.

Literatur

- Alsina, C. et al. (2010). *Charming Proofs*. Washington: MAA.
- Meyer, J. (1993). Lichtenberg und Potenzsummen. In: *Mathematik lehren* 58, S. 60-62.
- Meyer, J. (1997 a). Zum Satz des Pythagoras. In: *MNU* 50 (2), S. 76-79.
- Meyer, J. (1997 b). Hüllkurven. In: *Praxis der Mathematik* 39 (3), S. 107-116 und 39 (4), S. 170-173; online unter <http://mathematik-meyer.de/Materialien/Huellkurven.pdf>.
- Meyer, J. (1998). Von der Normalparabel zu kubischen Kurven. In: *mathematica didactica* 21 (2), S. 84-108.
- Meyer, J. (2017). Zur Symmetrie einiger Kurven. In: *Computeralgebra-Rundbrief* 61, S. 21-23.
- Meyer, J. (20xx). Spiegelungen am Kreis. Erscheint demnächst im *Computeralgebra-Rundbrief*.

Klassifikation der Symmetriegruppen der Flächenornamente als Werkzeug

Hans Walser

Zusammenfassung. Die Klassifikation der Symmetriegruppen der Flächenornamente wird als Hilfsmittel für den Beweis eines Theorems aus der Elementargeometrie verwendet. Die Idee dabei ist, ein lokales Phänomen in eine Übersichtsdarstellung einzubinden und von daher zu verstehen.

Das Theorem

Emese Vargyas, Mainz, hat mich auf folgendes Theorem hingewiesen. Einem Sehnenviereck setzen wir ein Parallelogramm an, dessen andere Seite die im Sehnenviereck gegenüberliegende Seite ist (Abb. 1a).

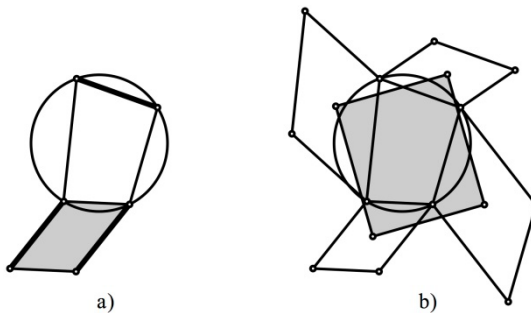


Abb. 1: Sehnenviereck und angesetzte Parallelelogramme

Der spitze Winkel dieses Parallelogramms ist frei wählbar.

Analog verfahren wir mit den drei übrigen Seiten des Sehnenvierecks, wobei wir aber immer denselben spitzen Winkel für die Parallelelogramme wählen und diese zyklisch anordnen (Abb. 1b). Gegenüberliegende Parallelelogramme sind dann ungleichsinnig ähnlich.

Das von Emese Vargyas erwähnte Theorem besagt nun, dass die Mittelpunkte der vier Parallelelogramme ein Rechteck bilden. Bei einer Variation des spitzen Winkels der Parallelelogramme ändert das Rechteck seine Form, aber es bleibt ein Rechteck. Wir haben also eine Invarianz des rechten Winkels. Man kann das auch als Maß-Symmetrie bezeichnen.

Das erinnert an den Thaleskreis. Tatsächlich lässt sich der Thaleskreis als Sonderfall des Theorems herleiten. Dazu lassen wir zwei gegenüberliegende Seiten des Sehnenvierecks je zu einem Punkt schrumpfen. Die dort angeetzten Parallelogramme werden mitsamt ihrem Mittelpunkt dann auch zu einem Punkt. Die beiden verbleibenden Seiten des Sehnenvierecks werden gleich groß und fallen zusammen. Die beiden verbleibenden Parallelogramme werden daher zu Rhomben (Abb. 2a). Bei Veränderung des spitzen Winkels bewegen sich die Mittelpunkte dieser Rhomben auf Halbkreisen über der gemeinsamen Rhombenseite. Diese Halbkreise ergeben zusammen den Thaleskreis. Das Rechteck des Theorems ist in der Abbildung 2b eingezeichnet, sein Umkreis ist der Thaleskreis.

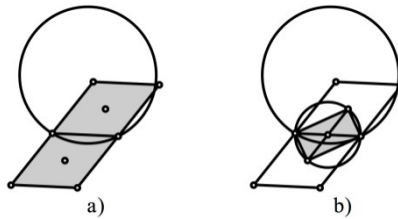


Abb. 2: Sonderfall Thaleskreis

Wir haben also das Rad neu erfunden.

Erwachende Wissenschaft

Die Entstehung von Wissenschaft und Bildung erfolgt oft nach dem Muster:

- Sammeln
- Ordnen – Ordnungskriterien. Die Ordnungskriterien werden vom Menschen festgelegt. Daher ist die sich daraus ergebende Struktur die spezifische Sicht des Menschen auf Natur und Umwelt.
- Struktur
- Theorie

Im Bereich der Flächenornamente kann das etwas so aussehen:

- Sammeln schöner Bildchen, etwa aus der Alhambra oder dem Taj Mahal
- Ordnen nach Symmetriekriterien
- Struktur im Sinne einer Klassifikation

- Theorie. Es gibt genau 17 Symmetrieklassen (Niggli 1924), (Pólya 1924). Klassifizierungsschema und Beschreibung der Symmetrieklassen in den Anhängen I und II.

Im Unterschied zu analogen Klassifikationen in den Naturwissenschaften kann in der Mathematik bewiesen werden, dass es bei den Flächenornamenten keine weiteren Beispiele mehr gibt. Damit kann die Klassifikation als Werkzeug verwendet werden: Jedes neu auftauchende Flächenornament muss zu einer der 17 Symmetrieklassen gehören. Die Eigenschaften in der betreffenden Symmetrieklasse gelten dann für das neue Flächenornament.

Der Schlüssel zu den Arbeiten von Niggli und Pólya ist die so genannte *kristallografische Restriktion*. Bei Flächenornamenten mit Drehungen als Kongruenzabbildungen können nur Halbdrehungen, Drittdrehungen, Vierteldrehungen und Sechsteldrehungen auftreten. Insbesondere sind Fünfteldrehungen nicht möglich. Und als Zwischenwinkel von Symmetrieachsen sind nur die Winkel 0° (parallel), 90° , 60° , 45° und 30° möglich.

Symmetriekriterien

Es gibt allerdings verschiedene Symmetriekriterien. Dazu ein Beispiel. Wir unterteilen ein gleichseitiges Dreieck sukzessive mit den Seitenhalbierenden in Teildreiecke. Die Abbildung 3 zeigt die drei ersten Schritte.

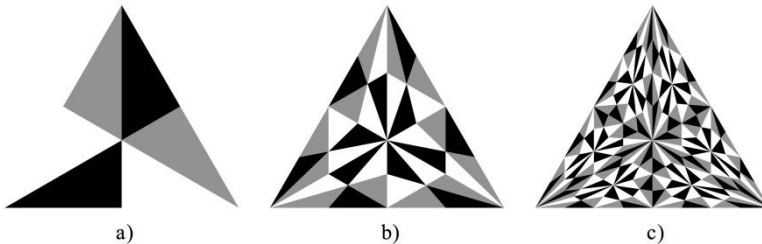


Abb. 3: Alpenflora

Wenn wir von der Färbung absehen, haben die Figuren die Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks, also die Diedergruppe D_3 . Wenn wir die Färbung mitberücksichtigen, fallen die Symmetrieachsen weg. Aber mit Ausnahme der ersten Figur haben wir immer noch die Drehungen um 120° , also die zyklische Gruppe C_3 .

Diese ersten beiden Symmetrien-Kriterien sind Anordnungssymmetrien.

Wir haben aber auch eine Maßsymmetrie: In den Figuren haben wir der Reihe nach 6, 36, 216, ... Teildreiecke mit je gleichem Flächeninhalt. Dies folgt unmittelbar aus dem Unterteilen mit Seitenhalbierenden.

Und schließlich haben wir eine Iterationssymmetrie (Erinnerung an die Fraktale). Der Schritt von einer Figur auf die nächste ist immer derselbe, nämlich das Unterteilen mit den Seitenhalbierenden.

Anwendung auf unser Theorem

Wir versuchen, die Figur unseres Theorems (Abb. 1b) in ein Flächenornament einzupassen.

Gleiche Winkel

In einem Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel auf 180° (Abb. 4a).

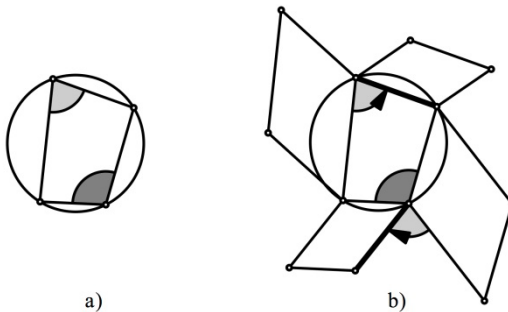


Abb. 4: Außenwinkel

Da sich die spitzen und stumpfen Winkel der angesetzten Parallelogramme ebenfalls auf 180° ergänzen, erhalten wir zwischen den Parallelogrammen Außenwinkel, die sich mit dem zugehörigen Innenwinkel auf 180° ergänzen und damit betragsmäßig gleich groß sind wie der gegenüberliegende Innenwinkel. Wenn wir die Schenkellängen der Winkel mit in die Betrachtung ziehen, sehen wir, dass ein Außenwinkel gegengleich orientiert ist wie der gegenüberliegende Innenwinkel.

Wir können zwischen die Parallelogramme bündig Vierecke einpassen, die zum ursprünglichen Sehnenviereck ungleichsinnig kongruent sind (Abb. 5).

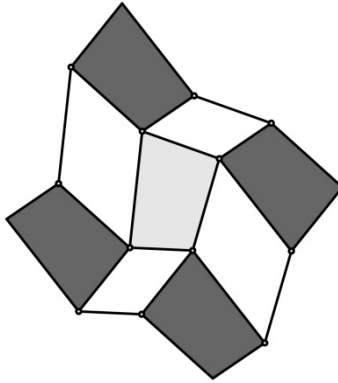


Abb. 5: Einpassen weiterer Vierecke

Flächenornament

Die neuen Vierecke sind ebenfalls Sehnenvierecke. Wir können weitere Parallelogramme ansetzen und dazwischen Vierecke einpassen, die zum ursprünglichen Sehnenviereck gleichsinnig kongruent sind. So entsteht ein Flächenornament (Abb. 6).

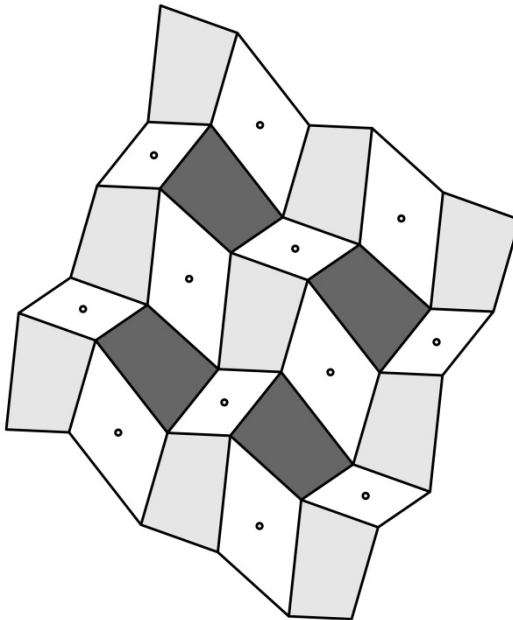


Abb. 6: Flächenornament

Symmetrieklasse

Zur Bestimmung der Symmetrieklasse unseres Flächenornamentes gemäß dem Klassifizierungsschema (Anhang I) benötigen wir die Symmetrien des Flächenornamentes. Offensichtlich haben wir die Punktsymmetrien (Halbdrehungen). Deren Zentren sind die Mittelpunkte der Parallelelogramme. In der Abbildung 6 sind sie bereits eingezeichnet.

Gibt es noch weitere Symmetrien?

Schubspiegelsymmetrie

Weniger offensichtlich ist die Schubspiegelsymmetrie des Flächenornamentes. In der Abbildung 7 ist eine Schubspiegelachse eingezeichnet.

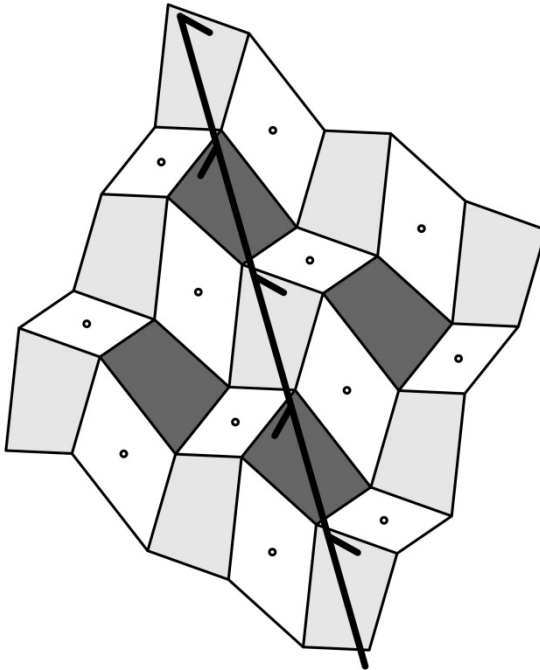


Abb. 7: Schubspiegelachse

Die Schubspiegelsymmetrie wird in der Schule kaum behandelt, obwohl sie im Alltag die häufigste Symmetrieart ist. Daher einige Anmerkungen dazu.

Spurenerkennung

Die Abbildung 8 zeigt den Abdruck einer Fußspur im Sand.



Abb. 8: Fußspur

Die Fußspur hat eine Schubspiegelsymmetrie.

Problem 1: Gibt es weitere Lebewesen, deren Fußspur schubspiegelsymmetrisch ist?

Problem 2: Hat die Fußspur eines Hinkenden (Abb. 9) ebenfalls Schubspiegelsymmetrie?



Abb. 9: Schubspiegelsymmetrie?

Diese Frage hat bei meinen Lehramtskandidaten immer wieder ausführliche Diskussionen ausgelöst.

Problem 3: In welcher Richtung fuhr der Traktor (Abb. 10)?



Abb. 10: In welcher Richtung fuhr der Traktor?

Die Traktorspur hat Schubspiegelsymmetrie. Die meisten Reifen für Autos und Fahrräder hinterlassen ebenfalls eine schubspiegelsymmetrische Spur. Für diese Reifen muss bei der Montage die Laufrichtung beachtet werden.

Im Karoraster

Im Karoraster (Abb. 11a) gibt es drei Typen von Symmetrieachsen: Mittellinien, Rasterlinien und Diagonalen.

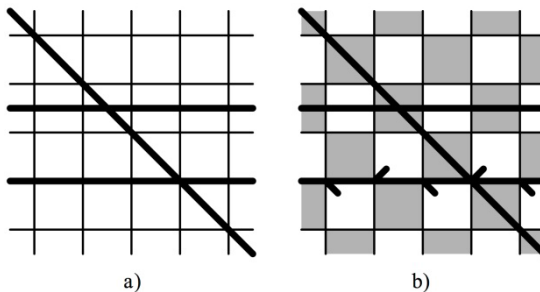


Abb. 11: Karoraster und Schachbrett

Wenn wir schachbrettartig ausmalen, werden die Rasterlinien zu Schubspiegelachsen (Abb. 11b).

Es gibt aber auch im ungefärbten Karoraster Schubspiegelsymmetrien. Die Abbildung 12a zeigt eine passende Schubspiegelachse.

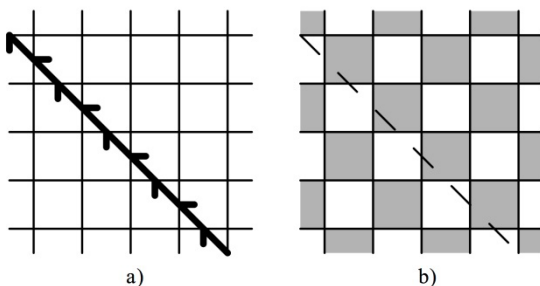


Abb. 12: Schubspiegelachse im Karoraster

Im Schachbrett ist die entsprechende Linie weder Symmetrieachse noch Schubspiegelachse (Abb. 12b).

Problem 4: Gehören Karoraster und Schachbrettmuster zur gleichen Symmetrieklasse?

Schubspiegelachsen in unserem Flächenornament

Im Flächenornament der Abbildung 6 gibt es weitere Schubspiegelachsen (Abb. 13).

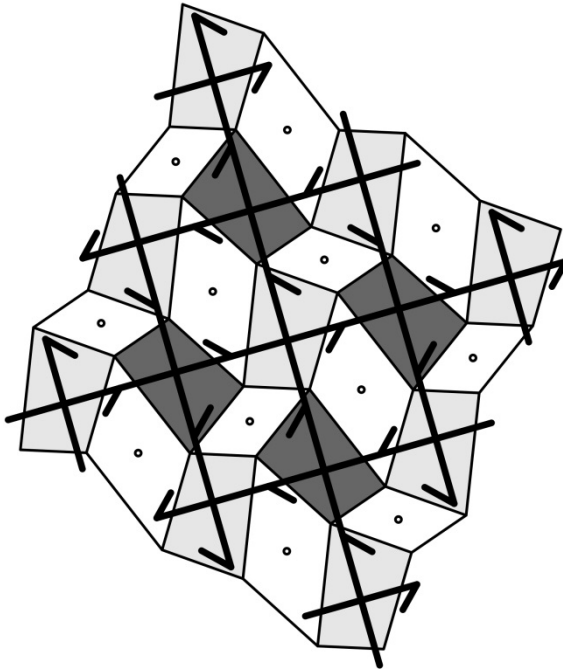


Abb. 13: Schubspiegelachsen

Symmetrieklasse

Gemäß dem Klassifikationsschema im Anhang I gehört unser Flächenornament zur Klasse pgg . Nach der Beschreibung im Anhang II hat es folgende Eigenschaften: Keine Symmetrieachsen. Orthogonale Schubspiegelachsen. Dazwischen zweizählige Drehzentren. Rechteckgitter.

Das Rechteckgitter hat die zweizähligen Drehzentren (das sind die Mittelpunkte der Parallelogramme) als Zentren. Die Zentren bilden daher selber ein Rechteckgitter.

Damit ist das Theorem bewiesen.

Bemerkungen zu den Problemen

Problem 1: Offene Aufgabe.

Problem 2: Die Fußspur eines Hinkenden hat keine Schubspiegelsymmetrie. Oft wird argumentiert, man müsse einfach im Wechsel wenig und viel schieben, gemäß der ungleichen Schrittlänge. Um zu zeigen, dass dadurch keine Schubspiegelsymmetrie entsteht, arbeitet man am besten mit zwei kongruenten Folien. Die eine wendet man um und legt sie gemäß Abbildung 14a ab. Damit ist die Spiegelung gewährleistet.

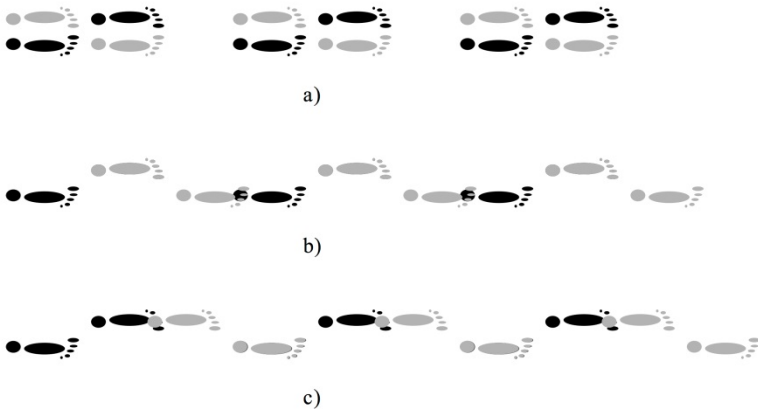


Abb. 14: Fußspur des Hinkenden

Wenn wir nun wenig schieben, so dass es in Marschrichtung links stimmt (Abb. 14b), stimmt es rechts nicht. Wenn wir aber viel schieben, so dass es in Marschrichtung rechts stimmt, stimmt es links nicht. Wir können die beiden Folien nicht zur Deckung bringen.

Problem 3: Der Traktor fuhr nach links. Dies lässt sich nicht innermathematisch entscheiden. Man muss einen realen Traktor ansehen.

Problem 4: Karoraster und Schachbrettmuster gehören zur gleichen Symmetrieklasse. Um dies einzusehen, muss eine der beiden Figuren um 45° verdreht werden.

Anhang I Klassifizierungsschema

Bezeichnung gemäß IUC (International Union of Crystallography)

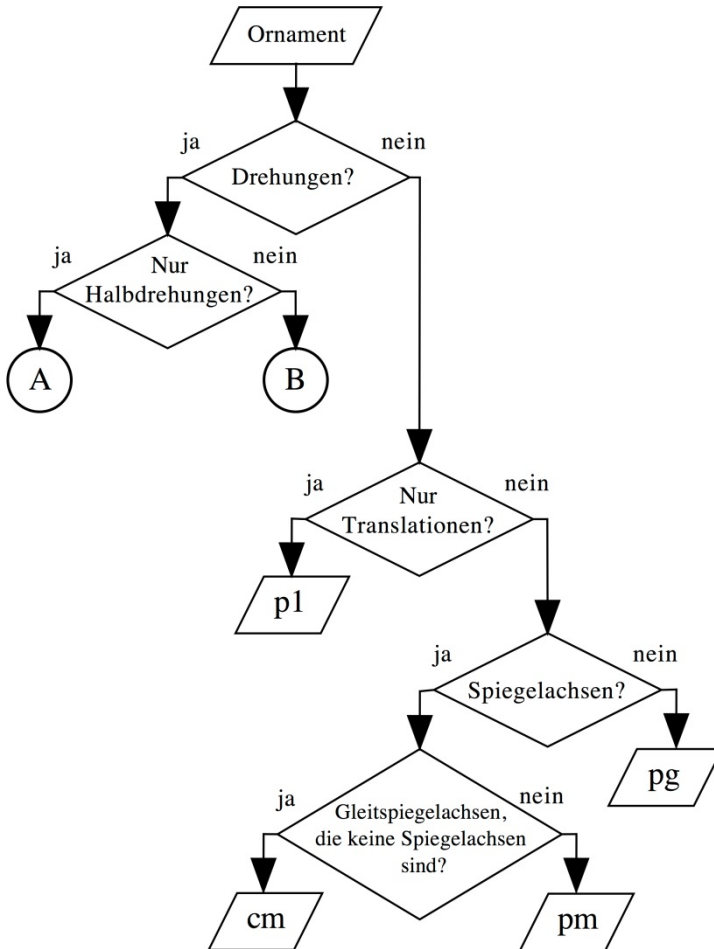


Abb. 15: Klassifizierungsschema Teil 1

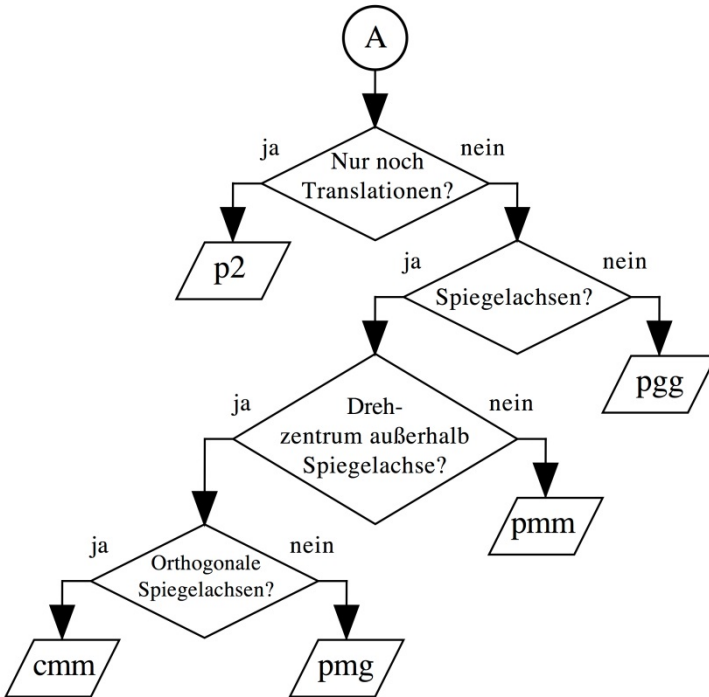


Abb. 16: Klassifizierungsschema Teil 2

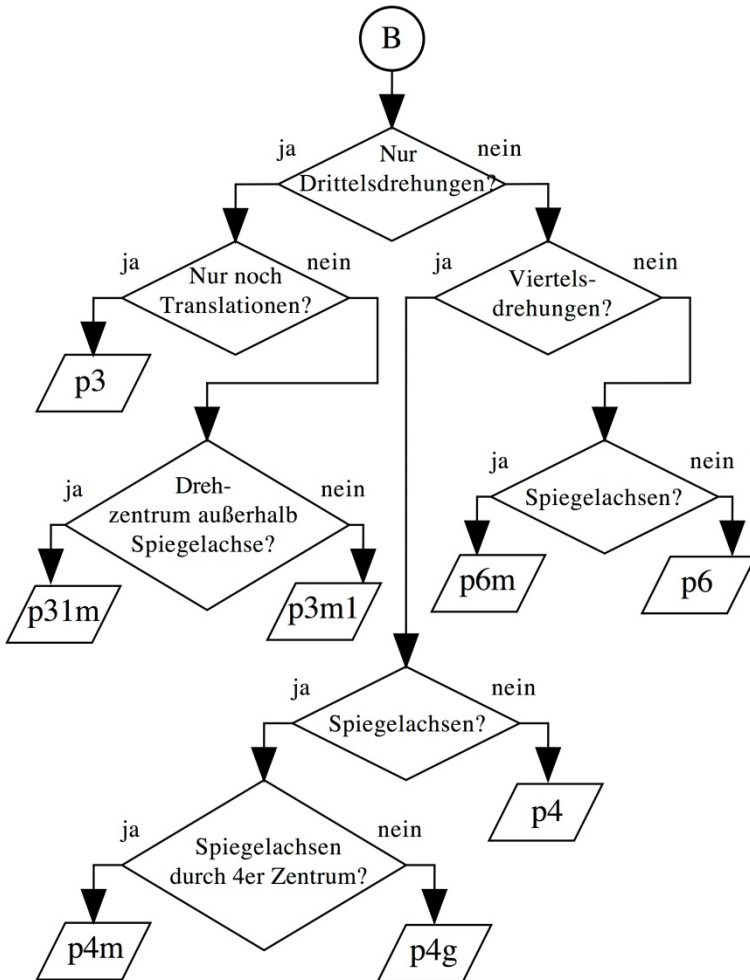


Abb. 17: Klassifizierungsschema Teil 3

Anhang II Beschreibung der Symmetrieklassen

Bezeichnung gemäß IUC (International Union of Crystallography)

1	p1	Nur Translationssymmetrie. Parallelogrammgitter
2	cm	Abwechselnd parallele Spiegelachsen und Schubspiegelachsen. Keine Rotationssymmetrie. Rhombengitter
3	pm	Zwei Klassen zueinander paralleler Spiegelachsen. Keine Rotationssymmetrie. Rechteckgitter
4	pg	Zwei Klassen zueinander paralleler Schubspiegelachsen. Keine Rotationssymmetrie. Rechteckgitter
5	p2	Vier Klassen von zweizähligen Drehzentren. Parallelogrammgitter
6	cmm	Zwei Klassen orthogonaler Spiegelachsen mit zweizähligen Drehzentren an den Schnittpunkten. Zwei Klassen orthogonaler Schubspiegelachsen mit zweizähligen Drehzentren an den Schnittpunkten. Rhombengitter
7	pmm	Symmetrien des Rechteckgitters: Symmetrieachsen (Gitterlinien und Mittellinien). Zweizählige Drehzentren (Rechteckmitten, Kantenmitten, Ecken).
8	pmg	Parallele Spiegelachsen. Orthogonal dazu zwei Klassen von Schubspiegelachsen mit zweizähligen Drehzentren in den Schnittpunkten. Rechteckgitter
9	pgg	Keine Symmetrieachsen. Orthogonale Schubspiegelachsen. Dazwischen zweizählige Drehzentren. Rechteckgitter
10	p4	Keine Spiegelachsen. Vierzähliger Drehzentren. Dazwischen zweizählige Drehzentren. Quadratgitter

11	p4m	Symmetrien des Quadratgitters: Symmetrieachsen (Kanten, Mittellinien, Diagonalen). Schubspiegelachsen zwischen den Diagonalen. Vierzählige Drehzentren (Ecken und Quadratmitten). Zweizählige Drehzentren (Kantenmitten)
12	p4g	Zwei Klassen von vierzähligen Drehzentren. Dazwischen zweizählige Drehzentren. Zwei Klassen von orthogonalen Symmetrieachsen. Dazwischen zwei Klassen von orthogonalen Schubspiegelachsen. Quadratgitter
13	p3	Drei Klassen von dreizähligen Drehzentren. Hexagonalgitter
14	p3m1	Zwei Klassen von dreizähligen Drehzentren. Drei Klassen von Symmetrieachsen, Schnittpunkte in den Drehzentren. Hexagonalgitter
15	p31m	Drei Klassen von dreizähligen Drehzentren. Drei Klassen von Symmetrieachsen, Schnittpunkte in den Drehzentren einer Klasse. Dazwischen Schubspiegelachsen. Drehzentren der beiden anderen Klassen nicht auf Symmetrieachsen. Hexagonalgitter
16	p6	Sechszählige, dreizählige und zweizählige Drehzentren. Keine Symmetrieachsen. Keine Schubspiegelachsen. Hexagonalgitter
17	p6m	Symmetrien des Hexagonalgitters: Sechszählige Drehzentren (Sechseckzentren), dreizählige Drehzentren (Ecken), zweizählige Drehzentren (Kantenmitten). Symmetrieachsen durch Sechseckzentren, schneiden sich unter 30° . Schubspiegelachsen durch Kantenmitten

Literatur

Niggli, Paul (1924): Die Flächensymmetrien homogener Kontinuen. In: Zeitschrift für Kristallographie und Mineralogie, Band 60, 283-298.

