

Andreas Filler

Anselm Lambert (Hrsg.)

Geometriedidaktik zwischen Geometrie und Didaktik

Forschungsfragen M_b, m_b, H

Anlegen eines Kreises durch alle Seitenmitten
 M_a, M_b, M_c von $\triangle ABC$.

- Was fällt auf?
→ Höhenfußpunkte liegen auch auf dem Kreis
- Wo liegt der Mittelpunkt dieses Kreises?
→ $[m_a, m_b, m_c] \cap [M_a, M_b] = M$ ist Mittelpunkt

interessant! M liegt auf der Geraden HH' !

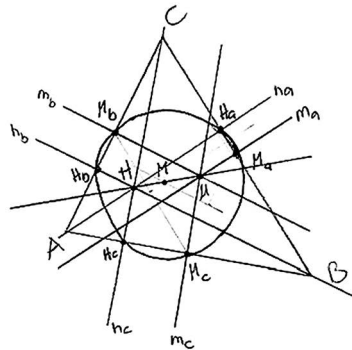
- Welchen Abstand hat M zu H bzw. zu U ?

→ Geogebra: Länge von HM und MU
vergleichen lassen \Rightarrow gleichlang!

- Warum?

→ M liegt jeweils auf Mittel senkrechten
 m_a, m_b, m_c bzw. $[M_b, m_b], [M_c, m_c]$, also auf der
Mittelparallelen von m_b und m_c bzw.
 m_b und m_c bzw. m_c und m_a . Da
 $H = h_a \cap h_b \cap h_c$ und $U = m_a \cap m_b \cap m_c$ und
 $M =$ Schnittpunkt der Mittelparallelen folgt

$$HM = MU$$



Andreas Filler,
Anselm Lambert
(Hrsg.)

Geometriedidaktik zwischen Geometrie und Didaktik

Vorträge auf der 35. Herbsttagung des
Arbeitskreises Geometrie in der
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 14. bis 16. September 2018
in Saarbrücken

Titelbild: Stephanie Gleich (Nürnberg)

Andreas Filler, Anselm Lambert (Hrsg.):
Geometriedidaktik zwischen Geometrie und Didaktik
AK Geometrie 2018

ISBN

© 2019 by Franzbecker, Hildesheim, Berlin

Inhaltsverzeichnis

Editorial	1
Stephanie Gleich <i>Beeinflusst mathematisches Arbeiten kreative Fähigkeiten einer Person? Zur Konzeption einer Studie</i>	3
Andreas Kirsche <i>Winkelblicke – Diskussion zum Winkelbegriff in der Ebene und vertiefende Auseinandersetzung im Geometrieunterricht</i>	19
Hans Walser <i>Umkehrung</i>	39
Stefan-Harald Kaufmann <i>Die Entwicklung dynamischer Vorstellungen zu vektoriellen Geradenbe- schreibungen</i>	51
Hartmut Müller-Sommer <i>Erkenntnisgewinn durch Perspektivwechsel: Entdeckungen an der Wallace- Geraden</i>	63
Heinz Schumann <i>„Regelmäßige“ räumliche Polygone</i>	77
Klaus Volkert <i>Wilhelm Fiedler: darstellende Geometrie und Förderung der Anschauung</i>	89
Edmond Jurczek <i>Wie möglich ist in der Geometrie ein Beweisen durch Messen?</i>	107
Autorenverzeichnis	121

Inhaltsverzeichnis

Editorial

Andreas Filler, Anselm Lambert

Der vorliegende Tagungsband enthält Beiträge der Herbsttagung 2018 des Arbeitskreises Geometrie in der GDM, die unter dem übergeordneten Thema *Geometriedidaktik zwischen Geometrie und Didaktik* stand. Dementsprechend umfassen die Beiträge ein breites Themenspektrum von im engeren Sinne didaktischen Themen über für den Geometrieunterricht oder die Begabtenförderung interessante fachlich orientierte Abhandlungen bis hin zu physikalischen Bezügen sowie die Lehre von Geometrie betreffenden historischen Betrachtungen.

Stephanie Gleich beschreibt in ihrem Beitrag *Beeinflusst mathematisches Arbeiten kreative Fähigkeiten einer Person? – Zur Konzeption einer Studie* Untersuchungen zu der Frage, ob mathematisches Arbeiten Einfluss auf globale kreative Fähigkeiten einer Person hat. Dazu zieht sie einen neuen Aufgabentyp zu Dreieckskonstruktionen heran, dessen Problemstellungen als Übungsfeld zum Betreiben von Mathematik – im Sinne des Findens, Lösens und Weiterentwickelns von Problemen – dienen können.

In seinem Beitrag *Winkelblicke – Diskussion zum Winkelbegriff in der Ebene und vertiefende Auseinandersetzung im Geometrieunterricht* entwickelt *Andreas Kirsche* eine Lernumgebung, die ein alternatives Winkelmaß – den Kreuzabstand – aufgreift, um insbesondere den Ähnlichkeitsaspekt des Winkels zu betonen. Er begründet, dass der Kreuzabstand bei der Beschreibung der Relation sich schneidender Geraden natürlicher wirken kann als das kanonische Winkelmaß und daher leichter zugänglich sein kann.

Hans Walser zeigt in seinem Beitrag *Umkehrung* auf, wie Perspektivenwechsel zu neuen Einsichten führen können. Anhand der Umkehrung einer Schulbuchaufgabe der Sekundarstufe II – Bestimmung der Tangenten an eine Parabel durch einen gegebenen Punkt – kommt er zu einer Verallgemeinerung der Begriffe *Thaleskreis* und *Ortsbogen* und untersucht „Thaleskurven“ und Ortsbögen von Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln.

Ebenfalls ein Thema der Sekundarstufe II greift *Stefan-Harald Kaufmann* auf: *Die Entwicklung dynamischer Vorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen*. Er beschreibt einen Unterrichtsversuch, der mit dem Ziel durchgeführt wurde, dynamische Interpretationen von vektoriellen Gera-

denbeschreibungen im Unterricht stärker zu gewichten, und dabei gemachte Beobachtungen.

Ausgangspunkt des Beitrags von *Hartmut Müller-Sommer* ist die geometrische Situation zur Erzeugung der *Wallace-Geraden*. Dabei handelt es sich um Geraden, auf denen die Fußpunkte der von einem Punkt des Umkreises aus auf die Trägergeraden der Dreiecksseiten gefälltten Lote liegen. Ein *Perspektivwechsel* führt zu neuen „Umkurven“ und zu Verallgemeinerungen der *Wallace-Geraden*, des *Feuerbach-Kreises* und der *Euler-Geraden*.

Heinz Schumann überträgt in seinem Beitrag „*Regelmäßige*“ *räumliche Polygone* die Seiten- und Winkelgleichheit zur Definition der regelmäßigen ebenen Polygone auf die räumlichen Polygone und zeigt für derartige Polygone niedriger Eckenanzahl (Sechs-, Sieben- und Achtecke) elementargeometrische Konstruktionsmöglichkeiten mittels Dynamischer Raumgeometrie-Systeme auf. Weiterhin wird ein koordinatengeometrischer Beweis für die Erfassung aller Typen „regelmäßiger“ räumlicher Sechsecke skizziert.

Der Beitrag *Wilhelm Fiedler: darstellende Geometrie und Förderung der Anschauung* von *Klaus Volkert* ist gleichermaßen historisch wie aktuell. Zu den didaktischen Leitlinien Wilhelm Fiedlers (1832–1912) zählten u. a. die Fusion von ebener und Raumgeometrie, die Beweglichkeit (Figuren als Teile eines Systems, die variieren können), Problemlösen und Eigenaktivität als methodische Prinzipien sowie die Betonung der Wichtigkeit des Konstruierens für das Erlernen von Geometrie.

Beweisen durch Messen in der Geometrie scheint unmöglich zu sein. *Edmond Jurczek* zeigt in seinem Beitrag *Wie möglich ist in der Geometrie ein Beweisen durch Messen?* anhand von Beispielen auf, dass dies nicht uneingeschränkt zutrifft. Das historische Schlüsselbeispiel stammt aus dem Gebiet der Differentialgeometrie und zieht sich hin zur Messung der Raumkrümmung im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Eingegangen wird auch auf Messungen zur Überprüfung der Theorie der Gravitationswellen mit extrem hohen Anforderungen an die (geometrische) Messgenauigkeit.

Beeinflusst mathematisches Arbeiten kreative Fähigkeiten einer Person? – Zur Konzeption einer Studie.

Stephanie Gleich

Zusammenfassung. In fachdidaktischer Literatur werden häufig Zusammenhänge zwischen mathematischem Arbeiten und Kreativität genannt. So schreibt zum Beispiel Collet (2009), dass Kreativität zum Lösen von mathematischen Problemen benötigt wird, wobei Leuders (2011) hervorhebt, dass ein „noch höheres Maß an Kreativität nötig ist, um sinnvolle Probleme überhaupt zu finden“. Auch in anderen Bereichen der mathematisch-didaktischen Literatur werden immer wieder Zusammenhänge zur Kreativität beschrieben. Mit der Anwendung von sogenannten Kreativitätsroutinen (Weth, 1997) kann beispielsweise das Hervorbringen von Kreativem, in diesem Fall von neuen mathematischen Begriffen unterstützt werden. Zudem werden auch Vorschläge genannt, wie Kreativität trainiert werden kann (Winter, 1991). Insgesamt ist der Literatur eine verbreitete Überzeugung zu entnehmen, dass zum mathematischen Arbeiten Kreativität benötigt wird und dass „man Kreativität in bestimmten Umfang lernen kann [...], wenn auch Belege hierfür [...] sehr schwer zu erbringen sind“ (Zech, 1996). Im Rahmen einer Dissertation wird der Frage nachgegangen, ob durch das Betreiben von Mathematik die Kreativität einer Person beeinflusst werden kann. Es wird also nicht untersucht, ob durch mathematisches Arbeiten mathematische Problemlösefähigkeiten gefördert werden oder, ob dadurch spezifische mathematische Inhalte gelernt werden können. Es soll erforscht werden, ob mathematisches Arbeiten Einfluss auf globale kreative Fähigkeiten einer Person hat, die auch außerhalb der Mathematik deutlich werden können.

Die Konzeption dieses Forschungsvorhabens wird in diesem Beitrag beschrieben. In den ersten Abschnitten werden dazu die Begrifflichkeiten „Kreativität“ und „mathematisches Arbeiten“ erläutert und anschließend ein Aufgabentyp zu Dreiecksstrukturen vorgestellt, der mathematisches Arbeiten im beschriebenen Sinn ermöglicht. Abschließend wird das Design des Forschungsvorhabens dargestellt.

Zum Begriff Kreativität

Psychologen beschreiben den Begriff Kreativität ähnlich wie die Intelligenz, indem sie unterschiedliche Aspekte der Kreativität hervorheben und sie dadurch greifbar machen (vgl. Abb. 1).

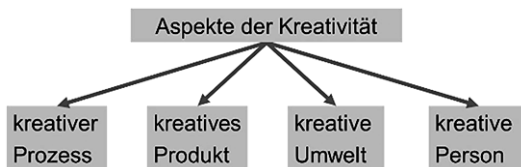


Abb. 1: Verschiedene Aspekte der Kreativität

Im Ansatz des kreativen Prozesses wird analysiert, wie ein kreativer Prozess abläuft. Ein bekannter Vertreter dieses Ansatzes ist Hadamard, der in seinem Vier-Phasen-Modell (1945) beschreibt, dass nach einer bewussten Einarbeitungsphase in ein Problem (Präparation) die Ideenfindung unterbewusst abläuft (Inkubation). Die entscheidende Lösungsidee dringt, im Sinne des „Heureka-Effekts“, wie ein Geistesblitz ins Bewusstsein (Illumination) wonach sich eine bewusste Phase der Überprüfung der Ideen anschließt, die zu einer geordneten Lösungsdarstellung führt (Verifikation).

Das Ergebnis solch eines kreativen Prozesses kann ein sogenanntes kreatives Produkt sein, wie zum Beispiel ein herausragendes Kunstwerk, eine überraschende Idee, ein neuartiges Bauteil oder aber auch eine Lösung eines bisher ungelösten mathematischen Problems. Im Erklärungsansatz des kreativen Produkts beschreibt die Psychologie unter anderem Kriterien, die diese Produkte auszeichnen. Häufig genannte Kriterien sind die „Neuartigkeit“ und die „Ungewöhnlichkeit“ eines Produkts, wobei vor allem die fachdidaktische Literatur die Neuartigkeit eines Produkts häufig nicht global betrachtet, sondern ein Produkt bereits dann als neu auffasst, wenn es für ein Individuum subjektiv neu ist (vgl. Weth 1997). Die beiden Kriterien „Neuartigkeit“ und „Ungewöhnlichkeit“ werden zudem häufig durch die „Angemessenheit“ eines Produkts ergänzt, um sicher zu stellen, dass das Produkt zumindest für einen bestimmten Kontext sinnvoll ist.

Ein weiterer Blickwinkel ist die kreative Umwelt, worin kreativitätsfördernde und -hemmende Einflussfaktoren beschrieben werden. Daraus können unter anderem Empfehlungen für einen kreativitätsfördernden Unterricht abgeleitet werden. Das Ermöglichen von selbstständigem Arbeiten und Experimentieren ohne Bewertungsdruck und ein wertschätzender Umgang mit Schülerergebnissen sind Beispiele für kreativitätsfördernde Bedingungen im Unterricht (vgl. Zech, 1996, S. 354f).

Der für das in diesem Beitrag vorgestellte Forschungsvorhaben wichtigste Ansatz ist die kreative Person. Darin werden kreative Persönlichkeiten auf ihre spezifischen Eigenschaften hin untersucht und daraus kreative Fähigkeiten abgeleitet. Kreative Personen zeichnen sich demnach durch ein erhöhtes Maß an folgenden Fähigkeiten aus (vgl. Guilford & Hoepfner, 1976):

- Eine Person mit einer offenen und kritischen Haltung ihrer Umwelt gegenüber ist problemsensitiv. Sie wird leicht auf Ungewöhnlichkeiten aufmerksam und entdeckt neue Probleme.
- Denkt eine Person flüssig, so kann sie zu einem vorhandenen Problem möglichst viele Assoziationen (in kurzer Zeit) nennen.
- Flexibles Denken zeichnet sich dadurch aus, ein Problem von verschiedenen Seiten betrachten und damit verschiedenartige Produktionen hervorbringen zu können.
- Durch originelles Denken können ungewöhnliche bzw. ausgefallene Ideen produziert werden.
- Elaboration ist die Fähigkeit, generierte Ideen anzureichern und sie zielgerichtet und gründlich zu durchdenken.

Das Besondere an diesem Ansatz der kreativen Person ist, dass diese kreativen Fähigkeiten durch standardisierte Kreativitätstests messbar gemacht werden können. Dadurch eignet sich dieser Ansatz insbesondere, um der Frage nachzugehen, ob mathematisches Arbeiten kreative Fähigkeiten einer Person beeinflusst.

Wie kreative Fähigkeiten in standardisierten Kreativitätstests messbar gemacht werden können, wird im folgenden Abschnitt aufgezeigt.

Zum Messen kreativer Fähigkeiten

In der Psychologie wird die Kreativität auf ähnliche Weise wie die Intelligenz einer Person messbar gemacht. In standardisierten Kreativitätstests werden die von Probanden erbrachten Bearbeitungen mit Punktwerten versehen. Die erreichte Gesamtpunktzahl gilt als Maß für die kreativen Fähigkeiten der jeweiligen Person. Im Gegensatz zu Intelligenztests werden bei Kreativitätstest offene Aufgabenformate gewählt, wodurch sich strenge, standardisierte und sehr ausführliche Auswertungsregeln ergeben. Im Folgenden wird ein typisches Aufgabenformat standardisierter Kreativitätstests vorgestellt und anhand exemplarischer Bearbeitungen unterschiedliche Auswerteregeln beschrieben.

In einer typischen, zeichnerisch zu lösenden Aufgabenstellung eines Kreativitätstests haben Probanden den Auftrag, gegebene Fragmente zu einer eigenen Komposition zu ergänzen (vgl. Abb. 2).

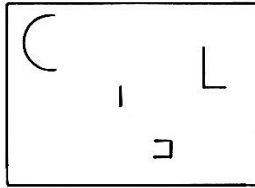


Abb. 2: Angabe eines standardisierten Kreativitätstests

Aus einem gegebenen Halbkreis, einem Strich, einem Winkel und einem liegenden „U“ können unterschiedliche Bearbeitungen entstehen (Abb. 3).

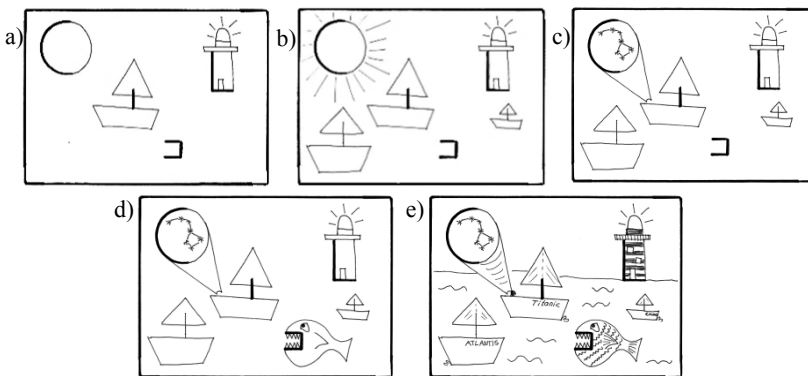


Abb. 3: Exemplarische Bearbeitungen der Testfrage

Schafft es eine Person, die gegebenen Fragmente in einer vorgegebenen Zeit nicht nur zu einem Kreis, einem Boot und einem Leuchtturm (vgl. Abb. 3a) zu ergänzen und zum Beispiel den Kreis zu einer Sonne auszugestalten oder weitere Boote anzufügen (vgl. Abb. 3b), so wird dies als Indiz für höhere Flüssigkeit bewertet. In den Auswerteregeln ist dabei genau festgelegt, auf welche und wieviele Elemente es eine bestimmte Anzahl an Punkten gibt. Wenn ein Proband seinen Blickwinkel ändert und den Kreis der Sonne zum Beispiel zu einem Fernrohr erweitert, durch welches man durchsehen kann, um den großen Waagen zu beobachten (vgl. Abb. 3c), wird das als höhere Flexibilität interpretiert und ebenfalls anhand klar vorgegebener Auswerteregeln bepunktet. Das liegende „U“ kann entweder zu etwas Naheliegenderem, wie beispielsweise einem Quadrat gestaltet, oder wie in Abbildung 3d zum Maul eines Fisches ausgeformt werden. Solche „nicht-stereotypische“ und ungewöhnliche Ergänzungen werden als Zeichen

für höhere Originalität des Probanden gewertet. Die Auswerteregeln geben genau vor, welche Ergänzungen im Bezug zu einer Normstichprobe häufig auftreten und damit als „gewöhnlich“ gelten. Ebenso werden Kriterien genannt, wie ungewöhnlich ausgestaltete Elemente zu bepunkten sind. Die einzelnen hervorgebrachten Figuren können zudem weiter ausgeschmückt werden, sodass dem Fisch beispielsweise Schuppen gezeichnet werden oder die Boote Namen bekommen. Den Probanden wird dann eine höhere Elaboration zugeschrieben und entsprechend der Auswerteregeln bewertet.

Der „Test zum schöpferischen Denken – Zeichnerisch“ (TSD-Z, Urban & Jellen, 1995) ist ein Beispiel für einen veröffentlichten standardisierten Kreativitätstest, auf dessen Prinzip der dargestellte typische Kreativitätstest basiert. Dieser Test wurde bereits international, auch in der Forschung als Prä- und Posttest eingesetzt. So zum Beispiel in der Untersuchung von Bröcher (1989) zum Einfluss eines Kreativitätstrainings auf die kreativen Fähigkeiten von hochbegabten Schülern. Dieser Test soll auch im beschriebenen Forschungsvorhaben herangezogen werden, um zumindest in einem gewissen Rahmen, Aussagen über eine mögliche Beeinflussung der kreativen Fähigkeiten durch mathematisches Arbeiten treffen zu können. Um die Frage beantworten zu können wird im folgenden Abschnitt zunächst der Begriff „mathematisches Arbeiten“ präzisiert.

Zum Begriff „mathematisches Arbeiten“

Das Verständnis von „Mathematik Betreiben“ soll im Rahmen des dargestellten Forschungsvorhabens bewusst von der häufig anzutreffenden Populärmeinung abgegrenzt werden, welche mathematisches Arbeiten mit Rechnen gleichsetzt. Während Rechnen durch quasi-maschinelles Anwenden von Algorithmen und Rechenregeln auf die Lösung einer vorgegebenen Aufgabe abzielt, verfolgt „mathematisches Arbeiten“ in dem hier verstandenen Sinn, neben dem Lösen von mathematischen Problemen, vielmehr auch das Weiterentwickeln der bereits gelösten Probleme und insbesondere das Auffinden neuer, selbstformulierter Probleme.

Um im Rahmen des Forschungsvorhabens mathematisch arbeiten zu können, werden also Aufgaben benötigt, die ein Auffinden, Bearbeiten und Weiterentwickeln von Problemen zulassen und damit folgenden Anforderungen genügen:

- Das beschriebene Verständnis des mathematischen Arbeitens beschränkt sich nicht auf das Bearbeiten von Routineaufgaben (Rechenaufgaben).
- Die Aufgaben sollen offen sein, um eine gewisse Freiheit im Denken, die beim mathematischen Arbeiten erforderlich ist, zu ermöglichen und um individuelle Lösungsansätze zuzulassen.
- Die Bearbeitung der Aufgaben soll selbst neue Probleme aufwerfen und damit eigene Fragestellungen und Entdeckungen ermöglichen. Das heißt also, dass die Aufgaben einen reichhaltigen mathematischen Kontext eröffnen sollen.
- Um den Fokus auf das mathematische Arbeiten legen zu können und den Blick nicht vom Wesentlichen abzulenken, sollen die Problemstellungen leicht verständlich und „innermathematisch“, also nicht anwendungsbezogen sein. Gleichzeitig sollen sie so schwer sein, dass sie nicht nur durch kurzes Überlegen gelöst werden können.