Pólya, George (1924): Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. In: Zeitschrift für Kristallographie und Mineralogie, Band 60, 278-282.

Ein „neuer“ Aufgabentyp von Dreieckskonstruktionen?!

Stephanie Gleich

Im Rahmen einer geplanten Dissertation werden Problemstellungen zur Dreiecks-
konstruktion analysiert, welchen, unseren Recherchen nach, erstaunlicherweise bis-
her noch keine Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Im ersten Kapitel dieses Artikels
soll daher ein erster Einblick in diesen Aufgabentyp gegeben werden, indem der
Aufbau der Aufgaben, der einem naheliegenden Grundprinzip folgt, vorgestellt und
die Anzahl der resultierenden Problemstellungen genannt werden. Im zweiten Kapi-
tel werden exemplarisch zwei Problemstellungen bearbeitet und daran zentrale Fra-
gestellungen der Aufgabenanalyse präsentiert. Abschließend werden Möglichkeiten
des weiteren Verlaufs der geplanten Dissertation thematisiert.

Um die Beschreibung des Aufgabentyps zur Dreieckskonstruktion und dessen Bear-
beitung unmissverständlich darzustellen, werden folgende einheitliche Abkürzungen
von merkwürdigen Linien im Dreieck ABC verwendet:

Mittelsenkrechte zur Dreiecksseite a, b, c	m_a, m_b, m_c
Winkelhalbierende des Innenwinkels bei A, B, C	w_a, w_b, w_c
Höhe auf die Dreiecksseite a, b, c	h_a, h_b, h_c
Seitenhalbierende der Dreiecksseite a, b, c	s_a, s_b, s_c

Generierung von Problemstellungen eines „neuen“ Aufgabentyps

Ausgangspunkt der Erstellung neuer Problemstellungen zur Dreieckskon-
struktion sind die Arbeiten von Weth (2002) und Schupp (2006). Auf unter-
schiedliche Weisen werden darin folgende vier Aufgaben bearbeitet, in de-
nen jeweils aus gegebenen Bedingungen ein Dreieck konstruiert wird:

Gegeben sind drei kopunktuale Geraden g_1, g_2, g_3 (siehe Abb. 1).¹



Abb. 1: drei gegebene kopunktuale Geraden

¹ In Abbildungen dieses Artikels werden generell gegebene Bedingungen einer Kon-
struktion in grau dargestellt und gesuchte Figuren fett in schwarz markiert.

Gesucht ist ein Dreieck ABC, bei dem die gegebenen Geraden *entweder* Mittelsenkrechten *oder* Winkelhalbierende *oder* Höhen *oder* Seitenhalbierende darstellen (siehe Abb. 2).

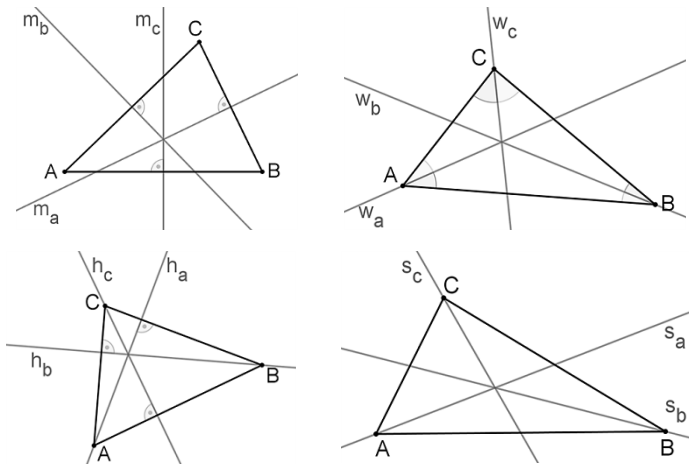


Abb. 2: gegebene Bestimmungsstücke von Dreiecken

Als Variation dieser Aufgabenstellungen können nun weitere Problemstellungen erzeugt werden (Schupp, 2002), indem neue Kombinationen der Eigenschaften der drei gegebenen, dann nicht mehr notwendig kopunktalen Geraden g_1, g_2, g_3 zugelassen werden. Zum Beispiel können zwei der gegebenen Geraden Mittelsenkrechten und die dritte Winkelhalbierende im zu konstruierenden Dreieck sein oder alle drei Geraden besitzen unterschiedliche Eigenschaften im zu konstruierenden Dreieck (siehe Abb. 3).

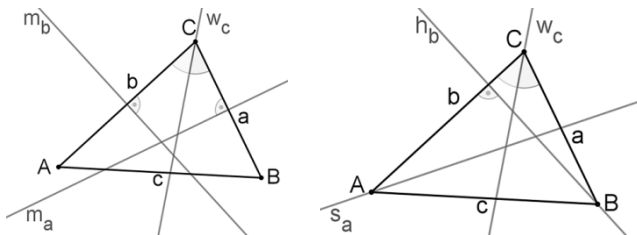


Abb. 3: Variation der gegebenen Bestimmungsstücke

Kombinatorische Überlegungen ergeben, dass durch diese Aufgabenvariation bereits 48 Problemstellungen des Typs „Gegeben sind drei Geraden. Gesucht ist ein Dreieck, bei dem diese Geraden bestimmte merkwürdige Li-

nien darstellen“ generiert werden können. Lässt man in diesem Aufgabentyp auch merkwürdige Punkte, wie Umkreismittelpunkt U, Inkreismittelpunkt I, Höhenschnittpunkt H oder Schwerpunkt S als gegebene Bestimmungsstücke des Dreiecks zu, so entstehen weitere Aufgaben zu diesem Aufgabentyp. Zum Beispiel kann man statt dreier Geraden nur zwei Geraden und zusätzlich einen Punkt vorgeben oder ausschließlich - also drei - Punkte. Durch die Kombination dieser unterschiedlichen Punkte und Geraden in den drei gegebenen Bestimmungsstücken des Dreiecks, können insgesamt 140 Problemstellungen und damit ein „neues“ Arbeitsfeld generiert werden. Die Anzahl der Aufgaben wächst rasant, wenn man zusätzlich „außercurriculare“ Punkte und Linien am Dreieck berücksichtigt, wie zum Beispiel die Gergonne-Geraden, Symmedianen oder den Fermatpunkt. Eine Zunahme von allein sechs „außercurricularen“ Punkten und Geraden ergeben nach kombinatorischen Berechnungen bereits über 2300 Problemstellungen, die alle dem Prinzip folgen: „Gegeben sind n Geraden und m Punkte (mit $m + n = 3$). Gesucht ist ein Dreieck, bei dem...“.

Ein offenes, zu analysierendes Problem ist nun, ob die gesuchten Dreiecke existieren und wieviele nicht kongruente oder ähnliche Lösungen konstruierbar sind.

Analyse der Problemstellungen: exemplarische Bearbeitung

Bei der Analyse der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Aufgaben stellen sich prinzipiell folgende zwei Probleme:

1. Bedingungsanalyse: In einem ersten Schritt werden die notwendigen Bedingungen für die Existenz einer Lösung ermittelt.
2. Konstruktion: In einem zweiten Schritt stellt sich das eigentliche Problem der Konstruktion.

Die folgenden beiden Beispielaufgaben unterscheiden sich derart, dass einmal die *Bedingungsanalyse* und in der anderen Aufgabe die *Konstruktion* eine umfangreichere Bearbeitung verlangt. Damit können beide Aspekte, *Bedingungsanalyse* und *Konstruktion*, an unterschiedlichen Aufgaben ausführlich erläutert werden.

Aufgabenbeispiel 1:

Gegeben sind drei Geraden g_1, g_2, g_3 :

Gesucht ist ein Dreieck ABC , bei dem diese Geraden die Mittelsenkrechten m_a und m_b und die Winkelhalbierende w_c sind (siehe Abb. 4).

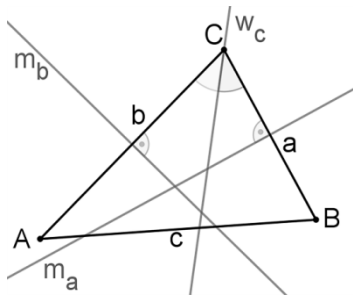


Abb. 4: Planfigur zu Aufgabenbeispiel 1

Bedingungsanalyse:

Die Aufgabenstellung weist gegebenen Geraden g_1, g_2, g_3 im zu konstruierenden Dreieck bestimmte Eigenschaften zu. Da nicht auszuschließen ist, dass diese gegebenen Geraden als merkwürdige Linien (hier: m_a, m_b und w_c) im Dreieck ABC nicht beliebig zueinander liegen dürfen, müssen entsprechende notwendige Bedingungen zu den Lageeigenschaften der Geraden ermittelt werden.

Als heuristische Strategie kann man zum Beispiel zunächst ein beliebiges Dreieck ABC mit Hilfe einer Dynamischen Geometrie-Software (DGS) konstruieren und die entsprechenden Bestimmungsstücke aus der Aufgabenstellung einzeichnen. Durch Variation der Figur können erste Hypothesen zur Lage der gegebenen Geraden aufgestellt werden. In der Beispielaufgabe erscheint die (ggf. offensichtlich erscheinende, aber beweisbedürftige) zusätzliche Bedingung erforderlich, dass die Geraden m_a, m_b und w_c nicht paarweise parallel zueinander liegen dürfen. Eine Betrachtung der Planfigur unter Berücksichtigung von Winkel- und Längenverhältnissen von Teilstrecken der Bestimmungsgeraden liefert weitere Bedingungen zur Lösbarkeit der Aufgabe. Es entsteht die Vermutung, dass in dem Dreieck, das die drei gegebenen Geraden einschließen, die beiden Innenwinkel $\sphericalangle(w_c, m_b) = \delta_2$ und $\sphericalangle(m_a, w_c) = \delta_1$ zwischen der Winkelhalbierenden und jeweils einer

Mittelsenkrechten gleich groß bzw. sein müssen. Durch folgenden Beweis lässt sich diese Vermutung bestätigen:²

Behauptung: m_a, m_b und w_c des Dreiecks ABC schließen ein gleichschenkliges Dreieck ein.

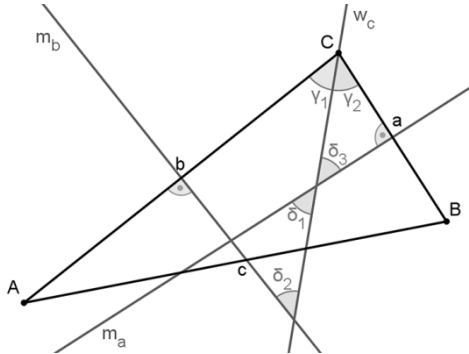


Abb. 5: Hilfsskizze zum Beweis

Beweis: Mit Abbildung 5 gilt:

1. $\gamma_1 = \gamma_2$ (Voraussetzung)
2. $\delta_3 = 90^\circ - \gamma_2$ (IWS Dreieck, m_a)
3. $\delta_1 = \delta_3$ (Scheitelwinkel)
4. $\delta_2 = 90^\circ - \gamma_1$ (IWS Dreieck, m_b)
5. $\delta_1 = \delta_2$ (1, 2, 3, 4, Behauptung)

Nun kann als ein weiterer (neuer) Zusammenhang im Dreieck ermittelt werden, dass das Winkelmaß der beiden Schnittwinkel $\delta_1 = \delta_2 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ beträgt. Ob die genannten Bedingungen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Konstruktion eines Dreiecks ABC sind, ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht sicher. Prinzipiell kann bei diesem Aufgabentyp nie ausgeschlossen werden, dass weitere notwendige Bedingungen existieren, die noch nicht ermittelt wurden.

² Im beschriebenen Aufgabentyp gelten Winkelhalbierende als Innenwinkelhalbierende eines Dreiecks. Für die Beispielaufgabe 1 muss der Punkt C auf w_c außerhalb des von m_a, m_b und w_c aufgespannten Dreiecks liegen, da w_c ansonsten eine Außenwinkelhalbierende darstellen würde.

Konstruktion:

Die in der Bedingungsanalyse gewonnenen notwendigen Bedingungen müssen in der Konstruktion des Dreiecks ABC beachtet werden und die drei Geraden so vorgegeben werden, dass sie den Bedingungen genügen. Unter Berücksichtigung des Satzes „Wenn die merkwürdigen Linien m_a , m_b und w_c des Dreiecks ABC gegeben sind, dann gilt: $\delta_1 = \delta_2$ (siehe Bedingungsanalyse dieser Beispielaufgabe)“ ist die Konstruktion eines Dreiecks ABC, ausgehend von den drei gegebenen Geraden, möglich.

Konstruktionsbeschreibung (siehe Abb. 6):

Gegeben: Drei Geraden g_1, g_2, g_3 (unter Berücksichtigung notwendiger Lagebedingungen).

Gesucht: Ein Dreieck ABC, bei dem die Geraden m_a, m_b und w_c sind.

Es seien $g_1 = m_a, g_2 = m_b$ und $g_3 = w_c$

1. Sei C ein Punkt auf w_c (vgl. ²⁾).
2. Der Bildpunkt der Achsenspiegelung von C an m_b ist der Punkt B.
3. Der Bildpunkt der Achsenspiegelung von C an m_a ist der Punkt A.
4. Die Punkte A, B und C bilden das gesuchte Dreieck ABC.

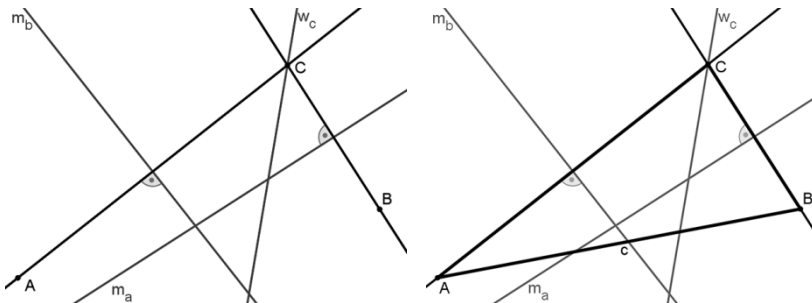


Abb. 6: Konstruktion eines Dreiecks ABC

Während im ersten Beispiel die Konstruktion vergleichsweise wenig aufwendig war, wird im folgenden zweiten Beispiel eine umfangreichere Konstruktion dargestellt.

Aufgabenbeispiel 2:

Gegeben sind drei Geraden g_1 ,
 g_2 , g_3 .

Gesucht ist ein Dreieck ABC ,
 bei dem diese Geraden die
 Winkelhalbierenden w_a und w_b
 und die Mittelsenkrechte m_c
 sind (siehe Abb. 7).

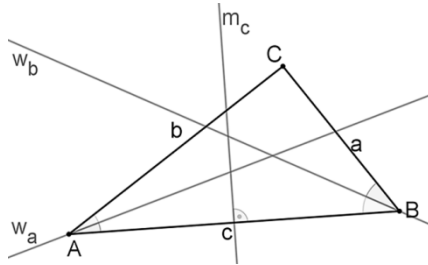


Abb. 7: Planfigur zu Beispielaufgabe 2

Bedingungsanalyse:

Da die gegebenen Geraden im Dreieck ABC die Winkelhalbierenden w_a und w_b und die Mittelsenkrechte m_c darstellen, dürfen sie nicht paarweise parallel oder senkrecht zueinander verlaufen. Mit Berücksichtigung dieser beweisbedürftigen Bedingungen kann ein Dreieck ABC auf die im Folgenden dargestellte Weise konstruiert werden. Dass ggf. weitere notwendige Bedingungen existieren, sei auch bei dieser exemplarischen Bearbeitung nicht ausgeschlossen.

Konstruktion:

In diesem Falle gelingt eine Lösungskonstruktion mit Hilfe der $(n-1)$ -Strategie (Weth, 2002). Danach wird

- A) in einem ersten Konstruktionsschritt nach einer Konstruktionsidee gesucht, indem zunächst eine Figur so konstruiert wird, dass sie nur $n-1$ gegebenen Bedingungen genügt. Durch anschließendes Variieren der Figur und Erzeugen einer Ortskurve, soll auf eine zielführende Konstruktionsidee geschlossen werden.
- B) Im zweiten Konstruktionsschritt wird dann die gesuchte Figur mit zu Hilfenahme der in A) ausfindig gemachten Konstruktionsidee konstruiert.

Im Konstruktionsschritt A) wird in diesem Beispiel zunächst ein Dreieck $A'B'C'$ mit Hilfe einer DGS konstruiert, das allen gegebenen Bedingungen genügt, bis auf die Eigenschaft der Mittelsenkrechten m_c , die Dreiecksseite $[A'B']$ zu halbieren (also $n-1$ Bedingungen).

Konstruktionsbeschreibung zur Ideenfindung:

Gegeben: Drei Geraden g_1, g_2, g_3 (unter Berücksichtigung notwendiger Lagebedingungen).

Gesucht: Eine Ortskurve o am Dreieck $A'B'C'$, die bei der späteren Dreieckskonstruktion hilft.

1. Es sei A' ein beliebiger Punkt auf w_a (wobei $A' \notin w_b$).
2. Das Lot auf m_c durch A' sei c' .
3. Der Schnittpunkt von c' und w_b sei B' .
4. Die Bildgeraden der Spiegelung von c' an w_a und w_b seien b' und a' .
5. Der Schnittpunkt von b' und a' sei C' .
6. Die Punkte A', B' und C' bilden das Hilfsdreieck $A'B'C'$ (siehe Abb. 8).

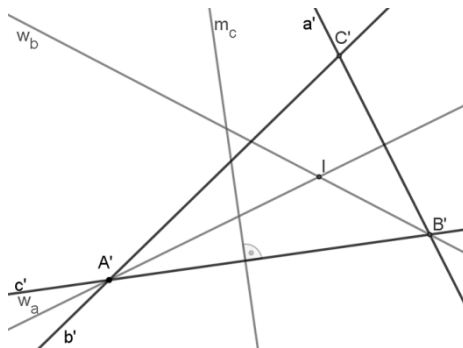


Abb. 8: Konstruktion eines Hilfsdreiecks $A'B'C'$

Im nächsten Schritt soll entsprechend der $(n-1)$ -Strategie ein passender Punkt zum Erzeugen einer Ortskurve gewählt werden, die dann (hoffentlich) eine Beweisidee liefert. Da die noch zu erfüllende Bedingung „ m_c halbiert $[A'B']$ “ lautet, bietet sich als nächster Konstruktionsschritt an:

7. Der Mittelpunkt von A' und B' sei M' .
8. Durch Variation des Punktes A' auf w_a entsteht dann eine Ortskurve o von M' (siehe Abb. 9).

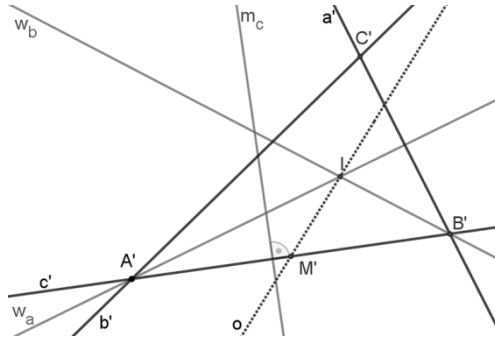


Abb. 9: Konstruktion einer Ortskurve, die ggf. als Hilfslinie für die Konstruktion eines gesuchten Dreiecks ABC dient.

Die Ortskurve o ist also die Menge aller Mittelpunkte der zu $[A'B']$ parallel verlaufenden Strecken, deren Endpunkte jeweils auf w_a und w_b liegen. Der Schnittpunkt von o und m_c stellt damit den Mittelpunkt der Seite $[AB]$ im gesuchten Dreieck ABC dar. Wäre die Ortskurve o , wie es scheint, eine Gerade durch M' und den Schnittpunkt I der beiden Winkelhalbierenden, so könnte diese Gerade $M'I$ im zweiten Schritt B) verwendet werden, um das gesuchte Dreieck ABC zu konstruieren. Dass dies tatsächlich so ist, kann über den zweiten Strahlensatz und seine Umkehrung bewiesen werden:

Behauptung: Die Ortskurve o ist eine Gerade.

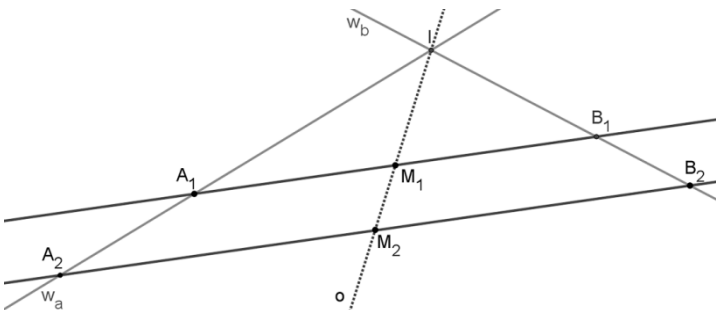


Abb. 10: Hilfsskizze zum Beweis

Beweis: Mit Abbildung 10 gilt:

1. Es seien $[A_1 B_1]$ und $[A_2 B_2]$ zwei beliebige parallele Strecken, die durch Variation von A' auf w_a entstehen (Voraussetzung)
2. M_1 bzw. M_2 halbieren $[A_1 B_1]$ und $[A_2 B_2]$ (Voraussetzung)
3. Die Geraden w_a und w_b schneiden sich in einem Punkt I (Voraussetzung)

4. Es gilt: $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{B_1I}}{\overline{B_2I}}$ (1,3, zweiter Strahlensatz)

5. $\overline{A_1B_1} = 2 \cdot \overline{M_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2} = 2 \cdot \overline{M_2B_2}$ (2)

6. Damit gilt auch: $\frac{\overline{M_1B_1}}{\overline{M_2B_2}} = \frac{\overline{B_1I}}{\overline{B_2I}}$ (4, 5)

7. M_1M_2 ist eine Gerade durch I (1, 2, 6, Umkehrung zweiter Strahlensatz)

Im folgenden Konstruktionsschritt B) wird das Dreieck ABC unter Zuhilfenahme der Geraden $M'I$ konstruiert.

Konstruktionsbeschreibung des Dreiecks ABC:

Gegeben: Drei Geraden g_1, g_2, g_3 (unter Berücksichtigung notwendiger Lagebedingungen).

Gesucht: Ein Dreieck ABC, bei dem die Geraden w_a, w_b und m_c sind.

1. Es sei A' ein beliebiger Punkt auf w_a , wobei $A' \notin w_b$.
2. Das Lot auf m_c durch A' sei c' .
3. Der Schnittpunkt von c' und w_b sei B' .
4. Der Mittelpunkt von A' und B' sei M' .
5. Der Punkt M' und der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden I legen die Gerade $M'I$ fest (siehe Abb. 11).

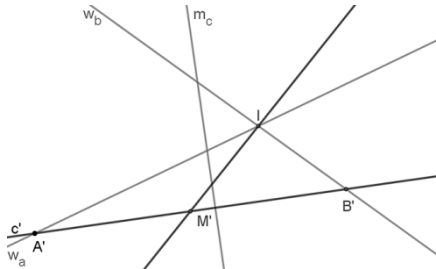


Abb. 11: Konstruktion eines gesuchten Dreiecks ABC

6. Der Schnittpunkt von $M'I$ und m_c sei M.
7. Die Parallele zu c' durch M sei c.
8. Die Schnittpunkte von c und w_a bzw. w_b sind die Punkte A bzw. B (siehe Abb. 12).

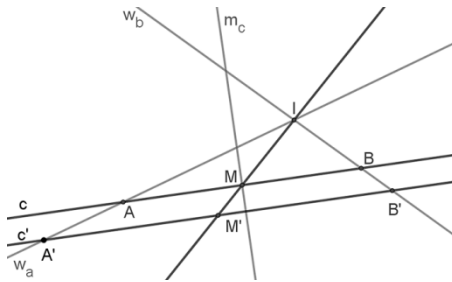


Abb. 12: Konstruktion eines gesuchten Dreiecks ABC

9. Die Bildgeraden von c , gespiegelt an w_a bzw. w_b , seien b bzw. a .
10. Der Schnittpunkt der beiden Geraden a und b sei der Punkt C .
11. Die Punkte A , B und C bilden dann das gesuchte Dreieck ABC (siehe Abb. 13).

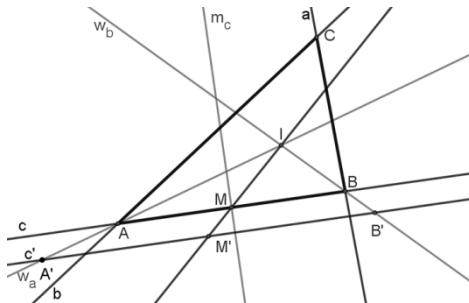


Abb. 13: Konstruktion eines gesuchten Dreiecks ABC

Mit den exemplarischen Lösungen der Beispielaufgaben 1 und 2 wurde ein erster Einblick in die Aspekte dieses (neuen(?)) Aufgabentyps zu Dreiecks-konstruktionen gegeben.

Zusammenfassend sollen mit der Aufgabenanalyse folgende zentrale Fragestellungen beantwortet werden:

- Existiert eine Lösung der einzelnen Problemstellungen und wenn ja, unter welchen Bedingungen?
- Welche Lösungsstrategien helfen bei der Konstruktion der Dreiecke? Welche unterschiedlichen Lösungswege (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) sind möglich?

Ausblick

Im Rahmen einer Dissertation soll die im Kapitel 2 beschriebene Aufgabenanalyse des Aufgabentyps zu Dreieckskonstruktionen (vgl. Kapitel 1) durchgeführt werden. Unter Beachtung auch „außercurricularer“ Punkte und Geraden als Bestimmungsstücke in der Aufgabenstellung, stellt sich hierbei die Frage, wie man über 2300 Aufgaben bearbeiten bzw. analysieren kann. Folgende Ideen sollen ein Vorgehen andeuten, wie die Bearbeitung der Problemstellungen nicht nur von der Doktorandin selbst, sondern auch von Studenten, Referendaren und Schülern (im Rahmen von Abschlussarbeiten) durchgeführt werden soll:

- Erste Problemstellungen der Aufgabenanalyse sollen von der Doktorandin selbst systematisch gelöst werden. Insbesondere sollen Gemeinsamkeiten unterschiedlicher Aufgabenbearbeitungen ermittelt werden.
- Basierend auf den Ergebnissen der ersten Aufgabenanalyse soll ein Einführungsseminar für interessierte Studenten, Schüler und Referendare entwickelt werden, in welchem der Aufgabentyp zu Dreieckskonstruktionen nicht nur vorgestellt, sondern auch mögliche Vorgehensweisen zur Bearbeitung der Problemstellungen weitergegeben werden können.
- Die Schüler, Studenten, Referendare und die Doktorandin stehen während der Lösung verschiedener Problemstellungen im Austausch miteinander, so dass ein „didaktisches Viereck“ entsteht.

Literatur

Schupp, Hans (2002): Thema mit Variation. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Schupp, Hans (2006): Von den Transversalen zurück zur Figur. In: Malitte, E. et al. (Hrsg.). Die etwas andere Aufgabe. Hildesheim: Franzbecker.

Weth, Thomas (2002): Ortslinien als Hilfsmittel zur Problemlösung. http://www.didmath.ewf.fau.de/Nuernberger-Kolloquium/2002/weth_n-1Strategie.pdf (Stand: 14.08.2017)

Kurven und Tiefe

Dörte Haftendorn

Zusammenfassung. Kurven bieten eine Fülle von Möglichkeiten für vertieftes mathematisches Arbeiten. Dieser Aufsatz konzentriert sich auf die *bipolaren Kurven*, zu denen nicht nur die Cassini'schen Kurven, sondern auch Ellipsen, Hyperbeln und allgemeinere Descartes'sche Kurven gehören. Durch ihre einfache Konstruktion sind Erkundungen schon für junge Lernende mit geringen Konstruktionserfahrungen unter Einsatz von GeoGebra möglich. Besonderes Verständnis der beobachteten Formen wird unterstützt durch die Darstellung der Konstruktionsbedingungen in einem simultanen zweiten Grafikfenster. Dieses ermöglicht auch, eigene bipolare Kurven mit selbst geplanten Eigenschaften zu erfinden.

Einleitung

Das Thema *Kurven* ist wunderbar reichhaltig, aber nicht nur wegen der schönen Bilder und vielfältigen Formen. In besonderem Maße reicht es auch „tief“ in die Mathematik, ermöglicht so viele mathematische Überlegungen, Betrachtungen, Beweise, Rechnungen und Kreuz-und-quer-Bezüge, dass kein Ende abzusehen ist.

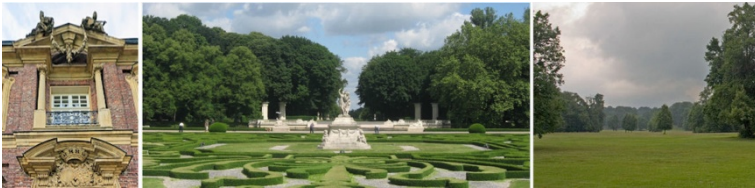


Abb. 1: Barockes Haus und Barockgarten mit Antikensammlung und Landschaftspark

Mir kommt es so vor, als öffne man im Haus der Mathematik ein Fenster, blicke in einen barocken Garten mit einer Antikensammlung und vielerlei Beeten, auf denen Blumen mit illustren Namen gedeihen. Von jedem Beet führt mindestens ein Pfad in den freien „englischen“ Mathematik-Landschaftsgarten, in dem es zu jeder bekannten Blumenfamilie offenere Definitionen (Biologen sagen eher Züchtungen) gibt, die viele Überraschungen und allerlei unvermutete Verwandtschaften bieten.

Dieses „Wunder“ ist mir erst so richtig zum Bewusstsein gekommen, als ich an dem Buch „Kurven erkunden und verstehen“ (Haftendorn 2017) gearbeitet habe. Wie der Titel sagt, geht es dabei um das *Erkunden* der Vielfalt in

eigener Regie und das *Verstehen* der Zusammenhänge unter Einsatz von mathematischem Ideenreichtum und Handwerk. Der Fokus des vorliegenden Beitrags liegt auf den bipolaren Kurven. Sie bieten auch Gelegenheit, das vertiefte Verstehen durch die Nutzung zweier Grafikfenster zu unterstützen.¹

Barocke Blüten und Früchte: Bipolare Kurven

Die antike Strenge der Renaissance löst sich in der Architektur der Barockzeit in Bögen, geschwungenen Formen, Spiralornamenten und elliptischen Fenstern auf. Mathematiker und kreative Laien widmeten sich den antiken Kurven, verallgemeinerten² sie und erfanden neue Kurven.

Definition der bipolaren Kurven

Gegeben seien zwei Pole E und E' , oft auch *Brennpunkte* genannt, im Abstand $\overline{EE'} = 2e$. Jeder Punkt der Ebene hat von E einen Abstand r und von E' einen Abstand r' . Jede Gleichung mit r und r' definiert eine *bipolare Kurve* als Menge aller Punkte, die die Gleichung erfüllen.

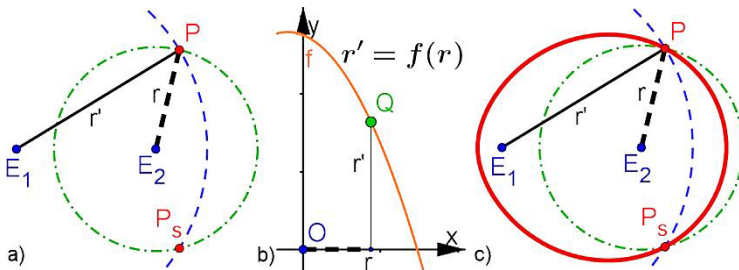


Abb. 2: a) Konstruktion von P gemäß der Definition mit zwei Kreisen, b) ein Punkt $Q = (r, r')$ erfüllt die Gleichung $r' = f(r)$, es wäre auch eine Relation $F(r, r') = 0$ möglich, c) Bipolare

¹ Einen „sanften“ Zugang bietet das Buch im Abschnitt 4.3, den ich hier aber umgestalte zugunsten eines strafferen Vorgehens für Experten. Die im Buch in Aufgabe 4.4 angesprochenen Themen führe ich dagegen hier einzeln aus. Auf der Website <http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de> finden Sie zu allen Bildern die zugehörigen *.ggb und *.nb Dateien, ebenso diesen Aufsatz und den originalen Vortrag.

² Die Anregungen von Lockwood (1962) sind i. W. in Haftdorn (2017) umgesetzt.

Kurve, Menge aller Punkte P , deren r und r' die Gleichung erfüllen und mit den Kreisen konstruierbar sind.

Konstruktionsbedingungen und ihre Visualisierung

Lässt man also Q auf dem Graphen in Abb. 2b) wandern, entsteht als Spur von P der obere Teil der bipolaren Kurve. Wegen des stets existierenden Spiegelpunktes P_s gibt es die an der Achse $E'E = E_1E_2$ gespiegelte untere Hälfte der Ortskurve. Damit wird sogleich klar, dass ein Koordinatensystem sinnvollerweise diese Gerade als x-Achse und die y-Achse in der Mitte zwischen den Brennpunkten haben sollte. Mit diesem Grundverständnis sind schon viele Erkundungen möglich. Anstelle der Spur kann auch das Werkzeug „Ortslinie“ verwendet werden.

Beim Handeln wird die Beobachtung gemacht, dass die beiden Kreise sich nicht bei jeder Stellung von Q schneiden. Das führt zu der Frage, wann eigentlich wirklich ein Dreieck mit den Seiten r , r' , $2e$ entsteht und wann sich die Kreise genau berühren.

Dreiecksbedingung und Grenzfälle

$$\text{I: } r - r' \leq 2e \quad \text{II: } -2e \leq r - r' \quad \text{III: } 2e \leq r + r'$$

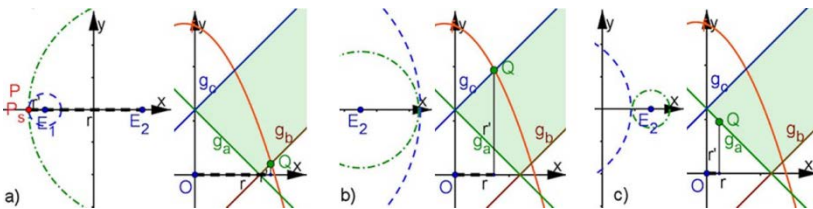


Abb. 3: Grenzgeraden a) I $g_b: r' = r - 2e$ b) II $g_c: r' = r + 2e$ c) III $g_a: r' = -r + 2e$

Genau die Punkte des kartesischen Graphen der gegebenen Relation zwischen r und r' , die in dem markierten Bereich (incl. Rand), dem *Gültigkeitsbereich*, liegen, gehören zu der so definierten *bipolaren Kurve*. Der Bereich ist zu seiner Mitte $y = x$ symmetrisch und allein durch e bestimmt.

Cassini'sche Kurven

Bipolare Kurven mit der Gleichung $r \cdot r' = k^2$ heißen *Cassini'sche Kurven* (Abb. 4). Betrachtet man die Hyperbeläste von rechts oben in Richtung Ursprung und damit die Cassini'schen Kurven von außen nach innen, so sieht man bei letzteren zunächst Ovale, die „flach“ werden, dann eine Einbuch-

tung bekommen. Sie gehören zu den Hyperbeln, die ganz im Gültigkeitsbereich liegen. Berührt die Hyperbel die Gerade g_a , entsteht die Lemniskate. Für die gestrichelte Hyperbel zerfällt die Cassini'sche Kurve in zwei offensichtlich symmetrische Teile. Diese ziehen sich bei den Brennpunkten zusammen, werden aber nicht punktförmig, solange $k > 0$ bleibt.

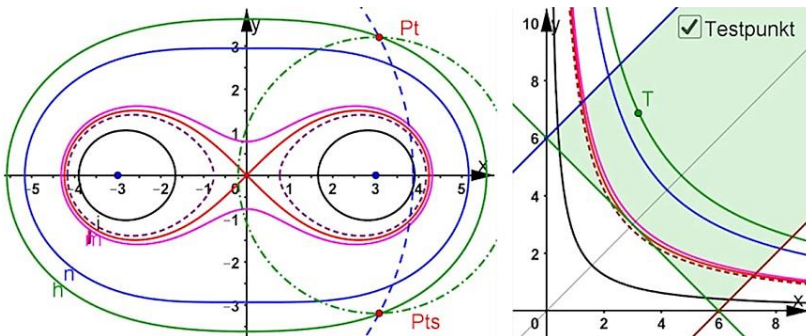


Abb. 4: Hyperbeläste im 1. Quadranten (rechts) definieren die Cassini'schen Kurven (links)

Die Formeln ergeben sich direkt aus den zwei Kreisgleichungen und der definierenden Gleichung:

$$e^4 + (x^2 + y^2)^2 = k^4 + 2e^2(x^2 - y^2)$$

Für $e = k$ ergibt sich tatsächlich die Bernoulli'sche Lemniskate. Die Schnitthöhe h der Kurve mit der y -Achse erfüllt geometrisch die Gleichung $h^2 + e^2 = r^2 = k^2$. Schneidet man die Gerade $y = \sqrt{k^2 - e^2}$ mit der Cassini'schen Kurve, so ergeben sich $\pm\sqrt{2}\sqrt{2e^2 - k^2}$ als weitere Schnittstellen. Diese verschwinden für $2e^2 = k^2$. Somit sind die Flachpunkte auf der y -Achse in der Höhe $h = \pm e$. So kann man sich einige Fragen stellen und geometrisch oder analytisch beantworten.

Descartes'sche Kurven

Bipolare Kurven mit der Gleichung $m \cdot r + n \cdot r' = k$ mit $m, n, k \in \mathbb{R}$ heißen *Descartes'sche Kurven* oder *Descartes'sche Ovale*. Gebräuchlich ist auch etwas missverständlich *kartesische Ovale*. Da nicht alle Descartes'schen Kurven wie Ovale aussehen und da man unter kartesischen Kurven etwas Anderes versteht, plädiere ich für den erstgenannten Begriff.

Die *Ellipsen*, für die die Summe der Abstände von den Brennpunkten $r + r' = 2a$ mit $a \in R^+$ erfüllt, und *Hyperbeln*, für die $r - r' = \pm 2a$ gilt, sind offenbar spezielle Descartes'sche Kurven. Dabei ist $2a$ der Scheitelabstand auf der Geraden, die die Brennpunkte enthält.

Die Funktionen $r' = -r + 2a$ sind in dem rechten Grafikenster offenbar Geraden, die die Randgeraden des Gültigkeitsbereiches senkrecht schneiden. Damit ist schon klar, dass die Ellipsen geschlossene zur y-Achse symmetrische Kurven sind, also wirkliche *Ovale*.

Die Funktionen $r' = r \pm 2a$ sind in dem rechten Grafikenster offenbar ein paralleles Geradenpaar, das zu $y = x$ symmetrisch im Gültigkeitsbereich liegt. Damit ist ersichtlich, dass die Hyperbeln zwei zur y-Achse symmetrische unbegrenzte Kurven sind, also keine *Ovale*. Allenfalls in einer projektiven Sicht könnte man sie als solche auffassen.

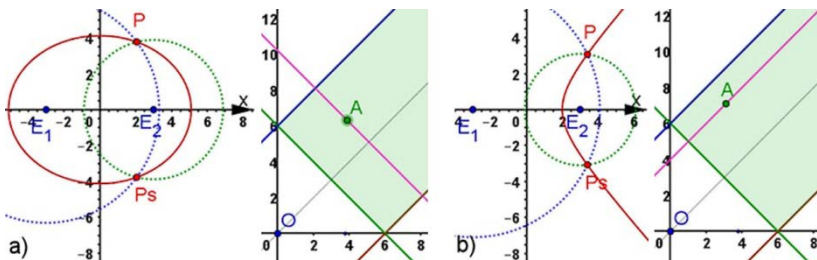


Abb. 5: a) Ellipse als Descartes'sche Kurve, eine Strecke im Gültigkeitsbereich,
b) Hyperbelast als Descartes'sche Kurve, ein Strahl im Gültigkeitsbereich,
zum zweiten Hyperbelast gehört der an $y = x$ gespiegelte Strahl.

Die Gleichung der Descartes'schen Kurven

Wenn man die Gleichung der Kurven aufstellen will, braucht man die beiden Kreise $K_r: (x - e)^2 + y^2 = r^2$ und $K_{r'}: (x + e)^2 + y^2 = r'^2$ und die Descartes'sche lineare Gleichung $m \cdot r + n \cdot r' = k$. Elimination von r und r' ergibt mit Mathematica, wenn man etwas elegant sortiert,

$$k^4 + ((m^2 - n^2)(e^2 + x^2 + y^2) - 2e(m^2 + n^2)x)^2 = 2k^2((m^2 + n^2)(e^2 + x^2 + y^2) - 2e(m^2 - n^2)x)$$

Bemerkung: Mit Copy as plaintext kann man das in GeoGebra übernehmen, wobei man *vorher* die Parameter e , k , m und n als Schieberegler definieren muss. Damit kann man die Descartes'schen Kurven erkunden.

Speziell für Ellipsen ist $m = 1$, $n = 1$, $k = 2a$. Setzt man dieses oben ein, so ergibt sich $16a^4 + (2e \cdot 2x)^2 = 8a^2 \cdot 2(e^2 + x^2 + y^2)$. Es ist a die große Halbachse der Ellipse und b mit $b^2 = a^2 - e^2$ die kleine Halbachse. Damit folgt sofort $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wie erwartet. Für Hyperbeln gilt entsprechend $b^2 = e^2 - a^2$ und es folgt $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. In der Gleichung der Descartes'schen Kurven spielen offensichtlich die Vorzeichen von m , n , k keine Rolle. Für dieses Phänomen folgt nun eine geometrische Betrachtung.

Unterschiede zwischen geometrischer Konstruktion und Gleichung

Betrachten wir die Geradengleichungen $n \cdot r' = \pm m \cdot r \pm k$ mit positiven Parametern, so sieht man leicht, dass es sich nur um vier verschiedene Geraden handelt, von denen i. Allg. nur zwei überhaupt Punkte im Gültigkeitsbereich haben. Diese beiden Geraden erzeugen *geometrisch je eine* Descartes'sche Kurve. Die zugehörige *Gleichung ist für beide identisch*, sie erzeugt also zwei Ovale oder zwei Äste.

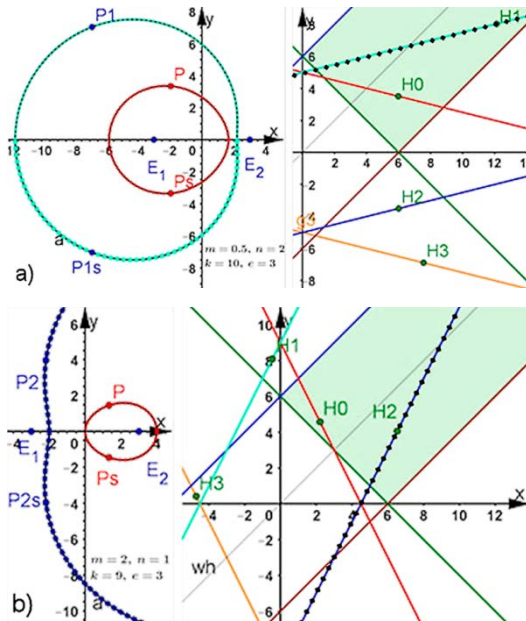


Abb. 6: a) und b) Das kleinere Descartes'sche Oval wird durch die Gerade durch H_0 erzeugt, das größere Oval mit der Beule bei durch die Gerade bei a) durch H_1 , bei b) durch H_2 .

Frei erfundene bipolare Kurven

Parabelgleichung: $r' = k(r - m)^2 + n$

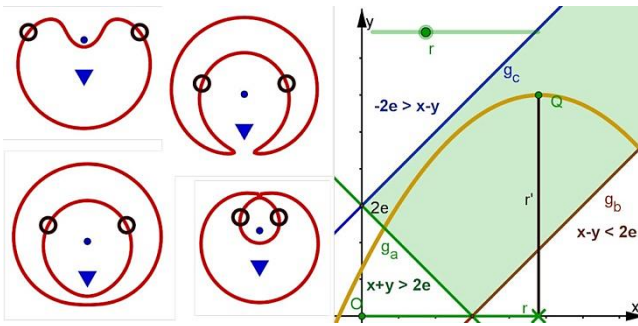


Abb. 7: Die vier bipolaren Kurven sind um $+90^\circ$ gedreht. Das Dreieck ist der linke Brennpunkt, der kleine Punkt ist der rechte Brennpunkt. Die „Augen“ sind die Punkte P und P_s. Zu welchem Bild gehört die im Gültigkeitsbereich gezeigte Parabel? Wo etwa liegt die Parabel für die anderen Bilder? Sind alle wesentlichen Fälle erfasst?

Grinsekate aus schrägem Tangens $r' = 0.2 \tan(r) + r$

Wenn man interessante bipolare Kurven erfinden will, braucht man Funktionen oder Relationen, die im Gültigkeitsbereich interessante Graphen haben. Bei der oben vorgeschlagenen Tangensfunktion ist der Wendepunkt jedes Astes auf der Geraden $y = x$, die bei der bipolaren Kurve der y-Achse entspricht.

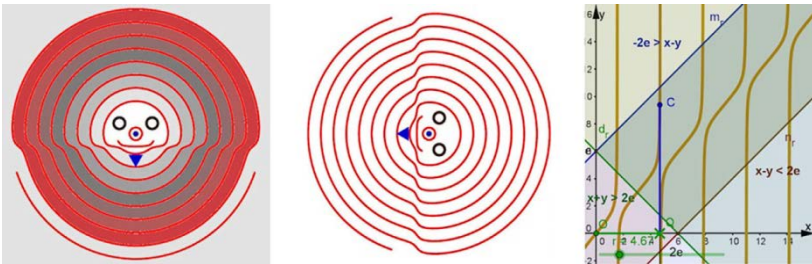


Abb.8: Frei nach Alice im Wunderland ist dies die Grinsekate.

Wie in Abb. 7 sind das Dreieck, der Punkt und die Augen echte Elemente der Konstruktion. Die Schattierung ist hinzugefügt, aber der „Mund“ ist ein Artefakt, eigentlich ist er Teil einer geschlossenen Kurve durch die Augen. Zudem reicht die Grinsekate bis ins Unendliche, wie auch der Tangens.

Der schräge Sinus-Teddy $r' = k \sin(r) + 2r$

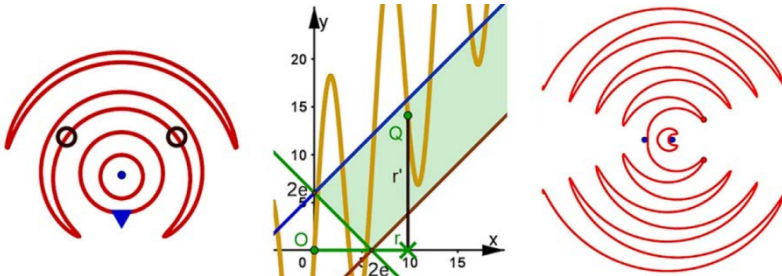


Abb. 9: Der Sinus-Teddy hat wirklich nur fünf geschlossene Kurvenbögen, wobei der kleinste unter der Nase verborgen ist. Dagegen ist die bipolare Kurve rechts nur teilweise dargestellt. Ihr liegt eine Sinuskurve zugrunde, die auf $y = x$ aufgesetzt ist und eine Amplitude so klein hat, dass sie den Gültigkeitsbereich nicht verlässt. Sie besteht also aus zwei Bögen, von denen nur der kleine Mond endlich ist.

Literaturverzeichnis

Haftendorn, Dörte (2017). Kurven erkunden und verstehen; Abschnitt 4.3 S.99-107, Heidelberg: Springer Spektrum Verlag.

Haftendorn, Dörte. Website <http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de> Bereich Barocke Kurven, Bipolare Kurven.

Schupp, Hans, Darbrock, Heinz (1995). Höhere Kurven. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

Lockwood, E. H. (1961): A Book of Curves. 1. Aufl. 1. Band London: University Press.

Mathematische Erschließungsmethoden in der Geometrie

Manfred Schmelzer

Dem Anspruch, im Unterricht Kompetenzen zu vermitteln, wird eine grundlagenorientierte sowie eine konstruktivistische Überzeugung wohl am meisten gerecht. Diese Überzeugungen mit konkreten mathematischen Erschließungsmethoden im Unterricht umzusetzen erfordert m. E. eine hierfür geeignete Stoffdidaktik. Für die ursprüngliche Anregung, sich mit Skalierungen im weiteren Sinne – so auch etwa in der Analysis – zu beschäftigen, möchte ich mich bei Herrn Christoph Hammer bedanken. Aus der Beschäftigung mit seinem Vortrag auf der 33. Herbsttagung des AK Geometrie ist dieser Beitrag entstanden.

Einleitung

Die Entwicklung der allgemeinen Auffassungsgabe und des logischen, hypothetischen Denkens eines Schülers entwickelt sich vermutlich am ehesten aus der Schulung des schlussfolgernden Denkens (Reasoning) im Mathematikunterricht. Daher stehen die Herleitungen im Vordergrund. Aus Beispielen Vermutungen aufstellen, bildliche Veranschaulichungen der getroffenen Schlussfolgerungen und das Erschaffen einer intuitiven Überzeugung ergeben umfassende Erklärungen, die über möglichst knappe Beweise durch Termumformungen weit hinausgehen.

Anhand einer Betrachtung des Kreises, der Pyramide, der Kugel und von Integralflächen werden fundamentale Prinzipien der Geometrie und deren Ineinandergreifen vorgestellt. Die reflektierten Schließungsprinzipien sind:

- Ergänzen und Zerlegen,
- Symmetrie und Invarianz,
- Skalierung und Selbstähnlichkeit,
- Parametrisierung von Flächen und Körpern,
- Grenzwerte beim Ausschöpfen von Flächen,
- Prinzip von Cavalieri.

Die Perspektive ist nicht diejenige, wie ein Sachverhalt z. B. das Pyramidenvolumen am einfachsten herzuleiten sei, sondern welche möglichst vielfältigen Erschließungsmethoden hieran vorgestellt werden können. Dadurch ergibt sich zwangsläufig eine Redundanz, für die im Unterricht natürlich

allzu oft kein Platz ist. Ein besonderes Augenmerk liegt auf der Skalierung in Verbindung mit der Selbstähnlichkeit. Eine Pyramide ist selbstähnlich, da eine zur Grundebene parallele Ebene eine maßstäbliche Teilpyramide in der Spitze abschneidet.

Ein Kreis lässt sich nicht vollständig durch Skalierung oder Selbstähnlichkeit beschreiben. Zur Beschreibung eines Kreises sind Grenzwertbetrachtungen erforderlich, letztlich da die Kreiszahl π transzendent ist.

Im Gegensatz zu Kreisflächen lassen sich die Integralflächen $\int x^n dx$ der Potenzfunktionen ohne Grenzwerte bestimmen. Durch geeignete Skalierungen lässt sich $\int_0^a x^n dx = a^{n+1} \int_0^1 x^n dx$ auch ohne Grenzwerte von Ober- und Untersummen beweisen.

Elementare Betrachtungen am Kreis

Eine zentrische Streckung mit dem Streckungsfaktor r bildet einen Kreis vom Radius 1 auf einen solchen mit Radius r ab, wobei Flächeninhalte mit dem Maßstab r^2 skalieren.

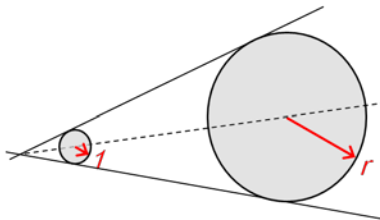


Abb. 1: Skalierung eines Kreises

Bezeichnet $\pi_{\text{Fläche}}$ den Flächeninhalt und π_{Umfang} den halben Umfang des Einheitskreises mit Radius 1, so ergeben sich für den Flächeninhalt A_r und Umfang U_r eines Kreises mit Radius r aus der Skalierung die Werte:

$$A_r = \pi_{\text{Fläche}} \cdot r^2 \quad \text{und} \quad U_r = 2\pi_{\text{Umfang}} \cdot r.$$

Die Triangulierung des Kreises in infinitesimale Dreiecke liefert eine Antwort zur Frage $\pi_{\text{Fläche}} = \pi_{\text{Umfang}}$?

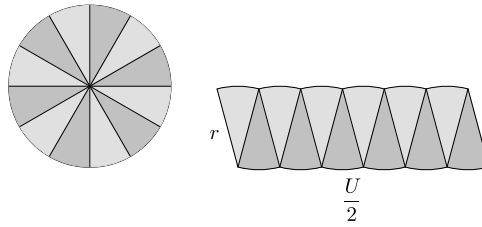


Abb. 2: Anordnung von Kreis-Tortenstücken zu einer rechteckähnlichen Figur

Diese Tortenstückumordnung transformiert den Kreis zu Figuren, deren Grenzwert ein Rechteck der Höhe r und Grundlinie $\frac{1}{2}U_r = \pi_{Umfang} \cdot r$ darstellt. Für den Flächeninhalt A_r des Kreises mit Radius r folgt aus der Tortenstückargumentation also:

$$A_r = \frac{1}{2}U_r \cdot r = \pi_{Umfang} \cdot r^2.$$

Dieser feste Zusammenhang zwischen Umfang und Flächeninhalt A gilt ansonsten nur für Inkreisfiguren, die eine Triangulierung in Dreiecke gleicher Höhe r_i eines Mittelpunktes M über deren Kanten zulassen.

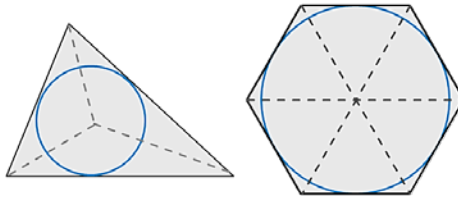


Abb. 3: zwei Inkreisfiguren

Inkreisfiguren mit Inkreisradius r_i und Umfang U lassen sich flächentreu abrollen zu einem Dreieck der Höhe r_i und Grundseite der Länge U , da alle Triangulierungsdreiecke dieselbe Höhe r_i über je einer Kante der Inkreisfigur haben, und die Summe aller Kantenlängen gerade den Umfang U der Figur ergibt. Es ergibt sich für Inkreisfiguren die "*Inkreisformel*"

$$A = \frac{1}{2}U \cdot r_i.$$

Der Kreis und die Inkreisfiguren sind beschreibbar als konvexe Hülle zwischen einem Punkt M im invarianten Lotabstand zu deren Rand als Streckenzug bzw. Kurve, d.h. zu einer Grundlinie der Länge U . Der Übergang

von der Grundlinie zur konvexen Hülle wird in Abb. 4 als "Inkreisfigurbildung" bezeichnet.

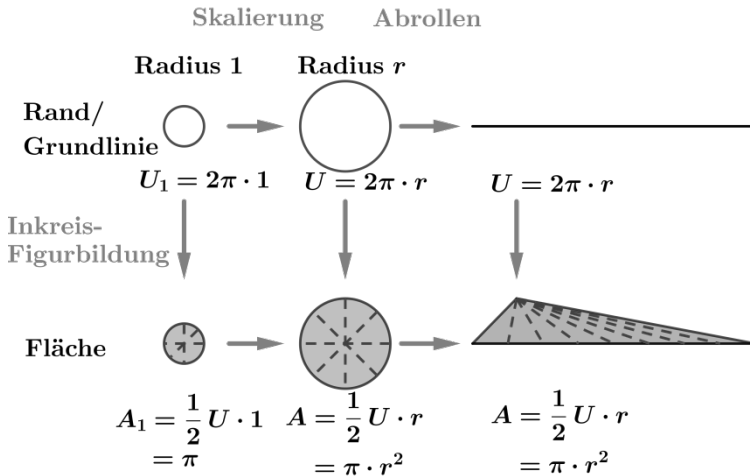


Abb. 4: Skalierung, Abrollparametrisierung und Inkreisfigurbildung zum Kreis

Gehört der Kreis zu den Inkreis-Figuren?