Im folgenden Abschnitt werden Aufgaben vorgestellt, die diesen Anforderungen genügen und die im Rahmen des Forschungsprojekts zum mathematischen Arbeiten herangezogen werden sollen.

Ein neuer Aufgabentyp zu Dreieckskonstruktionen

Aufgaben, die obigen Anforderungen aus unserer Sicht genügen, folgen dem Grundprinzip:

Gegeben sind drei geometrische Größen und zwar Geraden oder Punkte.

Gesucht ist ein Dreieck, bei dem diese Geraden oder Punkte bestimmte besondere Linien oder Punkte sind.

Eine mögliche Beispielaufgabe zu diesem Aufgabentyp kann etwa folgendermaßen lauten:

Aufgabenbeispiel:

Gegeben sind zwei Geraden und ein Punkt (vgl. Abb. 4a, grau).

Gesucht ist ein Dreieck, bei dem diese Geraden die Mittelsenkrechten m_a und m_b sind und der Punkt der Höhenschnittpunkt H ist (vgl. Abb. 4b, schwarz).

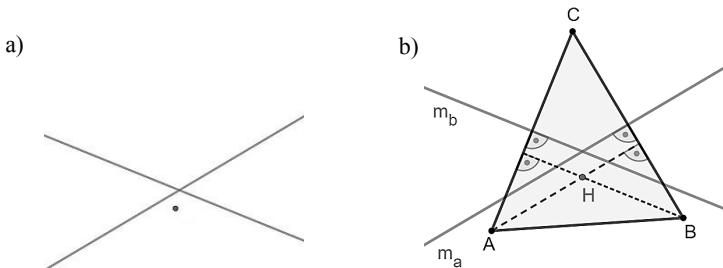


Abb. 4: gegebene Anfangskonfiguration (grau) und gesuchtes Lösungsdreieck (schwarz)

Durch Variation (vgl. Schupp, 2002) der besonderen Linien oder Punkte in den Aufgabenstellungen können über 2000 Probleme zu diesem Aufgabentyp generiert werden (vgl. Gleich, 2018a). Dass sich diese Problemstellungen zum mathematischen Arbeiten eignen, soll im Folgenden anhand der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Anforderungen an Aufgaben erläutert und mit einer exemplarischen Bearbeitung verdeutlicht werden.

Da es sich bei den Aufgaben zu Dreieckskonstruktionen um bisher ungelöste Probleme handelt, stellen sie keine Routineaufgaben dar und können durch das „Betreten von mathematischem Neuland“ zudem motivierend wirken. Die Aufgabenstellungen folgen jeweils demselben Grundprinzip, sodass die Aufgaben nach einmaliger Einarbeitung leicht verständlich und trotzdem – so die bisherige Erfahrung – unterschiedlich und anspruchsvoll in ihrer Bearbeitung sind. Die im Folgenden dargestellte exemplarische Bearbeitung des Aufgabenbeispiels stellt einen von vielen möglichen Lösungswegen der obigen Beispielaufgabe dar, wobei der hier nicht beschriebene Prozess des Auffindens von Lösungsideen durch den Einsatz dynamischer Geometriesoftware unterstützt wurde (vgl. Gleich, 2018b).

Konstruktionsbeschreibung:

Gegeben: zwei Geraden m_a und m_b und der Höhenschnittpunkt H .

Gesucht: Dreieck ABC .

1. Die Gerade h_a ist eine Parallele zu m_a durch H (vgl. Abb. 5a).
2. Die Gerade h_b ist eine Parallele zu m_b durch H .
3. Die Gerade h_a' ist die Bildgerade von h_a gespiegelt an m_b .
4. Die Gerade h_a'' ist die Bildgerade von h_a' gespiegelt an m_a .
5. Der Punkt B ist der Schnittpunkt der Geraden h_a'' und h_b .

6. Der Punkt C ist der Bildpunkt von B gespiegelt an m_a (vgl. Abb. 5b).
7. Der Punkt A ist der Bildpunkt von C gespiegelt an m_b .
8. Die drei Punkte A, B, C bilden das gesuchte Dreieck.

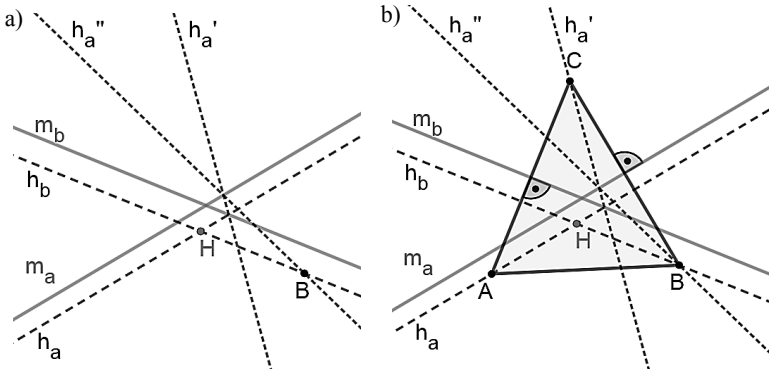


Abb. 5: Konstruktion eines gesuchten Lösungsdreiecks

Richtigkeit der Konstruktion:

Im konstruierten Dreieck sind m_a und m_b Mittelsenkrechten: Durch die Konstruktionsschritte 6 und 7 werden die Dreiecksseiten a bzw. b des gesuchten Dreiecks von den gegebenen Mittelsenkrechten m_a bzw. m_b senkrecht halbiert, wodurch sichergestellt ist, dass die gegebenen Geraden jeweils Mittelsenkrechten im gesuchten Dreieck darstellen.

Im konstruierten Dreieck ist H Höhenschnittpunkt:

Wenn die in Konstruktionsschritt 1 und 2 konstruierten Parallelen zu m_a bzw. m_b durch H die Höhen h_a bzw. h_b im gesuchten Dreieck darstellen, dann ist H Höhenschnittpunkt im Dreieck.

Da h_a bzw. h_b parallel zu m_a bzw. m_b verlaufen stehen sie jeweils senkrecht zu den Dreiecksseiten a bzw. b . Der Punkt A hat auf h_a zu liegen. Dieser Punkt fällt durch Spiegelung an m_b auf h_a' und zugleich auf C (Konstruktionsschritt 3). Die Gerade h_a' gespiegelt an m_a sei h_a'' (Konstruktionsschritt 4). Dabei fällt C auf h_a'' und auf B . Da B aber auch auf h_b zu liegen hat, ist B der Schnittpunkt von h_a'' und h_b (Konstruktionsschritt 5). Die Rückverfolgung der Spiegelungen von B an m_a ergibt dann konstruktiv C , die Spiegelung von C an m_b ergibt A auf h_a (Konstruktionsschritte 6 und 7).

Nach der Bearbeitung des Konstruktionsproblems beginnt ein weiterer wesentlicher Bestandteil mathematischen Arbeitens, in dem nach möglichen Variationen, Regelmäßigkeiten oder Zusammenhängen in der Konstruktion gesucht wird. Durch selbst formulierte Problemstellungen, sogenannte Forscherfragen, kann der der Problemstellung zugrundeliegende reichhaltige mathematische Kontext erforscht und dabei neue Entdeckungen gemacht werden. Folgende typische Fragestellungen können sich direkt an die Konstruktion anschließen.

Forscherfragen:

1. *Wann ist die Aufgabe nicht lösbar?*
2. *Was passiert, wenn die gegebenen Geraden senkrecht oder parallel verlaufen?*
3. *Wie müssen die Geraden liegen, damit ein gleichschenkliges oder gleichseitiges Dreieck entsteht?*
4. *Können auch andere Aufgaben mit dem gewählten Konstruktionsvorgehen gelöst werden?*

Die Beantwortung solcher Forscherfragen zielt darauf ab, weitere, neue Probleme zu entdecken und zugehörige Forscherfragen zu formulieren. Dieser Prozess wird ebenfalls durch den Einsatz dynamischer Geometriesoftware unterstützt. Insbesondere der Zug- und Spurmodus hilft beim Generieren neuer Vermutungen zu Zusammenhängen am konstruierten Dreieck.

Im Folgenden werden zwei verschiedene exemplarische Bearbeitungen von Forscherfragen zum obigen Aufgabenbeispiel dargestellt. Ohne auf konkrete Beweise bei der Beantwortung dieser Fragen einzugehen, soll dabei insbesondere aufgezeigt werden, wie sich mit Hilfe dynamischer Geometriesoftware neue Forscherfragen aus den Bearbeitungen ergeben können.

Forscherfrage: „*Was passiert, wenn die beiden Mittelsenkrechten senkrecht aufeinander stehen?*“

Das Variieren der gegebenen Geraden, sodass die beiden Mittelsenkrechten senkrecht zueinanderstehen, ergibt die beweisbedürftige Vermutung, dass das zu dieser Anfangskonfiguration gehörende Lösungsdreieck rechtwinklig ist (vgl. Abb. 6).

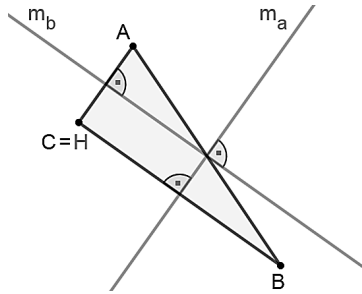


Abb. 6: Lösungsdreieck zu zwei senkrecht stehenden gegebenen Mittelsenkrechten und H

Die typische mathematische Fragestellung „Ist das immer so?“ regt zum weiteren Variieren der Anfangskonfiguration an und kann zu neuen Forscherfragen führen, wie „Was passiert, wenn die Lage von H verändert wird?“. Wenn die beiden Mittelsenkrechten weiterhin senkrecht verlaufen und H auf dem Schnittpunkt von m_a und m_b liegt, existiert kein Lösungsdreieck (vgl. Abb. 7a), ebenso, wenn H auf eine der beiden Mittelsenkrechten gesetzt wird (vgl. Abb. 7b).

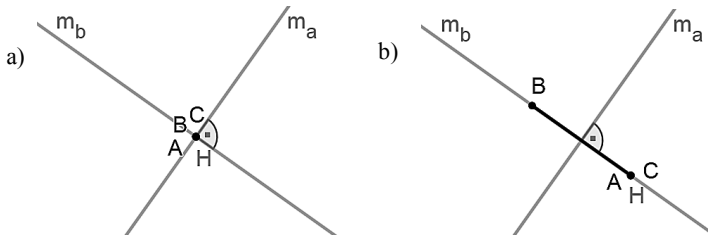


Abb. 7: Anfangskonfigurationen zu denen kein Lösungsdreieck existiert

Und wieder können sich weitere Fragen anschließen: „Ist das immer so?“ Oder existiert nur kein Lösungsdreieck, weil neben der Bedingung, dass H auf einer Mittelsenkrechten liegt, zudem gilt, dass die Mittelsenkrechten senkrecht stehen?“ Durch Variieren einer Mittelsenkrechten entsteht die Vermutung, dass Lösungsdreiecke existieren, wenn die beiden Mittelsenkrechten nicht senkrecht zueinanderstehen und H auf einer der beiden Mittelsenkrechten, nicht aber auf deren Schnittpunkt liegt. Es scheint in diesem Fall sogar unendlich viele Lösungsdreiecke zu geben (vgl. Abb. 8), was ebenfalls zu Beweisen wäre und die Fragen hervorruft „Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Lösungsdreiecken?“

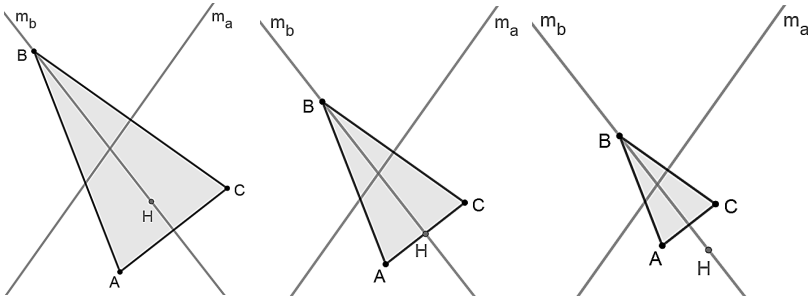


Abb. 8: Anfangskonfiguration mit unendlich vielen Lösungsdreiecken

In Abhängigkeit von der Lage der gegebenen Geraden können also anscheinend entweder kein, ein oder unendlich viele Lösungsdreiecke konstruiert werden. Kein Lösungsdreieck existiert, wenn zum Beispiel H auf dem Schnittpunkt von m_a und m_b liegt. Durch erneutes Variieren von H können weitere – spannende, da nicht sofort ersichtliche – Anfangskonfigurationen erkundet werden, zu denen kein Lösungsdreieck existiert. In Abbildung 9 ist die Ortslinie von H abgebildet, die entsteht, wenn man H so variiert, dass jeweils B und C auf m_a liegen und damit das Lösungsdreieck entartet. „Handelt es sich bei der Ortslinie von H um eine Gerade und wenn ja, um welche?“

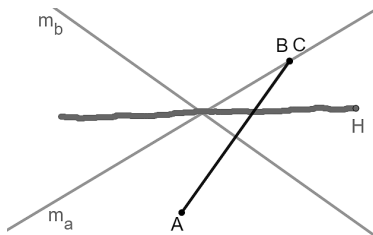


Abb. 9: Zur Lage von H , bei der scheinbar kein Lösungsdreieck existiert

Auf diese Weise können unterschiedlichste neue Forscherfragen generiert werden, deren Beantwortung jeweils zu neuen Fragestellungen, meist zu Lageeigenschaften der gegebenen Geraden oder Punkte oder zu Sonderformen des gesuchten Dreiecks führt. Das zusätzliche Anfügen von Punkten und Geraden zur Konstruktion kann weitere Einblicke in Zusammenhänge am Dreieck liefern, was folgende Forscherfrage exemplarisch aufzeigt.

Forscherfrage: „Was passiert, wenn dem konstruierten Lösungsdreieck seine Höhe h_c und sein Umkreis hinzugefügt wird?“

Es fällt auf, dass die drei Höhen des Lösungsdreiecks den Umkreis nicht nur in den Eckpunkten A , B und C schneiden, sondern jeweils auch in den Punkten A' , B' und C' (vgl. Abb. 10).

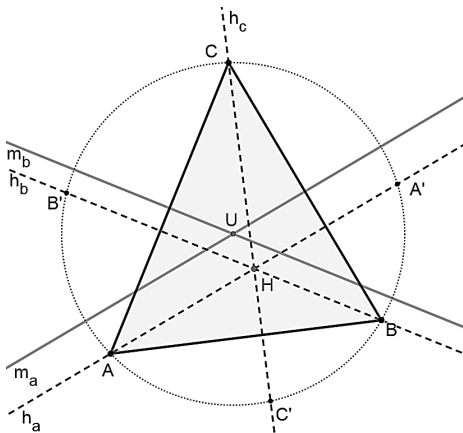


Abb. 10: Erweiterung des Lösungsdreiecks

Im entstandenen Sechseck $AC'BA'CB'$ können nun beispielsweise Längeneigenschaften der Seiten erforscht und dadurch Vermutungen hervorgebracht werden, wie „Sind jeweils zwei Seiten des Sechsecks gleichlang? Und wenn ja, warum?“ (vgl. Abb. 11a). Die Beantwortung dieser Frage ruft wiederum weitere Probleme hervor, wie „Sind die Dreiecksseiten a , b und c jeweils Symmetrieachsen von H und A' , H und B' bzw. H und C' ?“ (vgl. Abb. 11 b) oder „Wie müssen die gegebenen Geraden und der Höhenschnittpunkt liegen, damit ein regelmäßiges Sechseck entsteht?“.

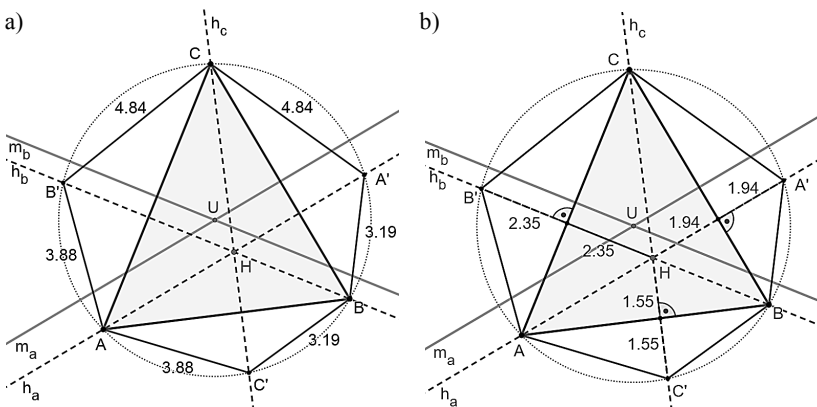


Abb. 11: Streckenlängen im Sechseck $AC'BA'CB'$

Wie die dargestellten exemplarischen Bearbeitungen der Forscherfragen zeigen, liegt den Problemstellungen ein reichhaltiger mathematischer Kontext zugrunde, der durch geeignete Fragen erarbeitet werden kann. Damit stellt der beschriebene Aufgabentyp zu Dreieckskonstruktionen eine geeignete Basis zum mathematischen Arbeiten im beschriebenen Sinne dar. Ob durch mathematisches Arbeiten kreative Fähigkeiten einer Person beeinflusst werden, soll in der im Folgenden beschriebenen Studie ermittelt werden.

Zur Konzeption der Untersuchung

Mathematisches Arbeiten findet im Rahmen der dargestellten Studie in einem Seminar an der Universität Erlangen-Nürnberg statt. Darin bearbeiten Studierende des Lehramts Mittelschule die beschriebenen Probleme zu Dreieckskonstruktionen zunächst unter Anleitung, um notwendiges Vorwissen in Form von Faktenwissen und heuristischen Vorgehensweisen zu garantieren und den Umgang mit dynamischer Geometriesoftware zu schulen. Ziel des Seminars ist, dass die Studierenden selbstständig Mathematik betreiben und damit neben dem Konstruieren von Lösungsdreiecken insbesondere eigene Probleme schaffen und neue, vorher noch nicht formulierte Forscherfragen stellen. Um kontrollieren zu können, dass mathematisches Arbeiten stattfindet, fertigen die Studierenden ein Forscherheft an, worin sowohl alle Bearbeitungen der Konstruktionsprobleme, aber auch eigene Forscherfragen und deren Bearbeitung, sowie neue Erkenntnisse und mögliche Unklarheiten notiert sind. Abbildung 12 zeigt einen Auszug eines solchen Forscherhefts des aktuellen Seminars, worin einige Forscherfragen zum obigen Aufgabenbeispiel formuliert wurden.

Um herauszufinden, ob kreative Fähigkeiten der Studierenden durch mathematisches Arbeiten im Seminar beeinflusst werden, wird je ein standardisierter Kreativitätstest (z.B. TSD-Z, Urban & Jellen, 1995) dem Seminar vorangestellt und angeschlossen (vgl. Abb. 13). Eine Kontrollgruppe besteht ebenfalls aus Mittelschullehramtsstudenten, die allerdings nicht am Seminar zum mathematischen Arbeiten teilnehmen. Sie bearbeiten parallel zur Interventionsgruppe je zwei Kreativitätstest, einen zu Beginn und einem am Ende eines Semesters, um einen möglichen Kreativitätszuwachs zwischen Vor- und Nachtest zu erfahren.

Forscheraufgaben M, m_b, H

Aufgaben eines Kreises durch alle Seitenmitten
 M_a, M_b, M_c von $\triangle ABC$.

- Was fällt auf?
 → Höhenfußpunkte liegen auch auf dem Kreis
 → M ist Mittelpunkt
- Wo liegt der Mittelpunkt dieses Kreises?
 → $M \in [M_a M_c] \wedge M \in [M_b M_c] \Rightarrow M$ ist Mittelpunkt

interessant! M liegt auf der Geraden HM !

- Welchen Abstand hat M zu H bzw. zu U ?
 → Geometria: Länge von HM und MU vergleichen lassen \Rightarrow Gleichung!
- Warum?
 → M liegt jeweils auf Mittel senkrechten m_b, m_c , also auf der Mittelparallelen von m_b und m_c bzw. m_b und m_c . Da $H = h_a \cap h_b \cap h_c$ und $U = m_a \cap m_b \cap m_c$ und $M =$ Schnittpunkt der Mittelparallelen folgt $HM = MU$

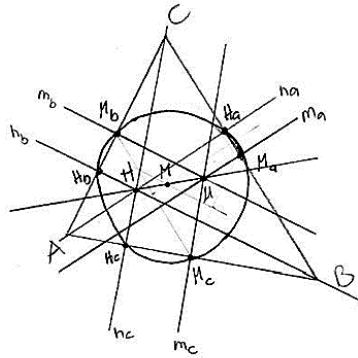


Abb. 12: Auszug eines Forscherheftes zum dargestellten Aufgabenbeispiel

Mit dem in Abb. 13 dargestellten Forschungsdesign soll erforscht werden, ob die Nullhypothese „Mathematisches Arbeiten beeinflusst die kreativen Fähigkeiten einer Person nicht“ gilt oder verworfen werden kann.