In einen Umkreis mit festem Radius r werden reguläre n -Ecke mit Inkreisradius r_n eingeschrieben für $n = 6, 12, 24, 48, \dots$. Im Schulunterricht werden oft die Werte für den Umfang U_n der n -Ecke iterativ berechnet und so der Umkreisumfang $U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ als Grenzwert bestimmt. Dabei wird der Wert $\pi_{Umfang} = 3,14159 \dots$ approximativ berechnet.

Ergänzend hierzu soll im Weiteren die Tortenstückmethode genauer untersucht werden. Bezeichnet A_n den Flächeninhalt des eingeschriebenen regulären n -Ecks und r_n dessen Inkreisradius, so gilt offensichtlich $r_n < r$ und $A_n < A$ in Bezug zum Flächeninhalt A und Radius r des Umkreises. Die Inkreisformel $A_n = \frac{1}{2} U_n \cdot r_n$ wird durch Grenzübergang von den n -Ecken auf den Umkreis übertragen, d. h. es soll gezeigt werden:

$$A = \frac{1}{2} U \cdot r.$$

Hieraus folgt $A = \pi_{Umfang} \cdot r^2 = \pi_{Fläche} \cdot r^2$, d. h. $\pi_{Umfang} = \pi_{Fläche}$ haben denselben Wert.

Ausschöpfung des Kreises durch reguläre n -Ecke

Bei der Ausschöpfung des Umkreises mit Radius r durch reguläre n -Ecke wird zunächst die Konvergenz der Inkreisradien r_n betrachtet. Für deren Abweichung $d_n = r - r_n$ zum Umkreisradius r gilt:

Satz: Die Abweichungen $d_n = r - r_n$ der Inkreisradien zum Kreisradius halbieren sich mindestens bei jeder Verdoppelung der Eckenzahl n : $d_{2n} < \frac{1}{2}d_n$.

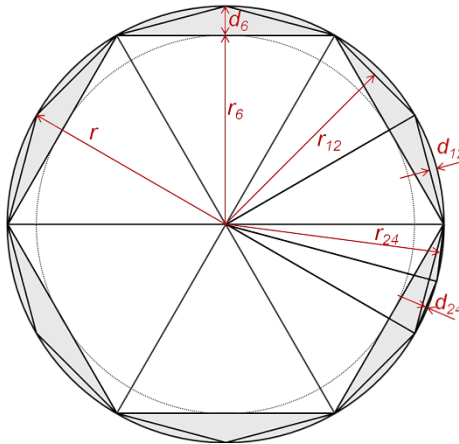


Abb. 5: Inkreisradien und deren Abweichungen zum Kreisradius

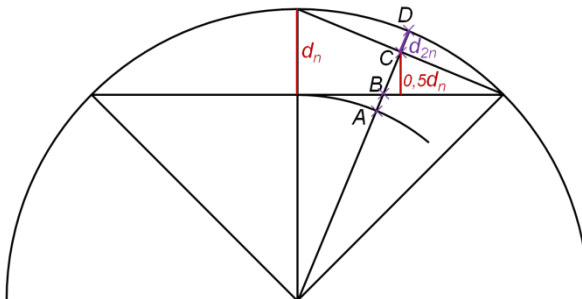


Abb. 6: Beweisfigur zu $d_{2n} < \frac{1}{2}d_n$

Mit den Bezeichnungen in der Skizze gilt:

$$d_{2n} = d_n - \overline{AC} < d_n - \overline{BC} < d_n - \frac{1}{2}d_n = \frac{1}{2}d_n ,$$

also folgt: $r - r_{2n} < \frac{1}{2}(r - r_n)$ und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$.

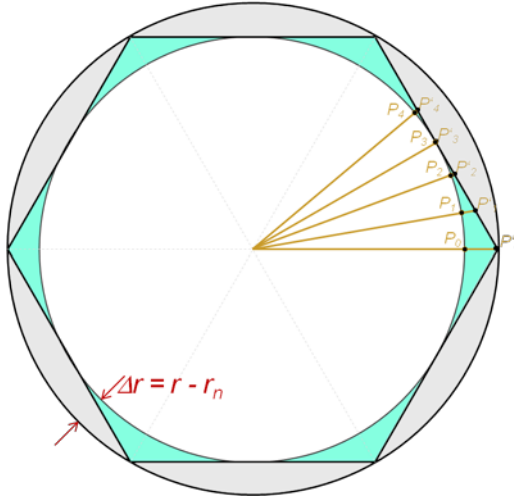


Abb. 7: Streckenzug auf dem Inkreis und Umfang des regulären n -Ecks

Jeder Streckenzug $P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 \dots$ auf dem Inkreis des regulären n -Ecks impliziert einen längeren Streckenzug auf dem n -Eck selbst. Also ist der Umfang $2\pi_{Umfang} \cdot r_n$ des n -Eck-Inkreises kleiner als dessen Umfang U_n , der wiederum kleiner ist als der Umfang U des Umkreises:

$$2\pi_{Umfang} r_n < U_n < U, \quad U - U_n < U - 2\pi_{Umfang} r_n = 2\pi_{Umfang} (r - r_n)$$

Aus $d_n = (r - r_n) \rightarrow 0$ folgt somit $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$.

Die Differenzfläche $A - A_n$ des Kreises zum n -Eck mit Flächeninhalt A_n ist Teilfläche eines Rings der Breite $d_n = r - r_n$, somit folgt:

$$A - A_n < A_{Ring} < U \cdot d_n \quad \text{und somit auch} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$$

Die Inkreisformel überträgt sich von den regulären n -Ecken auf Kreise:

$$\begin{array}{lcl} \text{reguläres } n\text{-Eck :} & A_n = & \frac{1}{2} U_n \cdot r_n \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \downarrow \\ \text{Kreis :} & A = & \frac{1}{2} U \cdot r \end{array}$$

Satz: Der Kreis gehört zu den Inkreisfiguren.

Die Ausschöpfung mit regulären n -Ecken erlaubt einen formal exakten Beweis der Tortenstückargumentation.

Analytischer Beweis der Inkreisformel für Kreise

In dem Buch „*Bezaubernde Beweise*“ (Alsina und Nelsen) findet sich ein analytischer Beweis zur Inkreisformel für Kreise.

Der Viertelkreis mit Radius 1 ist Graph der Funktion $h(t) = \sqrt{1-t^2}$ im Intervall $[0,1]$ mit Ableitung $h'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$ und Bogenlänge

$$U_{\frac{1}{4}\text{-Kreis}} = \int_0^1 \sqrt{1+h'(t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Der $\frac{1}{4}$ -Kreisflächeninhalt ist durch $A_{\frac{1}{4}\text{-Kreis}} = \int_0^1 h(t) dt = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ gegeben. Beide Integrale können einzeln keine Stammfunktion haben, ansonsten wäre π nicht transzendent.

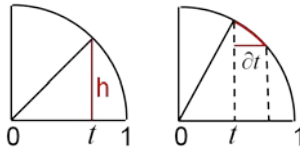


Abb. 8: Fläche und Rand eines Viertelkreises mit Radius 1

Die Funktion $f(t) = t \cdot \sqrt{1-t^2}$ hat mit der Produktregel die Ableitung $f'(t) = \sqrt{1-t^2} - \frac{t^2-1+1}{\sqrt{1-t^2}} = 2\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Es folgt:

$$A_{\frac{1}{4}\text{-Kreis}} - \frac{1}{2} U_{\frac{1}{4}\text{-Kreis}} = \frac{1}{2} \int_0^1 2\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} [t \cdot \sqrt{1-t^2}]_0^1 = 0.$$

Nach Skalierung mit einem Radius r gilt sodann: $A_{\text{Kreis}} = \frac{1}{2} U_{\text{Kreis}} \cdot r$. Diesen Beweis könnte man eventuell noch in der Oberstufe diskutieren, der nachfolgende fällt hingegen ganz aus dem Rahmen der Schule.

Analytische Betrachtung der Abroll-Parametrierung des Kreises

Trägt man für einen Ebenenpunkt P im Abstand r zum Ursprung dessen Bogenlänge b zur senkrechten y -Achse (wie in Abb. 9) nach rechts, und den Abstand r nach oben auf, so ergibt sich die Parametrisierung:

$$\varphi: \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ mit } r \geq 0 \text{ und } b = \alpha r \in [-\pi r, \pi r].$$

Ein im Ursprung „auf dem Kopf stehendes“ Dreieck der Höhe r und Grundlinie $2\pi r$ wird auf einen Kreis mit Radius r abgebildet.

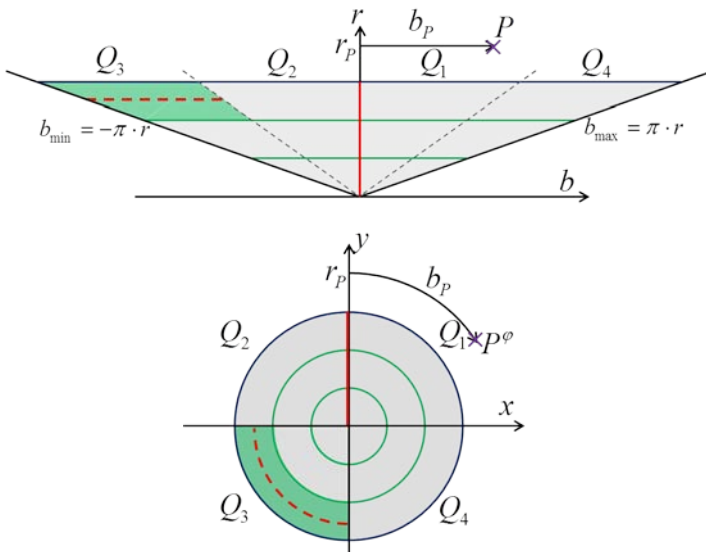


Abb. 9: flächentreue Abbildung zwischen einem Dreieck und Kreis

Es bezeichnen $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ die vier Quadranten des Kreises, die auf die entsprechend bezeichneten Teildreiecke abgebildet werden.

Die Jacobimatrix $D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial b} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial r} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial b} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{b}{r} & \sin \frac{b}{r} - \cos \frac{b}{r} \cdot \frac{b}{r} \\ \sin \frac{b}{r} & \cos \frac{b}{r} + \sin \frac{b}{r} \cdot \frac{b}{r} \end{pmatrix}$ hat die

Determinante $\det D\varphi = 1$, daher ist φ lokal flächentreu. Neben der elementaren Ausschöpfung mit regulären n -Ecken und den Integralrechnungen nach Alina/Nelsen ist dies der dritte Beweis zur Inkreisformel $A = \frac{1}{2} U \cdot r$ für Kreise.

Je nach Altersstufe der Schüler präzisieren sich die Begriffsbildungen und Erschließungsmethoden. So dürfte die Tortenstückargumentation schon Unterstufenschülern zugänglich sein, während die mehrdimensionale Integration auf Mannigfaltigkeiten den Hochschulen vorbehalten bleibt. Die Ausschöpfung der Kreisfläche und die Rektifizierung des Kreisrandes mittels

regulärer n -Ecke ist m. E. ein sinnvolles Bindeglied von der elementaren zur analytischen Betrachtung von Kreisen.

Berechnung des Pyramidenvolumens

Die Berechnung des Pyramidenvolumens lässt sich auf die Berechnung des Volumens von Tetraeder zurückführen.

Zerlegen und Ergänzen einer Pyramide in Tetraeder

Jedes n -Eck lässt sich mit $n - 3$ zusätzlichen Kanten ohne zusätzliche Ecken triangulieren. Mithilfe dieses Satzes lässt sich die Volumenberechnung einer Pyramide auf Tetraeder zurückführen.

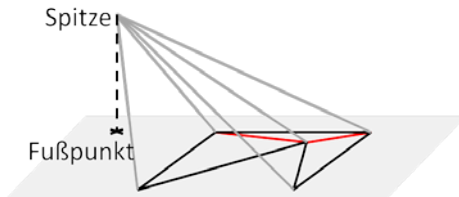


Abb. 10: Zerlegung einer Pyramide in Tetraeder

Ein Tetraeder soll gerade heißen, wenn der Fußpunkt seiner Spitze in einer Ecke der dreiseitigen Grundfläche liegt. Jedes Tetraeder lässt sich seinerseits in drei gerade Tetraeder zerlegen oder mit einem oder zwei geraden Tetraedern zu einem bzw. zwei geraden Tetraedern ergänzen.

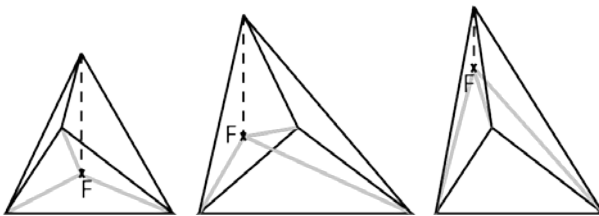


Abb. 11: Zerlegung oder Ergänzung zu geraden Tetraedern

Hat die Dreieckgrundfläche eines geraden Tetraeders einen rechten Winkel, dann wird dieses Tetraeder im weiteren Basistetraeder genannt. Letztlich genügt es, die Pyramiden-Volumenformel für Basistetraeder zu beweisen.

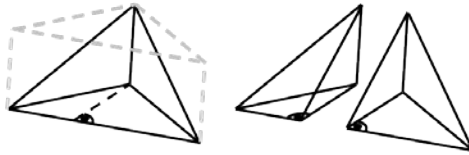


Abb. 12: Zerlegung der Grundfläche eines geraden Tetraeders zu rechtwinkligen Dreiecken

Das Volumen eines Basistetraeders soll zweimal hergeleitet werden, einmal durch Zerlegen in zwei Prismen und zwei ähnliche Teiltetraeder im Maßstab 1:2. Und ein zweites Mal durch Ergänzen mit zwei weiteren Tetraedern zu einem geraden Prisma, mit Verwendung des Satzes von Cavalieri.

Herleitung des Basistetraedervolumens mit Selbstähnlichkeit

Ein Basistetraeder $T = t_1 \cup t_2 \cup q_1 \cup q_2$ der Höhe h über der Grundfläche A teilt sich auf in zwei gerade Prismen q_1, q_2 und zwei Ecktetraeder t_1, t_2 im Längenmaßstab 1:2 und Volumenmaßstab 1:8 :

$$V(t_1) = V(t_2) = \frac{1}{8} V(T) = \frac{1}{8} V_{\text{Basistetraeder}}$$

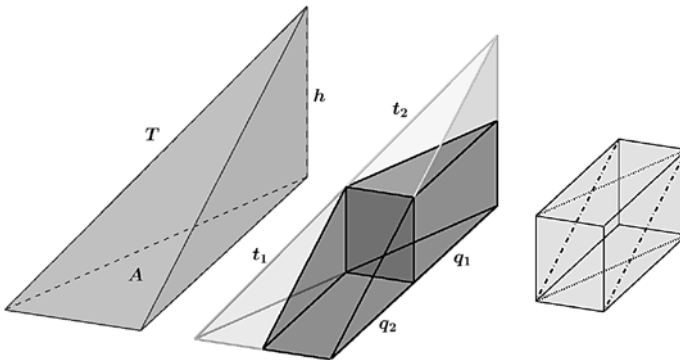


Abb. 13: Zerlegung eines Tetraeders in je zwei gerade Prismen und selbstähnliche Tetraeder

Die geraden Prismen haben zusammen das Volumen eines Quaders der Höhe $\frac{1}{2}h$ und Grundfläche $\frac{1}{2}A$:

$$V(q_1 \cup q_2) = \frac{1}{2} A \cdot \frac{1}{2} h.$$

Aus der Aufteilung $T = t_1 \cup t_2 \cup q_1 \cup q_2$ folgt:

$$2 \cdot \frac{1}{8} V_{\text{Basistetraeder}} + \frac{1}{4} A \cdot h = V_{\text{Basistetraeder}}$$

und somit $\frac{1}{4}A \cdot h = \frac{3}{4}V_{\text{Basistetraeder}}$ bzw. $V_{\text{Basistetraeder}} = \frac{1}{3}A \cdot h$.

Da sich jede Pyramide aus Basistetraedern zusammensetzt, lässt sich diese Volumenformel auf Pyramiden übertragen.

Herleitung des Basistetraedervolumens mit Cavalieri

Ein Basistetraeder T_1 der Grundfläche A und der Höhe h lässt sich mit zwei weiteren Tetraedern T_2, T_3 ergänzen zu einem geraden Prisma mit einer unteren Seitenfläche vom Inhalt $2A$ und einer hierauf senkrecht stehenden hinteren Seitenfläche der Höhe h .

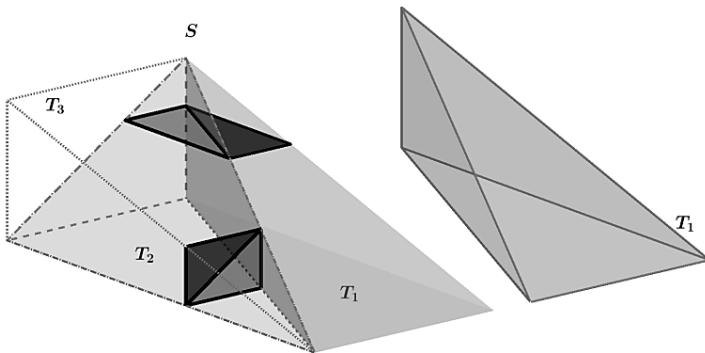


Abb. 14: Ergänzung eines Basistetraeders zu einem geraden Prisma

Die Schnittflächen der Tetraeder T_2 und T_3 in einer zur hinteren Seitenfläche parallelen Ebene sind stets gleich groß: Sie unterteilen jeweils ein Rechteck dieser Ebene diagonal. Mit dem Prinzip von Cavalieri gilt:

$$V(T_2) = V(T_3).$$

Die Schnittflächen der Tetraeder T_1, T_2 parallel zur Seitenfläche unten sind ebenfalls stets gleich groß, mit Cavalieri folgt auch hier $V(T_1) = V(T_2)$. Das gerade Prisma aus den drei Tetraedern hat das halbe Volumen eines Quaders der Höhe h über der Grundfläche $2A$. Da alle drei Basistetraeder volumengleich sind, gilt:

$$3 \cdot V(T_1) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3) = \frac{1}{2} \cdot 2A \cdot h.$$

Das Volumen $V(T_1) = \frac{1}{3}A \cdot h$ eines Basistetraeders der Höhe h über der Grundfläche A ergibt sich auch – mit Cavalieri – aus der Ergänzung mit zwei volumengleichen Tetraedern zum geraden Prisma.

Tetraedervolumen mit einem punktsymmetrischen Oktaeder

Die vier Ecken A, B, C, D eines Tetraeders T bilden mit den jeweils drei benachbarten Seitenmitten vier ähnliche Ecktetraeder im Längenmaßstab 1:2. Das von den 6 Seitenmitten aufgespannte Oktaeder $S'M_1M_2M_3M_4S$ ist punktsymmetrisch zum Diagonalschnittpunkt Z des Parallelogramms $M_1M_2M_3M_4$. Das Oktaeder wird folglich vom Parallelogramm halbiert.

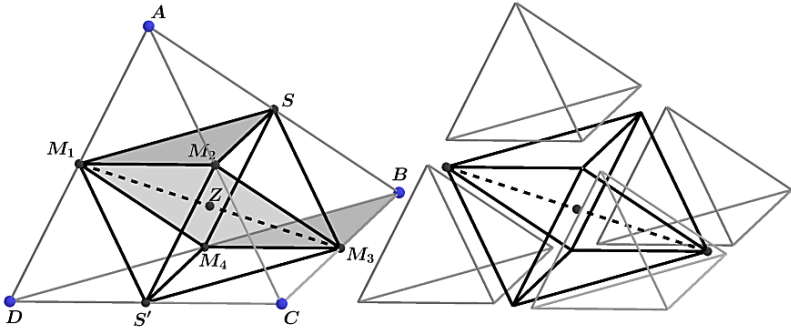


Abb. 15: Zerlegung eines Tetraeders in 4 Ecktetraeder und ein Oktaeder

Das halbe Oktaeder $M_1M_2M_3M_4S$ bildet zusammen mit dem Ecktetraeder $S_1BM_3M_4$ ein schräges Prisma zwischen den schraffierten Deckflächen SM_1M_2 und BM_3M_4 . Mit dem Volumenmaßstab 1:8 für die Ecktetraeder gilt $V_{\text{Oktaeder}} = V_{\text{Tetraeder}} - 4 \cdot \frac{1}{8} V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{2} V_{\text{Tetraeder}}$. Da sich das schräge Prisma zwischen den schraffierten Deckflächen aus dem halben Oktaeder und einem Ecktetraeder zusammensetzt, gilt:

$$(*) \quad V_{\text{schräges Prisma}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{\text{Tetraeder}} + \frac{1}{8} V_{\text{Tetraeder}} = \frac{3}{8} V_{\text{Tetraeder}}.$$

Mit der Höhe h der Ecke A über der Grundfläche BCD vom Flächeninhalt A_g hat das schräge Prisma die halbe Höhe und ein Viertel der Grundfläche von BCD :

$$(**) \quad V_{\text{schräges Prisma}} = \frac{1}{2} h \cdot \frac{1}{4} A_g = \frac{1}{8} A_g \cdot h.$$

Für ein Tetraeder der Höhe h über einer Grundfläche A_g ergibt sich aus (*) und (**) das Volumen

$$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{8}{3} V_{\text{schräges Prisma}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{8} A_g \cdot h = \frac{1}{3} A_g \cdot h.$$

Da sich jede n -seitige Pyramide in $n - 2$ Tetraeder zerlegen lässt, berechnet sich das Volumen für Pyramiden genauso wie für Tetraeder.

Übersicht zu den Erschließungswegen zum Pyramidenvolumen

Jede n -seitige Pyramide lässt sich in $n - 2$ Tetraeder zerlegen, mit gleicher Höhe h über den jeweiligen Einzelflächen, deren gesamter Flächeninhalt der Grundfläche A der Pyramide entspricht. Daher überträgt sich die Volumenberechnung von Tetraedern auf Pyramiden:

$$V_{Pyramide}(A, h) = V_{Tetraeder}(A, h) = \frac{1}{3} A \cdot h.$$

Unter den vielen Erschließungswegen zum Pyramidenvolumen soll folgende Reihenfolge vorgeschlagen werden:

1. Mit dem Prinzip von Cavalieri oder mit Selbstähnlichkeit wird ein Tetraeder T mit frei wählbarer Grundfläche A und Höhe h konstruiert, dessen Volumen $V_{Tetraeder}(A, h) = \frac{1}{3} A \cdot h$ ist und dann:

2. Mit Cavalieri (oder mit Ergänzen und Zerlegen) wird gezeigt, dass alleine die Grundfläche A und Höhe h das Pyramidenvolumen bestimmen:

$$V_{Pyramide}(A, h) = V_{Tetraeder}(A, h) = V(A, h).$$

In den Schulbüchern ist die Reihenfolge von 1. und 2. umgekehrt, da dort 2. zum Beweis von 1. schon verwendet wird. Es ergeben sich folgende Erschließungswege zum Pyramidenvolumen:

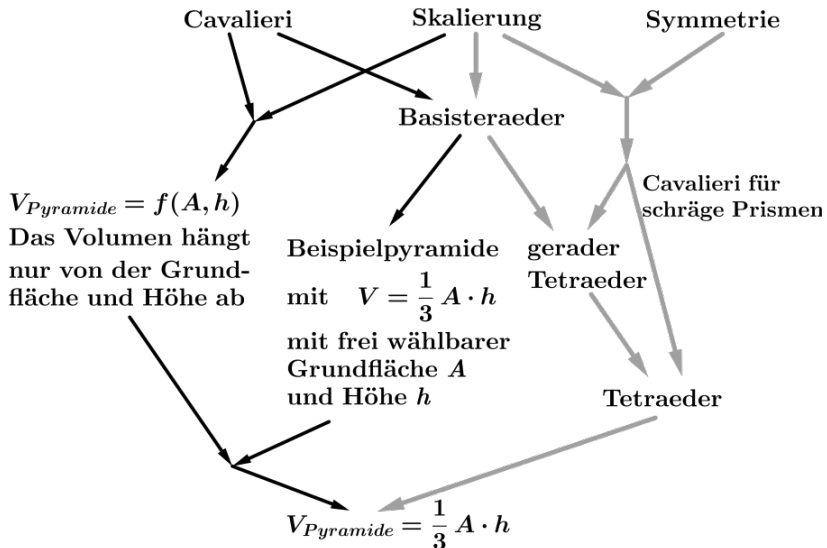


Abb. 16: Erschließungswege zum Pyramidenvolumen

Kugelvolumen und Oberfläche

Die Rolle der Dreiecke bei der approximativen Triangulierung des Kreises mit n -Ecken fällt bei der entsprechenden Triangulierung der Kugel den Pyramiden zu. Aus einer Zerlegung der Kugeloberfläche O_K in infinitesimale Flächenelemente dA folgt eine Zerlegung des Kugelvolumens in infinitesimale Pyramiden mit der Kugelmitte M_K als Spitze über den jeweiligen Flächenelementen dA . Da diese Pyramiden den Kugelradius r als invariante Höhe haben, plausibilisiert sich folgende Beziehung zwischen dem Volumen V_K und der Oberfläche O_K einer Kugel:

$$V_K = \frac{1}{3} O_K \cdot r.$$

Üblicherweise wird das Kugelvolumen anhand eines Vergleichskörpers bestimmt, der in parallelen Ebenen dieselben Schnittflächeninhalte hat wie die Kugel. Dieser Vergleichskörper ergibt sich aus einem Zylinder mit gleichem Radius r und gleicher Höhe $h = 2r$ zur Kugel durch Wegnahme der beiden Kegel (konvexen Hüllen) zwischen der Zylindermitte M_D und der Grund- bzw. Deckfläche des Zylinders. Dieser um zwei Kegel eingeschnittene Zylinder wird im weiteren Diabolokörper oder Diabolo genannt.

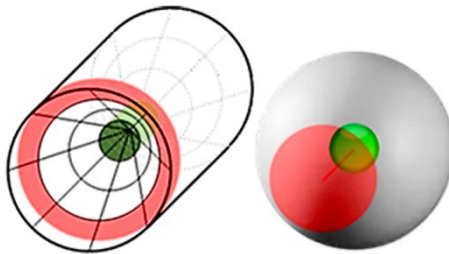


Abb. 17: Kugel und ein "Diabolo" als Vergleichskörper

Die Schnittfläche in einer Ebene E_x im Abstand $x < r$ zur Kugelmitte M_K ist für die Kugel ein Kreis mit Radius $r_x = \sqrt{r^2 - x^2}$. Die Schnittebene E_x erscheint im Querschnitt der Abb. 18 als horizontale Linie. Für den Diabolo schneidet die Ebene E_x senkrecht zur Symmetrieachse im Abstand x zu Mitte M_D einen Ring aus mit Außenradius r und Innenradius x . Die Flächeninhalte beider Schnittflächen sind gleich:

$$A_{Kugel}(x) = \pi(r^2 - x^2) \quad \text{und} \quad A_{Diabolo}(x) = \pi r^2 - \pi x^2.$$

Mit dem Satz von Cavalieri ergibt sich für die Kugel und den Diabolo dasselbe Volumen, $V_{Diabolo} = V_{Kugel}$.