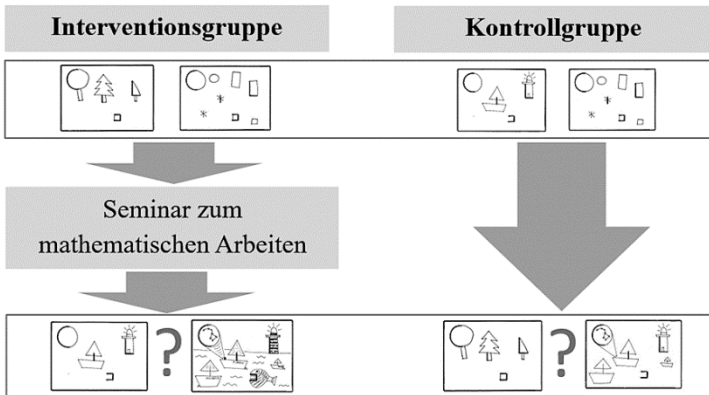


Abb. 13: Forschungsdesign der Studie

Literatur

- Bröcher, A. (1989). *Kreative Intelligenz und Lernen. Eine Untersuchung zur Förderung schöpferischen Denkens und Handelns unter anderem in einem Universitären Sommercamp*. München: Minerva.
- Collet, C. (2009). *Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation – Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen*. Münster: Waxmann.
- Gleich, S. (2018a). *Über einen neuen (?) Aufgabentyp zu Dreieckskonstruktionen*. In: Fachgruppe der Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*. Münster: WTM-Verlag.
- Gleich, S. (2018b). *Ein „neuer“ Aufgabentyp von Dreieckskonstruktionen?!*. In: Filler, A. & Lambert, A. (Hrsg.), *Geometrie mit Tiefe*. Hildesheim: Verlag Franzbecker.
- Guilford, J.P./Hoepfner, R. (1976). *Analyse der Intelligenz*. Weinheim / Basel: Beltz Verlag.
- Hadamard, J. (1945). *The psychology of Invention in the Mathematical Field*. Mineola: Dover Publications.
- Leuders, T. (2011). *Problemlösen*. In: Leuders, T. (Hrsg.), *Mathematik Didaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen.
- Schupp, H. (2002). *Thema mit Variation. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.
- Urban, K. & Jellen, H. (1995). TDS-Z. Test zum Schöpferischen Denken – Zeichnerisch. Frankfurt/M: Pearson Assesment & Information GmbH.
- Weth, T. (2002). *Ortslinien als Hilfsmittel zur Problemlösung*. Aufgerufen unter http://www.didmath.ewf.fau.de/Nuernberger-Kolloquium/2002/weth_n-1Strategie.pdf (Stand: 27.08.2018)
- Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg Verlag
- Zech, F. (1996). *Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitung für das Lehren und Lernen von Mathematik*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Winkelblicke – Diskussion zum Winkelbegriff in der Ebene und vertiefende Auseinandersetzung im Geometrieunterricht

Andreas Kirsche

Zusammenfassung. Der Winkelbegriff umfasst viele Aspekte. Diese werden bei (Krainer 1989) und auch in aktuellen Beiträgen wie (Etzold 2017, Dohrmann 2018) ausführlich diskutiert. Dieser Beitrag konzentriert sich auf das Winkelmaß und seine Genese. Es wird eine Lernumgebung vorgestellt, die ein von mir erarbeitetes alternatives Winkelmaß, den *Kreuzabstand*, aufgreift, um insbesondere den Ähnlichkeitsaspekt des Winkels im Sinne Krainers zu betonen. Der Kreuzabstand wirkt bei der Beschreibung der Relation sich schneidender Geraden natürlicher als das kanonische auf die Segmentierung eines Kreises ausgelegte Winkelmaß und kann damit für Schülerinnen und Schüler leichter zugänglich sein. Der Beschreibung der Lernumgebung vorangestellt ist eine Diskussion zum Winkelbegriff und eng damit verbunden die Motivation des Kreuzabstands als Größenmaß.

Diskussion zum Winkelbegriff in der Ebene

Krainer hat 1989 mit seinem Werk „Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs“ einen umfassenden Beitrag zum Winkelbegriff geliefert (vgl. Krainer 1989). Moderne Medien bieten heute die Möglichkeit, diesen Begriff unter neuen didaktischen Gesichtspunkten zu betrachten. So werden z. B. Tablet-Applikationen wie die App „Winkel“ von Etzold (2015) mit dem Ziel entwickelt, den Begriffserwerb „digital“ zu unterstützen.

Doch auch inhaltlich stellt der Winkelbegriff immer wieder eine Herausforderung dar. So diskutiert Etzold in seinem Beitrag „Winkel aus der Sicht von Informationen“ (vgl. Etzold 2017) eine zeitgemäße Definition des Winkels. Er geht der Frage nach, wie viele Informationen notwendig sind, um einen Winkel in der Ebene so zu definieren, dass möglichst alle Winkelaspekte abgedeckt sind (vgl. Etzold 2017). Zu diesen Aspekten gehören nach Krainer (vgl. Krainer 1989, S. 313)

- (K1) Winkel als geordnetes Paar zweier Strahlen (mit gemeinsamem Startpunkt),
- (K2) Winkel als Winkelfeld,
- (K3) Winkel als orientiertes Winkelfeld,
- (K4) Winkel als analytischer Winkel,

bzw. mit Etzolds Worten: „Winkel als geknickte Gerade, als von zwei Schenkeln (mit einem gemeinsamen Anfangspunkt) begrenzter Ebenenteil, als Ebenenteil, dessen Entstehung durch die Drehung eines Schenkels beschrieben werden kann, sowie als Umlaufwinkel“ (Etzold 2017, S. 36). Dabei kann der von Etzold beschriebene Umlaufwinkel mit dem Winkelaspekt (K4) in Beziehung gebracht werden, da durch das (unbeschränkte) Bogenmaß formal eine Umdrehung beschrieben wird. Das orientierte Winkelfeld entsteht wiederum durch die Änderung der Richtung eines (sich drehenden) Schenkels, sodass dies dem Winkelaspekt (K3) zugeordnet werden kann.

Es ist auch möglich und für die korrekte Einordnung des im nächsten Abschnitt definierten Kreuzabstands sinnvoll, neben den hier beschriebenen Winkelaspekten (K1) bis (K4) den Winkelbegriff unter einem alternativen Konzept zu betrachten, welches ich hier das Konzept der *Winkelblicke* nennen möchte. Dabei betrachtet der *dynamische* Winkelblick die kinematische Auffassung der Kongruenzabbildung Drehung (vgl. Bender 1982), welche durch einen Winkel beschrieben wird. Hierzu passen die Winkelaspekte (K3) und (K4), da diese mit einer Drehung in Beziehung gebracht werden können. In Analogie zu den Winkelaspekten (K1) bis (K4) nenne ich diesen Winkelblick „Winkel als Bewegung“. Der *statische* Winkelblick betrachtet hingegen das Abbild eines Winkels. Hierzu passt der Winkelaspekt Winkel als Knick (K1) bzw. Winkel als Ebenenteil (K2). Aber auch die Richtungsänderung (K3) kann diesem Winkelblick zugeordnet werden, wenn das Resultat, d. h. das orientierte Winkelfeld, betrachtet wird. Beim statischen Winkelblick stehen die Bestandteile des Winkels in Beziehung, welche durch das Winkelmaß beschrieben werden. Etzold verweist in diesem Zusammenhang auf einen Artikel von Mitchelmore und White, in welchem die Autoren den Winkelbegriff als „*two lines meeting at a point with an angular relation between them*“ (Mitchelmore und White 1998, zitiert in Etzold 2017, S. 39) definieren. Auch Krainer sieht im Winkelbegriff eine Verallgemeinerung zu den Relationsbegriffen „gerade“ (bzw. parallel) und „orthogonal“ (vgl. Krainer 1989, S. 313) und hebt damit die Wichtigkeit dieses Winkelblicks hervor. In Analogie zu den Winkelaspekten (K1) bis (K4) nenne ich diesen Winkelblick „Winkel als Relation“.

Mit dem informativsten Winkelbegriff will Etzold beiden Winkelblicken, „Winkel als Bewegung“ und „Winkel als Relation“, genügen, was sich jedoch als schwierig erweist. Etzold definiert den Winkel als ein Tupel aus

Strahl und Winkelmaß (vgl. Etzold 2017, S. 40). Dabei können beide Objekte (Strahl und Winkelmaß) weiterführend genutzt werden, um die verschiedenen Winkelaspekte darzustellen. Wird etwa der Winkel als Strahlenpaar mit gemeinsamem Startpunkt (K1) betrachtet, dann entspricht der Strahl des Tupels dem Erstschenkel. Das Winkelmaß wird nun genutzt, um den Zweitschenkel zu konstruieren. Die Angabe des Winkelmaßes ist aus Sicht Etzolds notwendig, da ohne diese *Information* eine Unterscheidung zwischen Winkeln der Maße 30° und 390° nicht möglich ist (Etzold 2017, S. 42). Hierbei hebt er den Winkelblick „Winkel als Bewegung“ hervor.

Etzolds Sicht auf den Winkel betont insbesondere die „Möglichkeit der Implementierung in digitale Umgebungen“ (Etzold 2017, Fußnote 8, Seite 43). Er verweist hierbei insbesondere auf dynamische Geometriesysteme. Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass Geometriesysteme auf eine (i. d. R. euklidische) Koordinatisierung der Ebene zurückgreifen, um geometrische Objekte eindeutig zu beschreiben. Sobald jedoch ein Bezugssystem (im Sinne eines Koordinatensystems) vorliegt, kann ein Strahl selbst als Winkel angesehen werden und zwar interpretiert als Änderung der Richtung gegenüber der x -Achse des Koordinatensystems. Die lineare Algebra liefert nun mit Hilfe des Skalarprodukts und entsprechender trigonometrischer Funktionen das Winkelmaß zumindest im Intervall $[0, 2\pi]$ (vgl. Freudenthal 1973, S. 404ff). Wird also der Winkel als Richtung (bzw. Richtungsänderung gegenüber dem Bezugssystem) aufgefasst, dann wird das Winkelmaß nicht mehr zur Beschreibung des Winkels benötigt. Der informatorische Winkelbegriff käme in diesem Sinne auch mit alleiniger Angabe des Strahls aus.

Durch Etzolds informatorischen Winkelbegriff werden Winkel als Objekte definiert, die sich sowohl im Winkelmaß als auch im geometrischen Objekt Strahl unterscheiden lassen. In diesem Sinne sind also zwei Winkel genau dann gleich, wenn sie denselben Strahl und das gleiche Winkelmaß besitzen. Damit wird der Winkel insbesondere von der Lage abhängig. Die Abhängigkeit der Lage führt insbesondere beim Winkelblick „Winkel als Bewegung“ zu Problemen. So dreht sich der Minutenzeiger einer Uhr binnen einer Stunde um 360° . Er führt also eine vollständige Umdrehung durch, und zwar unabhängig davon, ob er zu Beginn auf dem Skalenwert 1 oder 3 stand. Obwohl der Drehwinkel gleich ist, sind die Winkel im Sinne des informatorischen Winkelbegriff verschieden.

Insofern umfasst der informatorische Winkelbegriff nicht die „mathematische“ Schnittmenge aller Winkelkontexte und stellt damit für sich wieder nur einen Aspekt des Winkelbegriffs dar. Setzt man den Gedankengang der Schnittmengenfindung fort, dann müsste der Strahl aus der Definition entfernt werden. In der Tat lässt sich mit einem Winkelmaß jeder Winkelaspekt beschreiben, wenn entsprechend beim jeweiligen Aspekt weitere Informationen hinzugefügt werden. Ist also der analytische Winkelbegriff im Sinne Freudenthals (vgl. Freudenthal 1973, S. 442), d. h. die Definition des Winkels lediglich durch ein Größenmaß, die von Etzold gesuchte Schnittmenge aller Winkelaspekte? Mit Blick auf die Genese des Winkelbegriffs ist es zumindest sein Ursprung, siehe *Historische und entwicklungspsychologische Genese* im nächsten Abschnitt.

Der Kreuzabstand – ein alternatives Winkelmaß

Motivation

Vektor- und Winkelbegriff haben vergleichbare Anwendungsgebiete. Analog zum Winkelblick „Winkel als Relation“ wird der Vektorbegriff genutzt, um Beziehungen zwischen Objekten zu beschreiben. So kann mit Hilfe des Vektors der Abstand zwischen zwei Punkten bestimmt werden, indem die Länge des beide Punkte verbindenden Vektors gemessen wird. Weiterhin wird der Vektorbegriff analog zum Winkelblick „Winkel als Bewegung“ genutzt, um die Kongruenzabbildung Verschiebung zu beschreiben. Dabei wird ein Repräsentant des Vektors, ein Pfeil, an den zu verschiebenden Punkt gelegt. Der Bildpunkt ist dann derjenige Punkt, der durch die Spitze des Pfeils ausgezeichnet ist (vgl. Henn und Filler 2015, S. 91).

Werden diese beiden Anwendungsaspekte (Relation und Bewegung) hervorgehoben, dann unterscheiden sich Vektor- und Winkelbegriff in einem wesentlichen Punkt. Während die Abstandsbeziehung zweier Punkte durch den für sich stehenden Abstands begriff beschrieben werden kann und damit der Vektorbegriff hier nur einen Anwendungscharakter hat, muss die Beziehung zweier sich schneidender Geraden allein mit dem Winkelbegriff erklärt werden. Hier gibt es kein alternatives Abstandsmaß.

Der in diesem Bericht betrachtete Kreuzabstand übernimmt die Funktion des alternativen Abstandsmaßes und unterstützt damit den Winkelblick „Winkel als Relation“.

Historische und entwicklungspsychologische Genese

Ein Blick in die historische Entwicklung zeigt, dass die Suche eines den Abstand zweier sich schneidender Geraden beschreibenden Maßes am Anfang des Winkelbegriffs steht. „Die Ägypter und Babylonier gaben die Neigung von geraden Linien zur Horizontalen (...) mit jener Horizontallänge an, die genau der Erreichung einer fixen Höhe (1 Elle) entspricht.“ (Krainer 1989, S. 216). Dem hier betrachteten Winkel wird also ein Längenmaß (bzw. ein Verhältnis) zugeordnet. Dadurch wird insbesondere der Ähnlichkeitsaspekt des Winkels in den Vordergrund gerückt. Dies wird auch aus fachdidaktischen Gründen von Krainer ausdrücklich gewünscht: „Dementgegen böte sich z. B. bei der Betrachtung von Straßensteigungen(gefällen) eine gute Gelegenheit, zwei unterschiedliche Möglichkeiten der Angabe des ‚Auseinanderklaffens zweier Richtungen‘, also zwei unterschiedliche Methoden des Messens von Winkeln (Teilung des Kreises bzw. Betrachtung von Seitenverhältnissen) zu behandeln“ (Krainer 1989, S. 216).

Der Zugang zum Winkelbegriff über Seitenverhältnisse kann auch entwicklungspsychologisch begründet werden. So finden Piaget und seine Kollegen heraus, „daß diese [10jährige Kinder, Anm.] mit immer deutlich werdender Vorliebe nicht mehr beliebige Öffnungen AC und CB der Winkel ADC und CDB maßen, sondern die Senkrechte auf AB durch den Punkt C .“ (Krainer 1989, S. 209) Die Kinder nutzen damit das ihnen bekannte Längenmaß, um Winkel miteinander indirekt zu vergleichen.

Der in diesem Bericht betrachtete Kreuzabstand genügt Krainers fachdidaktischer Forderung nach einer alternativen Messmethode des Winkels. Er beschreibt die Relation zweier sich schneidender Geraden mit Hilfe von Seitenverhältnissen.

Gedanken zum Messvorgang

In der Fachdidaktik wird Messen als fundamentale Idee der Mathematik bezeichnet (vgl. z. B. Vohns 2005). Dabei steht das Bedürfnis im Raum, verschiedene Objekte miteinander zu vergleichen. Durch den Messvorgang des jeweils betrachteten Merkmals dieser Objekte wird ein *indirekter Vergleich* ermöglicht. Dem Merkmal wird dabei ein Größenmaß zugeordnet, welches im arithmetischen Sinne verglichen werden kann. Dies ist insbesondere dann von Nutzen, wenn ein *direkter Vergleich* nur schwer möglich ist. Wird z. B. das Merkmal Flächeninhalt ebener Figuren betrachtet, dann beschreibt

das Ineinanderlegen der zu vergleichenden Figuren einen direkten Vergleich des Merkmals. Ist dies nicht möglich, können die den Figuren zugeordneten Maße des Flächeninhalts miteinander verglichen werden. Hat die eine Figur etwa das Maß 2 cm^2 und die andere Figur das Maß 3 cm^2 , dann ist erstere die in diesem Sinne „kleinere“ Figur, da $2 < 3$ gilt.

Die Zuordnung eines Größenmaßes zu einem Merkmal eines realen Objekts kann als ein erster Schritt eines Modellierungsvorgangs gesehen werden, bei dem ein vereinfachtes Realmodell entsteht (vgl. Krüger, Sill und Sikora 2015, S. 12). Das durch das Größenmaß repräsentierte Realmodell umfasst nicht notwendigerweise alle Eigenschaften des Merkmals des realen Objekts. Wird z. B. das Merkmal Geschwindigkeit eines Objekts betrachtet, dann wird typischerweise das Realmodell so gestaltet, dass das Geschwindigkeitsmaß additiv ist. Mit Blick auf die spezielle Relativitätstheorie ist diese Eigenschaft jedoch ungültig, was besonders bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit zum Tragen kommt (vgl. Klotzek und Quaisser 1978, S. 209ff). Das Merkmal Geschwindigkeit eines Objekts wird also durch eine proportionale Messgröße repräsentiert, obwohl es selbst diese Eigenschaft nicht besitzt. Das Realmodell bildet die Realität in diesem Sinne nicht adäquat ab. Trotzdem wird das Modell (zumindest für kleine Geschwindigkeiten) benutzt, da wesentliche Vergleichseigenschaften erhalten sind:

- (M1) Unterschiedliche Geschwindigkeiten führen zu unterschiedlichen Geschwindigkeitsmaßen,
- (M2) Gleiche Geschwindigkeiten führen zu gleichen Geschwindigkeitsmaßen,
- (M3) Ist ein Objekt langsamer als ein anderes, dann ist das zugeordnete Geschwindigkeitsmaß auch kleiner als das andere.

Die Zuordnung eines Wahrscheinlichkeitsmaßes zu einer Merkmalsausprägung eines Merkmals eines stochastischen Vorgangs kann ebenfalls als ein „abstrakter“ Messvorgang gedeutet werden. Hierbei wird ein mathematisches Modell dem jeweiligen Realmodell zugeordnet. Neben dem axiomatisch formulierten Wahrscheinlichkeitsmaß kann bei ausgewählten stochastischen Vorgängen auch die Chance als Maß zur Beschreibung der Wahrscheinlichkeit genutzt werden (vgl. Krüger, Sill und Sikora 2015, S. 96). Insbesondere sind beide zum Vergleich von Wahrscheinlichkeiten geeignet, da sie den Eigenschaften (M1) bis (M3) genügen. Ist bei einem stochasti-

schen Vorgang eine Beschreibung der Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Chance möglich, dann gilt:

- (M1) Unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten führen zu unterschiedlichen Chancen,
- (M2) Gleiche Wahrscheinlichkeiten führen zu gleichen Chancen,
- (M3) Tritt ein Ereignis mit einer kleineren Wahrscheinlichkeit auf als ein anderes Ereignis ein, dann ist auch die Chance dieses Ereignisses kleiner als das andere.

Beide Maße unterscheiden sich jedoch in einem wesentlichen Punkt. Chancen sind nicht proportional. Eine Verdopplung des axiomatisch formulierten Wahrscheinlichkeitsmaßes führt damit nicht zur Verdopplung der Chance. So ist die Chance, beim Wurf eines klassischen Spielwürfels die Augenzahl „6“ zu werfen 1: 5. Wird der Würfel nun so präpariert, dass sich das axiomatische formulierte Wahrscheinlichkeitsmaß die Augenzahl „6“ zu würfeln verdoppelt, etwa durch Ersetzung der Augenzahl „1“ durch die Augenzahl „6“, dann ist die Chance eine „6“ zu werfen bei diesem präparierten Spielwürfel 2: 4. Wird der Doppelpunkt als Divisionszeichen aufgefasst, wird deutlich, dass sich die Chance mehr als verdoppelt hat. In Konsequenz ist die Chance zur Beschreibung mehrstufiger stochastischer Vorgänge nicht geeignet, da insbesondere die Pfadregeln für Chancen nicht gelten.

Da Chancen jedoch bereits vor Einführung der Bruchrechnung zur quantitativen Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten genutzt werden können, eignen sie sich aus fachdidaktischer Sicht insbesondere auch für die Grundschule. (vgl. Kurtzmann und Sill 2013)

Zielt die Messgröße allein auf das Vergleichen ab, dann ist es ausreichend, dass sie die Eigenschaften (M1), (M2) und (M3) besitzt. Die angegebenen Beispiele (Geschwindigkeit, Chance) verdeutlichen, dass es legitim ist, Messgrößen zu verwenden, die weiterführende Eigenschaften (etwa die Proportionalität) nicht notwendiger Weise in das entsprechende Modell übertragen.

Der in diesem Bericht betrachtete Kreuzabstand genügt den Eigenschaften (M1), (M2) und (M3). Wie die hier erwähnten Beispiele auch, überträgt er jedoch nicht alle Eigenschaften auf die Ebene des Realmodells.

Definition des Kreuzabstands

Betrachtet wird ein Geradenpaar sich schneidender Geraden. Die Schnittpunkte einer Senkrechten einer Winkelhalbierenden des Schnittwinkels der Geraden mit den jeweiligen Geraden bilden zusammen mit dem Geraden-schnittpunkt ein gleichschenkliges Dreieck. Das Verhältnis der Länge der Basis zur Länge der Schenkel dieses Dreiecks bezeichne ich im Folgenden als *Kreuzabstand*, siehe auch Abb. 1 (b). Dabei ist zu beachten, dass durch das Paar sich schneidender Geraden stets zwei Winkelhalbierende und damit zwei im Allgemeinen verschiedene Kreuzabstände entstehen. Im Folgenden bezeichne ich den kleineren der beiden als Hauptkreuzabstand oder einfach nur als Kreuzabstand. Motiviert wird die Bezeichnung Kreuzabstand durch das im folgenden Abschnitt *Eine Lernumgebung zum Kreuzabstand* entwickelte Messgerät, welches die Form eines Kreuzes hat.

Abb. 1 (a) stellt das Winkelmaß dar, mit dem im alten Ägypten und Babylonien die Neigung einer Ebene gegenüber der Horizontalen gemessen wurde. Offensichtlich verschwindet das so definierte Winkelmaß, wenn der betrachtete Neigungswinkel ein rechter ist. Es wächst andersherum für kleiner werdenden Neigungswinkel über alle Schranken. Somit ist es nicht möglich, bezogen auf dieses Maß ein Messgerät zu konstruieren, welches mit Hilfe einer (endlich langen) Messskala sämtliche Winkel zwischen Nullwinkel und rechten Winkel erfasst.

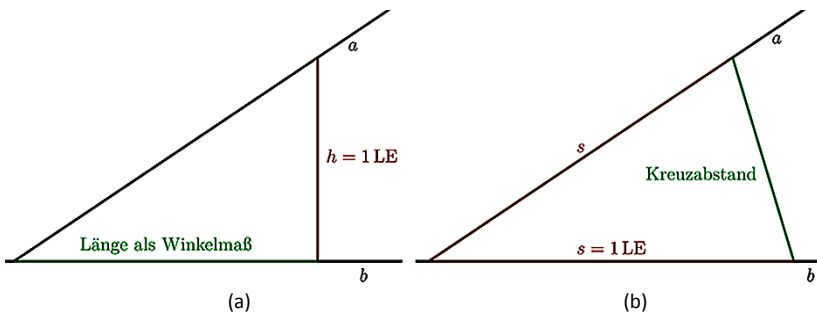


Abb. 1: Gegenüberstellung: Babylonisches Winkelmaß (a) und Kreuzabstand (b)

Dem gegenüber sind die Maße des Kreuzabstands für sämtliche Winkel zwischen dem Nullwinkel und dem rechten Winkel endlich, siehe auch Abb. 1 (b). Damit ist insbesondere die Konstruktion eines Messgerätes (mit endlicher Skala) möglich. Den Bezeichnungen aus Abb. 1(b) folgend ist es in Analogie zum babylonischen Winkelmaß auch möglich, die Länge s fest

zu wählen (etwa $s = 10$ cm). Dadurch kann der Kreuzabstand auch alternativ als Länge angegeben werden.

Eigenschaften des Kreuzabstands

Der Kreuzabstand ordnet Winkeln zwischen dem Nullwinkel und dem rechten Winkel Zahlenwerte des Intervalls $[0, \sqrt{2}]$ zu, wovon man sich leicht überzeugen kann. Er erfüllt wesentliche Vergleichseigenschaften einer Messgröße:

- (M1) Geradenpaare unterschiedlicher Schnittwinkel werden unterschiedliche Kreuzabstände zugeordnet,
- (M2) Geradenpaare mit gleichem Schnittwinkel werden gleiche Kreuzabstände zugeordnet,
- (M3) Ist der Schnittwinkel eines Geradenpaares kleiner als der eines anderen Geradenpaares, dann ist auch der zugeordnete Kreuzabstand kleiner.

Die Messgröße Kreuzabstand erfüllt nicht die Eigenschaft der Proportionalität des Schnittwinkels. Eine Verdopplung des Schnittwinkels führt damit nicht zur Verdopplung des Kreuzabstands des betrachteten Geradenpaares.

Fachdidaktische Überlegungen zum Kreuzabstand

(FÜ1) Die fehlende Proportionalität beim Kreuzabstand ist kein Argument gegen die Verwendung dieses Maßes. Mit Blick auf den Abschnitt *Gedanken zum Messvorgang* gibt es auch andere Messgrößen, die nicht alle Eigenschaften in das entsprechende Modell übertragen. Viel eher kann die fehlende Proportionalität als Möglichkeit gesehen werden, sich vertiefend mit dem Winkelblick „Winkel als Relation“ auseinander zu setzen. So kann im Sinne der Genese zunächst das Problem der fehlenden Proportionalität beschrieben werden, etwa wenn es um den Innenwinkelsummensatz beim Dreieck geht. Es wird deutlich, dass die Konstanz der Innenwinkelsumme nicht mit Hilfe des Kreuzabstands beschrieben werden kann. Es muss also ein alternatives Maß gesucht werden, das neben den Bedingungen (M1), (M2) und (M3) auch den Innenwinkelsummensatz adäquat beschreibt. Dies führt zum Bogenmaß als alternativer Beschreibung der Relation.

(FÜ2) Mit Hilfe eines Messgeräts zur Bestimmung des Kreuzabstands ist eine Begriffsvertiefung im Sinne der Grundhandlungen Identifizieren und Realisieren möglich, insbesondere:

- Messen von Kreuzabständen,
- Konstruktion sich schneidender Geraden bei vorgegebenen Kreuzabstand mit Hilfe des Messgeräts,
- Dreieckskonstruktion nach Kongruenzsätzen, wobei das betrachtete kanonische Winkelmaß durch den entsprechenden Kreuzabstand ersetzt wird,
- Konstruktion sich schneidender Geraden bei vorgegebenem Kreuzabstand ohne Hilfe des Messgeräts.

Insbesondere der letzte Punkt beschreibt eine Stärke des Kreuzabstands gegenüber dem Schnittwinkel zur Beschreibung der Lagebeziehung zweier sich schneidender Geraden. Während eine Konstruktion des Schnittwinkels ohne kanonischen Winkelmesser nur zu ausgewählten Winkeln möglich ist (z. B. rechter Winkel, halber rechter Winkel u. 30° -Winkel), ist die Konstruktion sich schneidender Geraden mit vorgegebenen Kreuzabstand für jeden zugelassenen Kreuzabstand möglich.

(FÜ3) Die Arbeit mit dem Kreuzabstand lädt dazu ein, innermathematische Untersuchungen durchzuführen. Hierbei wird insbesondere der Ähnlichkeitsaspekt des Winkelbegriffs betont. So kann untersucht werden, warum der Kreuzabstand invariant gegenüber der Länge s der dieses Maß definierenden Schenkel ist, siehe auch Abb. 1 (b). Die Untersuchung vertieft Aussagen zur Ähnlichkeit von Dreiecken. Insbesondere finden hier auch die Strahlensätze Anwendung.

(FÜ4) Auch ohne Wissen über den Ähnlichkeitsbegriff laden empirische Untersuchungen dazu ein, die Wohldefiniertheit des Kreuzabstands zu untersuchen, d. h. insbesondere die in (FÜ3) beschriebene Unabhängigkeit dieses Abstands von der Länge s .

(FÜ5) Die eigene Herstellung eines Kreuzabstandsmessers bereitet innermathematische Überlegungen geeignet vor.

Der im nächsten Abschnitt vorgestellte Prototyp eines Messgeräts zur Bestimmung des Kreuzabstands kommt analog wie der Goniometer (vgl. Dohrmann 2018) gegenüber dem Geodreieck mit nur einer Skala aus. Die oft bei der Arbeit mit dem Geodreieck beobachtete Problematik der Skalenerwechslung tritt damit auch bei diesem Messgerät nicht auf. Somit liegt

die Schwelle der technischen Anwendung bei diesem Messgerät niedriger als bei der Verwendung des Geodreiecks.

Eine Lernumgebung zum Kreuzabstand

Der Kreuzabstand lädt zu abwechslungsreichen und substantiellen Übungsformaten ein. In der folgenden Lernumgebung werden diese exemplarisch betrachtet. Ziel ist dabei, dass Schülerinnen und Schüler den Kreuzabstand als (weitere) Methode zum Messen von Winkeln kennen lernen. Sie untersuchen Eigenschaften des Kreuzabstands und setzen sich mit den Grenzen dieses Maßes in Bezug auf das kanonische Winkelmaß auseinander.

Mit den Aufgaben der Lernumgebung werden insbesondere allgemeine mathematische Kompetenzen angesprochen, welche bei den einzelnen Aufgaben konkret angegeben werden, siehe Tab. 1, 2 und 3 im Abschnitt *Tabellarischer Überblick der Aufgaben der Lernumgebung*. Zu jeder Aufgabe werden weiterhin Vorkenntnisse vor dem Hintergrund angegeben, die jeweilige Teilaufgabe der Lernumgebung (bei entsprechender Vorbereitung) aus dieser zu entnehmen und als eigenständige Aufgabe zu nutzen. Vorstellbar ist hier, dem spiralig aufgebauten Curriculum folgend in den Klassenstufen 5/6 den betrachteten Abstand einzuführen und Eigenschaften und Grenzen in den höheren Klassenstufen 7/8 bzw. 9/10 zu vertiefen. In diesem Sinne kann auch von einer „vernetzten Lernumgebung“ nach Roth (vgl. Roth 2013) gesprochen werden, da zumindest dem Aspekt der horizontalen und vertikalen Vernetzung von Lehrplaninhalten entsprochen wird. So werden verschiedene Anwendungsbereiche innerhalb und außerhalb der Geometrie miteinander verbunden, konkret u. a.: Standardkonstruktionen, Dreiecks-konstruktionen, Dreieckseigenschaften, Ähnlichkeit und funktionaler Zusammenhang.

Als Material wird in der Lernumgebung ein Bastelset zum Bau eines „Kreuzabstandsmessers“ zur Verfügung gestellt. Der in Abb. 2(a) zu sehende Prototyp des Bastelsets wurde mit Hilfe einer Druckvorlage auf eine Folie gedruckt und entsprechend zugeschnitten. Zur Verfügung stehen drei Skalen. Weiterhin werden Musterbeutelklammern genutzt, um die Skalen geeignet miteinander zu verbinden. Abb. 2(b) zeigt den resultierenden Kreuzabstandsmesser in Aktion, hier beim Zeichnen zweier sich schneidender Geraden zu einem vorgegebenen Kreuzabstand.

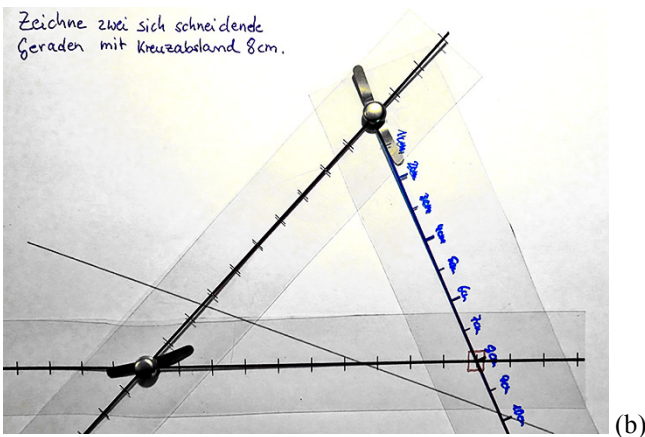
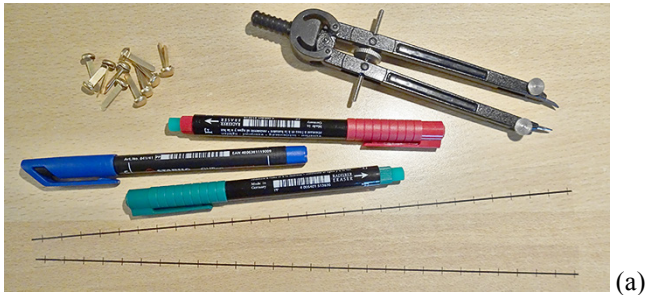


Abb. 2: Bastelset (a) und Kreuzabstandsmesser in Aktion (b)

Aufgabenkanon 1 - Entwicklung des Kreuzabstands (FÜ4)

In Aufgabe 1 des Aufgabenkanons 1 (siehe Tab. 1) wird der erste Schritt zum Bau des Kreuzabstandsmessers durchgeführt. Dafür werden zwei Skalen des Bastelsets und eine Musterbeutelklammer benutzt, siehe Abb. 3 (a). Da im Vordergrund der Aufgabe die Vorbereitung des Aufbaus eines inhaltlichen Verständnisses für den Kreuzabstand liegt, können auch Alternativen überlegt werden. So bietet sich für die weiteren Aufgaben dieses Kanons auch an, mit dem „Heidelberger Winkelkreuz“ (vgl. Gieding 2015) zu arbeiten. Eine weitere Alternative ist die Nutzung einer Faltfigur, die insbesondere das mathematische Argumentieren in den späteren Aufgabenkanons vorbereitet. Ludwig und Weigand schlagen vor, die Winkelhalbierende zweier sich schneidender Geraden unter Verwendung von Transparentpapier durch Faltung herzustellen (vgl. Weigand u. a. 2014, S. 58). Wird nun eine weitere

Faltung durchgeführt, indem der zunächst entstandene Falz auf sich selbst gefaltet wird, dann entsteht eine Faltlinie, welche je einen Punkt auf den betrachteten Geraden markiert, die den markierten Skalenpunkten in Aufgabe 1(b) entsprechen, wobei der Abstand zum Schnittpunkt hier nicht mehr durch vorgegebene Skalenwerte festgelegt ist.

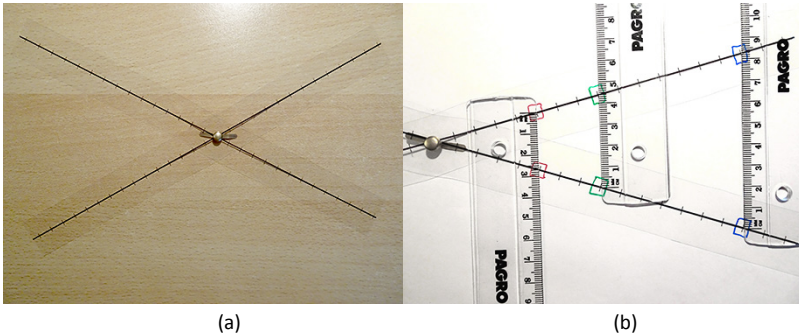


Abb. 3: Linienkreuz (a) und Messungen an den Markierungen des Linienkreuzes (b)

Im Rahmen von Aufgabe 2 wird festgestellt, dass je nach Markierung unterschiedliche Zahlenwerte entstehen, siehe Abb. 3 (b). Je näher die Markierungen am Schnittpunkt liegen, desto kleiner ist der gemessene Abstand. Da unklar ist, welcher der betrachteten Abstände der richtige ist, erscheint dieser Abstand als zu erarbeitender Kreuzabstand ungeeignet.

Im Rahmen von Aufgabe 3 wird erkannt, dass der Quotient aus Basislänge und Schenkellänge der betrachteten gleichschenkligen Dreiecke ungefähr gleich ist, siehe Abb. 4. Dies bildet die Grundlage für eine *Definition* des Kreuzabstands. Im Rahmen dieser Aufgabe kann auch die entsprechende Bezeichnung eingeführt werden.

Länge Stellungsnr.	5cm	8cm	15cm	Quotient		
	rot	blau	grün	rot	blau	grün
1	1,1cm	1,8cm	3,4cm	0,22	0,23	0,23
2	2,6cm	4,1cm	7,8cm	0,52	0,51	0,52
3	3,8cm	6,1cm	11,5cm	0,76	0,76	0,77
4	4,5cm	7,2cm	13,6cm	0,90	0,90	0,90
5	5,0cm	8,0cm	15,0cm	1,00	1,00	1,00

Abb. 4: Tabelle zu verschiedenen Stellungen des Linienkreuzes

Die Bearbeitung von Aufgabe 3 setzt Kenntnisse der Bruchrechnung voraus, insbesondere werden Quotienten aus Dezimalbruchzahlen gebildet. Auch vor der Arbeit mit Bruchzahlen kann hier ganzheitlich gearbeitet werden, wenn z. B. ein Taschenrechner zur Bestimmung des Quotienten verwendet wird. Alternativ können die Aufgaben 2 und 3 übersprungen werden, wenn die Lehrkraft angibt, dass jeder Schüler an der Stelle „10 cm“ die Markierung färben soll, in Analogie zur Winkelbestimmung der Babylonier, die ebenfalls eine der beiden Längen festgehalten haben, vgl. *Historische und entwicklungspsychologische Genese* im vorigen Abschnitt. Der resultierende Kreuzabstand wird dann nicht als Quotient betrachtet, sondern als der Abstand beider Markierungen (also als Länge). Auch mit dieser Vorbereitung können die Schüler ausgewählte Teilaufgaben der weiteren Aufgabenkanons bearbeiten, siehe auch Abb. 2(b), in welcher eine an Aufgabe 2(b) des Aufgabenkanons 2 angelehnte Aufgabe bearbeitet wird.

Aufgabenkanon 2 - Untersuchung des Kreuzabstands (FÜ2, FÜ3, FÜ5)

Im Rahmen von Aufgabe 1 des Aufgabenkanons 2 (siehe Tab. 2) erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass der Kreuzabstand maximal wird, wenn die Linien des Linienkreuzes senkrecht aufeinander stehen. Dies kann weiterführend als Grenze erkannt werden und motivieren, einen *orientierten Kreuzabstand* zu betrachten, bei dem zwischen den Linien des Linienkreuzes unterschieden werden muss. Entsprechend würde dann der Kreuzabstand alle Winkel abdecken, die zur Beschreibung von Dreiecken benötigt werden.

Im Rahmen von Aufgabe 2 wird im Aufgabenteil (a) ein Messgerät zum Bestimmen des Kreuzabstands gebaut, siehe Abb. 5 (a). Im Aufgabenteil (b) wird das Messgerät zur Konstruktion zweier sich schneidender Geraden zu einem vorgegebenen Kreuzabstand genutzt. Weiterführend kann man in dieser Aufgabe fragen, welchem Schnittwinkel der betrachtete Abstand entspricht. In Abb. 5 (b) wird ein möglicher Messvorgang des Winkels mit Hilfe des Geodreiecks betrachtet. Die Aufgabenteile (c) und (d) sind problembehaftet und vertiefen insbesondere das Darstellen, wenn es darum geht, verschiedene Möglichkeiten zu finden, den Kreuzabstand zu bestimmen (Ablezen aus einer Konstruktion mit Hilfe des erzeugten Messgeräts, Ablezen aus einer Konstruktionsbeschreibung). Mit Aufgabenteil (c) wird weiterhin eine Möglichkeit aufgezeigt, wie man zwei sich schneidende Geraden zu einem vorgegebenen Kreuzabstand konstruiert, ohne das in (a) herge-

stelle Messgerät zu benutzen. Weiterführend kann auch hier der orientierte Kreuzabstand mit Blick auf die entsprechende Konstruktionsmethode eingeführt werden.

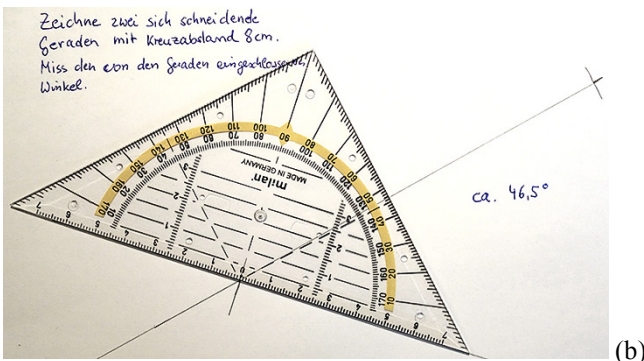
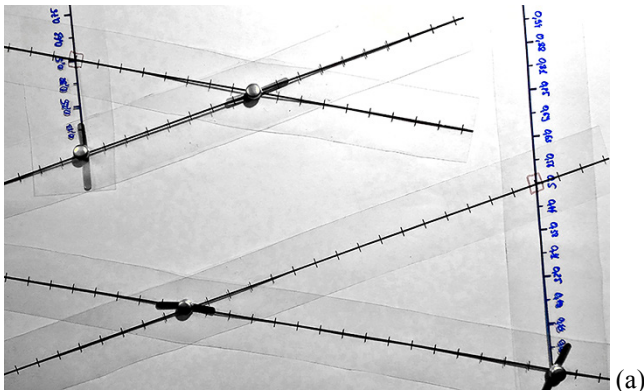


Abb. 5: Kreuzabstandsmesser unterschiedlicher Skalenposition (a) und Ergebnisüberprüfung bei Konstruktion mit einem Kreuzabstandsmesser (b)

Bei der Bearbeitung der Aufgabe 3 reflektieren die Schülerinnen und Schüler die gewonnenen Erkenntnisse aus den Aufgaben 1 und 2. Insbesondere wird deutlich, dass die Messskala umso feiner wird, je weiter sie vom Geradenschnittpunkt entfernt ist, siehe Abb. 5 (a).

Im Rahmen von Aufgabe 4 werden mathematische Zusammenhänge vertieft. Typischerweise wird hier das Argumentieren angesprochen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten für die Argumentation (z. B. Ähnlichkeit im Sinne maßstäblicher Veränderung oder Bezug zu den Strahlensätzen), so-

dass diese Aufgabe Ausgangspunkt für eine mathematische Diskussion im Rahmen eines Plenumgesprächs sein kann. In diesem Sinne werden weitere allgemeine mathematische Kompetenzen gefördert.

Aufgabenkanon 3 - Grenzen des Kreuzabstands (FÜ1)

Gegenstand der Aufgabe 1 des Aufgabenkanons 3 (siehe Tab. 3) ist der Zusammenhang zwischen Kreuzabstand und kanonischem Winkelmaß. Die Untersuchung der Tabellenwerte zeigt, dass keine proportionale Zuordnung vorliegt.

In der Aufgabe 2 wird der Bedeutung der fehlenden Proportionalität nachgegangen. Exemplarisch wird hier in Abb. 6 (a) konstruktiv vorgegangen, wobei die Konstruktionsmethode aus Aufgabe 2 des Aufgabenkanons 2 genutzt wird. Die schattierte Fläche entspricht der Differenz. In Abb. 6 (b) wird der „Fehler“ mit Hilfe des Kreuzabstandsmessers noch einmal überprüft. Die Konsequenz aus der fehlenden Proportionalität spielt in Teilaufgabe (c) eine Rolle. Der Innenwinkelsummensatz ist nicht mit Hilfe des Kreuzabstands beschreibbar.