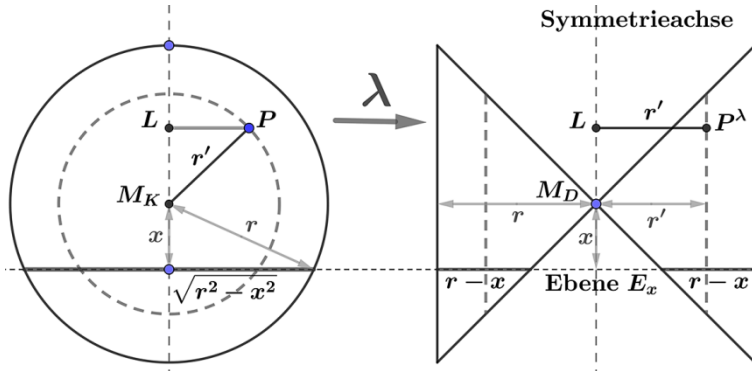


Abb. 18: Querschnitt durch Kugel und Diabolo mit vertikaler Symmetrieachse

Ein Punkt P auf einer Kugelschale im Abstand $r' = \overline{PM_K} < r$ zur Kugelmittelpunkt M_K mit Lotpunkt L auf der in Abb. 18 vertikalen Symmetrieachse lässt sich längs der Geraden LP so lange radial nach außen verschieben, bis der Bildpunkt P^λ zum Lotpunkt L den Abstand $r' = \overline{P^\lambda L}$ von P zur Kugelmittelpunkt M_K hat. Die Kugel wird zum Diabolo-Körper "zentrifugiert". Die Abbildung $\lambda: P \rightarrow P^\lambda$ bildet die Kugel (bis auf die vertikale Symmetrieachse) auf den Diabolo und die Kugeloberfläche auf dessen Zylindermantel ab.

In der Kartografie wird eine solche Projektion der Erdoberfläche auf einen abgewickelten Zylindermantel Lambert-Projektion genannt. Diese Bezeichnung wird im Weiteren auch für die auf das Kugelinere fortgesetzte Projektion λ benutzt. Die Lambert-Zylinderprojektion λ bildet ab:

- kreisförmige Schnittflächen auf die zugehörigen Ringflächen,
- innere Kugelschalen auf innere Mantelflächen und
- Pyramiden zwischen einem Oberflächenelement dA der Kugel und deren Mitte auf die entsprechende Pyramide zwischen dem Zylindermantelelement dA^λ und der Diabolomitte.

Satz: Die Lambert-Zylinderprojektion bildet eine Kugel lokal volumentreu auf den zugehörigen Diabolo-Körper ab.

Beweisskizze: Mit einer geeigneten Parametrisierung der Kugel und des Diabolos mit Kugelkoordinaten hat die Jacobimatrix $D\lambda$ der Transformation λ überall die Determinante $\det D\lambda = 1$.

Eine geeignete Verwendung der Lambert-Zylinderprojektion im Unterricht ist die Bestimmung der Kugeloberfläche O_K im Voraus in $V_K = \frac{1}{3}O_K \cdot r$.

Lambert-Zylinderprojektion zwischen Kugeloberfläche und Zylindermantel

Ein infinitesimal schmaler Streifen der Kugeloberfläche zwischen zwei parallelen, senkrecht zur Symmetrieachse stehenden Ebenen E_1 und E_2 wird mit dem Zylindermantelstreifen zwischen diesen Ebenen verglichen.

Hat der Kugeloberflächenstreifen die Bogenlänge b als Abstand seiner beiden Ränder, so beträgt der Ebenenabstand d. h. die Höhe des Zylindermantelstreifens $b \cdot \sin \alpha$ mit dem Polarwinkel α der mittleren Streifenlinie:

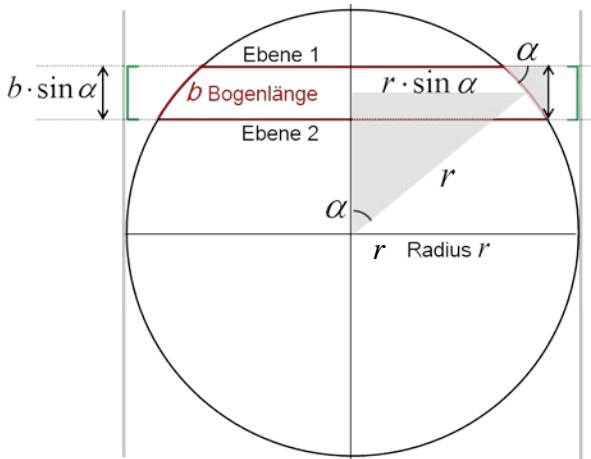


Abb. 19: Vergleich zwischen einem infinitesimalen Zylinder- und Kugeloberflächenstreifen

Der Kugeloberflächenstreifen hat den Radius $r \cdot \sin \alpha$, ist also um den Faktor $\sin \alpha$ kürzer als der Zylindermantelstreifen, dafür aber entsprechend breiter:

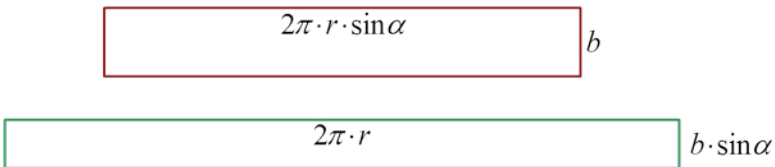


Abb. 20: Zylindermantel- und Kugeloberflächenstreifen mit gleichem Flächeninhalt

Beide Streifen haben denselben Flächeninhalt $2\pi r \cdot b \sin \alpha$. Für die ganze Kugeloberfläche gilt insgesamt:

Satz: Der Zylindermantel und die Kugeloberfläche haben bei gleichem Radius r und gleicher Höhe $h = 2r$ denselben Flächeninhalt $2\pi r \cdot h$.

Die Kugeloberfläche O_{Kugel} und Mantelfläche $M_{Diabolo}$ des zugehörigen Diabolokörpers berechnen sich also zu:

$$O_{Kugel} = M_{Diabolo} = 4\pi r^2.$$

Es werden auch innere Kugelschalen mit Radius $r' < r$ flächentreu abgebildet auf innere Diabolomantelflächen mit Abstand r' zur Symmetrieachse und Höhe $h = 2r'$. Überträgt man das Prinzip von Cavalieri auf gekrümmte innere Flächen (sofern zulässig), so folgt aus der Flächengleichheit $A_{Kugelschale}(r') = A_{Diaboloinnenmantel}(r') = 2\pi r'^2$ letztlich auch die Volumengleichheit $V_{Diabolo} = V_{Kugel}$.

Abrollen des Diabolokörpers zu einer Pyramide

Aus der Beziehung $V_{Kugel} = \frac{1}{3}O_{Kugel} \cdot r$ stellt sich die Frage nach einer Pyramide als Vergleichskörper zur ganzen Kugel: Rollt der den Diabolo umfassende Zylinder zu einem geraden Prisma ab, so bildet sich der Diabolokörper auf eine Pyramide ab, mit der abgerollten Mantelfläche als Grundfläche A_p der Pyramide mit den Seitenlängen $2\pi r$ und $2r$.

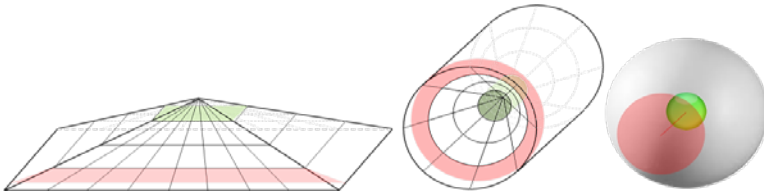


Abb. 21: Volumengleiche Pyramide, Diabolo und Kugel

Die Diabolomitte M_D wird zur Pyramidenspitze M_P mit unverändertem Abstand (Höhe) r über der Mantel- bzw. Grundfläche A_p der Pyramide.

Der Diaboloring in der Schnittebene E_x senkrecht zur Mantelfläche im Abstand x zur Mitte M_D wird abgerollt auf eine Trapezfläche in der entsprechenden Schnittebene senkrecht zur Grundfläche der Pyramide im Abstand x zur Pyramidenspitze M_P , in Abb. 22 dunkel schraffiert.

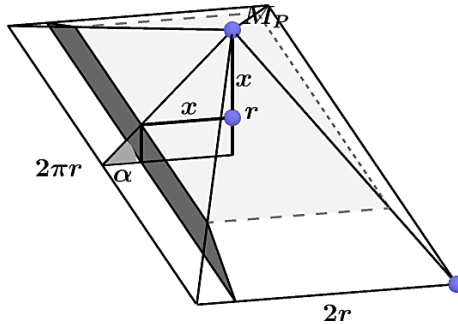


Abb. 22: Schrägbild einer Vergleichspyramide zur Kugel

Die zur Grundfläche parallele Schnittfläche A_x im Abstand x zur Spitze (in Abb. 22 hell schraffiert) hat die mit dem Faktor $\frac{x}{r}$ skalierten Seitenlängen $2\pi x$ und $2x$. Mit dem Neigungswinkel $\alpha = 45^\circ$ der Seitenfläche über der Kantenlänge $2\pi r$ liegt die Kante von A_x mit der Seitenlänge $2\pi x$ in der Ebene E_x . Die Trapezfläche in E_x hat die Höhe $h = r - x$, eine Unterkante der Länge $2\pi r$ und eine Oberkante der Länge $2\pi x$. Das Trapez hat somit den Flächeninhalt

$$A_{\text{Trapez}}(x) = h \cdot \left(\frac{2\pi r + 2\pi x}{2} \right) = (r - x)\pi(r + x) = \pi(r^2 - x^2).$$

Die Schnittflächen in der Ebene E_x sind bei allen drei Körpern gleich:

$$A_{\text{Trapez}}(x) = A_{\text{Diaboloring}}(x) = A_{\text{Kugelkreis}}(x) = \pi(r^2 - x^2).$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri lässt sich das Kugelvolumen auch direkt aus dem Pyramidenvolumen ableiten. Aus dem direkten Vergleich zur Pyramide mit Grundfläche $A_p = 4\pi r^2$ und Höhe r ergibt sich also:

$$V_{\text{Kugel}} = V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}A_p \cdot r = \frac{1}{3}4\pi r^3.$$

Infinitesimale Pyramidenaufteilung des Diabolo

Neben der Kugeloberfläche lässt sich auch die Diabolo-Mantelfläche in infinitesimale gekrümmte Flächenelemente dA aufteilen. Die Diabolomitte M_D hat stets denselben Lotabstand über den Berührebenen (Tangentialebenen) der Mantelfläche, so dass die konvexe Hülle zwischen dA und M_D einer überhängenden Pyramide der Höhe r über dA entspricht. Hieraus ergibt sich die Gültigkeit der Pyramidenformel für das Diabolovolumen:

$$V_{Diabolo} = \frac{1}{3} M_{Diabolo} \cdot r = \frac{1}{3} 4\pi r^2 \cdot r.$$

Eine solche infinitesimale Pyramidenzerlegung des Diabolo ist das Bild einer entsprechenden Zerlegung der Kugel in Pyramiden unter der Lambert-Zylinderprojektion.

Übersicht zu den verschiedenen Erschließungswegen zur Kugelberechnung

Die vielfältigen Herleitungswege zur Oberfläche und zum Volumen der Kugel mit Hilfe des Diabolokörpers oder der Vergleichspyramide sind nachfolgend zusammengestellt.

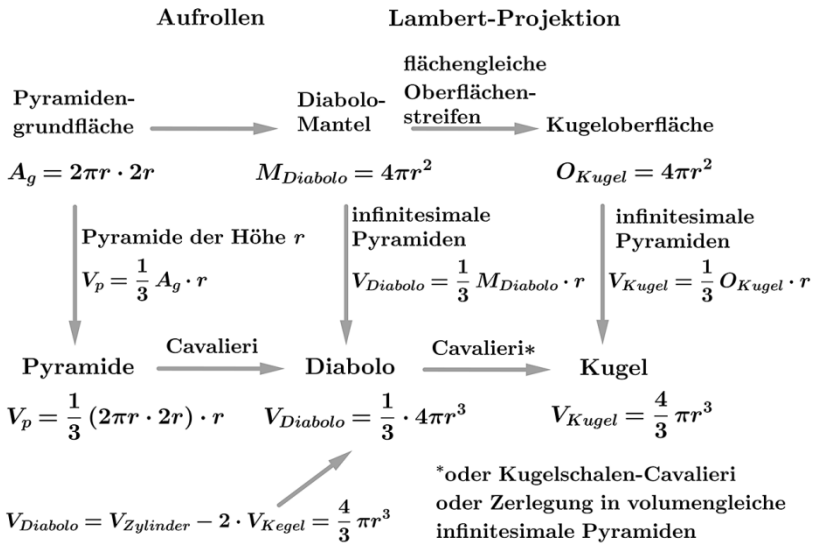


Abb. 23: verschiedene Herleitungswege zur Oberfläche und zum Volumen der Kugel

Verwendet man die Pyramide anstelle des Diabolo als Vergleichskörper zur Volumenberechnung, so erspart man sich die Berechnung des Diabolovolumens $V_{Diabolo} = V_{Zylinder} - 2V_{Kugel} = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Wird die Kugeloberfläche aus dem Vergleich der infinitesimalen Oberflächenstreifen der Kugel mit denen des Zylindermantels bestimmt, so reduziert sich die Bedeutung von $V_K = \frac{1}{3} O_K \cdot r$ aus der Aufteilung der Kugel in infinitesimale Pyramiden auf eine zusätzliche Plausibilisierung.

Eine Ausschöpfung der Kugel mit Pyramiden zum Nachweis des Zusammenhangs $V_K = \frac{1}{3} O_K \cdot r$ ähnlich zur Ausschöpfung des Kreises mit regulären n -Ecken zum Beweis der Inkreisformel $A = \frac{1}{2} U \cdot r$ ist elementar machbar, aber aufwendiger als die Bestimmung des Kugelvolumens mit dem Prinzip von Cavalieri und der Kugeloberfläche mit flächengleichen Zylindermantelstreifen.

Inkugelkörper

Analog zu Inkreisfiguren lassen sich Inkugelkörper definieren, die im Inneren eine Kugel mit Radius r enthalten, welche alle Facetten, bzw. alle deren Tangentialebenen berührt. Beispiele für Inkugelkörper sind:

- der Würfel,
- alle geraden Prismen mit einer Inkreisfigur als Grundfläche und deren Höhe dem Inkreisdurchmesser der Grundfläche entspricht,
- die Zylinder mit Radius r und Höhe $h = 2r$.

Der Diabolkörper geht aus einem solchen Inkugelzylinder durch Wegnahme von zwei Kegeln über der Grund- und Deckfläche hervor.

Da ein Inkugelkörper mit Inkugelradius r sich stets in Pyramiden der Höhe r zerlegen lässt, gilt für die Oberfläche O und Volumen V des Inkugelkörpers die Beziehung:

$$V = \frac{1}{3} O \cdot r.$$

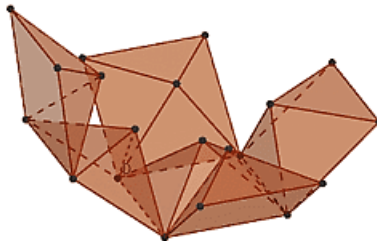


Abb. 24: Zerlegung eines Würfels in 6 Pyramiden

Ein Würfel W der Kantenlänge a hat die Grundfläche $A_W = a^2$, den Inkugelradius $r = \frac{1}{2}a$, die Oberfläche $O_W = 6A_W$ und das Volumen:

$$V_W = a^3 = A_W \cdot a = \frac{1}{3} 6A_W \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{3} O_W \cdot r.$$

Ein gerades Prisma Pr der Grundfläche A_g mit Umfang U_g und Höhe h hat die Oberfläche $O_{Pr} = 2A_g + U_g \cdot h$ und das Volumen $V_{Pr} = A_g \cdot h$. Hat die Grundfläche einen Inkreis mit Radius r und ist die Höhe des Prismas $h = 2r$, so gilt die Inkreisformel $A_g = \frac{1}{2}U_g \cdot r$ und weiterhin $O_{Pr} = 2A_g + U_g \cdot 2r = 6A_g$ sowie analog zum Würfel:

$$V_{Pr} = A_g \cdot h = \frac{1}{3} 6A_g \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{3} O_{Pr} \cdot r.$$

Semantische Bedeutungen lassen sich vermutlich besser merken als Formeln. Daher lassen sich aus der Flächengleichheit zwischen dem Mantel des Inkugelzylinders (Diabolos) und der Oberfläche seiner Inkugel die Oberfläche der Kugel und deren Volumen über die Pyramidenformel langfristiger rekonstruieren als durch das Lernen der entsprechenden Formeln. Die Rekonstruktion von Inhalten aus einer stärkeren innermathematischen Vernetzung der Unterrichtsinhalte hat vermutlich auch mehr Anschlusspotenzial an die Inhalte der höheren Mathematik.

Letztlich gilt für das n -dimensionale Volumen V_n der konvexen Hülle eines Punktes P im invarianten Lotabstand h zu allen Facetten bzw. zu allen deren Tangentialebenen mit gesamtem $n - 1$ -dimensionalen Volumen V_{n-1} die Beziehung:

$$V_n = \frac{1}{n} V_{n-1} \cdot h.$$

Skalierung von Integralflächen

In der Analysis lassen sich algebraische Methoden, etwa die Berechnung von Grenzwerten meistens durch geometrische Argumente ersetzen. Als Beispiel hierfür soll die Erschließung von Integralflächen mit Methoden der Skalierung vorgestellt werden. Ein sehr ausführlicher Artikel hierzu von Rainer Kaenders und Christoph Kirfel ist unlängst in *Mathematische Semesterberichte* erschienen.

Wird die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ in x -Richtung um den Faktor t zu $k(x) = f\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t^n} x^n$ und zudem in y -Richtung um den Faktor m gestreckt zu $g(x) = m \cdot k(x) = \frac{m}{t^n} x^n$, so skalieren die Integralflächen entsprechend:

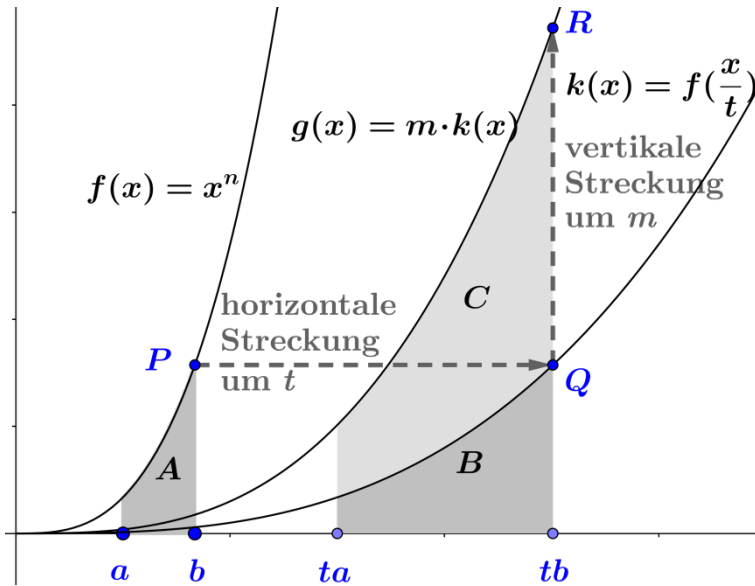


Abb. 25: Streckung der Integralflächen zu $C = m \cdot B = m \cdot t \cdot A$

Bezeichnet C den Flächeninhalt zwischen $g(x)$ und der x -Achse so gilt:

$$C = m \cdot B \text{ und } B = t \cdot A,$$

da ausschöpfende Maßrechtecke mit den Streckfaktoren m, t mitskalieren.

Somit gilt die Flächengleichheit $\int_{ta}^{tb} g(x) dx = m \cdot t \cdot \int_a^b f(x) dx$.

Mit dem speziellen Faktor $m = t^n$ ergibt sich wieder die Ausgangsfunktion $g(x) = f(x)$, gilt zudem $a = 0$ und $b = 1$, so folgt:

$$\int_0^t x^n dx = t^{n+1} \cdot \int_0^1 x^n dx.$$

Für die Integrationskonstanten $\alpha_n := \int_0^1 x^n dx$ gilt bekanntlich $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$.

Diese Konstanten lassen sich induktiv bestimmen. Für $n = 3$ setzen wir

z. B. $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ und $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ voraus und bestimmen α_3 aus einer Zerlegung von

$\int_0^2 x^3 dx$ in 5 Teilflächen. Mit $\int_1^2 x^3 dx = \int_0^1 (x+1)^3 dx$ folgt:

$$\begin{aligned} (*) \quad \int_0^2 x^3 dx &= \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) dx \\ &= 2\alpha_3 + 3\alpha_2 + 3\alpha_1 + 1 = 2\alpha_3 + 3,5. \end{aligned}$$

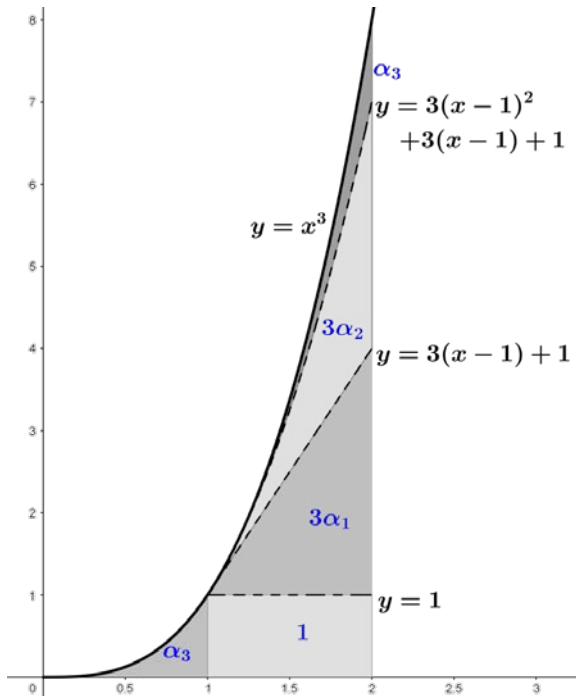


Abb. 26: Zerlegung der Integralfäche $\int_0^2 x^3 dx$ in 5 Teilflächen.

Die Skalierung mit $t = 2, m = 8$ ergibt $\int_0^2 x^3 dx = 8 \cdot 2 \cdot \int_0^1 x^3 dx = 16\alpha_3$, zusammen mit (*) ergibt sich $16\alpha_3 = 2\alpha_3 + 3,5$ und somit $\alpha_3 = \frac{1}{4}$, also:

$$\int_0^t x^3 dx = \frac{1}{4} t^4.$$

Die Integrale der Potenzfunktionen lassen sich ohne Grenzwerte und auch ohne Deduktion aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung geometrisch herleiten. Der Hauptsatz kann so induktiv aus vielen Beispielen apriori motiviert werden.

In der Hochschule würde sich ein entsprechender Beweis per vollständiger Induktion anbieten:

Setzt man für $i < n$ für $\alpha_i = \int_0^1 x^i dx$ voraus $\alpha_i = \frac{1}{i+1}$, so ergibt sich aus der Skalierung $\int_0^2 x^n dx = 2^{n+1} \int_0^1 x^n dx$ folgender Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
 2^{n+1}\alpha_n &= 2^{n+1} \int_0^1 x^n dx = \int_0^2 x^n dx \\
 &= \int_0^1 x^n dx + \int_1^2 x^n dx = \alpha_n + \int_0^1 (x+1)^n dx = \alpha_n + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \int_0^1 x^i dx \\
 &= 2\alpha_n + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \alpha_i = 2\alpha_n + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{1}{i+1} = 2\alpha_n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{i+1} \\
 &= 2\alpha_n + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} = 2\alpha_n + \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 2).
 \end{aligned}$$

Also folgt $2^{n+1}\alpha_n = 2\alpha_n + \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 2)$ und somit $\alpha_n = \frac{1}{n+1}!$

Üblicherweise werden die Integralflächen $\int_1^b x^n dx$ aus expliziten Grenzwerten mit Ober- und Untersummen berechnet.

Der Aufwand zur Bestimmung einer Stammfunktion von $f(x) = x^n$ für alle n mit Hilfe von Grenzwerten oder mit Binomialkoeffizienten wie oben ist natürlich für die Schule viel zu hoch! Man wird den Hauptsatz nur mit einfachen Beispielen wie $\int x^2 dx$ oder $\int \sqrt{x} dx$ a priori motivieren können.

Literatur

- Alsina, C., und Nelson, R. B. (2010/2013). *Bezaubernde Beweise: Eine Reise durch die Eleganz der Mathematik*. Heidelberg: Springer Spektrum, S. 30f.
- Hammer, Ch. (2016). Mehr Geometrie im Geometrieunterricht! Eine kurze Situationsbeschreibung und ein Vorschlag für die Sekundarstufe I. In: Filler, A.; Lambert, A. (Hrsg.). *Von Phänomenen zu Begriffen und Strukturen. Konkrete Lernsituationen für den Geometrieunterricht*. Vorträge auf der 32. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 11. bis 13. September 2015 und auf der 33. Herbsttagung vom 09. bis 11. September 2016 in Saarbrücken. Hildesheim: Franzbecker, 2017, S. 177-186.
- Kaenders, R.; Kirfel, Chr. (2017). Flächenbestimmungen bei Basisfunktionen der Schule mit Elementargeometrie. In: *Mathematische Semesterberichte* 64 (2), S. 199-220.

Raumgeometrische Entdeckungen am Beispiel „Würfelbillard“

Heinz Schumann

„Billiards in Euclidean spaces of dimension three or more are essentially in an infantile state. In brief: practically nothing is known in general.“

(Marcel Berger 2010, p. 728)

Zusammenfassung. Die Nutzung Dynamischer Raumgeometrie-Systeme (DRGS) erschließt Lehrern und Schülern im Kontext des entdeckenden Lernens neue raumgeometrische Themen („Enrichment“). Dabei unterstützt die Potentialität von DRGS im Rahmen experimentellen Arbeitens die Anwendung heuristischer Methoden („Reinforcement“). Ein solches Thema ist das Billard in konvexen Polyedern. Das Entdecken besonderer Billardbahnen im Würfel und seinen Verallgemeinerungen eignet sich für raumgeometrische Aktivitäten außerhalb des Regelunterrichts; es ist gleichbedeutend mit dem Entdecken einbeschriebener räumlicher Vielecke minimalen Umfangs. Umgekehrt können räumliche Vielecke der Kennzeichnung besonderer konvexer Polyeder dienen.

1. Einleitung

Das Thema dieser Arbeit gehört zur komplexen und sich in Entwicklung befindenden Theorie des mathematischen Billards. Als Basisliteratur ist zu nennen: „Geometrie und Billard“ von TABACHNIKOV (2013; für ebenes Billard) und „Mathematische Billarde“ von GALPERIN & SEMLIKOV (1990; auch für räumliches Billard). Für die Existenz von Billardbahnen (Billard-Trajektorien) in Polygonen bzw. Polyedern sind bis heute nur folgende hinreichende und nicht notwendige Bedingungen bekannt: Billardbahnen existieren für jene konvexen Polygone bzw. konvexen Polyeder, deren Seiten mit gemeinsamem Eckpunkt bzw. Seitenflächen mit gemeinsamer Kante Winkel einschließen, die jeweils ein rationales Vielfaches von π (180°) sind.

Folgende generelle Problemstellung dient einer gezielten Satzfindung:

Für welche besonderen konvexen $2n$ -flächigen Polyeder existiert eine über alle Seitenflächen laufende Billardbahn, die ein regelmäßiges $2n$ -Eck ist – und umgekehrt: Welches $2n$ -flächige Polyeder kann zu einem gegebenen regelmäßigen räumlichen $2n$ -Eck als Billardbahn konstruiert werden?

Diese Problemstellung ist gleichbedeutend mit der folgenden:

Für welche besonderen konvexen $2n$ -flächigen Polyeder existiert ein einbeschriebenes $2n$ -Eck minimalen Umfangs, das regelmäßig ist – und umgekehrt: Welches $2n$ -flächigen Polyeder kann zu einem gegebenen regelmäßigen räumlichen $2n$ -Eck als umfangsminimales einbeschriebenes Vieleck konstruiert werden?

Dabei ist z. B. ein regelmäßiges räumliches $2n$ -Eck das Petri-Polygon eines n -eckigen Antiprismas, gebildet aus regelmäßiger Grundfläche mit zu ihr kongruenter Deckfläche, die um $180^\circ/n$ (π/n) gedreht ist. Die konvexe Hülle dieses regelmäßigen räumlichen $2n$ -Ecks ist das entsprechende n -eckige Antiprisma – es kann keine regelmäßigen räumlichen Vielecke ungerader Eckenzahl geben.

Im Folgenden sollen die vorstehenden Problemstellungen für $n = 3$ verfolgt werden, Wir verwenden dabei die Vorstellung eines Billardstoßes mit Reflexion der (punktförmigen) Billardkugel oder auch eines atomaren Teilchens oder Lichtkorpuskels an Ebenen als Bande – und vermeiden weitgehend Fachbegriffe aus der Theorie des mathematischen Billards.