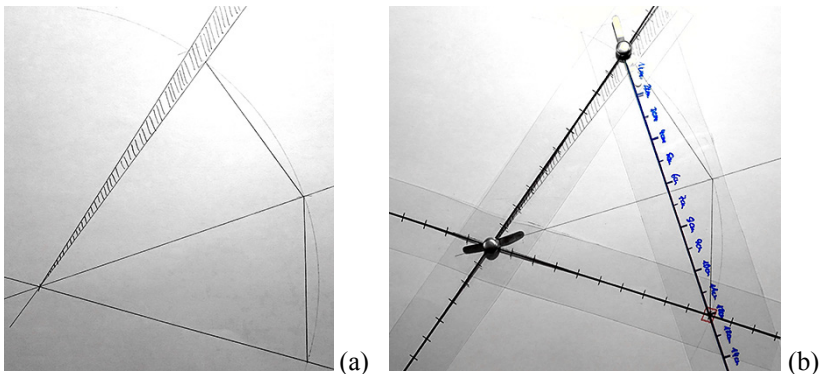


Abb. 6: Konstruktion zur Addition von Kreuzabständen (a) sowie Überprüfung (b)

Im Rahmen von Aufgabe 3 wird schließlich ein heuristischer Übergang vom Kreuzabstand zum Winkelmaß in Form des Bogenmaßes aufgezeigt. Ein mögliches Vorgehen zur Herleitung des Bogenmaßes ist die Verwendung der Winkelhalbierenden zur sukzessiven Halbierung entstehender Teilwinkel bei fest vorgegebenen Ausgangswinkel. Zu jedem dieser Teilwinkel werden die entsprechenden Markierungen im Sinne des Kreuzabstands verbunden. Es entsteht ein Polygonzug, dessen Länge sich sukzessive der Län-

ge desjenigen Kreisbogens nähert, der durch die beiden entsprechenden Markierungen auf den Ausgangsgeraden und den Schnittpunkt dieser Geraden gegeben ist. Dieses Vorgehen findet man auch in einem anderen Kontext wieder. So kann der Flächeninhalt des Kreises mit Hilfe der Flächeninhalte der aus den Kreuzabständen entstehenden regelmäßigen Polygone genähert werden (vgl. Weigand u. a. 2014, S. 180).

Tabellarischer Überblick der Aufgaben der Lernumgebung

Aufgabe 1	
<p>a) Stelle aus dem gegebenen Material (Bastelset) ein <i>Linienkreuz</i> her. Nutze für den möglichen Schnittpunkt die vorgegebenen Skalenpunkte.</p> <p>b) Markiere weitere Skalenpunkte im Linienkreuz mit unterschiedlichen Farben – und zwar so, dass gleiche Farbe gleicher Abstand vom Schnittpunkt des Linienkreuzes bedeutet.</p>	<p>Allg. math. Komp. (K5)</p> <p>Vorkenntnisse Abstand</p>
Aufgabe 2	
<p>a) Halte zu verschiedenen Stellungen des <i>Linienkreuzes</i> den Abstand zwischen je zwei Markierungen gleicher Farbe in einer Tabelle fest. Aus der Tabelle sollten sich die Farbe der Markierung und der entsprechende Abstand zu einer festen <i>Linienkreuzstellung</i> ablesen lassen.</p> <p>b) Betrachte die Werte in der Tabelle, was fällt dir auf? Ist der betrachtete Abstand zwischen zwei farblich gleichen Markierungen ein gutes Maß für den Abstand zweier sich schneidender Geraden? Begründe.</p>	<p>Allg. math. Komp. (K1), (K5)</p> <p>Vorkenntnisse Tabelle, Zuordnung, Abstand</p>
Aufgabe 3	
<p>a) Füge deiner Tabelle weitere Spalten hinzu. Aus der Tabelle soll der Quotient aus Abstandslänge und Abstand zum Linienschnittpunkt für die jeweiligen Farbmarkierungen ersichtlich werden. Ergänze die fehlenden Werte. Was fällt dir auf?</p> <p>b) Formuliere einen Abstandsbegriff für sich schneidende Geraden.</p>	<p>Allg. math. Komp. (K1), (K5), (K6)</p> <p>Vorkenntnisse Tabelle, Zuordnung, Bruchrechnung, Runden</p>

Tab. 1: Aufgabenkanon 1

Aufgabe 1	
<p>a) Wie groß ist der Kreuzabstand minimal? Wann ist dies der Fall? Wie groß ist der Kreuzabstand maximal? Wann ist dies der Fall? Verwende für deine Untersuchung das <i>Linienkreuz</i>.</p> <p>b) Kannst du auch den exakten Wert für den maximalen Kreuzabstand angeben? Mache dir dazu eine Skizze.</p>	<p>Allg. math. Komp. (K2), (K5)</p> <p>Vorkenntnisse Längenmaß, Pythagoras, Kreuzabstand</p>
Aufgabe 2	
<p>a) Baue mit Hilfe des Bastelsets einen <i>Kreuzabstandsmesser</i> mit entsprechender Skala.</p> <p>b) Zeichne zwei sich schneidende Geraden auf ein Blatt Papier, die einen Kreuzabstand von 0,9 haben. Beschreibe, wie du vorgehst.</p> <p>c) Befolge die Anweisungen folgender Konstruktionsbeschreibung.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>(1) Zeichne eine Halbgerade g mit Startpunkt A.</p> <p>(2) Zeichne einen Kreis K_1 um A mit Radius $r = 5$ cm. Der Schnittpunkt von Kreis K_1 und Halbgerade g sei B.</p> <p>(3) Zeichne einen Kreis K_2 um B mit Radius $r = 3$ cm. Einer der beiden Schnittpunkte von K_1 und K_2 sei C.</p> <p>(4) Zeichne eine Halbgerade h mit Startpunkt A, welche durch Punkt C geht.</p> </div> <p>Miss den Kreuzabstand zwischen g und h. Kannst du den Kreuzabstand auch ohne Messen aus der Konstruktionsbeschreibung ablesen?</p> <p>d) Gegeben seien die Dreieckstücke $b = 9$ cm, $c = 14$ cm und der Kreuzabstand 0,6 zwischen a und b. Konstruiere das zugehörige Dreieck. Wie gehst du vor?</p>	<p>Allg. math. Komp. (K1), (K2), (K4), (K5), (K6)</p> <p>Vorkenntnisse Kreuzabstand, Längenmaß, Standardkonstruktion</p>
Aufgabe 3	
<p>Entscheide, ob die Aussage richtig oder falsch ist.</p> <p>a) Je weiter die Messskala von der Mitte (Schnittpunkt) des Kreuzabstandsmessers entfernt ist, desto weiter sind die Skalenelemente 0,5 und 0,6 voneinander entfernt.</p> <p>b) Der Winkel 60° hat den Kreuzabstand 1.</p> <p>c) Zwei Winkel sind gleich groß, wenn die zugehörigen Kreuzabstände gleich groß sind.</p> <p>d) Ist der Kreuzabstand des Winkels α kleiner als der Kreuzabstand des Winkels β, dann gilt $\alpha > \beta$.</p> <p>e) Wird bei der Dreiecksconstruction nach WSW mit Kreuzabständen statt mit Winkeln konstruiert, dann ist die Konstruktion nicht mehr eindeutig.</p>	<p>Allg. math. Komp. (K6)</p> <p>Vorkenntnisse Winkelbegriff, Kreuzabstand, Dreiecksconstruction</p>
Aufgabe 4	
<p>Das Experiment hat gezeigt, dass der Quotient aus Abstandslänge und Abstand zum Linienschnittpunkt des <i>Linienkreuzes</i> bei fester Einstellung ungefähr gleich ist. Kannst du dies auch mathematisch begründen?</p>	<p>Allg. math. Komp. (K1)</p> <p>Vorkenntnisse Dreieckseigenschaften, Ähnlichkeit, Strahlensatz</p>

Tab. 2: Aufgabenkanon 2

Aufgabe 1	
<p>a) Erstelle eine Tabelle mit Kreuzabstandswerten und Winkelmaßen. Die Kreuzabstandswerte sind vorgegeben: 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2.</p> <p>b) Erstelle eine Tabelle mit Winkelmaßen und Kreuzabstandswerten. Die Winkelmaße sind vorgegeben: 10°, 20°, 30°, 40°, 60°, 80°.</p> <p>c) Untersuche die Tabellen bzgl. funktionaler Eigenschaften (z. B. Proportionalität).</p>	<p>Allg. math. Komp. (K1), (K4)</p> <p>Vorkenntnisse Tabelle, Funktionsbegriff, Längenmaß, Kreuzabstand, Winkelmaß</p>
Aufgabe 2	
<p>Entscheide, ob die Aussage richtig oder falsch ist.</p> <p>a) Das <i>Linienkreuz</i> mit eingeschlossenem Winkel 40° lässt sich mit zwei <i>Linienkreuzen</i> mit jeweils eingeschlossenem Winkel 20° vollständig auslegen.</p> <p>b) Das <i>Linienkreuz</i> mit Abstand 1,2 lässt sich mit zwei <i>Linienkreuzen</i> mit Abstand 0,6 vollständig auslegen.</p> <p>c) Die Kreuzabstandssumme der Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks ist 3. Dies gilt auch für alle anderen spitzwinkligen Dreiecke.</p>	<p>Allg. math. Komp. (K6)</p> <p>Vorkenntnisse Winkelmaß, Kreuzabstand</p>
Aufgabe 3	
<p>Untersuche, ob sich die Markierungen auf dem <i>Linienkreuz</i> so verbinden lassen, dass eine Halbierung des Winkels zur Halbierung der Länge der Verbindung führt.</p>	<p>Allg. math. Komp. (K2)</p> <p>Vorkenntnisse Winkelmaß, Kreisbegriff, Kreuzabstand</p>

Tab. 3: Aufgabenkanon 3

Fazit

Der Kreuzabstand lädt zu umfänglichen mathematischen Überlegungen und Übungen ein. Er vertieft das inhaltliche Verständnis zum Winkelbegriff insbesondere bzgl. des Winkelblicks „Winkel als Relation“. Aufgrund seiner Stärken ist das Größenmaß Kreuzabstand eine sinnstiftende Alternative bei der Erarbeitung des Winkelbegriffs. So können zunächst die Winkelblicke „Winkel als Bewegung“ und „Winkel als Relation“ getrennt betrachtet werden. Ersterer wird mit Hilfe des kanonischen Winkelmaßes erarbeitet, letzterer mit Hilfe des Kreuzabstands. Nach einer Vertiefung beider Größenmaße können diese schließlich zum Winkelbegriff zusammengefügt werden, wobei der Kreuzabstand durch das Bogenmaß ersetzt wird.

Literatur

- Bender, P. (1982). Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 82.1, S. 9-24.
- Dohrmann, Chr. (2018). Herausforderungen bei der Winkelmessung. In: Mathematik lehren 210, Seelze: Friedrich-Verlag, S. 20-22.
- Etzold, H. (2015). Winkel App.
url: <https://itunes.apple.com/de/app/winkel/id715739128?mt=8>
(besucht am 20.12.2018).
- Etzold, H. (2017). Winkel aus der Sicht von Informationen. In: Filler, A.; Lambert, A. (Hrsg.). Von Phänomenen zu Begriffen und Strukturen – Konkrete Lernsituationen für den Geometrieunterricht. Hildesheim: Verlag Franzbecker.
- Freudenthal, Hans (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd. 2. Klett Studienbücher.
- Gieding, M. (2015). Das Haus der Vierecke aus der Sicht des Heidelberger Winkelkreuzes. In: Filler, A.; Lambert, A.; Ludwig, M. (Hrsg.). Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Springer, S. 155–177.
doi: https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6_10.
- Henn, H.-W.; Filler, A. (2015). Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Springer Spektrum.
- Klotzek, B.; Quaisser (1978). Nichteuklidische Geometrie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- Krainer, K. (1989). Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs. Diss. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.
- Krüger, K.; Sill, H.-D.; Sikora, C. (2015). Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Kurtzmann, G.; Sill, H.-D. (2013). Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“, Druckerei der Universität Rostock, S. 52-54.
- Mitchelmore, M.; White, P. (1998). Development of angle concepts: A framework for research. In: Mathematics Education Research Journal 10.3, S. 4–27.
- Roth, J. (2013). Vernetzen als durchgängiges Prinzip–Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr?“. In: Mathematik vernetzt 3, S. 65–80.
- Vohns, A. (2005). Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. In: Journal für Mathematikdidaktik, 26(1), S. 52-79.
- Weigand, H.-G. u. a. (2014). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Umkehrung

Hans Walser

Zusammenfassung. Die Umkehrung der Sichtweise, ein Perspektivenwechsel also, führt zu neuen Einsichten. Exemplarisch wird dies an der Umkehrung einer klassischen Schulaufgabe der Sekundarstufe 2 gezeigt. Wir kommen zu einer Verallgemeinerung der Begriffe „Thaleskreis“ und „Ortsbogen“.

Die Schulaufgabe

Eine klassische Aufgabe im Abiturtraining geht so (vgl. etwa Weber & Zilmer 2002, S. 66, Aufg. DA 32): Gegeben sind ein Punkt durch seine Koordinaten und eine Parabel mit ihrer Parabelgleichung (Abb. 1a). Gesucht sind die Tangenten von diesem Punkt an die Parabel sowie der eingeschlossene Winkel (Abb. 1b).

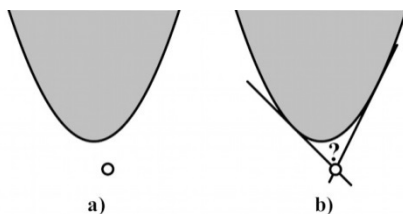


Abb. 1: Die klassische Aufgabe

Perspektivenwechsel: Normalen statt Tangenten

Ich dachte zunächst, es sei gehupft wie gesprungen, die Tangenten durch Normalen zu ersetzen (Abb. 2a).

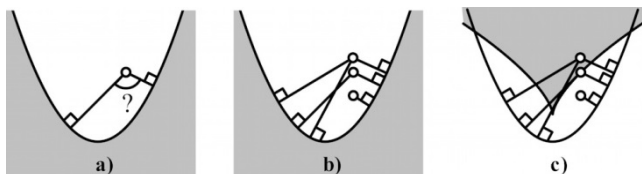


Abb. 2: Normalen

Nun ist es aber so, dass es Punkte mit drei Normalen auf die Parabel gibt, und andererseits solche mit nur einer Normalen (Abb. 2b). Die Bestimmung

der Normalen führt nämlich auf eine kubische Gleichung. In den Lösungsformeln für kubische Gleichungen erscheint eine Diskriminante. Bei positiver Diskriminante haben wir drei verschiedene reelle Lösungen und damit drei Normalen. Bei negativer Diskriminante gibt es eine reelle Lösung und zwei konjugiert komplexe Lösungen. Wir haben eine Normale. Ist die Diskriminante null, sind verschiedene Sonderfälle möglich. Zum Beispiel eine reelle Dreifachlösung oder eine reelle Doppellösung und eine Einfachlösung (Situation der Abb. 2a).

Wir können die Diskriminante null setzen und einen Implizitplot durchführen. Dies gibt die v -förmige Kurve der Abbildung 2c, die Evolute der Parabel. Für die Anzahl der Normalen ist nicht relevant, ob sich die Ausgangspunkte innerhalb oder außerhalb der Parabel befinden, sondern ob sie oberhalb oder unterhalb der Evolute liegen.

Verschiedene Lösungswege

Die Eingangsaufgabe mit den Tangenten kann auf zwei Arten angegangen werden. Wir können entweder mit dem Geradenbüschel durch den gegebenen Punkt beginnen (Abb. 3a) und dann diejenigen Geraden auswählen, die mit der Parabel genau einen Punkt gemeinsam haben. Für diesen Lösungsweg benötigen wir ausschließlich quadratische Gleichungen. Er ist also im zehnten Schuljahr machbar.

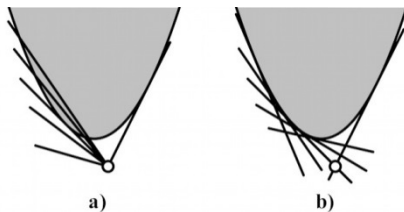


Abb. 3: Herangehensweisen

Oder wir können andererseits mit allen Tangenten an die Parabel beginnen (Abb. 3b) und dann diejenigen auswählen, welche durch den gegebenen Punkt verlaufen. Dieser Lösungsweg ist zwar auch mit quadratischen Gleichungen allein gangbar. Es wird da aber gerne die Differenzialrechnung eingesetzt, elftes Schuljahr also.

Beide Lösungswege sind „rechnerisch“.

Exkurs: Geometrischer Lösungsweg?

In der Schule wird der Parabelbegriff oft auf die Gleichung $y = x^2$ reduziert. So dumm ist das gar nicht: da alle Parabeln zueinander ähnlich sind, kann man sich auf eine standardisierte Form beschränken.

Gelegentlich wird die Parabel mit dem Grafen der quadratischen Funktion identifiziert. Dabei wird übersehen, dass Funktionsgraf eine hervorragende Erfindung zur Visualisierung einer Funktion sind, aber keine geometrischen Objekte.

Für einen geometrischen Lösungsweg benötigen wir einen entsprechenden Parabelbegriff. Dazu bieten sich das Vorgehen mit Brennpunkt und Leitlinie an, oder, ganz edel und im Raum, ein spezieller Kegelschnitt. Ich habe mich für Brennpunkt und Leitlinie entschieden.

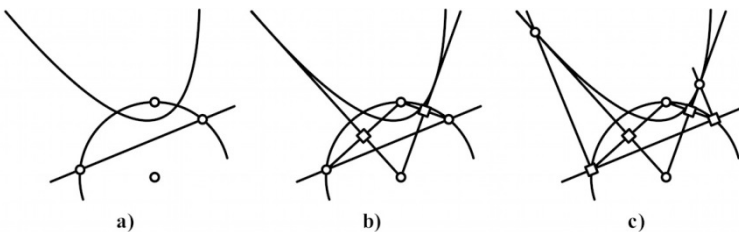


Abb. 4: Tangenten an die Parabel

Die Konstruktion geht dann sehr einfach. Wir zeichnen einen Kreis um den gegebenen Punkt durch den Brennpunkt und schneiden ihn mit der Leitlinie (Abb. 4a). Die Mittelsenkrechten zwischen diesen Schnittpunkten und dem Brennpunkt sind die Tangenten (Abb. 4b). Die Berührungspunkte finden wir mit den Lotes auf die Leitlinie in den Schnittpunkten (Abb. 4c).

Geht es auch mit der Ellipse?

Von einem Punkt außerhalb der Ellipse wollen wir die Tangenten an die durch Brennpunkte und lange Achse gegebene Ellipse zeichnen (Abb. 5a). Die Konstruktion geht analog zum Vorgehen bei der Parabel.

Die Leitlinie ist jetzt ein Kreis um einen der beiden Brennpunkte mit der langen Achse als Radius (Abb. 5b).

Nun zeichnen wir um den gegebenen Punkt einen Kreis durch den anderen Brennpunkt und schneiden ihn mit der Leitlinie (Abb. 5c)

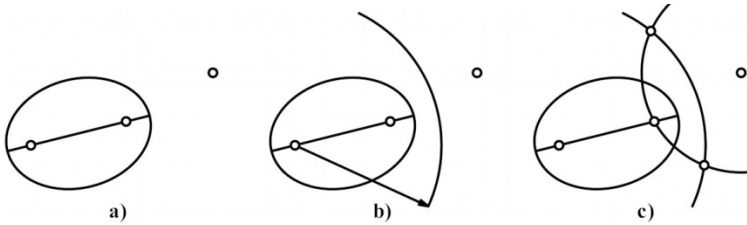


Abb. 5: Ellipse mit Brennpunkten und langer Achse

Die Mittelsenkrechten zwischen diesen Schnittpunkten und dem für den zweiten Kreis verwendeten zweiten Brennpunkt sind die Tangenten (Abb. 6a und 6b).

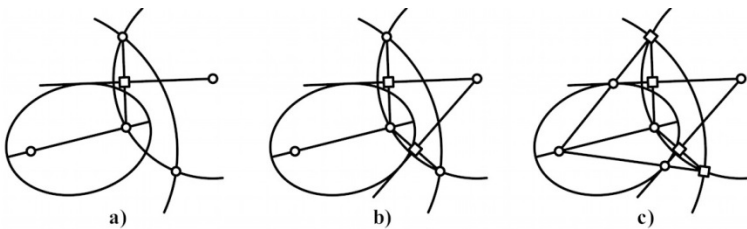


Abb. 6: Ellipsentangenten

Die Berührungspunkte finden wir wieder mit den Loten auf die Leitlinie. Diese Lote sind nun Radien der Leitlinie (Abb. 6c).

Fehlende Symmetrie

Die Konstruktion gemäß den Abbildungen 5 und 6 ist asymmetrisch. Die beiden Brennpunkte werden in unterschiedlichen Funktionen verwendet. Die Abbildung 7a zeigt die Konstruktion mit vertauschten Rollen der beiden Brennpunkte.

Die Abbildung 7b zeigt eine Überlagerung der beiden Konstruktionen gemäß Abb. 6 und 7a. Im markierten gleichschenkligen Trapez erkennen wir Folgendes: Die beiden Diagonalen haben die Länge der langen Ellipsenachse. Der Streckenzug von einem Brennpunkt zum Berührungspunkt der Tangente und weiter zum anderen Brennpunkt hat aus Symmetriegründen die

Länge der Diagonalen und damit der langen Ellipsenachse. Damit ist die Abstandseigenschaft der Ellipse visualisiert, die „Fadenkonstruktion“ also.

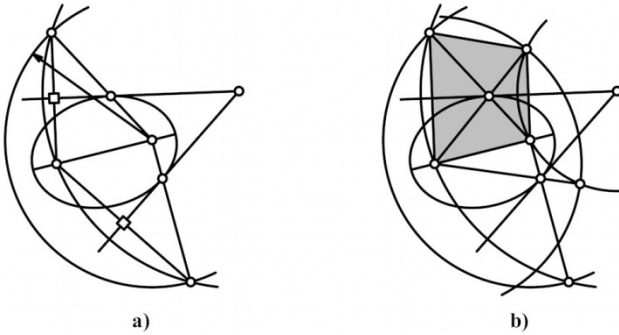


Abb. 7: Vertauschte Rollen. Synopsis

Weiter ist die Tangente die Symmetrieachse des Trapezes und damit die Winkelhalbierende der Diagonalen. Dies illustriert die Reflexionseigenschaft der Ellipsentangente.

Wie läuft die analoge Tangentenkonstruktion an den Kreis? (siehe [1])

Erinnerung an die Schule

Der Autor hat ein halbes Jahrhundert lang die Konstruktion der Ellipsentangente instruiert wie folgt.

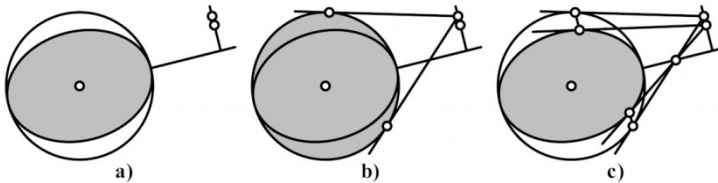


Abb. 8: Ellipsentangente

Zunächst wird die Ellipse zu einem Kreis aufgeblasen (Abb. 8a). Dies geschieht durch eine affine Abbildung mit der langen Ellipsenachse als Affinitätsachse und Affinitätsrichtung orthogonal dazu. Natürlich muss auch der Punkt mit abgebildet werden. Von diesem Punkt aus werden nun die Tangenten an den Kreis gezeichnet (Abb. 8b). Schließlich wird die Luft wieder abgelassen bis zur Ellipse (Abb. 8c).

Dieses Verfahren entspricht dem Rat-schlag „Rückführung auf ein bekann-tes Problem“ von George Pólya, dem Schutzheiligen der Problemlöser.

Allerdings wird für die Rückführung die affine Abbildung meist ad hoc ein-geführt. Zudem funktioniert das Ver-fahren nicht für die Hyperbel.



Abb. 9: George Pólya (1887-1985)

Und wie mit der Hyperbel?

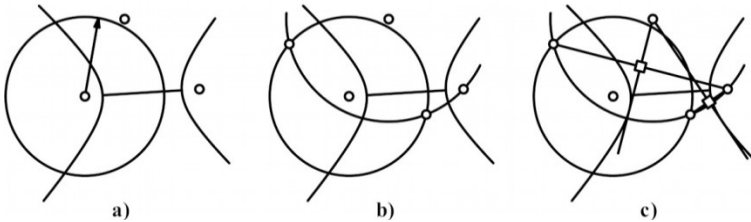


Abb. 10: Konstruktion der Hyperbeltangenten

Die Konstruktion der Hyperbeltangenten (Abb. 10) läuft analog zur Kon-struktion der Ellipsentangenten gemäß den Abbildungen 5 und 6.

Nachdenken über die Umkehrung

Kehret um, ihr Kinder Israel, zu dem, von welchem ihr sehr abgewichen seid! (Jesaja 31.6)

Die Umkehr (Abb. 11) oder Rückkehr war ein Dauerthema bei den Prophe-ten des alten Testaments. Wir kennen dies aber auch von den Nachhaltig-keitsaposteln der Gegenwart. Dabei war für gläubige Menschen des alten Testaments der Verlust der Gottesunmittelbarkeit ebenso gravierend wie für heutige materialistische Menschen der Weltuntergang.

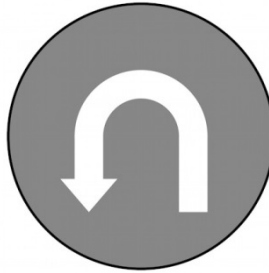


Abb. 11: U-Turn

Die Umkehrung kann aber auch als umgekehrte Sicht oder Perspektivenwechsel gesehen werden.

Der Göttinger Experimentalphysiker Georg Christoph Lichtenberg hat als erster in seinen Vorlesungen auch Experimente vorgeführt. Der junge Gauß war Student von Lichtenberg. Lichtenberg hat in seinen „Sudelbüchern“ seine Gedanken über Gott und die Welt niedergeschrieben. Diese wurden später unter dem vornehmeren Namen „Aphorismen“ publiziert. Ein bekanntes Beispiel ist:

Der Amerikaner, der den Kolumbus zuerst entdeckte, machte eine böse Entdeckung.



Abb. 12: Georg Christoph Lichtenberg
(1742-1799)

Wir haben hier einen Perspektivenwechsel. Allgemein heißt es, Kolumbus habe Amerika entdeckt. Dabei war er aber zeitlebens der Meinung, er habe einen neuen Seeweg nach Indien gefunden. Kolumbus hatte also seine Probleme mit dem entdeckenden Lernen.

Im römischen Recht gilt: *Adiatur et altera pars*. Es muss auch die Gegenseite angehört werden.

Bei bijektiven Funktionen können Input und Output vertauscht werden.

Die Abbildung 13 illustriert eine gängige Unterrichtsmethode und die Umkehrung davon.

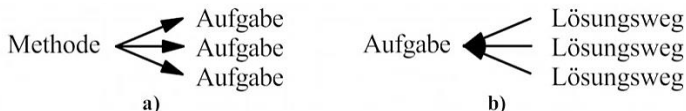


Abb. 13: Unterrichtsmethoden

Der Begriff *Umkehrung* wird schließlich in der Mathematik als terminus technicus verwendet, wenn bei einem Theorem (in Deutschland spricht man gerne von einem „Satz“) untersucht wird, ob aus der Behauptung auf die Voraussetzung rückgeschlossen werden kann.

Zurück zur Eingangsaufgabe

Eine Umkehrung unserer Eingangsaufgabe (Abb. 1) kann darin bestehen, die Parabel und den Schnittwinkel der Tangenten vorzugeben (Abb. 14a) und dann einen oder alle passenden Punkte (Abb. 14b und 14c) zu suchen.

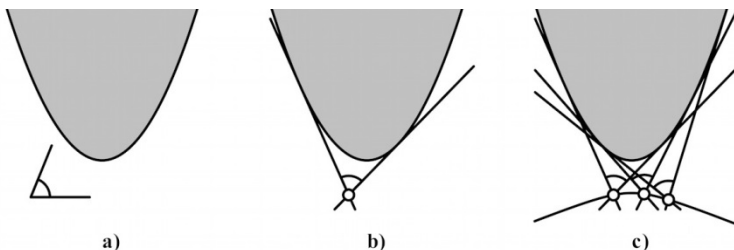


Abb. 14: Umkehrung der Eingangsaufgabe

Da erinnern wir uns an einen weiteren Ratschlag von George Pólya: *Gibt es ein ähnliches oder analoges Beispiel?*

Zu gegebenem Winkel kennen wir den Begriff des Ortsbogens und den Sonderfall des Thaleskreises. Allerdings werden diese in der Regel auf eine Strecke oder ihre Endpunkte bezogen.

Sonderfall: Thales-, „Kurve“ der Parabel

Von welchen Punkten aus sehen wir die Parabel unter einem rechten Winkel? Die gesuchte Punktmenge ist eine Gerade, und zwar ist es die Leitgerade (Abb. 15).

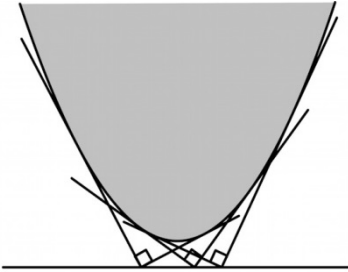


Abb. 15: Thalesgerade der Parabel

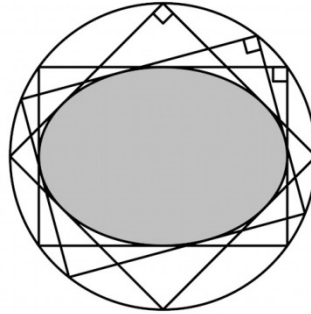


Abb. 16: Thaleskreis der Ellipse

Thaleskurve einer Ellipse

Die Thaleskurve einer Ellipse ist überraschenderweise ein Kreis (Abb. 16).

Dies ist darum überraschend, weil eine Ellipse durch zwei Parameter festgelegt ist, etwa durch die beiden Halbachsen a und b , der Kreis aber nur durch einen Parameter, etwa den Radius r . Der Radius des Thaleskreises ergibt sich aus den Halbachsen durch $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Der Sachverhalt des Thaleskreises der Ellipse ist sehr einfach. Der Beweis ist es weniger (siehe [2]). Der rechnerische Beweis kann aber so organisiert werden, dass man mit quadratischen Gleichungen durchkommt. Ein geometrischer Beweis ist mir nicht gelungen.

Wir wählen nun einen beliebigen Punkt auf dem Thaleskreis und zeichnen die beiden orthogonalen Tangenten an die Ellipse. In den Berührungspunkten auf der Ellipse zeichnen wir die Normalen. Diese schneiden sich rechtwinklig in einem Punkt im Innern der Ellipse. Die Menge dieser Schnittpunkte ist eine Rosette (Abb. 17).

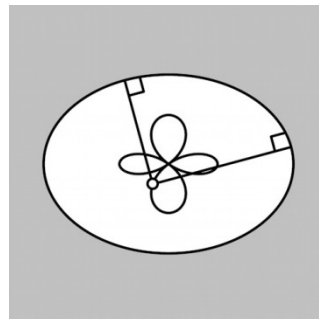


Abb. 17: Rosette

Mittels des mathematischen Assistenzprogramms MATHEMATICA ergibt sich für die Rosette die Gleichung:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)(b^2x^2 + a^2y^2)^2 - (a^2 - b^2)^2(b^2x^2 - a^2y^2)^2 = 0$$

Thaleskurve der Hyperbel

Die Hyperbel hat ebenfalls einen Thaleskreis (Abb. 18). Dieser hat in den üblichen Bezeichnungen den Radius $r = \sqrt{a^2 - b^2}$. Wir haben also nur für $a \geq b$ einen reellen Radius. Das heißt, dass die Hyperbel in den spitzen Winkelfeldern der beiden Asymptoten liegen muss.

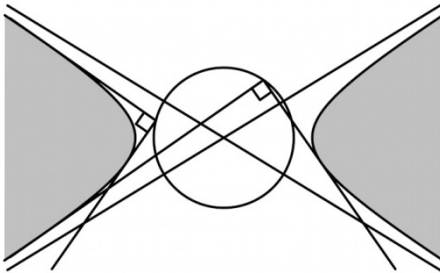


Abb. 18: Thaleskreis der Hyperbel

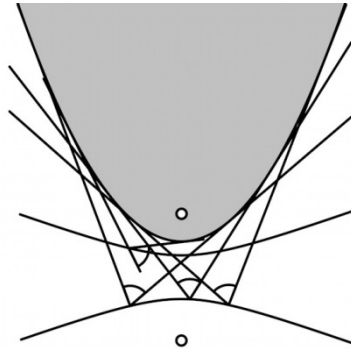


Abb. 19: Ortsbogen für die Parabel

Ortsbogen für die Parabel

In der Abbildung 14c vermuten wir für den Ortsbogen eines spitzen Winkels an die Parabel eine nach unten gekrümmte Kurve. Tatsächlich ist es ein Hyperbelast. Der andere Hyperbelast ist der Ortsbogen des Ergänzungswinkels des spitzen Winkels auf 180° (Abb. 19).

Einer der beiden Brennpunkte der Hyperbel ist auch Brennpunkt der Parabel.

Wir lassen nun den oberen Brennpunkt fest und variieren den anderen Brennpunkt. Dadurch ergibt sich eine Hyperbelschar als Ortsbogenschar. Die Ortsbögen der Abbildung 20 gehören zu Winkeln, die in Schritten von

15° variieren. Wir erkennen in der Mitte die Leitgerade als Thalesgerade. Oberhalb liegen die Ortsbogen für stumpfe Winkel, unterhalb jene für spitze Winkel.

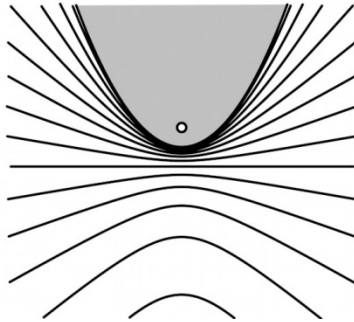


Abb. 20: Hyperbelschar als Ortsbogenschar

Ortsbogen für Ellipse und Hyperbel

Die Abbildung 21 zeigt die analogen Ortsbogenscharen für die Ellipse und die Hyperbel. Wir erkennen den Sonderfall des Thaleskreises. Die übrigen Ortsbogen sind Kurven höherer Ordnung. Wir fallen also aus dem Bereich der Kegelschnitte heraus.

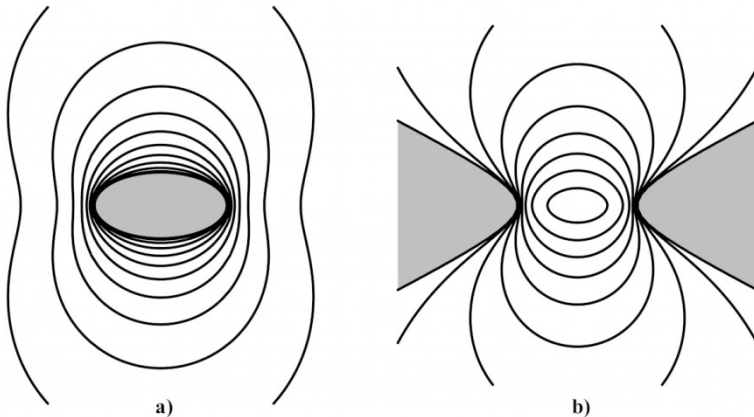


Abb. 21: Ortsbogenscharen für Ellipse und Hyperbel

Dank

Der Autor dankt Nina Thüringer-Schiestel und Philipp Schöbi, Liechtensteinisches Gymnasium Vaduz, sowie Hartmut Müller-Sommer, Vechta, und Heinz Schumann, Weingarten, für Anregungen und Hinweise.

Literatur

Weber, K. & Zillmer, W. (2002). Mathematik Gymnasiale Oberstufe. Grundkurs Aufgabenbuch. Analysis, Analytische Geometrie und Lineare Algebra. Stochastik. Berlin, Frankfurt a. M.: Duden Paetec Schulbuchverlag. ISBN 3-89818-110-3.

Websites

[1] Hans Walser: Kreistangente ohne Thaleskreis (abgerufen 24.09.2018):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kreistangente_o_Tk/Kreistangente_o_Tk.htm

[2] Hans Walser: Thaleskreis an Ellipse und Hyperbel (abgerufen 24.09.2018):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/T/Thaleskreis_E_H/Thaleskreis_E_H.htm

Die Entwicklung dynamischer Vorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen

Stefan-Harald Kaufmann

Zusammenfassung. Die Ergebnisse einer qualitativen Studie zur Untersuchung von Schülervorstellungen zu einer vektoriellen Geradenbeschreibung lassen einen Zusammenhang vermuten zwischen einer dynamischen Interpretation der Geradenbeschreibung und der Fähigkeit, zwischen geometrischem Objekt und algebraischer Beschreibung unterscheiden zu können. Im Beitrag werden Beobachtungen zu einem Unterrichtsversuch beschrieben, der ein erster Versuch ist, dynamische Interpretationen von vektoriellen Geradenbeschreibungen im Unterricht stärker zu gewichten.

Motivation

Die vektorielle Analytische Geometrie ist eines der drei großen mathematischen Sachgebiete der gymnasialen Oberstufe. Ein zentrales Ziel dieses Sachgebietes ist die Beschreibung und Untersuchung geometrischer Sachverhalte mit Vektoren. Ein Teilziel besteht in der Aufstellung und Anwendung einer Vektorgleichung, wie beispielsweise

$$0\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Viele geometrische Problemstellungen können darauf zurückgeführt werden, eine Vektorgleichung als Beschreibungswerkzeug zu verwenden, um Lageprobleme (z. B. Punkt-Gerade, Gerade-Gerade oder Ebene-Gerade) zu untersuchen. Der Kern einer solchen Untersuchung ist das Aufstellen eines zum geometrischen Sachverhalt passenden linearen Gleichungssystems sowie eine Analyse der Lösungsmenge des Systems. In einigen Bundesländern, wie beispielsweise Nordrhein Westfalen, kann die Analyse rein rechnerisch oder mit Hilfe eines grafikfähigen Taschenrechners durchgeführt werden. Die Interpretation der Lösungsmenge erfolgt in der Regel dahingehend, ob es einen Schnittpunkt gibt und wie dessen Koordinaten gegebenenfalls lauten oder welche andere Lagebeziehung der untersuchten Objekte aus der Lösungsmenge gefolgert werden kann.

Eine weitere Deutung der Variablenwerte, beispielsweise für $t = 2$ in der obigen Gleichung (*), kann für die Lageuntersuchung generell als nicht relevant angesehen werden. Die Bedeutung der Variable kann stärker fokus-

siert werden, wenn man sich von der Vorstellung löst, die Gerade werde als ganzheitliches Objekt durch eine Vektorgleichung wie (*) beschrieben, und stattdessen die Gerade als eine Ortslinie eines sich bewegenden Punktes auffasst. Aus dieser Perspektive betrachtet wird die Bewegung eines Punktes durch eine Vektorgleichung beschrieben, in der die Variable beispielsweise den Zeitpunkt angibt, an dem sich der Punkt an einer konkreten Position auf der Geraden befindet.

Fasst man eine Vektorgleichung unter funktionalen Aspekten auf, so können die Vorstellungen, die zur Variablen t in der Gleichung (*) aufgebaut werden können, normativ durch die von Malle formulierten Variablenaspekte für Funktionsvariablen beschrieben werden. Malle unterscheidet zwischen „Einzelzahlaspekt“ und „Bereichsaspekt“, wobei der letztere noch in „Simultanaspekt“ und „Veränderlichenaspekt“ unterteilt werden kann, vgl. dazu [Malle, 1993, S. 79-80].

Im Rahmen einer qualitativen Studie wird unter anderem untersucht, inwieweit Schülerinnen und Schüler dynamische Vorstellungen mit Vektoren und mit einer Vektorgleichung als Geradenbeschreibung verbinden. Teilergebnisse der Studie haben gezeigt, dass eine Interpretation aller Elemente einer Vektorgleichung im Sinne einer Geradenbeschreibung häufig dynamische Aspekte beinhaltet. Bei einer unvollständigen Interpretation, beispielsweise bei Nichtbeachtung der Variablen, konnten bei den betroffenen Fällen eher statische Aspekte beobachtet werden.

Diese Beobachtungen haben letztlich die Frage aufgeworfen, inwieweit dynamische Vorstellungen bei der geometrischen Interpretation von Vektorgleichungen im Unterricht gefördert werden können. Daher wurde als erster Versuch eine Unterrichtseinheit entwickelt, bei der eine Gerade als Ortslinie eines sich bewegenden Punktes betrachtet wird. Die Bewegung von Punkten beschreiben Schülerinnen und Schüler sowohl in Interviews als auch in Unterrichtsbeobachtungen über die Variablen in der Vektorgleichung. Da die von den Lernenden geäußerten Vorstellungen zu der „Funktionsvariable“ t aus (*) mit den Aspekten von Malle beschreibbar sind, wird auf diese oben genannten Variablenaspekte im Text verwiesen.

Der Beitrag konzentriert sich im Folgenden auf zwei Aspekte:

- Darlegung von Untersuchungsergebnissen, die Informationen über dynamische Deutungen einer Vektorgleichung liefern,

- Durchführung einer Unterrichtsstunde zur Thematisierung dynamischer Interpretationen mit Hilfe einer eingekleideten Sachaufgabe aus dem Gebiet der Vektorrechnung.

Eckdaten zum Untersuchungsdesign und zur Auswertungsmethode

Insgesamt wurden 22 Schülerinnen und Schüler aus Mathematikleistungskursen der Jgst. 12 von 4 verschiedenen Gymnasien in Köln interviewt. Die Befragungen wurden einzeln nach einem vorgegebenen Frageleitfaden durchgeführt und sind methodisch als problemorientierte Interviews angelegt, vgl. [Witzel, 2000]. Die Lernenden wurden zu denjenigen Vorstellungen befragt, die sie mit einem Vektor, einer Geraden, den Komponenten einer vektoriellen Geradenbeschreibung sowie mit einer Vektorgleichung als Ganzem verbinden.

Die Interviews wurden mit einer Videokamera anonymisiert aufgezeichnet. Anschließend erfolgte die Transkribierung der Interviews und der angefertigten Grafiken, die die Schülerinnen und Schüler während des Interviews teilweise zu Ihren Ausführungen erstellt hatten.

Die verschriftlichen Interviews wurden mit Hilfe der typenbildenden qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet, vgl. dazu [Mayring, 2008] und [Kuckartz, 2016]. Zunächst wurde das Datenmaterial nach den Vorgaben einer strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse kodiert, indem als Erstes eine grobe Kodierung anhand der durch die Forschungsfragen vorgegebenen Hauptkategorien vorgenommen wurde. Aus den Hauptkategorien wurden anschließend am Material Subkategorien entwickelt, die die individuellen Ausprägungen der Vorstellungen genauer erfassen. Nach einer erneuten Materialkodierung mit allen Subkategorien konnte jeder individuelle Fall im Hinblick auf das Untersuchungsziel auf eine Kombination unterschiedlicher Kategorien inhaltlich reduziert werden. Jede als „Kategorien-Kombination“ durchgeführte Fallcharakterisierung stellt letztlich eine Rekonstruktion einer Vorstellung dar, die der jeweilige Befragte inhaltlich mit einer Vektorgleichung verbindet.