Mittels eines geeigneten DRGS, wie z. B. mit dem Cabri 3D (BAINVILLE & LABORDE 2004-2015), kann man das Billard in einfachen Polyedern, z. B. im Würfel, Quader, Parallelepiped usw. elementargeometrisch zugänglich machen und untersuchen. Dabei wird das Finden von Aussagen über solche Billarde in DRGS durch die Visualisierung, die Konstruktion, die Messung und die direkte Manipulation und Variation räumlicher Objekte medial unterstützt (SCHUMANN 2007). Außerdem kommen folgende heuristische Methoden beim Entdecken zur Geltung, die durch die Nutzung von DRGS eine Verstärkung erfahren (u. a. WINTER 1989):

- die Analogiebildung (insbesondere von ebener zu räumlicher Geometrie),
- die Induktion,
- das Umstrukturieren und Variieren,
- das Generalisieren und Spezialisieren,
- die Analyse und Synthese,
- die Komposition,
- die Reversibilität.

Anmerkung 1: Man kann u. a. auch noch das „Treffen von Fallunterscheidungen“ zu den heuristischen Methoden hinzufügen.

2. Vom Quadratbillard zum Würfelbillard

Vorbemerkungen:

12. Die ziehende Hand (👉) symbolisiert die Variationsmöglichkeit einer Figur, die von der Lage eines Punktes abhängt.
13. Zur besseren visuellen Wahrnehmung von Figureneigenschaften wird der virtuelle Raum parallel-projektiv dargestellt.
14. Ein Printmedium kann nur einen geringen Eindruck von der interaktiven und dynamischen Arbeitsweise sowie den Visualisierungsmöglichkeiten vermitteln.

2.1 Elementare Billardbahnen

Gegeben sind die Lage S und T zweier Kugeln und die Bande g wie in Abb. 1.1. 1.1. Wie muss die Kugel in S gestoßen werden, damit sie an g so reflektiert wird, dass sie die Kugel in T trifft?

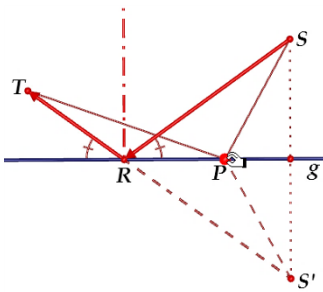


Abb. 1.1: Elementare Billardbahn in der Ebene

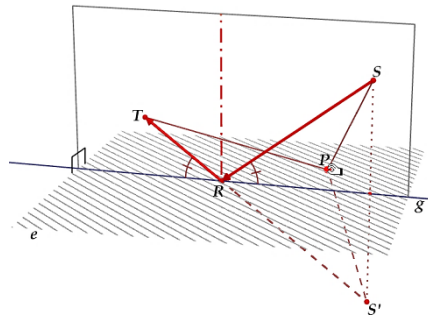


Abb. 1.2: Elementare Billardbahn im Raum bei Reflexion an einer Ebene

Die Billardbahn trifft g in R derart, dass die beiden Bahnstrecken mit g den gleichen (nicht stumpfen) Reflexionswinkel einschließen („Einfallswinkel = Ausfallswinkel“). R erhält man als Schnittpunkt von g mit der Geraden, die T und den Spiegelpunkt S' von S an g verbindet. Diese elementare Billardbahn ist zugleich der kürzeste S und T verbindende Streckenzug, der über

einen Punkt von g läuft, denn nach der Dreiecksungleichung ist $|\text{SPT}| > |\text{SRT}|$ für jeden von R verschiedenen Punkt P auf g . Vorstehendes gilt analog im Raum für die Billardbahn von S nach T bei Reflexion an der Ebene e (Abb. 1.2). – Die Geraden RT und RS sind einander spiegelsymmetrisch bezüglich der Senkrechten in R auf g bzw. e (Abb. 1.1/2). Diese Eigenschaft kann man z. B. verwenden, um zu prüfen, ob SRT eine Billardbahn ist.

2.2 Von der Billardbahn im Quadrat zur Konstruktion von Billardbahnen im Würfel mittels Analogiebildung

Bekanntlich ist die einfach geschlossene Billardbahn im Quadrat ein zum Quadratmittelpunkt M symmetrisches Rechteck $R_1R_2R_3R_4$ (Abb. 2.1), dessen Gegenseiten jeweils parallel zu einer der Quadratdiagonalen sind und dessen Umfang gleich dem Doppelten einer Quadratdiagonalen ist. Die Billard-Rechtecke sind also alle umfangsgleich. Der Winkel zwischen zwei benachbarten Rechteckseiten ist gleich dem Winkel zwischen den Quadratdiagonalen.

Am einfachsten wird ein Billard-Rechteck mit dem Startpunkt R_1 konstruiert, indem man eine Parallele zu einer der Quadratdiagonalen durch R_1 legt. Diese schneidet eine benachbarte Quadratseite in R_2 . Durch diesen Punkt zieht man die Parallele zur zweiten Quadratdiagonalen und bekommt R_3 als Schnittpunkt mit einer weiteren Quadratseite. Die Spiegelung des Streckenzugs $R_1R_2R_3$ am Quadratmittelpunkt M ergänzt den Streckenzug zum Billard-Rechteck $R_1R_2R_3R_4$.

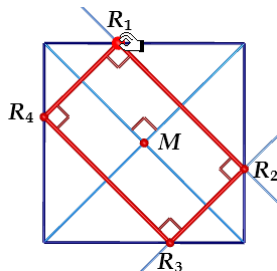


Abb. 2.1: Billard-Viereck im Quadrat

Es liegt nahe, Billardbahnen im Würfel auf analoge Weise wie das Billard-Rechteck zu konstruieren. Dazu gehen wir beispielsweise von einem Punkt R_1 auf einer Seitenfläche des Würfels aus (Abb. 2.2) und legen durch diesen eine Parallele zur Raumdiagonalen mit dem Endpunkt A . Die Parallele

schneidet eine der Seitenflächen im Punkt R_2 . Durch diesen Punkt ziehen wir die Parallele zur Raumdiagonalen mit dem Endpunkt B, die eine weitere Seitenfläche im Punkt R_3 schneidet. Die Parallele zur Raumdiagonalen mit dem Endpunkt C durch R_3 schneidet eine weitere Seitenfläche in R_4 . Spiegelung des Streckenzugs $R_1R_2R_3R_4$ am Würfelmittelpunkt M ergibt ein räumliches Billard-Sechseck $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$. Entsprechende erhalten wir für den Startpunkt R_1 ein weiteres, aber verschiedenes Billard-Sechseck (Abb. 2.3). – Im Raum sind die Sachverhalte im Allgemeinen reichhaltiger als in der Ebene. – Überprüfung aller möglichen Konstruktionsfälle zeigt, dass es, abgesehen – von besonderen Lagen des Startpunktes R_1 , immer nur zwei verschiedene solcher Sechsecke für denselben Startpunkt gibt.

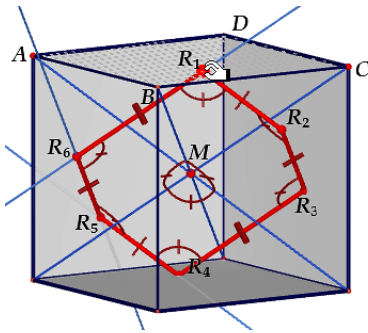


Abb. 2.2: Räumliches Billard-Sechseck im Würfel Typ 1

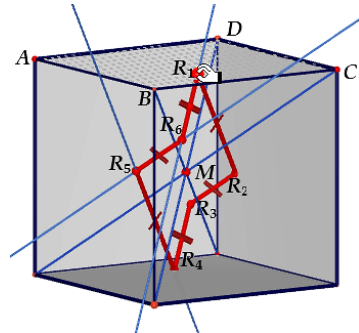


Abb. 2.3: Räumliches Billard-Sechseck im Würfel Typ 2

Eigenschaften der Billard-Sechsecke

Die Umfänge der zum Würfelmittelpunkt symmetrischen Sechsecke sind gleich dem Doppelten der Raumdiagonalenlänge. Die Billard-Sechsecke sind also alle umfangsgleich. Das Sechseck hat einander gleiche Innenwinkel, welche mit dem stumpfen Winkel zwischen den Diagonalen übereinstimmen. Das Billard-Sechseck ist somit ein gleichwinkliges Sechseck, dessen Innenwinkelgröße konstant bei Formänderung bleibt.

Zur Determination: Die angegebene Konstruktion für das Sechseck vom Typ 1 ist gültig für einen Startpunkt R_1 im Inneren des Dreiecks ABC (Abb. 3.1). Liegt der Startpunkt R_1 der Konstruktion im Inneren der Diagonalen AB, so schrumpft das Sechseck zu einem Parallelogramm. Entsprechendes gilt für das Billard-Sechseck vom Typ 2 mit Startpunkt R_1 im Inneren des Dreiecks BCD. – Bei einer 90° -Drehung um die Lotachse durch den Mittel-

punkt des Quadrats ABCD werden die erzeugenden Raumdiagonalen des Sechsecks vom Typ 1 auf die erzeugenden Raumdiagonalen des Sechsecks vom Typ 2 abgebildet. Jedes Sechseck des Typs 1 ($R_1R_2R_3R_4R_5R_6$) geht also in ein Sechseck des Typs 2 ($R_1'R_2'R_3'R_4'R_5'R_6'$) über und umgekehrt (Abb. 3.2). Die Unterscheidung zwischen Sechsecken vom Typ 1 und Typ 2 hat also nur Bedeutung, wenn von demselben Startpunkt eine Billardbahn konstruiert werden soll. – Billard-Sechsecke mit Startpunkten auf den restlichen fünf Seitenflächen lassen sich durch Spiegelungen bzw. Drehungen auf ein Sechseck mit einem Startpunkt im Inneren des Dreiecks ABC und den erzeugenden Raumdiagonalen durch die Eckpunkte A, B, C abbilden.

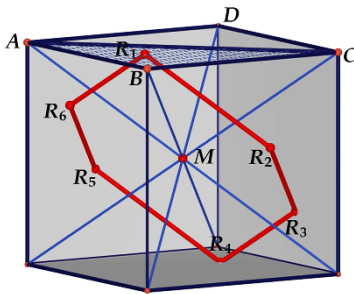


Abb. 3.1: Billard-Sechseck vom Typ 1 mit Startbereich

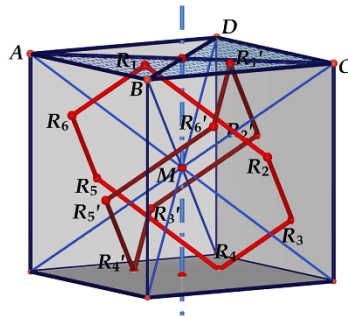


Abb. 3.2: Drehung eines Billard-Sechseck vom Typ 1 zu einem des Typs 2

2.3 Besondere Formen des Billard-Sechsecks

Besondere Formen des Billard-Sechsecks vom Typ1 bekommen wir, wenn R_1 im Inneren einer der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC liegt (Abb. 4, R_1 liegt im Inneren von BM_b). Das Sechseck hat dann zwei diametral liegende Paare von Nachbarseiten, die alle von gleicher Länge sind. Entsprechendes gilt für Billard-Sechsecke vom Typ 2 bezüglich des Dreiecks BCD.

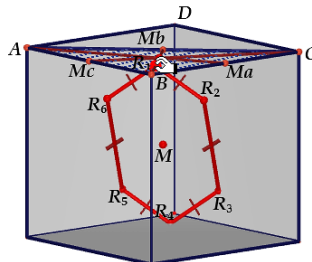


Abb. 4: Spezielle Form des Billard-Sechsecks

Stimmt R_1 mit dem Mittelpunkt einer Quadratseite, der auch Schwerpunkt dieser Seite ist, überein, so ist das Billard-Rechteck ein Quadrat (Abb. 5.1). Wenn R_1 mit dem Schwerpunkt des Dreiecks ABC zusammenfällt, dann ist das räumliche Billard-Sechseck sogar gleichseitig (Abb. 5.2). Entsprechendes gilt für Billard-Sechsecke vom Typ2 bezüglich des Dreiecks BCD.

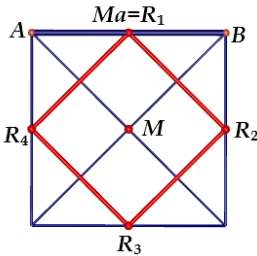


Abb. 5.1: Gleichseitiges Billard-Rechteck (Quadrat)

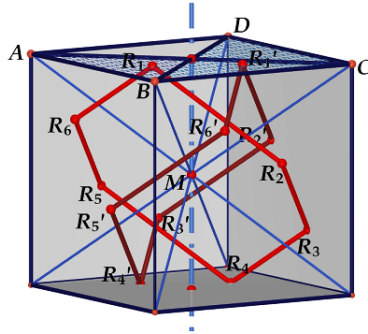


Abb. 5.2: Gleichseitiges Billard-Sechseck, somit regelmäßiges punktsymmetrisches

Anmerkung 2: Bei GARDNER (1971) findet sich kein Hinweis auf die vorstehenden Eigenschaften eines Billard-Sechsecks bei besonderer Lage des Startpunktes R_1 .

3. Eine erste Verallgemeinerung:

Billard im gleichseitigen Parallelepiped

Den Würfel kann man so verallgemeinern, dass entweder seine rechtwinkligen Ecken oder die Gleichheit seiner Kanten oder sogar die Kongruenz seiner sechs Seitenflächen erhalten bleiben. Entsprechende Verallgemeinerungen des Würfels sind der Quader (rechtkantiges Parallelepiped) und das gleichkantige Parallelepiped, dessen Seitenflächen Rauten sind und das im Sonderfall einander kongruente Rauten als Seitenflächen hat, also ein gleichseitiges Parallelepiped ist. Wir beschränken uns hier auf Untersuchungen des Billards im gleichseitigen Parallelepiped, da dessen Form nur von einem Parameter, nämlich dem Rautenwinkel (α) bestimmt ist.

Anmerkung 3: Mit der Verallgemeinerung zum Billard im Quader und im Parallelepiped geht das Problem einher, von der Formvielfalt zu abstrahie-

ren, welche durch die betreffenden Formparameter bestimmt ist. Das bedeutet, dass Erkenntnisse über die Billardbahnen noch stärker als bisher induktiv mit den gegebenen Mitteln gewonnen werden können. Damit werden zugleich die Grenzen der induktiven Methode deutlich.

Billardbahn im gleichseitigen Parallelepiped: Die Billardbahn in einer Raute ist ein sich überschneidendes Viereck, das symmetrisch zu einer der Diagonalen der Raute ist (Abb. 6.1). Dieser Bahn entspricht im gleichseitigen Parallelepiped mit dem spitzen Rautenwinkel α eine sechseckige Billardbahn mit folgenden Eigenschaften (Abb. 6.2): Die Winkel mit den Scheiteln R_2, R_3, R_4 und R_5 sind gleichgroß, ebenso die mit den Scheiteln R_1 und R_6 . Die Seiten R_1R_2 und R_4R_5 sind gleichlang. Als Sonderfall erhält man in einem gleichseitigen Parallelepiped bei analoger Reflexion wie bei der Raute (Abb. 7.1) ein sich überschneidendes punktsymmetrisches Billard-Sechseck (Abb. 7.2). Bei diesem Sechseck sind sogar noch die Seiten R_1R_6, R_6R_5, R_2R_3 und R_3R_4 von gleicher Länge; es ist aber nicht von minimalem Umfang. Für den Rautenwinkel $\alpha = 90^\circ$ gibt es keine Billardbahnen mit Reflexion an Gegenflächen mehr.

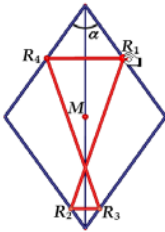


Abb. 6.1: Billardbahn in einer Raute

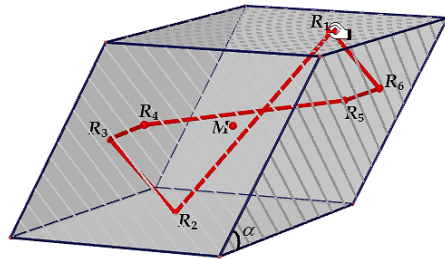


Abb. 6.2: Billardbahn in einem gleichseitigen Parallelepiped

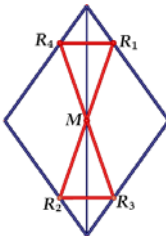


Abb. 7.1: Punktsymmetrisches Billard-Viereck in einer Raute

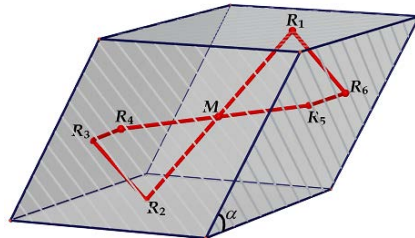


Abb. 7.2: Punktsymmetrisches Billard-Sechseck in einem gleichseitigen Parallelepiped

Im Gegensatz zur Raute existieren, wie beim Würfel, auch Billardbahnen bei Reflexion an aufeinanderfolgenden Seitenflächen des gleichseitigen Parallelepipeds. Man erhält auch sechseckige Billardbahnen, welche symmetrisch zu einer der Diagonalebene des Parallelepipeds sind; dabei liegt R_1 auf einer entsprechenden Diagonalfäche (Abb. 8). Da in einer nichtquadratischen Raute zwar alle Billard-Vierecke gleichwinklig sind, aber es kein gleichseitiges Billard-Viereck gibt, stellt sich die Frage nach der Existenz eines gleichwinkligen und gleichseitigen Billard-Sechsecks im gleichseitigen Parallelepipid. Als Sonderfall der ebenen-symmetrischen Billardbahn ergibt sich ein zum Mittelpunkt M des gleichseitigen Parallelepipeds symmetrisches Billard-Sechseck, das sogar gleichwinklig und gleichseitig ist (Abb. 9). Dieses Billard-Sechseck ist unter allen Billard-Sechsecken eines gleichseitigen Parallelepipeds dasjenige von minimalem Umfang.

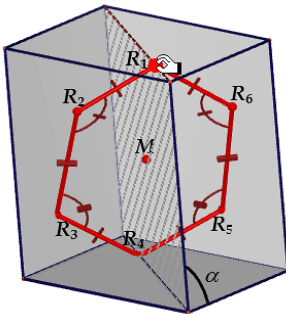


Abb. 8: Ebenensymmetrisches Billard-Sechseck in einem gleichseitigen Parallelepipid bei Reflexion an aufeinanderfolgenden Nachbarseiten

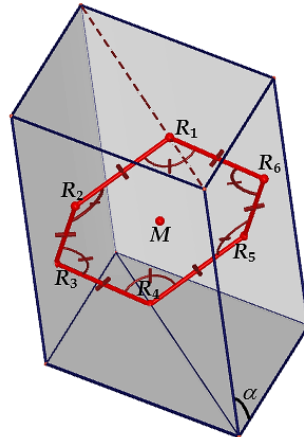


Abb. 9: Regelmäßiges punktsymmetrisches Billard-Sechseck in einem gleichseitigen Parallelepipid bei Reflexion an aufeinanderfolgenden Nachbarseiten

Anmerkung 4: Die konvexe Hülle des regelmäßigen punktsymmetrischen Billard-Sechsecks im gleichseitigen Parallelepipid ist, wie schon beim Würfel, ein dreieckiges Antiprisma mit kongruenten gleichseitigen Dreiecken als Grund- und Deckfläche.

4. Vom räumlichen regelmäßigen Sechseck zum gleichseitigen

Parallelepiped mit diesem Sechseck als umlaufender Billardbahn

Haben wir bisher zum Würfel und einer besonderen Verallgemeinerung des Würfels das zugehörige Billard-Sechseck konstruiert, so gehen wir im Folgenden gemäß der heuristischen Methode der Reversibilität umgekehrt vor, indem wir zu einem räumlichen Sechseck dasjenige Hexaeder konstruieren, welches dieses Sechseck als eine Billardbahn besitzt. Auf diese Weise kann man Hexaedertypen gewinnen, die von der Form des räumlichen Sechsecks abhängen.

Konstruktion: Regelmäßige räumliche Sechsecke $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$ erhält man z. B. aus dreieckigen Antiprismen mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche und einem aus diesem Dreieck senkrecht verschoben und um 180° gedrehten als Deckfläche (Abb. 10; sogenanntes antiprismatisches Sechseck, auch Petri-Polygon des Antiprismas genannt); dabei übertragen sich die Symmetrie-Eigenschaften des Antiprismas auf das Sechseck. Zu den Winkeln eines solchen Sechsecks werden die Halbierenden konstruiert (Abb. 11).

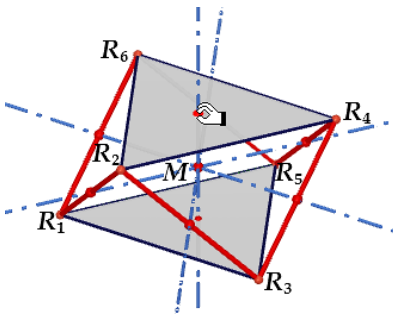


Abb. 10: Dreieckiges Antiprisma mit regelmäßigem punktsymmetrischem Sechseck, Symmetrie-Achsen und -Zentrum

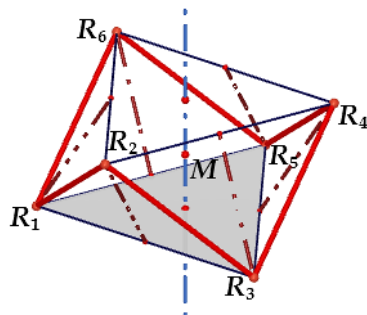


Abb. 11: Regelmäßiges punktsymmetrisches Sechseck mit Winkelhalbierenden

In den Scheiteln R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 und R_6 der Winkelhalbierenden konstruieren wir nun die Lotebenen zu diesen Halbierenden (Abb. 12; mit den Lotebenen zu R_1, R_3 und R_5 und ihrem Schnittpunkt A). Je drei der nichtparallelen Lotebenen durch die Scheitel schneiden einander in einem dreieckigen Eckpunkt eines Polyeder, das aufgrund der Eigenschaften des regelmäßigen punktsymmetrischen 3D-Sechsecks ein gleichseitiges Parallelepiped

ABCDEF GH ist (Abb. 13). Die zweizähligen Symmetrie-Achsen des anti-prismatischen Sechsecks gehen über in die Gegenkantenmitten verbindenden zweizähligen Achsen, die dreizählige Symmetrie-Achse des Sechsecks in eine der dreizähligen Symmetrie-Achsen des Parallelepipeds und das Symmetrie-Zentrum in das Symmetrie-Zentrum des Parallelepipeds. Eine Abfaltung des Parallelepipeds zu einem Netz bestätigt anschaulich seine Gleichseitigkeit (Abb. 14). Wir gewinnen so folgende Aussage:

Zu einem regelmäßigen punktsymmetrischen räumlichen Sechseck $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$ gibt es genau ein gleichseitiges Parallelepiped ABCDEF GH , welches das vorgegebene Sechseck $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$ als umlaufende Billardbahn besitzt.

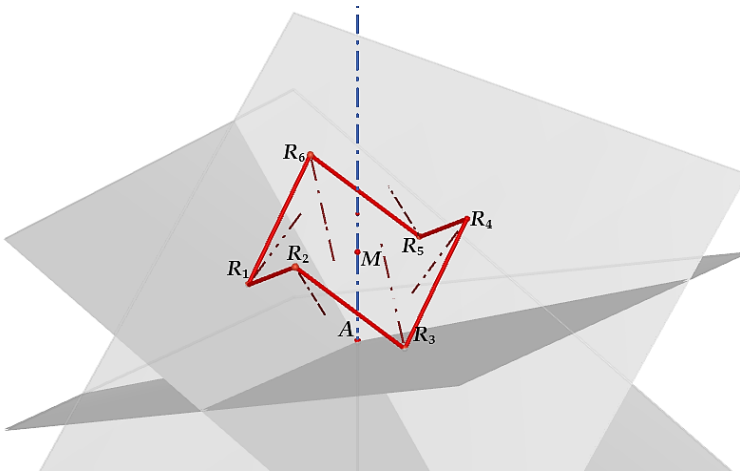


Abb. 12: Schnitt dreier Lotebenen dreier Winkelhalbierenden eines regelmäßigen punktsymmetrischen Sechsecks

Anmerkung 5: Außer den antiprismatischen regelmäßigen Sechsecken gibt es noch andere einfach geschlossene räumlichen Sechsecke, die regelmäßig sind. (Abb. 15 zeigt ein Beispiel für ein regelmäßiges 3D-Sechseck, das axialsymmetrisch, aber nicht punktsymmetrisch ist).

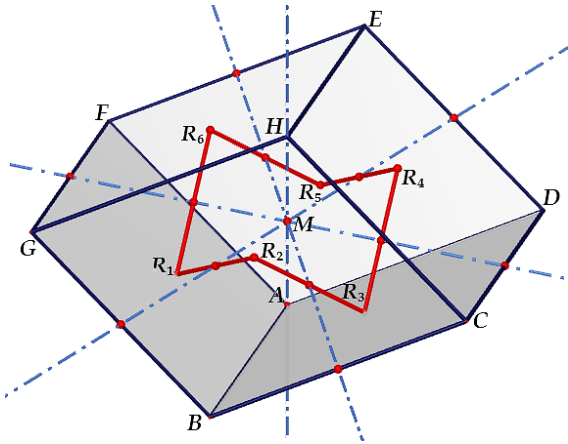


Abb. 13: Gleichseitiges Parallelepiped mit erzeugendem regelmäßigen punktsymmetrischen Sechseck

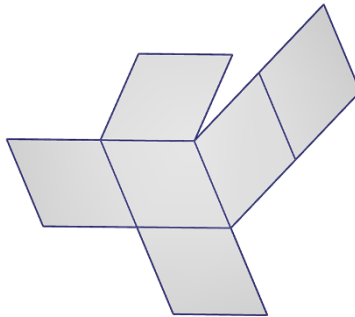


Abb. 14: Ein Netz des gleichseitigen Parallelepipeds

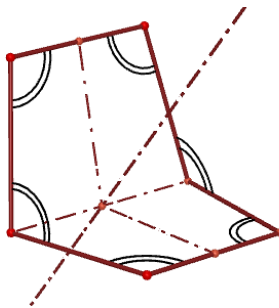


Abb. 15: Regelmäßiges 3D-Sechseck, das eine zweizählige Symmetrie-Achse besitzt

Anmerkung 6: Falls der Winkel des regelmäßigen Sechsecks das Maß $180^\circ - 2 \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}$ hat, so ist das gleichseitige Parallelepiped ein Würfel.

Außerdem gewinnen wir, unter Verwendung des Ergebnisses aus dem vorstehenden Abschnitt (Abb. 9), dass das gleichseitige Parallelepiped ein regelmäßiges punktsymmetrisches Sechseck als umlaufende Billardbahn besitzt, eine Kennzeichnung des gleichseitigen Parallelepipeds:

Ein Hexaeder ist ein gleichseitiges Parallelepiped genau dann, wenn es eine einfach umlaufende Billardbahn besitzt, die ein regelmäßiges punktsymmetrisches 3D-Sechseck ist.

Oder:

Ein Hexaeder ist ein gleichseitiges Parallelepiped genau dann, wenn es ein einbeschriebenes regelmäßiges punktsymmetrisches 3D-Sechseck mit minimalem Umfang besitzt.

Anmerkung 7: Hier kann sich eine Untersuchung für einfach geschlossene regelmäßige punktsymmetrische Billardbahnen mit 8, 10, 12, ... Ecken anschließen, die Trapezoeder aus jeweils entsprechender Anzahl kongruenter Drachen ergeben. Für symmetrische Billard-Vierecke bekommen wir besondere Tetraeder, unter denen auch das gleichseitige Tetraeder ist (SCHUMANN 2017).

Einschub: Außer den (einfach geschlossenen) regelmäßigen punktsymmetrischen Sechsecken, gibt es noch überschlagene regelmäßigen Sechsecke z. B. solche mit dreizähligen Symmetrie-Achsen, die sich leicht aus dreiseitigen Prismen mit regelmäßiger Deck- bzw. Grundfläche konstruieren lassen (Abb. 16).

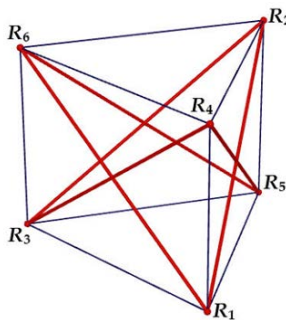


Abb. 16: Regelmäßiges rotationssymmetrisches 3D-Sechseck überschlagener Art

Aus solchen regelmäßigen Sechsecken überschlagener Art ergibt sich als konvexe Hülle der Lotebenen zu den Winkelhalbierenden in seinen Eckpunkten jeweils eine dreiseitige Doppelpyramide aus einander kongruenten gleichschenkligen Dreiecken (Abb. 17). Sonderfall ist die dreiseitige Doppelpyramide aus gleichseitigen Dreiecken.