Bei der Auswertung zeigte sich, dass die einzelnen Fälle über die Vektorvorstellungen und die Vorstellungen zu Variablen sinnvoll gruppiert werden können. Folglich können die Kategorien zu Vektor- und Variablenvorstellungen einen Merkmalsraum einer Typisierung bilden. Für die Vektoren lie-

ferte die Untersuchung unter anderem die Subkategorien: „Bewegung“, „Tupel“, „geometrische Darstellung“, „Pfeil“, „gerichtete Strecke“, „Verschiebung“, „Länge“ und „zusammengesetzte Einheit“.

Teilergebnisse der Fallkontrastierung

Die oben angegebenen Merkmale ermöglichen die Bildung mehrerer Vorstellungstypen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen. Die gebildeten Idealtypen repräsentieren Vorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen, deren Qualität unterschiedlich bewertet werden kann. Eine mögliche Qualitätseinordnung kann anhand der oben formulierten Frage vorgenommen werden, inwieweit die Schülerinnen und Schüler eine Vektorgleichung zur Geradenbeschreibung dynamisch interpretieren.

Aus diesem Grund wird einer dieser Typen hier etwas genauer vorgestellt. Eine mögliche sinnvolle Bezeichnung für diesen Typus stellt „simultane Punkte“ dar. Diese ergibt sich aus der Gesamtheit aller Kategorien, die unter diesem Typus gebündelt werden können.

Der Vorstellungstyp „simultane Punkte“ kann wie folgt beschrieben werden: Unter einem Vektor stellt sich dieser Typ eine Bewegung im Sinne einer Verschiebung in einem Koordinatensystem vor, die durch ein Zahlentupel beschrieben wird und mit Hilfe eines Pfeils grafisch dargestellt werden kann. Mit einer Vektorgleichung wie (*) verbindet dieser Typ simultan alle Bewegungen, die von einem festen Punkt auf einer Geraden zu allen anderen Punkten auf der Geraden führen, da für die Variable t alle reellen Zahlen eingesetzt werden können. Der Vorstellungstyp wird in Abb. 1 visualisiert.

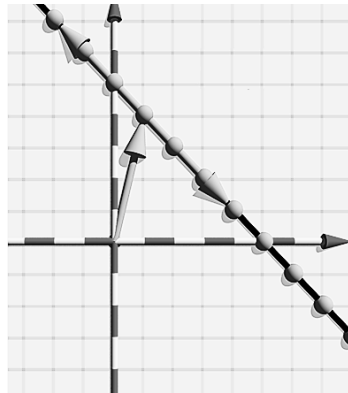


Abbildung 1: Visualisierung von Schülervorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen

Der Typ „simultane Punkte“ stellt eine Gerade als ein Objekt vor, welches durch gleichgerichtete Punktbewegungen beschrieben wird, da jeder Punkt auf der Geraden durch Verschiebung eines durch den „Stützvektor“ festge-

legten Punktes entsteht. Dieser Aspekt kann sowohl den grundsätzlichen Aufbau einer Vorstellung zu Geraden als auch den Aufbau von dynamischen Interpretationen zu Geraden ermöglichen. Vergleicht man diesen Typus mit den anderen Typen, so zeigt sich eine weitere Besonderheit, die aus den Kategorien, die diesen Typus auszeichnen, nicht direkt hervorgeht. Bei diesem dynamisch orientierten Vorstellungstyp ist eine Unterscheidung zwischen der Geraden als Objekt und der algebraischen Beschreibung aller auf ihr liegenden Punkte durch eine Vektorgleichung erkennbar.

Da eine Unterscheidung zwischen Geometrie als „Objektebene“ und Algebra als „Beschreibungsebene“ wünschenswert ist und insbesondere bei dynamischen Interpretationen einer Vektorgleichung umgesetzt wird, stellt sich die Frage, inwieweit dynamische Interpretationen von Vektorgleichungen gefördert werden können.

Daher wurde eine Unterrichtsstunde zur Förderung entsprechender Vorstellungen als Test für weitergehende Untersuchungen entwickelt. Die Stunde trägt innerhalb der Unterrichtsreihe den Titel „Problemorientierte Schnittpunktbestimmung am Beispiel zweier Schiffe auf Kollisionskurs“. Der Stundenablauf, ihre Rahmenbedingungen sowie die Beobachtungen bei der Durchführung werden im Folgenden dargelegt.

Entwicklung und Durchführung einer Unterrichtsstunde zu dynamischen Geradenvorstellungen

Die folgende Unterrichtsstunde wurde parallel in zwei Grundkursen der Jahrgangsstufe Q2 an einem Gymnasium in Nordrhein-Westfalen durchgeführt. Kurs A setzt sich aus 12 Schülerinnen und 10 Schülern zusammen, Kurs B aus 13 Schülerinnen und 9 Schülern. Beide Kurse wurden in der Q1 in Analysis und Stochastik unterrichtet und können beide im Hinblick auf das Leistungsvermögen als heterogen beschrieben werden. Den Schülerinnen und Schülern sind aus den bisherigen Stunden unterschiedliche Sozialformen, wie beispielsweise die Partnerarbeit, bekannt. Beide Kurse werden vom gleichen Fachlehrer unterrichtet.

Voraussetzungen: Einordnung in die Unterrichtsreihe

Analytische Geometrie und Lineare Algebra bildet ein zentrales Inhaltsfeld des Kernlehrplans des Landes Nordrhein-Westfalen. In Anlehnung an die

dort ausgewiesenen Kompetenzen und an [Bürger et. al., 1980] wurden Vektoren zunächst als verallgemeinerte arithmetische Größen in Form von Listen eingeführt. Durch eine Anbindung an Sachkontexte, wie beispielsweise Zutatenlisten, wurden die Rechengesetze zur Vektoraddition und zur Multiplikation mit einem Skalar motiviert. Mit der Einführung der dreidimensionalen Koordinaten wurden Vektoren geometrisch als Punktverschiebungen gedeutet, deren Repräsentanten grafisch als Pfeile dargestellt werden können. In den anschließenden Unterrichtsstunden wurden die Rechengesetze für Vektoren geometrisch nachvollzogen. Auf dieser Basis wurden erste geometrische Objekte, wie Punkt und Verbindungsstrecken zweier Punkte, mit Hilfe von Vektoren beschrieben.

Die Einführung der Geradengleichung erfolgte als Menge von Punkten, deren Ortsvektoren durch eine Vektorgleichung der Form (*) beschrieben werden können. Die Untersuchung der Lagebeziehung von Punkt und Gerade, die so genannte „Punktprobe“, stellte die erste Anwendung der Geradengleichung in Vektorform dar und war die letzte Stunde vor der eigentlichen Untersuchungsstunde.

In beiden Kursen wurden in der gesamten Reihe annähernd gleiche Unterrichtsmaterialien verwendet. Der Unterschied bestand in vier Aufgabenformaten zur Einführung der Geradengleichung und der Punktprobe. Kurs A erhielt Aufgabenformate, in denen eine Deutung der Variablen t in der Gleichung (*) als Zeitvariable bereits eingefordert wird. Der Austausch der vier Aufgaben erfolgte mit der Fragestellung, ob sich sowohl in der Erarbeitungs- als auch in der Sicherungsphase bzw. in den Lösungen der darauf folgenden Stunde zur Schnittpunktbestimmung Unterschiede erkennen lassen.

Durchführung der Unterrichtsstunde

Die Unterrichtsstunde verfolgt eine problemorientierte Thematisierung der Schnittpunktbestimmung zweier Geraden, die in einen Sachkontext eingebettet ist. Zu Beginn der Stunde präsentiert der Lehrer die Problemstellung, deren Inhalt den Schülerinnen und Schülern in der Erarbeitungsphase zusammen mit dem Arbeitsauftrag zur Verfügung gestellt wird:

„Der Kapitän eines Schiffes registriert um 16:00 auf dem Radar einen Eisberg, der sich 7 Seemeilen südlich des Schiffes befindet. Die Meeresströmung treibt den Eisberg pro Stunde 3 Seemeilen nach Osten und 1 Seemeile nach Norden.

Das Schiff fährt trotz der Meeresströmung pro Stunde auf einem Kurs 4 Seemeilen nach Osten und 4 Seemeilen nach Süden. Soll der Kapitän den Kurs des Schiffes ändern?“

Im Anschluss an den Lehrervortrag wird die Leitfrage der Stunde „Werden Schiff und Eisberg kollidieren?“ festgelegt. Die Erarbeitungsphase ist in zwei Teilphasen unterteilt: Eine Plenumsphase, in der eine Vektorgleichung zur Beschreibung des Schiffahrtsweges gemeinsam aufgestellt wird, und eine Partnerarbeitsphase, in der die Schülerinnen und Schüler die „Eisberggleichung“ aufstellen und eine Methode zur Lösung des Problems entwickeln sollen. Die gemeinsame Erstellung der „Schiffsgleichung“ erfolgt als Entlastung der Erarbeitungsphase, damit die Schülerinnen und Schüler sich auf das eigentliche Problem konzentrieren können.

In der Sicherungsphase werden jeweils zwei Paare gebeten, dem Plenum ihre Ergebnisse vorzustellen und zu erklären, wie sie die Leitfrage mit Hilfe ihrer Ergebnisse beantworten würden. Zwei Beispiele für Schülerlösungen sind in den Abbildungen 2 und 3 dargestellt. Beide verfolgen eine Lösung mit Hilfe von Vektoren, indem als Erstes für die Fahrwege von Schiff und Eisberg jeweils eine Vektorgleichung aufgestellt wird. Danach wird durch Gleichsetzen der Vektorgleichungen ein lineares Gleichungssystem aufgestellt. Die Lösungen des Systems werden zuletzt als Zeitwerte im Sachkontext interpretiert. Da beide Werte unterschiedlich sind, befinden sich Schiff und Eisberg zu unterschiedlichen Zeiten am Schnittpunkt der Fahrwege. Aufgrund dieses Ergebnisses kommen die beiden Lösungen zu der Deutung, dass der Kapitän den Kurs des Schiffes nicht ändern muss.

Die Lösungen unterscheiden sich einerseits durch die Darstellung der Lösungswege und andererseits inhaltlich, da ein Tandem unterschiedliche Variablenbezeichnungen verwendet (Abb. 2), während das andere Tandem die gleiche Variablenbezeichnung verwendet (Abb. 3). Dies kann im vorliegenden Sachkontext als sinnvoll angesehen werden, da die Variable jeweils für die Zeit steht, die seit 16:00 vergangen ist. Durch den Widerspruch, der sich so in der Rechnung ergibt, liegt deutlich schneller ein Ergebnis vor.

Beobachtungen in der Unterrichtsstunde

In beiden Kursen gestaltete sich die Erarbeitung größtenteils unproblematisch. Einige Schülertandems konnten sich nicht mehr an ein Vorgehen zur

Lösung linearer Gleichungssysteme erinnern und mussten auf eine vom Fachlehrer zur Verfügung gestellte Hilfekarte zurückgreifen.

In der Ergebnissicherung zeigte sich im Vergleich zu den in den Abbildungen 2 und 3 dargestellten Beispiellösungen, dass der größte Teil der Schülerinnen und Schüler zunächst die Koordinaten des Schnittpunktes bestimmt und erst danach die Bedeutung der Variablenwerte näher interpretiert hat. Lediglich die Schülerinnen und Schüler aus Kurs A haben Lösungsvorschläge mit nur einer Variablen (vgl. Abb. 3) vorgelegt. Hier stellt sich die Frage, ob die Entwicklung eines solchen Lösungsansatzes auf die etwas intensivere Thematisierung der Variablen als Zeitwert in den vorherigen Stunden zurückgeführt werden kann. Eine grundsätzliche Beeinflussung liegt aufgrund einiger anderer Aufgabenformate in Kurs A vor. Inwieweit diese die Lösungsansätze und Denkweisen der Schülerinnen und Schüler in der Unterrichtsstunde beeinflusst haben, kann ohne genauere Beobachtungen nicht eindeutig beantwortet werden.

Schiff

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Eisberg

$$u: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g = u$$

$$\text{I } 0 + 4t = 0 + 3s$$

$$\text{II } 0 - 4t = -7 + s$$

$$\text{I} + \text{II} = \text{III} \quad 0 = -7 + 4s \quad | +7$$

$$7 = 4s \quad | :4$$

$$\frac{7}{4} = s$$

s in I einsetzen

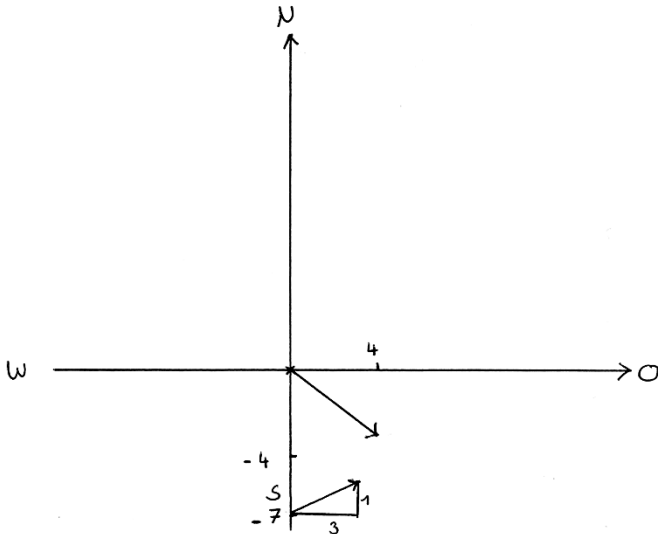
$$0 + 4t = 3 \cdot \frac{7}{4}$$

$$4t = \frac{21}{4} \quad | :4$$

$$t = \frac{21}{16}$$

Der Kapitän muss den Kurs nicht ändern, weil sich Eisberg und Schiff nicht zur gleichen Zeit am gleichen Ort befinden.

Abbildung 2: Schülerlösung mit unterschiedlichen Variablen



S und e gleichsetzen

$$S: \vec{x} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$t = 0$$

$$t = \frac{7}{5}$$



Abbildung 3: Schülerlösung mit gleicher Variable

Eine weitere Beobachtung besteht darin, dass annähernd alle Schülerinnen und Schüler sowohl Schiff und Eisberg als einzelne Punkte, die sich auf einer Geraden bewegen, modelliert haben. Der Sachkontext stellt eine Einkleidung dar, die bei der Planung bewusst so gewählt wurde, um den Fokus stärker auf die Lageuntersuchung zu legen. Die Einkleidung macht sich insbesondere daran bemerkbar, dass die Aufgabenstellung eine Verwendung von Punkten und Vektoren als Verschiebung nahe legt. Für die Schülerinnen und Schüler ist es daher konsequent gewesen, die Modellierung als „bewegende Punkte“ zu wählen und auf eine intensivere Reflexion der Ergebnisse im Sachkontext zu verzichten. Eine Ergebnisreflexion im Sach-

kontext könnte beispielsweise die Ausmaße von Schiff und Eisberg berücksichtigen, wenn beurteilt werden soll, inwieweit eine Gefahrensituation vorliegt. Eine solche Anbindung an den Sachkontext musste in beiden Kursen vom Fachlehrer jedoch als vertiefende Hausaufgabe gestellt werden.

Diese Beobachtung kann man mit Blick auf die zu Beginn des vorherigen Abschnitts formulierte Zielsetzung der Unterrichtsstunde unterschiedlich bewerten. Da die Schnittpunktuntersuchung mit Deutung der Variablenwerte im Vordergrund steht, kann man eine Vernachlässigung des Sachkontextes rechtfertigen. Sollte eine intensivere Auseinandersetzung mit dem Sachkontext erfolgen, so ist zu überlegen, wie eine geeignete Alternative für das verwendete Schiffsbeispiel aussehen kann. Ähnliche Beispiele wurden von [Maab, 2000] oder [Diemer u. Hillmann, 2005] bereits vorgeschlagen.

Fazit

Mit den Ergebnissen der qualitativen Studie zum Aufbau von Vorstellungen zu einer Vektorgleichung als Geradenbeschreibung konnten drei Idealtypen gebildet werden. Lediglich einer dieser Idealtypen, der Typ „simultane Bewegung“, zeichnet sich dadurch aus, dass eine Vektorgleichung unter dynamischen Aspekten gedeutet wird, während die anderen Typen diese Vorstellung höchstens ansatzweise erkennen lassen. Darüber hinaus stellt der Typus „simultane Bewegung“ den einzigen Typus dar, der eine Trennung zwischen einer Geraden als geometrischem Objekt und der Vektorgleichung als algebraischer Beschreibung des Objekts vollzieht.

Aus diesem Grunde erscheint die Förderung dynamischer Vorstellungen zu Vektorgleichungen, um unter anderem den Beschreibungscharakter einer solchen Gleichung hervorzuheben, sinnvoll. Dieser Aspekt entspricht in weiten Teilen der Zielsetzung, die für die Analytische Geometrie in der gymnasialen Oberstufe formuliert wurde und an der man sich bis heute curricular orientiert, vgl. dazu [Profke, 1978]. In der fachdidaktischen Diskussion ist mehrfach aufgezeigt worden, dass auch durch den Einsatz des Computers die Behandlung dynamischer Interpretationen von Vektorgleichungen umgesetzt und ein Übergang zu Beschreibung von Kurven ermöglicht werden kann, vgl. dazu [Filler, 2007] und [Henn u. Filler, 2015, S. 158-160, S. 264-283].

Der Unterrichtsversuch hat gezeigt, dass eine solche Förderung bzw. Vertiefung im Mathematikunterricht möglich ist und ohne curriculare Einschränkungen bzw. Erweiterungen umgesetzt werden kann. Von diesem Standpunkt aus betrachtet, wirft der Versuch zwei neue Fragen auf.

Eine Förderung dynamischer Vorstellungen zu Geradengleichungen ist sicher wünschenswert, jedoch ist fraglich, inwieweit ein solches Konzept inhaltlich konsequent im Unterricht umsetzbar ist. Als Beispiel seien hier die Ebenen genannt. Bei einer Ebene kann die Vorstellung eines Koordinatensystems als Skalierung, was durch die Spannvektoren auf die Ebene gelegt wird, sinnvoller erscheinen als ein sich bewegender Punkt. Die Variablenwerte entsprechen dann den Punktkoordinaten eines Punktes in der Ebene in Bezug auf das durch die Spannvektoren festgelegte Koordinatensystem. Eine Interpretation beider Variablenwerte als Zeitwerte gestaltet sich in diesem Kontext schwierig und ist für das Verständnis nicht hilfreich. Möchte man an einem dynamischen Aufbau festhalten, so könnte man hier stärker über die dynamische Erzeugung einer Ebene nachdenken, die durch das Verschieben einer Geraden entlang einer anderen Geraden entsteht.

Darüber hinaus stellt sich die Frage, inwieweit die geplante Einbeziehung dynamischer Aspekte langfristig tatsächlich eine Veränderung der Vorstellungen bewirkt, die die Schülerinnen und Schüler mit einer Vektorgleichung zur Geradenbeschreibung in Verbindung bringen. Antworten auf diese Frage können mit Hilfe einer Vergleichsstudie, die Vorstellungen zur Interpretation einer Vektorgleichung zu unterschiedlichen Zeitpunkten eines langfristigen Lernprozesses erhebt, gegeben werden.

Literaturverzeichnis

- Bürger, H.; Fische, R.; Malle, G.; Reichel, H.-C. (1980). Zur Einführung des Vektorbegriffs: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. In: JMD 1 (3), S. 171-187.
- Diemer, C.; Hillmann, L. (2005). Mit Bewegung durch die Analytische Geometrie. In: Der Mathematikunterricht 51 (4), S. 32-44.
- Filler, A. (2007). Herausarbeiten funktionaler und dynamischer Aspekte von Parameterdarstellungen durch die Erstellung von Computeranimationen. In: Mathematische Semesterberichte 54 (2), S. 155-176.
- Henn, H.-W.; Filler, A. (2015). Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra, Berlin / Heidelberg: Springer.

- Kuckartz, U. (2016). Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung, Weinheim / Basel: Beltz Juventa.
- Maaß, K. (2000). „Flugsicherung“ in einem Kurs Analytische Geometrie. In: Der Mathematikunterricht 46 (1), S. 20-40.
- Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Braunschweig / Wiesbaden: Vieweg.
- Mayring, P (2008). Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken, Weinheim / Basel: Beltz.
- Profke, L. (1978). Zur Behandlung der Linearen Algebra in der Sekundarstufe II. In: Winkelmann, B. (Hrsg.). Materialien zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II, Bielefeld: IDM, S. 10-42.
- Witzel, A. (2000). Das problemzentrierte Interview (25 Absätze). In: Forum Qualitative Sozialforschung 1, online abrufbar unter <http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/viewArticle/1132/2519>, zuletzt aufgerufen am 03.01.2019.

Erkenntnisgewinn durch Perspektivwechsel: Entdeckungen an der Wallace-Geraden

Hartmut Müller-Sommer

Zusammenfassung. Ausgangspunkt des Beitrags ist die geometrische Situation zur Erzeugung der Wallace-Geraden eines Punktes auf dem Umkreis eines Dreiecks. Ein Perspektivwechsel führt zu neuen „Umkurven“ und zu Verallgemeinerungen der Wallace-Geraden, des Feuerbach-Kreises und der Euler-Geraden.

Einleitung

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist der nachfolgende

Satz: Gegeben sei ein Dreieck ABC . Die Fußpunkte der von einem Punkt P des Umkreises aus auf die Trägergeraden der Dreiecksseiten gefällten Lote liegen auf einer Geraden, der sogenannten Wallace-Geraden. Sind umgekehrt die Fußpunkte der von einem Punkt P aus auf die Dreiecksseiten gefällten Lote kollinear, so liegt P auf dem Umkreis (Abb. 1a).