Wir erhalten schließlich folgende Aussage:

Ein Hexaeder ist eine dreiseitige Doppelpyramide aus kongruenten gleichschenkligen Dreiecken genau dann, wenn es eine einfach umlaufende Billardbahn besitzt, die ein regelmäßiges Sechseck überschlagener Art mit dreizähliger Symmetrie-Achse ist.

Oder:

Ein Hexaeder ist eine dreiseitige Doppelpyramide aus kongruenten gleichschenkligen Dreiecken genau dann, wenn es ein einbeschriebenes regelmäßiges Sechseck überschlagener Art mit dreizähliger Symmetrie-Achse besitzt, das minimalem Umfang hat.

Anmerkung 8: Hier kann sich eine Untersuchung für solche überschlagene regelmäßige Billardbahnen mit 10, 14, 18, ... Ecken anschließen, die Trapezoeder mit jeweils entsprechender Anzahl kongruenter Drachen ergeben. Solche Polyeder werden auch Deltoide genannt.

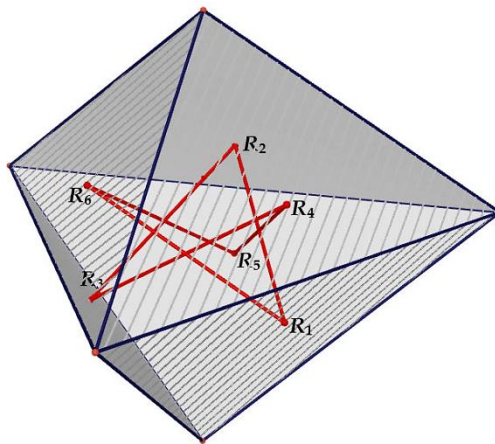


Abb. 17: Dreiseitige Doppelpyramide mit erzeugendem überschlagenen regelmäßigen punktsymmetrischen 3D-Sechseck

Wir schließen unsere Untersuchung hier aus Platzgründen ab mit einer

Kennzeichnung des Parallelepipeds

Als Billardbahnen im Parallelepiped erhalten wir auch (einfach geschlossene) punktsymmetrische Sechsecke. Umgekehrt liefert die Konstruktion der konvexen Hülle der Lotebenen zu den Winkelhalbierenden in den Ecken solcher Sechsecke wiederum ein Parallelepiped (Abb. 18). Somit finden wir folgende Aussage:

Ein Hexaeder ist ein Parallelepiped genau dann, wenn es ein Billard-Sechseck besitzt, das punktsymmetrisch ist.

Oder:

Ein Hexaeder ist ein Parallelepiped genau dann, wenn es ein einbeschriebenes punktsymmetrisches Sechseck mit minimalem Umfang besitzt.

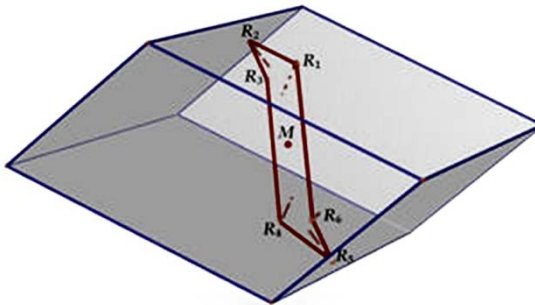


Abb. 18: Parallelepiped mit erzeugendem punktsymmetrischen 3D-Sechseck

Anmerkung 9: Diesen Zusammenhang zwischen besonderen 3D-Polygonen und konvexen Polyedern könnte man als eine Art von „Orthogonal-Dualität“ bezeichnen.

5. Eine Kennzeichnung besonderer Tetraeder

Folgende Kennzeichnung besonderer Tetraeder mittels einbeschriebener symmetrischer 3D-Vierecke ergibt sich (Abb. 19), wenn unter den symmetrischen 3D-Vierecken jene Vierecke zu verstehen sind, die man durch Auf falten der entsprechenden symmetrischen ebenen Vierecke längs einer ihrer Diagonalen erhält (SCHUMANN 2017):

- Ein Tetraeder wird gebildet aus vier kongruenten gleichschenkligen Seitendreiecken, genau dann, wenn sein Billard-Viereck eine gleichwinklige 3D-Raute ist, d. h. das Tetraeder ist ein gleichschenklilig gleichseitiges.
- Ein Tetraeder wird gebildet aus vier kongruenten Seitendreiecken, genau dann, wenn sein Billard-Viereck ein gleichwinkliges 3D-Parallelogramm ist, d. h. wenn das Tetraeder gleichseitig ist.
- Ein Tetraeder wird gebildet aus zwei Paaren von Seitendreiecken, die jeweils aus zwei kongruenten gleichschenkligen Dreiecken bestehen, genau dann, wenn sein Billard-Viereck eine 3D-Raute ist.
- Ein Tetraeder wird gebildet aus zwei Paaren von Seitendreiecken, die jeweils aus zwei kongruenten Dreiecken bestehen, genau dann, wenn sein Billard-Viereck ein 3D-Parallelogramm ist.
- Ein Tetraeder wird gebildet aus zwei Paaren von Seitendreiecken, von denen eines aus gleichschenkligen Dreiecken und das andere aus kongruenten Dreiecken besteht, genau dann, wenn sein Billard-Viereck ein 3D-Drachen ist.

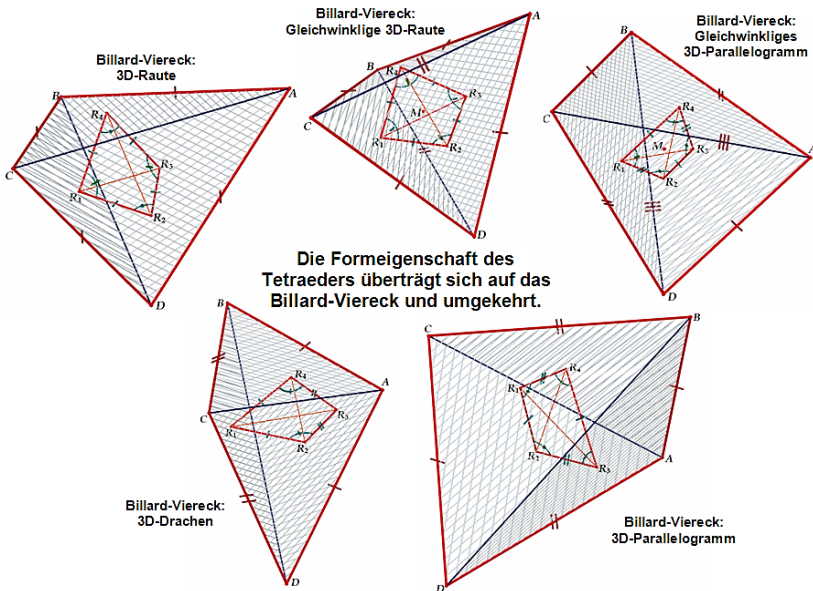


Abb. 19: Die symmetrischen 3D-Vierecke als Billard-Vierecke

Anmerkung 10: Nicht zu jedem 3D-Drachen existiert ein Tetraeder, dessen einfach geschlossene Billardbahn dieser Drachen ist, im Gegensatz zu den anderen symmetrischen 3D-Vierecken.

6. Ausblick

Die vorstehenden Untersuchungen kann man auf einfach umlaufende Billardbahnen in anderen konvexen Polyedern übertragen, so z. B. zu den in anderen platonischen Körpern (HUDELSON, ohne Angabe), in den archimedischen Körpern oder allgemeiner, in den Johnsonschen Polyedern (konvexe Polyeder, deren Seitenflächen regelmäßige Polygone sind) oder in den zu den archimedischen Körpern dualen Körpern (catalanischen Körpern). Je mehr Seitenflächen solche Polyeder besitzen, desto schwieriger gestaltet sich die interaktive Konstruktion entsprechender Billard-Vielecke. Nicht immer verläuft eine Untersuchung erfolgreich. Geht man von besonderen 3D-Polygonen aus, so lassen sich auch andere konvexe Polyeder als konvexe Hüllen der Lotebenen zu den Winkelhalbierenden in den Polygonecken gewinnen, die polygonal gekennzeichnet werden können. Es ergeben sich offene Fragen, etwa die nach der Existenz von Polyedern bei vorgegebenen Billard-Vielecken. Bei der Bereitstellung von 3D-Polygonen als Billard-Polygonen ist das Fehlen einer Theorie für solche Polygone festzustellen.

Literatur

- Bainville, E. & Laborde, J.-M. (2004-2015): Cabri 3D 2.1 (deutsche Software-Schnittstelle von H. Schumann). Grenoble: Cabrilog (www.cabri.com).
- Berger, M. (2010). *Geometry Revealed. A Jacob's Ladder to Modern Higher Geometry*. Heidelberg: Springer, S. 728.
- Galperin, G. A. & Semliakov, A. N.(1990): *Mathematische Billarde* (russisch). Moskau: Nauka.
- Gardner, M. (1971): *Martin Gardener's Sixth book of Mathematical Games from Scientific American*. San Francisco: W. H. Freeman, S. 29-38.
- Hudelson, M. (ohne Angabe): *Periodic Omnihedral Billiards in Regular Polyhedra and Polytopes*. <http://stanwagon.com/public/hudelsonbilliards.pdf> (12.06.16).
- Schumann, H. (2007): *Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum*. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Schumann, H. (2017): Das räumliche Viereck – eine Einführung. In: MNU Journal, Heft 6, Jg. 70, S. 382 – 389.

Tabachnikov, S. (2013): Geometrie und Billard. Berlin u. Heidelberg: Springer-Verlag.

Winter, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Verlag Vieweg.

Link:

<http://mathworld.wolfram.com/Billiards.html> (12.06.16)

Die Abbildungen wurden vom Autor mit Cabri 3D Version 2.1.1 erstellt.

Raumgeometrisches Entdecken an und mit Polyedern

Heinz Schumann

Zusammenfassung. Raumgeometrisches Entdecken hat durch die Nutzung geeigneter Dynamischer Raumgeometrie-Systeme (DRGS), deren Prototyp Cabri 3D (Bainville & Laborde 2004-2015) ist, eine neue Qualität erfahren. Voraussetzung für eine solche Nutzung ist die Beherrschung eines DRGS, das bereits Begriffe der reellen euklidischen Raumgeometrie beinhaltet und diese im virtuellen Raum des Bildschirms entsprechend repräsentiert. Dabei wird das Entdecken raumgeometrischer Aussagen in DRGS durch die Visualisierung, die Konstruktion, die Messung und die direkte Manipulation, Variation und Erzeugung räumlicher Objekte medial unterstützt (Schumann 2007). Raumgeometrisches Entdecken mittels DRGS eröffnet i. A. weitere Erkenntnismöglichkeiten als sie mit herkömmlichen Medien gegeben sind. Die Anwendung heuristische Methoden (u. a. Winter 1989) wird durch die Nutzung von DRGS beim raumgeometrischen Entdecken verstärkt.

1. Einleitung

Im Folgenden legen wir den Schwerpunkt auf das Entdecken in der räumlichen Formenkunde, da die schulgeometrische Formenlehre räumlicher Figuren geprägt ist durch einen bescheidenen Vorrat an Figuren als dienende Magd für Berechnungen. Ein reichhaltiges Entdeckungsfeld bieten die Polyeder, insbesondere jene konvexen Polyeder, deren Seitenflächen regelmäßige Polygone sind und die auch Johnsonsche Körper genannt werden. Es fehlt aber noch eine Handlungsorientierung für unsere Entdeckungen: Welche Handlungen bzw. Aktivitäten an diesen Polyedern sollen zu raumgeometrischen Entdeckungen führen? Wir haben folgende Auswahl an Aktivitäten getroffen, die das nachstehende Diagramm zeigt. Die betreffenden Beispiele bilden eine bescheidene Materialsammlung.

Der Würfel ist als einführender und beispielgebender Gegenstand für Schüler und Schülerinnen ab der oberen Sekundarstufe I und für Studierende des Lehramts Mathematik geeignet, außerhalb des Regelunterrichts bzw. modularisierten Regelstudiums z. B. in Form von Projektarbeit, eigene Entdeckungen zu machen. Dabei sind bestimmte Entdeckungsaktivitäten auch kombinierbar.

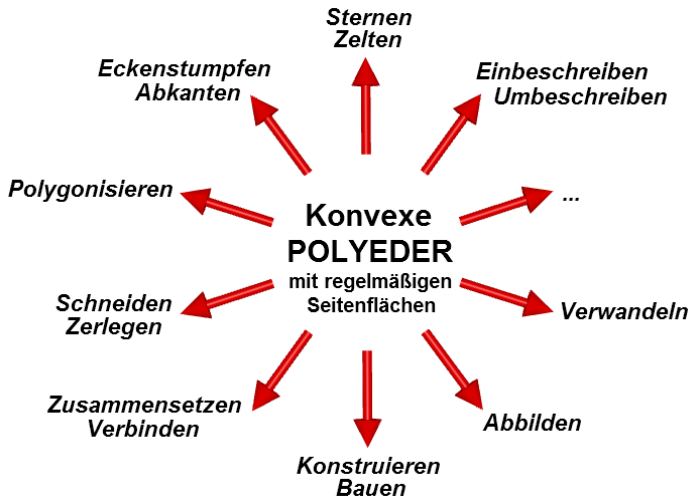


Abb. 1: Diagramm „Raumgeometrisches Entdeckungsfeld“

2. Entdeckungsaktivitäten am Würfel

Aus Platzgründen werden im Folgenden nur einige der genannten Aktivitäten anhand von ausgewählten Beispielen mit Impulsen und einzelnen Entdeckungsergebnissen skizziert.

2.1 Einbeschreiben – Umbeschreiben

Anmerkung: Dem Würfel Einbeschriebenes (Umbeschriebenes) ist zugleich vom (im) Würfel Umbeschriebenes (Einbeschriebenes).

Einbeschreiben

Allgemein: *Finde Polyeder, die dem Würfel derart einbeschrieben sind, dass ihre Ecken auf der Würfeloberfläche liegen.*

Beispiel 1: Dem Würfel einen Würfel einbeschreiben (Abb. 2).

Beispiel 2: Dem Würfel Polyeder einbeschreiben, deren Ecken mit Würfel-ecken übereinstimmen (Abb. 3). Derartige Polyeder nennt man Würfelpolytope. In der Abbildung sind diese Polytope geordnet nach ihrer Entstehung durch jeweilige Wegnahme einer Würfecke.

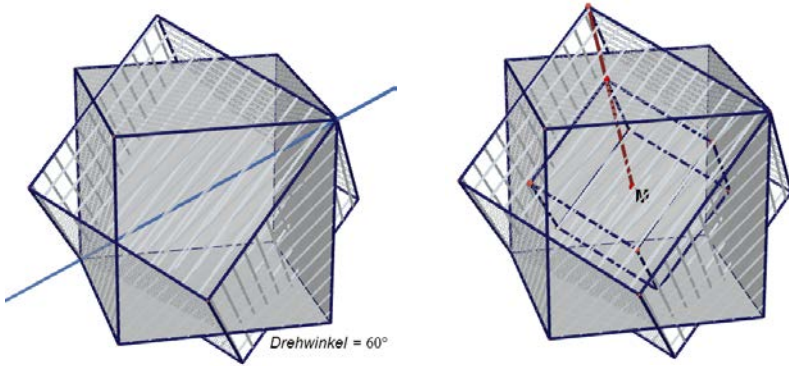


Abb. 2: Einbeschreibung eines Würfels im Würfel mittels Drehstreckung

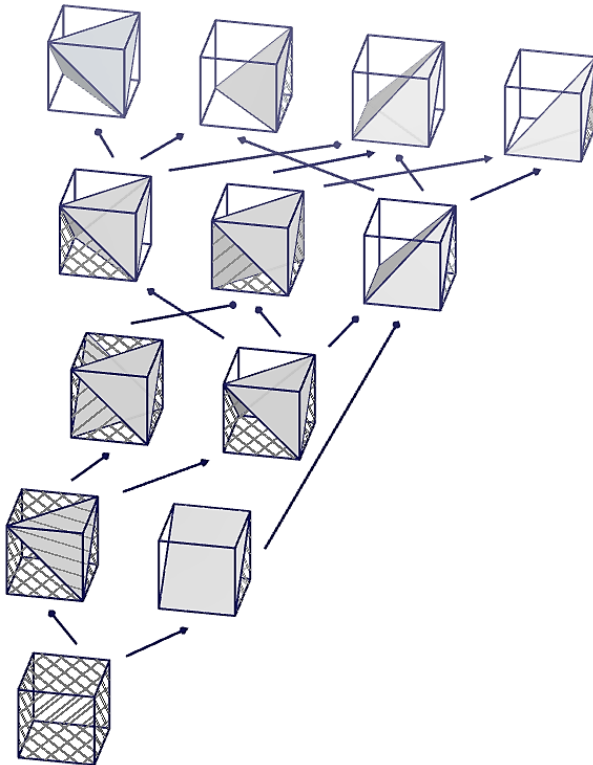


Abb. 3: Die Würfelpolytope

Umbeschreiben

Allgemein: *Finde Polyeder, die dem Würfel derart umbeschrieben sind, dass Würfecken auf ihrer Oberfläche liegen.*

Beispiel: Einem Würfel quadratische Pyramiden und Doppelpyramiden umbeschreiben und optimieren (mittels Variation der Höhe).

Impuls: *Einem Würfel der Kantenlänge a sind quadratische Pyramiden auf zwei Arten umbeschrieben (Abb. 4). Optimierte jeweils deren Länge der Kantensumme, deren Größe der Oberfläche und deren Rauminhalte. Verwende dafür die Messoptionen des benutzten DRGS.*

Finde die Eigenschaften der jeweils optimierten quadratischen Pyramiden heraus?

Desgleichen für quadratische Doppelpyramiden (Abb. 5).

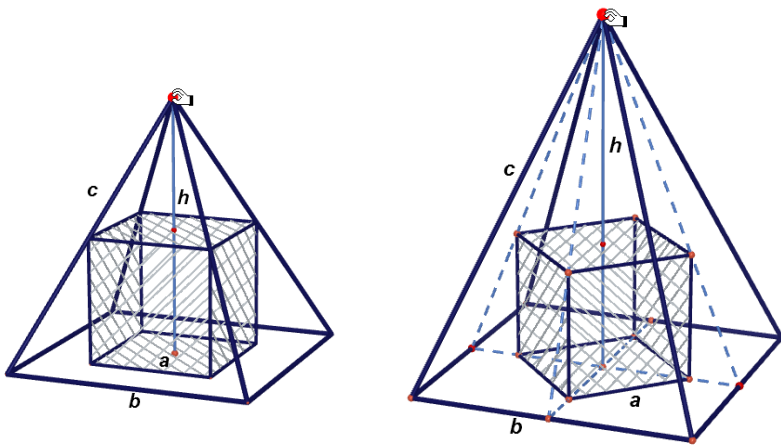


Abb. 4: Optimierung der Länge der Kantensumme, der Größe der Oberfläche und des Volumens einem Würfel umbeschriebener quadratischer Pyramiden

2.2 Verwandeln

Allgemein: *Finde Verwandlungen (Metamorphosen) des Würfels, um aus diesem „neue“ Polyeder zu gewinnen.*

Beispiel: Verwandlungen (Metamorphosen) des Würfels in Polyeder aus jeweils einander kongruenten „Ecken“ (genauer: n -Ecken, speziell Dreiecken, die Ecken des Würfels ersetzen). Dafür erfolgt die Konstruktion

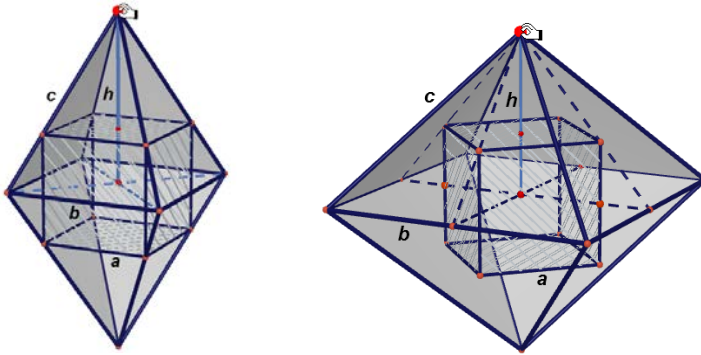


Abb. 5: Optimierung der Länge der Kantensumme, der Größe der Oberfläche und des Volumens einem Würfel umschriebener quadratischer Doppelpyramiden

eines Start-Polyeders, dessen Ecken einander kongruent sind wie folgt (Abb. 6-11): Nach der Konstruktion eines Würfel werden zu diesem konstruiert: zwei seiner zu den Seitenflächen parallele Symmetrie-Ebenen (die horizontale ist schraffiert), eine seiner vier Symmetrie-Achsen, welche Trägergeraden der Raumdiagonalen sind, und eine der drei Symmetrie-Achsen, die jeweils durch die Mitten gegenüberliegender Seitenflächen gehen (Abb. 6). Außerdem wird ein Raumpunkt P in beliebiger Lage positioniert. Der Punkt P wird mit den Drehwinkeln 120° und 240° um die ausgewählte Raumdiagonalen-Achse gedreht. Die beiden Bildpunkte sind zusammen mit P die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks (Abb. 7); der Punkt P wird so zu einem im virtuellen Raum frei zu verziehenden Punkt. Dieses Dreieck spiegelt man an der vertikalen Symmetrie-Achse oder man dreht es mit dem Drehwinkel 180° um diese Achse (Abb. 8). Anschließend wird das Spiegelbild und das ursprüngliche Dreieck an der vertikalen Symmetrie-Ebene gespiegelt und dann die vier Dreiecke an der horizontalen Ebene, bis die acht Dreiecke, das ursprüngliche Dreieck eingeschlossen, zu Paaren symmetrisch zum Würfelmittelpunkt liegen (Abb. 9). Die konvexe Hülle der acht Dreiecke bzw. ihrer vierundzwanzig Eckpunkte bildet gemäß ihrer Konstruktion ein Polyeder mit einander kongruenten Ecken, dessen Form von der Lage des Punktes P abhängt (Abb. 10).

Durch Verziehen von P wird das Polyeder in viele andere verwandelt, deren Ecken ebenfalls einander kongruent sind. Zur besseren Kontrolle der Metamorphose kann man P auf eine Kugel um den Würfelmittelpunkt und auch auf besondere Großkreise dieser Kugel binden (Abb. 11).

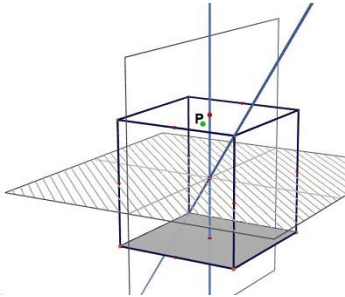


Abb. 6: Erzeugung eines Raumpunktes P unweit einer Raumdiagonalen des Würfels

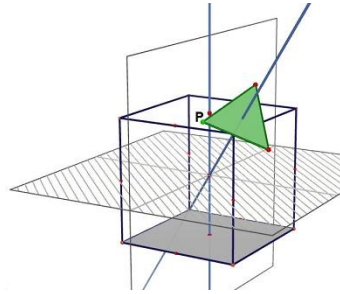


Abb. 7: P als Eckpunkt eines gleichseitigen Dreiecks um die Raumdiagonalen-Achse

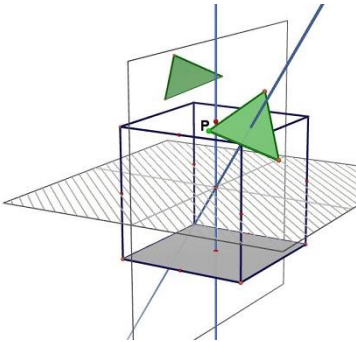


Abb. 8: Spiegelung des gleichseitigen Dreiecks an der vertikalen Seitenmitten-Achse

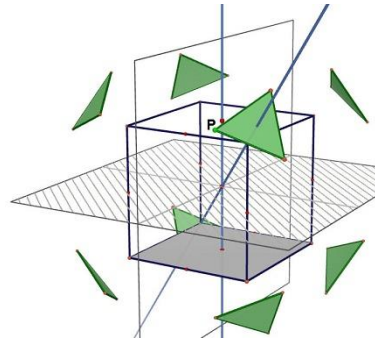


Abb. 9: Erzeugung der restlichen Dreiecke mittels Spiegelungen an Symmetrie-Ebenen

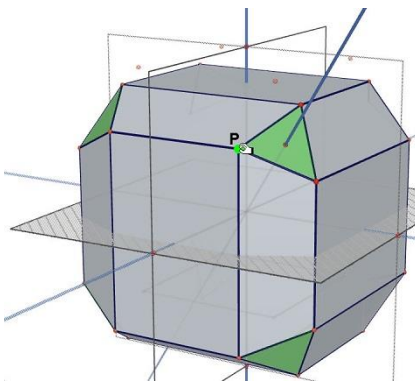


Abb. 10: Erzeugung eines Polyeders als konvexe Hülle der acht gleichseitigen Dreiecke

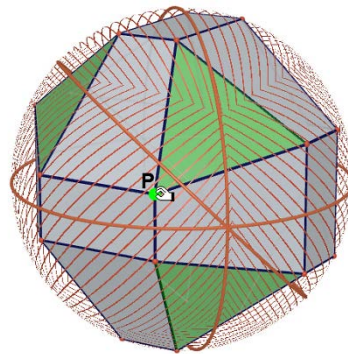


Abb. 11: Bindung und Verziehen des Punktes P auf einer Kugel um den Würfel-mittelpunkt

Impuls: Finde durch Variieren der Lage von P alle möglichen Polyeder heraus, deren Seitenflächen regelmäßige Polygone sind.

Die Variation der Lage von P liefert insgesamt einen Zyklus eckengleicher Polyeder, wie in der Abbildung 12 zu sehen ist. Mit dem Würfel beginnend, ergeben sich so links herum, ohne Beachtung von Zwischenkörpern, folgende Archimedischen bzw. Platonischen Körper: Würfel, Gestumpfter Würfel, Kuboktaeder, Ikosaeder, Oktaeder, Rhombenkuboktaeder und wiederum der Würfel. Das Start-Polyeder erfährt mit seiner Verwandlung zum Ikosaeder sogar einen Symmetriegewinn!

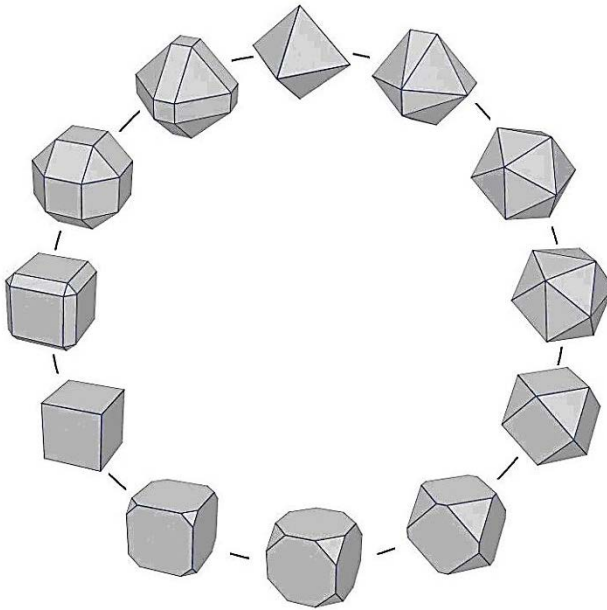


Abb. 12: Ein Zyklus gleichseitiger Polyeder vom Würfel aus

Bei Konstruktion einer Würfel-Metamorphose nur mittels Drehungen aus dem gleichseitigen Ausgangsdreieck gewinnt man auch den abgeschrägten Würfel (Abb. 13).

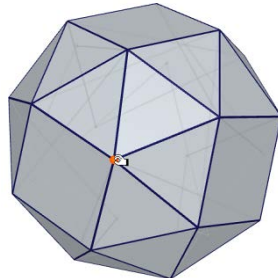


Abb. 13: Abgeschrägter Würfel

2.3 Abbilden

Beispiel 1: Fluchtpunkt-Perspektiven bei der Zentralprojektion des Würfels

Bei der Zentralprojektion des Würfels soll die Entdeckung von Fluchtpunkten vorgenommen werden.

Ein-Fluchtpunkt-Perspektive

Impuls: Untersuche, wie die Geraden verlaufen, auf denen die Bilder der Würfelkanten liegen (Abb. 14); treffe dabei eine Fallunterscheidung. Wo kommt der Fußpunkt des Lotes vom Augpunkt A auf die Bildebene zu liegen?

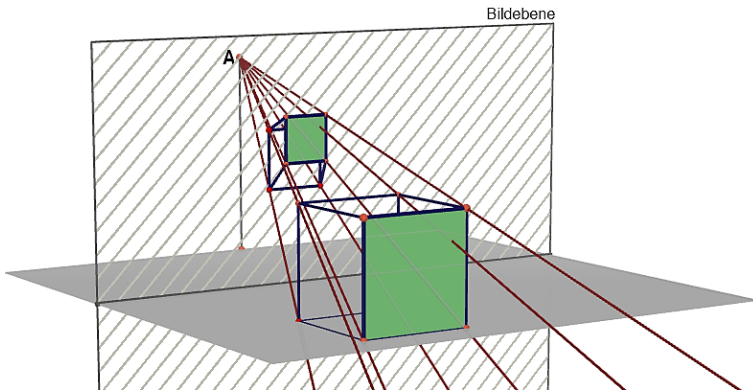


Abb. 14: Ein-Punkt-Zentralprojektion eines Würfels: Untersuchungsvorlage

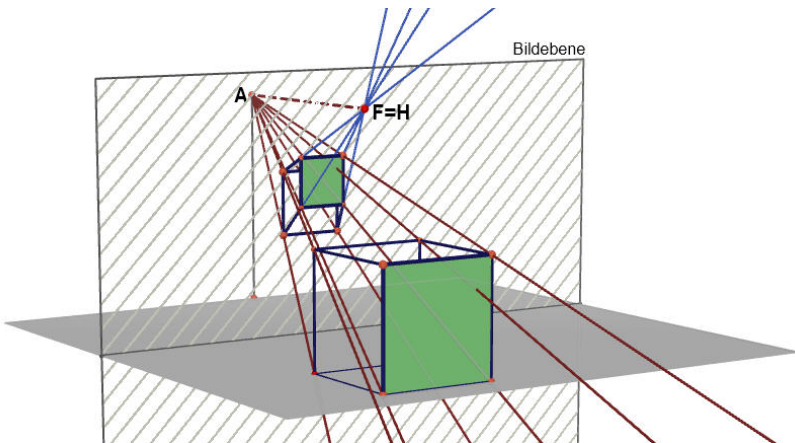


Abb. 15: Ein-Punkt-Zentralprojektion eines Würfels

Kommentar: In Abb. 15 liegt ein Würfel so auf einer Ebene (Standebene), die senkrecht zur Bildebene steht, dass eine Würfelseitenfläche parallel zur Bildebene ist. Die parallel zur Bildebene verlaufenden Würfelmkanten haben parallele Bildkanten; die Bilder der senkrecht zur Bildebene stehenden Kanten liegen auf Geraden, die einander in einem Punkt (F) schneiden. Diesen Punkt nennt man Fluchtpunkt; er fällt mit dem Fußpunkt H des Lotes vom Augpunkt auf die Bildebene zusammen. H wird Hauptpunkt der Zentralprojektion genannt.

Zwei-Fluchtpunkte-Perspektive

Impuls: Untersuche, wie die Geraden, auf denen die Bilder der Würfelmkanten liegen, verlaufen (Abb. 16); treffe dabei eine Fallunterscheidung.

Kommentar entsprechend.

Drei-Fluchtpunkte-Perspektive

Wenn keine der Würfelmkanten mehr parallel zur Bildebene sind, so erhält man drei Fluchtpunkte (F_1 , F_2 und F_3), jeweils als Schnittpunkte der Trägergeraden der Bildkanten von einander parallelen Kanten (Abb. 17). Die drei Fluchtpunkte sind Eckpunkte des sogenannten Fluchtpunktdreiecks.

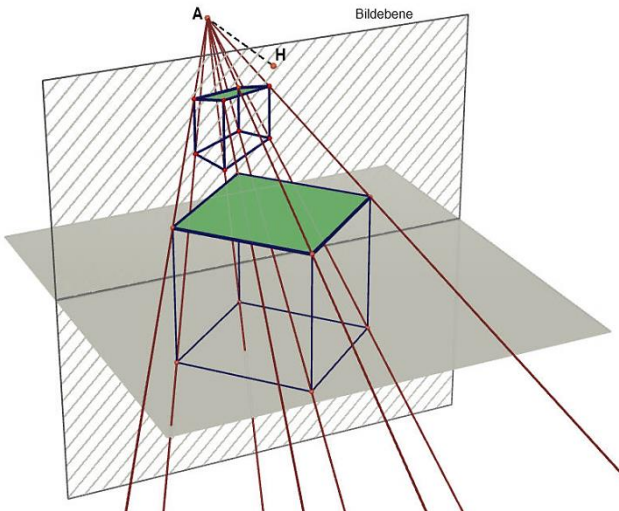


Abb. 16: Zwei-Fluchtpunkte-Perspektive eines Würfels: Untersuchungsvorlage

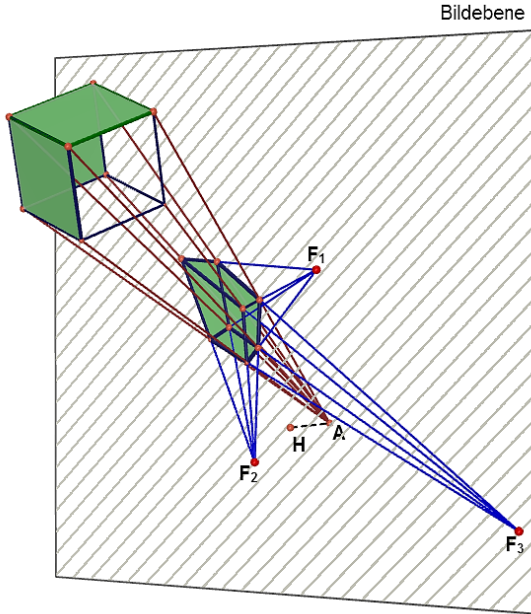


Abb. 17: Drei-Fluchtpunkte-Perspektive eines Würfels: Untersuchungsvorlage

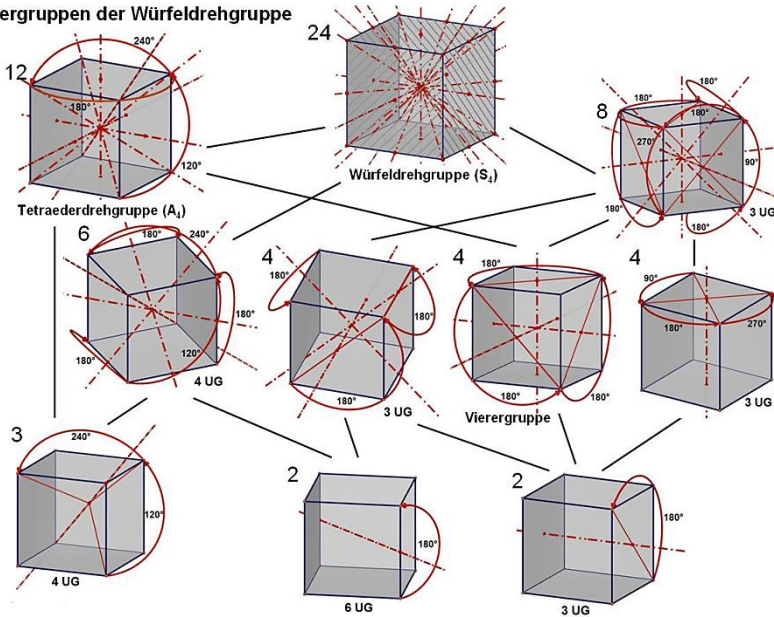
Impuls: Keine der Würfelkanten ist mehr parallel zur Bildebene (Abb. 18). Die drei Fußpunkte F_1 , F_2 und F_3 , die jeweils Schnittpunkte der Geraden sind, auf denen die Bilder der parallelen Kanten liegen, bilden ein Dreieck. Welcher besonderer Punkt ist der Hauptpunkt H im Dreieck $F_1F_2F_3$?

Beispiel 2: Würfelselbstabbildungen: Untergruppen der Drehgruppe des Würfels

Der Würfel besitzt vier 120° -Deckdrehungen und vier 240° -Deckdrehungen um die Raumdiagonalen-Achsen; drei 90° -Deckdrehungen, drei 180° -Deckdrehungen und drei 270° -Deckdrehungen um die Flächenmitten-Achsen; sechs 180° -Deckdrehungen um Achsen durch die Gegenkantenmitten. Hinzu kommt noch die identische Abbildung („ 0° -Drehung“). Diese 24 orientierungserhaltenden Deckabbildungen ergeben zusammen mit ihren Hintereinanderausführungen als Verknüpfung die Würfeldrehgruppe (sog. S_4).

Impuls: Finde alle Untergruppen der Würfeldrehgruppe heraus.

Lösung: Die Abbildung 18 zeigt den komprimierten Untergruppengraph der Würfeldrehgruppe mit den jeweiligen Symmetrie-Elementen:

Untergruppen der Würfeldrehgruppe

Abb. 18: Untergruppen-Graph der Würfeldrehgruppe

- 3 zwei-elementige Untergruppen mit einer 180° -Drehung um die jeweilige der 3 Flächenmittenachsen,
- 6 zwei-elementige Untergruppen mit einer 180° -Drehung um die jeweilige der 6 Kantenmittenachsen,
- 4 drei-elementige Untergruppen mit einer 120° -Drehung und einer 240° -Drehung um die jeweilige der 4 Raumdiagonalenachsen,
- 3 vier-elementige Untergruppen mit einer 90° -Drehung, 180° -Drehung und einer 270° -Drehung um die jeweilige der Flächenmittenachsen,
- 1 vier-elementige Untergruppe (sog. Vierergruppe) mit einer 180° -Drehung um jede der 3 Flächenmittenachsen,
- 3 vier-elementige Untergruppen mit einer 180° -Drehung um zwei der 6 Kantenmitten-Achsen und mit einer 180° -Drehung um eine der Flächenmittenachsen,
- 4 sechs-elementige Untergruppen mit einer 120° -Drehung und einer 240° -Drehung um eine der 4 Raumdiagonalenachsen und mit einer 180° -Drehung jeweils um drei der Kantenmittenachsen,

3 acht-elementige Untergruppen mit einer 180° -Drehung um je zwei Kantenmitten-Achsen, mit einer 180° -Drehung um je zwei der Flächenmittenachsen und mit einer 90° -Drehung, 180° -Drehung und einer 270° -Drehung um eine der Flächenmitten-Achsen,

1 zwölf-elementige Untergruppe (Tetraederdrehgruppe, sog. A_4) mit einer 180° -Drehung um jede der drei Flächenmittenachsen und mit einer 120° -Drehung und einer 240° -Drehung um jede der vier Raumdiagonalen.

Anmerkung: Die Verknüpfung jeder dieser 24 Abbildungen liefert mit der Spiegelung am Würfelmittelpunkt, die keine orientierungserhaltende Abbildung ist, die restlichen 24 Abbildungen der 48-elementigen Deckabbildungsgruppe des Würfels.

Weitergehender Impuls: *Finde heraus, welche der Polytope des Würfels Untergruppen der Würfeldrehgruppe repräsentieren.*

2.4 Konstruieren – Bauen

Allgemein: Finde verschiedene Konstruktionen des Würfels als Flächen- und als Kantenmodell.

Beispiel 1: Bau eines Würfelgestells aus 12 gleichen Teilen

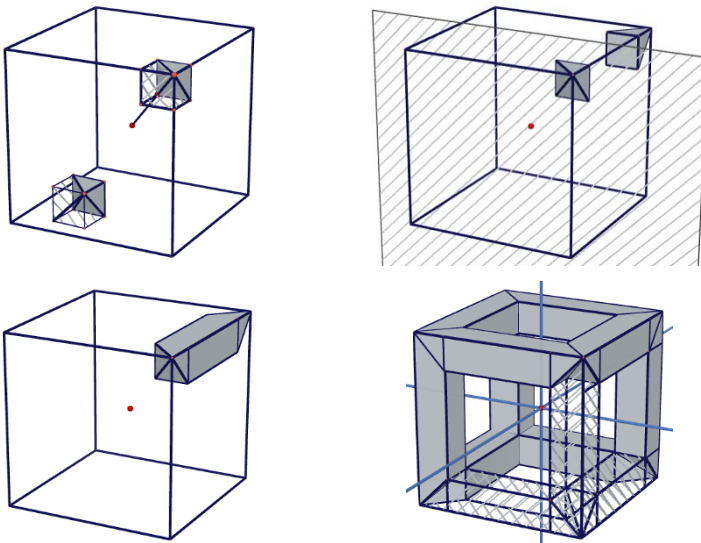


Abb. 19: Bau eines Würfelgestells aus 12 gleichen Teilen

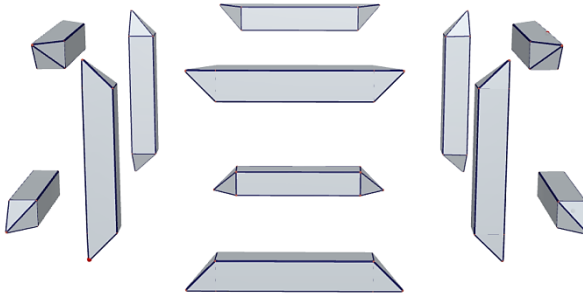


Abb. 20: Bausatz für das Würfelgestell

Beispiel 2: Bau einer Würfelbox aus 6 gleichen Flächenelementen (flachen quadratischen Pyramidenstümpfen)

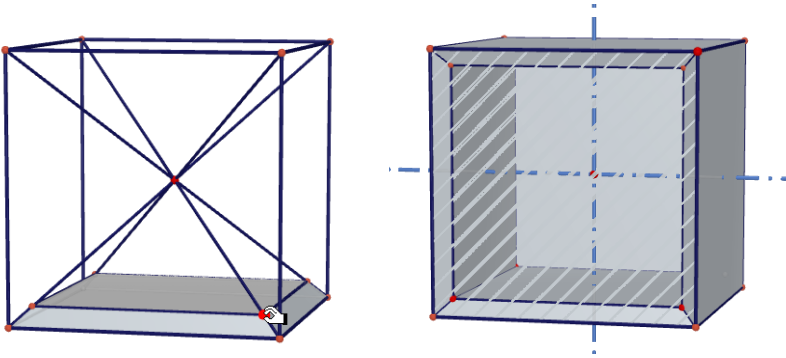


Abb. 21: Bau einer Würfelbox aus 6 gleichen Teilen

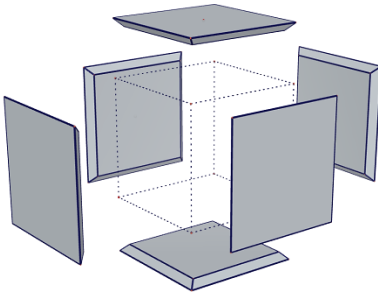


Abb. 22: Bausatz für die Würfelbox

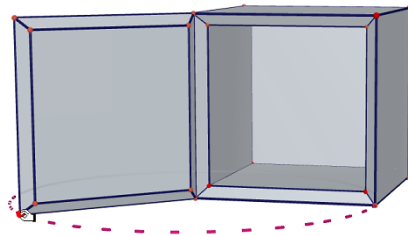


Abb. 23: Würfelbox mit geöffnetem Deckel

2.5 Zusammensetzen – Verbinden

Zusammensetzen

Allgemein: *Finde durch Zusammensetzen von Würfeln neue Körper.*

Beispiel: „Strahlenkörper“ aus Würfeln (Abb. 24).

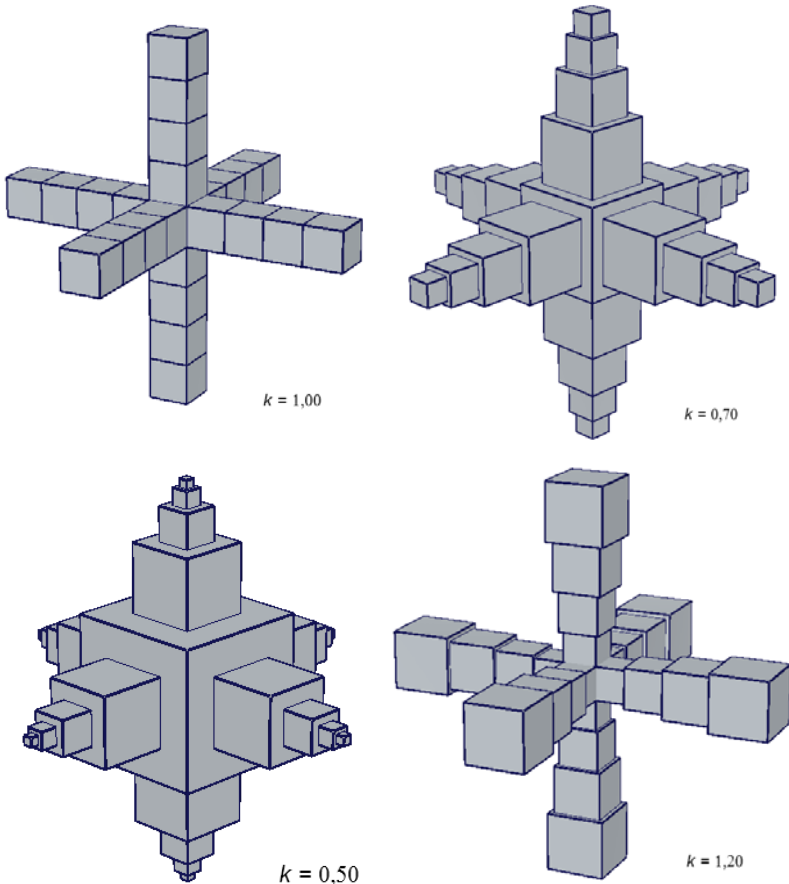


Abb. 24: Strahlenkörper aus mittels zentrischer Streckung veränderten Würfeln

Verbinden

Impuls: *Finde durch vervielfachendes Drehen des Würfels um seine Symmetrie-Achsen Polyeder, die zu Verbundpolyedern (compound polyhedra)*

zusammengefasst werden können. Welche Symmetrie-Eigenschaften und welche Durchdringungskörper besitzen diese?

Beispiel: Verbundpolyeder, entstanden durch 45° -Drehung des Würfels um jede seiner Flächenmitten-Achsen. Dieser Körper hat die gleichen Symmetrie-Eigenschaften wie der Würfel. Der Durchdringungskörper dieser drei gedrehten Würfel ist ein Rhombenkuboktaeder (Abb. 25).

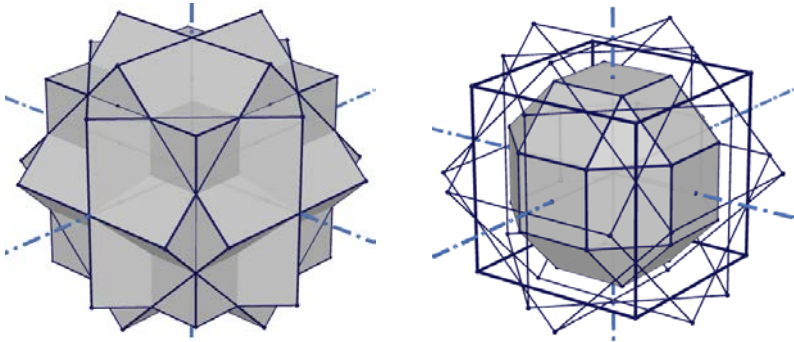


Abb. 25: Verbundpolyeder aus vier Würfeln mit Rhombenkuboktaeder als Durchdringungskörper

Anmerkung: Einige Autoren, z. B. Pöppe 2003 u. Ludwig 2004, bezeichnen fälschlicherweise die Verbundpolyeder als Durchdringungspolyeder.

2.6 Schneiden – Zerlegen

Schneiden

Allgemein: *Finde die ebenen Schnitte des Würfels, die sich nach ihrer Art und Form unterscheiden.*

Beispiel 1: *Finde heraus, welche Vierecke als Schnittformen des Würfels möglich, welche nur beschränkt möglich und welche nicht möglich sind.*

In der Abbildung 26 ist angezeigt, dass echte Drachen bzw. konvexe Viereck ohne parallele Gegenseiten als Schnitte nicht möglich sind. Rauten und Trapeze als Schnitte unterliegen bestimmten Dimensionierungen. Nur Rechteck und Quadrat sind, bis auf Ähnlichkeit, ohne besondere Dimensionierung als Schnitte möglich.

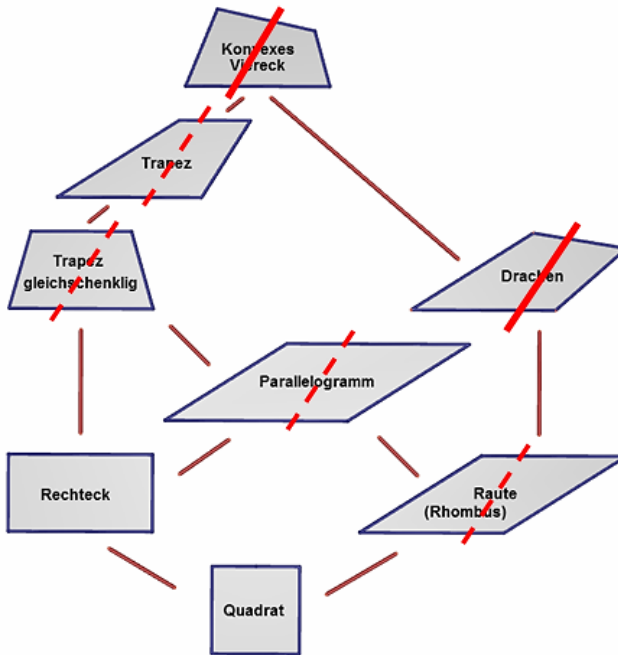


Abb. 26: Haus der konvexen Vierecke mit den möglichen Viereckschnitten

Zerlegen

Allgemein: *Finde Zerlegungen des Würfels, die sich nach Form und Anzahl der Teilpolyeder unterscheiden.*

Beispiel: *Finde Zerlegungen des Würfels in jeweils zwei nicht konvexe Teilpolyeder, die einander kongruent (nicht kongruent) sind.*

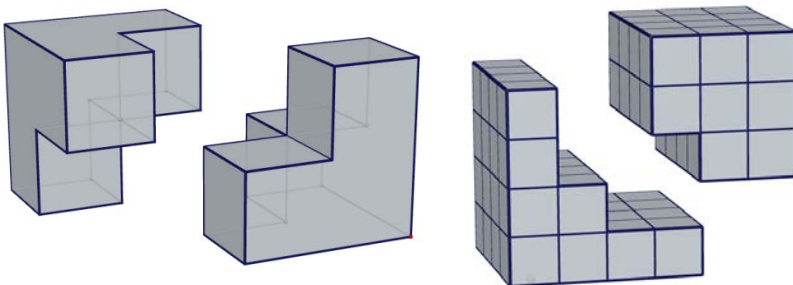


Abb. 27: Beispiele für die Zerlegung des Würfels in zwei nicht konvexe Teilpolyeder

2.7 Polygonisieren

Allgemein: *Finde auf und im Würfel besondere Polygone und untersuche diese.*

Beispiel: *Finde im Würfel Polygone, welche geschlossene Billardbahnen sind, die über jede der Seitenflächen des Würfels nur einmal laufen.*

(Ausführung im Beitrag „Raumgeometrische Entdeckungen am Beispiel „Würfelbillard“ in diesem Tagungsband.)

2.8 Eckenstumpfen – Abkanten

Wir verweisen auf die Behandlung dieser Aktivitäten im Rahmen der Projektarbeit in Schumann (1995).

2.9 Sternen – Zelten

Sternen

Über den Würfelseiten sind jeweils einander kongruente quadratische Pyramiden konstruiert.

Impuls: *Finde heraus, welcher Körper sich ergibt, wenn die Lage der Pyramidenspitzen variiert wird.*

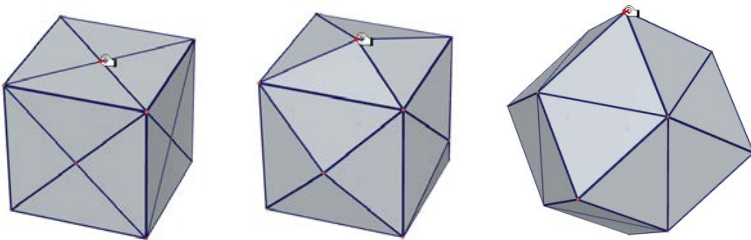


Abb. 28: Sternen des Würfels zum Rhombendodekaeder

Zelten

Über den Würfelseiten sind jeweils einander kongruente Drachen konstruiert (Abb. 29).

Impuls: *Finde heraus, welcher Körper sich ergibt, wenn die Lage des vier Drachenecken gemeinsamen Punktes variiert wird.*

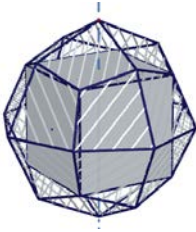


Abb. 29: Konstruktion von Drachen über Würfelseiten

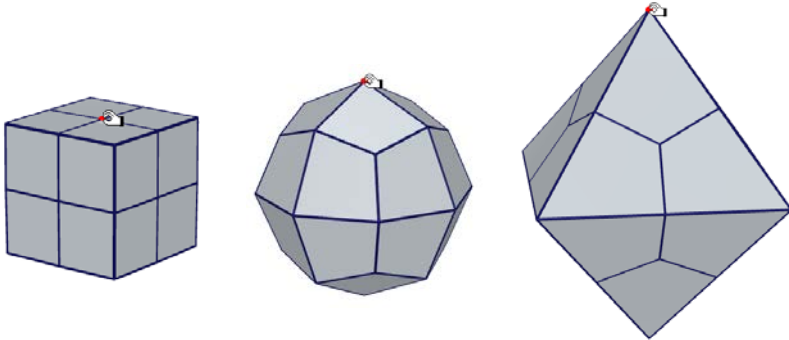


Abb. 30: Zelten des Würfels zum Oktaeder

Literatur

- Bainville, E. & Laborde, J.-M. (2004-2015). Cabri 3D (Software). Grenoble: Cabri-log.
- Ludwig, M. (2004): Durchdringungskörper in der Raumgeometrie. In: MU, Jg. 50, Heft 1-2.
- Pöppe, Ch. (2003) Räumliche Geometrie – Durchdringungskörper. In: Spektrum der Wissenschaft, März 2003.
- Schumann, H. (1995). Körperschnitte. Raumgeometrie interaktiv mit dem Computer. Bonn: Dümmler.
- Schumann, H. (2007). Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Hildesheim: Franzbecker.
- Schumann, H. (2016). Würfel-Metamorphosen konstruieren und animieren. MNU Journal (69), Heft 1, 21–25.
- Winter, H. (1989). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.

Die Abbildungen wurden vom Autor mit Cabri 3D Version 2.1.1 erstellt.

Autorenverzeichnis

Stephanie Gleich
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg
Regensburger Str. 160
90475 Nürnberg
stephanie.gleich@fau.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn
Ehemals:
Leuphana Universität Lüneburg
Privat: Barckhausenstr. 44
21335 Lüneburg
Haftendorn@uni.leuphana.de

Dr. Edmond Jurczek
Kantonsschule Zug
Lüssiweg 24
Postfach 7363
CH-6302 Zug
Schweiz
edmond.jurczek@art-tech.ch

Dr. Jörg Meyer
Schäfertrift 16
31789 Hameln
j.m.meyer@t-online.de

Dr. Manfred Schmelzer
Karl-Stieler Strasse 11
93051 Regensburg
manfred.schmelzer@web.de

Prof. Dr. Heinz Schumann
Pädagogische Hochschule Weingarten
Fak. II, Mathematik
Kirchplatz 2
88520 Weingarten
eMail: schumann@ph-weingarten.de

Prof. Dr. Hans-Dieter Sill
Institut für Mathematik
Universität Rostock
18055 Rostock
hans-dieter.sill@uni-rostock.de

Dr. Hans Walser
Gerlikonerstr. 29
8500 Frauenfeld
Schweiz
hwalsers@bluewin.ch
www.walsers-h-m.ch/hans/

Herausgeber

Prof. Dr. Andreas Filler
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
D-10099 Berlin
filler@math.hu-berlin.de

Prof. Dr. Anselm Lambert
Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Lehrstuhl für Mathematik und ihre
Didaktik
Postfach 151150
66041 Saarbrücken
lambert@math.uni-sb.de