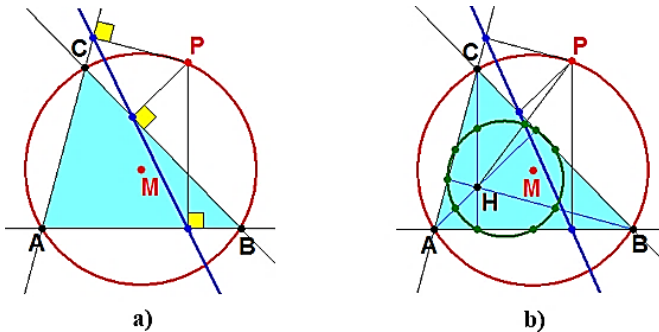


Abb. 1: a) Lotfußpunkte und Wallace-Gerade, b) Höhenschnittpunkt, Wallace-Gerade und Feuerbachkreis

Befindet sich P in einem der Eckpunkte des Dreiecks, so fallen zwei der drei Lotfußpunkte mit diesem Eckpunkt zusammen und die Wallace-Gerade ist dann die Dreieckshöhe durch P .

Einen Beweis dieses Satzes, der im Wesentlichen auf die Winkelbeziehungen in Sehnenvierecken und auf den Umfangswinkelsatz zurückgreift, findet man beispielsweise bei Halbeisen, Hungerbühler, Lächli (2016).

In der Literatur sind die *Wallace-Geraden* auch unter dem Namen *Simson-Geraden* bekannt, benannt nach dem schottischen Geometer Robert Simson (1687-1768). Historische Nachforschungen haben allerdings gezeigt, dass diese Gerade erst 1797 von dem (ebenfalls schottischen) Mathematiker William Wallace (1768-1843) entdeckt wurde.

Zwischen den Wallace-Geraden und dem Feuerbachkreis des Ausgangsdreiecks besteht ein enger Zusammenhang: Verbindet man den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks mit dem Punkt P auf dem Umkreis, so liegt der Mittelpunkt der Strecke \overline{HP} auf der Wallace-Geraden von P und auf dem Feuerbachkreis des Dreiecks (Abb. 1b).

Perspektivwechsel

Bringen wir den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks mit ins Spiel und lenken den Blick auf die Höhen, so ergibt sich eine veränderte Perspektive. Den obigen Satz können wir dann wie folgt formulieren:

Die Schnittpunkte der durch einen Punkt P gezogenen „Höhenparallelen“ mit den Trägergeraden der Dreiecksseiten liegen genau dann auf einer Geraden, der sogenannten, Wallace-Geraden, wenn P auf dem Umkreis des Dreiecks liegt (Abb. 2a).

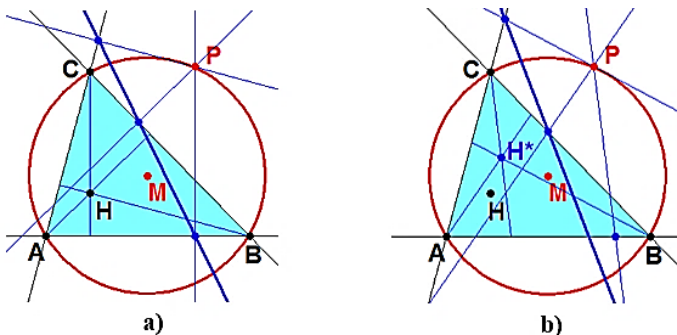


Abb. 2: a) Lotfußpunkte als Schnittpunkte der „Höhenparallelen“ mit den Seitengeraden, b) nichtkollineare Schnittpunkte

Die Höhen des Dreiecks sind spezielle Eckentransversalen und der Höhenschnittpunkt H ist ein spezieller Transversalenschnittpunkt. Stellen wir uns nun den Punkt H beweglich vor und verändern wir seine Lage, so geht der alte Höhenschnittpunkt H in einen allgemeinen Transversalenschnittpunkt

H^* über. Aus den alten Höhen werden allgemeine Eckentransversalen. Zeichnen wir dann von einem Punkt P des Umkreises aus die Parallelen zu diesen neuen Eckentransversalen, so sind ihre Schnittpunkte mit den Trägergeraden der Dreiecksseiten im Allgemeinen nicht mehr kollinear (Abb. 2b). Wir stellen uns nun die folgende Forschungsfrage:

Auf welcher Ortskurve liegen alle Punkte P , für die bei vorgegebenem Transversalenschnittpunkt H^ die Parallelen zu den drei Eckentransversalen die Seitengeraden des Dreiecks weiterhin in drei kollinearen Punkten schneiden?*

Erste Experimente und erste Ergebnisse

Für verschiedene Lagen des allgemeinen Transversalenschnittpunktes H^* werden die gesuchten Kurven „ertastet“, d. h., wir markieren diejenigen Punkte P , die zu kollinearen Parallelelenschnittpunkten mit den Trägergeraden der Dreiecksseiten führen.

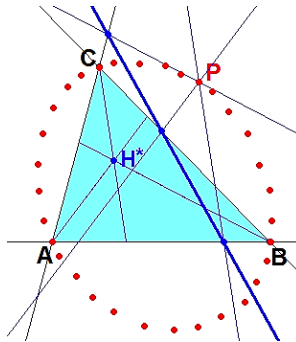


Abb. 3: Der Punkt P erfüllt beim Tastexperiment die Kollinearitätsbedingung.

In Abbildung 3 liegt der Punkt H^* im Inneren des Dreiecks. Die ertastete Kurve ist hier von ellipsenförmiger Gestalt. Die eingezeichnete Gerade durch die drei Schnittpunkte mit den Seitengeraden können wir als *verallgemeinerte Wallace-Gerade* des Punktes P deuten.

Die Abbildungen 4 und 5 zeigen weitere „Tast-Ergebnisse“. Zur besseren Übersicht wurden die Parallelen zu den Eckentransversalen und die verallgemeinerten Wallace-Geraden weggelassen. Der Punkt H^* übernimmt hier offenbar die Rolle eines „Kurvengenerators“.

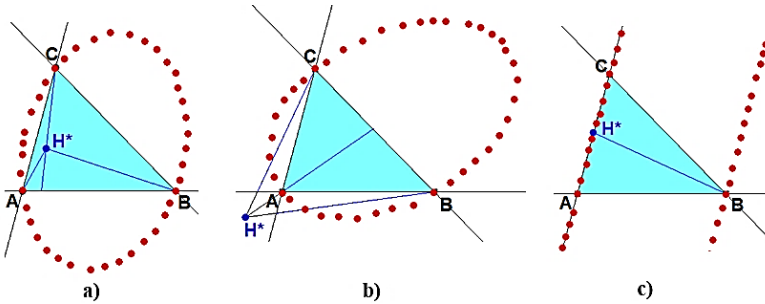


Abb. 4: a) H^* liegt im Inneren des Dreiecks, b) in einem Winkel­feld außerhalb des Dreiecks, c) auf der Seitengeraden AC .

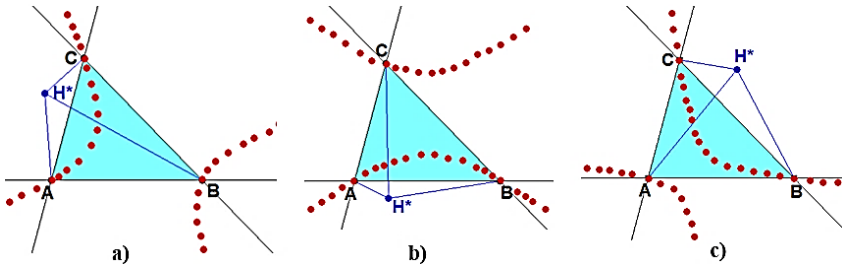


Abb. 5: H^* liegt im restlichen Außenbereich des Dreiecks ABC .

Liegt H^* im Inneren des Dreiecks (Abb. 4a) oder in einem der drei Winkel­felder, die durch die Scheitelwinkel der Dreiecksinnenwinkel außerhalb des Dreiecks erzeugt werden (Abb. 4b), so ergeben sich ellipsenförmige Kurven. Befindet sich H^* auf einer der drei Trägergeraden der Dreiecksseiten (Abb. 4c), jedoch nicht in einem Eckpunkt, so erhalten wir ein Parallelen­paar bestehend aus der Trägergeraden selber und der dazu parallelen Geraden durch den dritten Eckpunkt.

Transversalenschnittpunkte H^* , die zu hyperbelförmigen Kurven führen, liegen in einem der drei restlichen Außenbereiche des Dreiecks (Abb. 5). Wir werden weiter unten erkennen, dass nicht alle Punkte H^* in diesem Außenbereich zu Kurven mit der gewünschten Eigenschaft führen. Wie im klassischen Fall beim Umkreis des Dreiecks verlaufen auch hier alle ertasteten Ortskurven als „Umkurven“ durch die Eckpunkte des Dreiecks: Rückt der Punkt P in einen der Eckpunkte des Dreiecks, so fallen wieder zwei der drei Schnittpunkte mit diesem Eckpunkt zusammen, und die Kollinearität

der Schnittpunkte ist trivialerweise erfüllt. Die verallgemeinerte Wallace-Gerade ist dann die Eckentransversale PH^* selber.

Besondere Lagen von H^*

In den Abbildungen 4 und 5 liegt der Transversalenschnittpunkt H^* nicht in einem Eckpunkt des Ausgangsdreiecks. Ist dies aber der Fall, so wird keine konkrete Ortskurve erzeugt: Befindet sich beispielsweise H^* im Eckpunkt A , so sind die Transversalen BH^* und CH^* in die Seitengeraden BA und CA übergegangen. Es gibt in diesem Fall keine dritte Transversale AH^* . Für *jeden* Punkt $P \neq A$ der Dreiecksebene existieren daher genau zwei Parallelschnittpunkte und die Kollinearitätsbedingung ist trivialerweise erfüllt. Für $P = A$ existiert nur ein Schnittpunkt A , d. h., die Kollinearitätsbedingung verliert dann ihren Sinn.

Befindet sich H^* auf der Trägergeraden einer Dreiecksseite, jedoch nicht in einem Eckpunkt, so erfüllen offenbar alle Punkte auf einem Parallelenpaar die Kollinearitätsbedingung: Liegt H^* beispielsweise auf AC (Abb. 4c), so sind die Transversalen AH^* und CH^* durch AC gegeben und für alle Punkte P auf AC liegen die Parallelschnittpunkte in den Eckpunkten A und C sowie im Punkt P selber, d. h., alle Schnittpunkte liegen auf AC . Für Punkte P auf einer zu AC parallelen Geraden durch den Eckpunkt B fallen die beiden Schnittpunkte mit den Seitengeraden AB und BC im Eckpunkt B zusammen. Der dritte Schnittpunkt liegt auf AC , daher ist die Kollinearität der drei Schnittpunkte ebenfalls erfüllt.

Konstruktion spezieller Kurvenpunkte

Für jede der in den Abbildungen 4 und 5 angedeuteten Ortskurven lassen sich drei Kurvenpunkte sogar konstruktiv ermitteln! In Abbildung 6 spannen die Transversalenabschnitte BH^* und CH^* jeweils ein Parallelogramm CH^*BM_1 auf. Der Eckpunkt M_1 dieses Parallelogramms ist offensichtlich ein Punkt auf der jeweils angedeuteten Ortskurve: Die Eckpunkte B und C sind die Parallelschnittpunkte mit den Seitengeraden AB und AC . Der Schnittpunkt der durch M_1 gezogenen Parallele zu AH^* liegt ebenfalls auf BC . (In Abbildung 6c fällt er mit dem Punkt B zusammen.) Somit ist für M_1

die Kollinearitätsbedingung erfüllt und die Gerade BC ist jeweils die zu M_1 gehörende verallgemeinerte Wallace-Gerade.

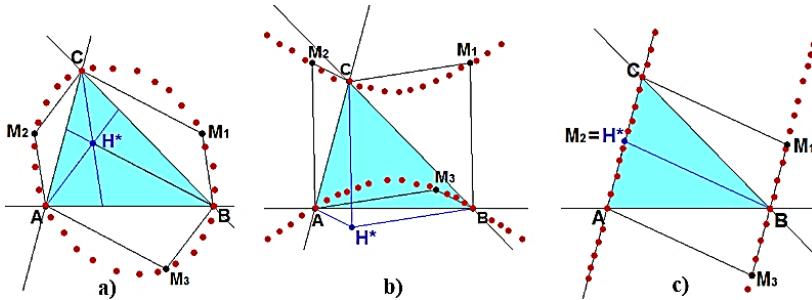


Abb. 6: Eckpunkte M_1 , M_2 und M_3 als Kurvenpunkte

Mit M_2 bzw. M_3 bezeichnen wir den vierten Eckpunkt des von AH^* und CH^* bzw. von AH^* und BH^* aufgespannten Parallelogramms. Offensichtlich sind auch M_2 und M_3 Punkte auf den jeweiligen Ortskurven mit den dazugehörigen verallgemeinerten Wallace-Geraden AC und AB . In Abbildung 6c ist das zweite Parallelogramm CM_2AH^* entartet. Hier ist $M_2 = H^*$.

Konstruktion der Kurven mit einem DGS

Die Untersuchungsergebnisse führen uns zur Vermutung, dass es sich bei den gesuchten Ortskurven um Kegelschnitte handelt. Das Parallelenpaar (Abb. 4c) stellt dabei einen entarteten Kegelschnitt dar. Mit den drei Eckpunkten des Ausgangsdreiecks und den drei Eckpunkten M_1 , M_2 und M_3 der oben konstruierten Parallelogramme kennen wir sechs Punkte für jede Ortskurve.

Ein Kegelschnitt ist bereits durch fünf Punkte, von denen keine drei kollinear sind, eindeutig bestimmt. Daher können wir mit einem DGS die zugehörigen Kegelschnitte konstruieren! Einige der so erzeugten Kurven sind in Abbildung 7 dargestellt. Sie bestätigen unsere Tastergebnisse und die Vermutung, dass es sich um Kegelschnitte handelt. Die abgebildeten verallgemeinerten Wallace-Geraden belegen, dass jeweils die Kollinearitätsbedingung für den Kurvenpunkt P erfüllt ist.

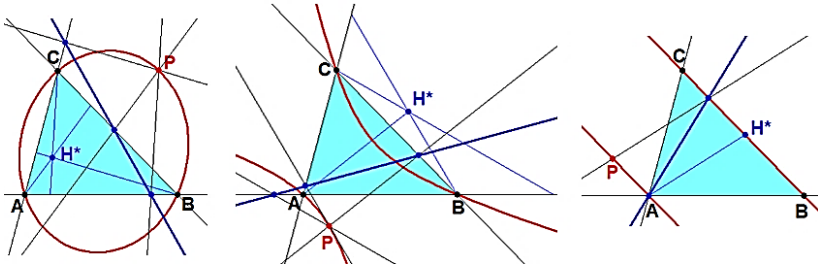


Abb. 7: Die mit einem DGS konstruierten Kegelschnitte mit den verallgemeinerten Wallace-Geraden der Kurvenpunkte P

Gleichungen der Kegelschnitte und Nachweis der Kollinearität

Ein allgemeiner *geometrischer* Nachweis für die Kollinearität der Parallelschnittpunkte ist mir nicht gelungen. Für einen rechnerischen Kollinearitätsnachweis ermitteln wir zunächst die Gleichungen der Kegelschnitte. Hierfür wählen wir das in Abbildung 8 dargestellte schiefwinklige Koordinatensystem mit dem Punkt A als Ursprung und den Seitengeraden AB und AC als Koordinatenachsen.

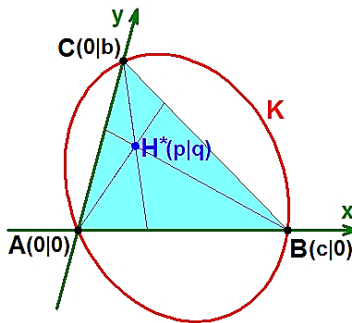


Abb. 8: Koordinatensystem

Die Gleichung

$$K: \quad kx^2 + my^2 + \lambda y + \mu x + vxy = 0 \quad (1)$$

stellt dann einen sinnvollen Ansatz für die Kegelschnittgleichung dar. Hat H^* die Koordinaten $x = p$ und $y = q$, so sind die Eckpunkte der oben beschriebenen Parallelogramme durch $M_1(c - p|b - q)$, $M_2(-p|b - q)$ und $M_3(c - p|-q)$ gegeben. Diese drei Eckpunkte liegen zusammen mit den

Eckpunkten $A(0|0)$, $B(c|0)$ und $C(0|b)$ des Dreiecks auf dem Kegelschnitt K . Ihre Koordinaten, eingesetzt in Gleichung (1), führen auf ein System von fünf Gleichungen mit den Lösungen $k = q(b - q)$, $m = p(c - p)$, $\lambda = pb(p - c)$, $\mu = qc(q - b)$ und $\nu = 2pq$.

Wir notieren die Kegelschnittgleichung in der Form

$$K: qx^2(b - q) + qx(2py + c(q - b)) + py(c - p)(y - b) = 0. \quad (2)$$

Für $p = 0$ und $q = 0,5b$ folgt z. B. aus Gleichung (2) die Kurvengleichung $b^2x(x - c) = 0$. Sie stellt die Gleichung des Parallelenpaares in Abbildung 4c bzw. 6c dar.

Nun können wir einen rechnerischen Kollinearitätsnachweis liefern.

Gegeben seien der Transversalenschnittpunkt H^* und ein Punkt $P(s|t)$ in der Dreiecksebene. Wir bestimmen die Gleichungen der durch den Punkt $P(s|t)$ verlaufenden Parallelen zu den Eckentransversalen AH^* , BH^* , CH^* und ermitteln ihre Schnittpunkte W_1 , W_2 und W_3 mit den Seitengeraden BC , AC und AB (Abb. 9).

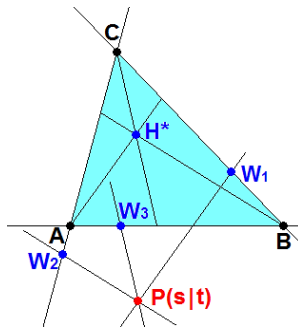


Abb. 9: Parallelschnittpunkte W_1 , W_2 und W_3

Wir erhalten

$$W_1 \left(\frac{c(qs - p(t - b))}{bp + qc} \mid \frac{b(pt - q(s - c))}{bp + qc} \right), \quad W_2 \left(0 \mid \frac{qs}{c - p} + t \right), \quad W_3 \left(\frac{tp}{b - q} + s \mid 0 \right).$$

Genau drei Schnittpunkte kann es aber auch nur dann geben, wenn die Nenner in den Koordinatentermen ungleich null sind. Die Gleichungen

$$bp + qc = 0, \quad c - p = 0 \quad \text{und} \quad b - q = 0$$

beschreiben dagegen die Lagen derjenigen Punkte H^* , die nicht zu drei Schnittpunkten führen. Es handelt sich dabei um Geraden durch die Eckpunkte des Dreiecks, die jeweils parallel zur gegenüberliegenden Dreiecksseite verlaufen (Abb. 10a). Mit Ausnahme der Eckpunkte des Ausgangsdreiecks (s. o.) führen alle Punkte H^* auf diesen Geraden zu entarteten Kegelschnitten in Form von *zwei sich schneidenden Geraden*. Diese Entartungsfälle gehören also nicht zu den von uns gesuchten Ortskurven.

Für $p = c$ und $q = -b$ führt beispielsweise Gleichung (2) auf die Kurvengleichung

$$bx(bx + c(y - b)) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee bx + c(y - b) = 0,$$

die wir als Gleichungspaar für die sich schneidenden Geraden AC und BC deuten können (Abb. 10b).

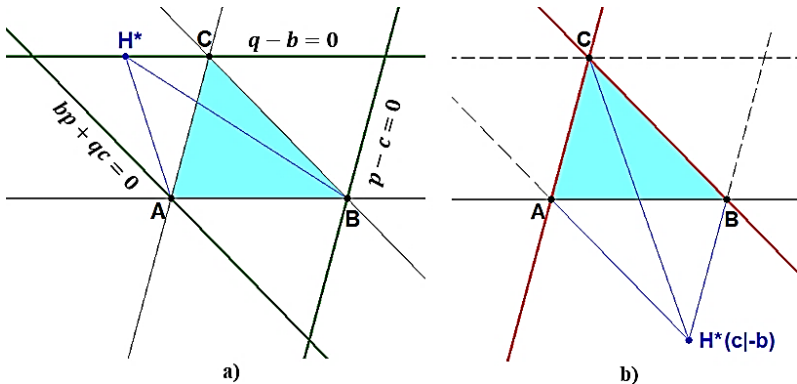


Abb. 10: a) Entartungsgeraden und b) Entartungsfall *zwei sich schneidende Geraden*

In diesem Entartungsfall verlaufen die Transversalen AH^* und BH^* parallel zu den Dreiecksseiten BC und AC . Für einen Punkt P auf AC gibt es daher unendlich viele Schnittpunkte W_2 , keinen Schnittpunkt W_1 falls $P \neq C$ und genau einen Schnittpunkt W_3 . (Der Punkt $P = C$ ist der Eckpunkt M_3 des von AH^* und BH^* aufgespannten Parallelogramms. Für diesen Punkt gibt es auch unendlich viele Schnittpunkte W_1 .)

Im Folgenden setzen wir voraus, dass H^* nicht auf den in Abb. 10a beschriebenen Geraden liegt. Die drei Schnittpunkte W_1 , W_2 und W_3 liegen

genau dann auf einer Geraden, wenn die Determinante $D_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

gleich null ist. Hier sind x_i, y_i die Koordinaten der Punkte W_i ($i = 1, 2, 3$). Wir erhalten

$$D_1 = x_1y_2 + y_1x_3 - y_2x_3 = \frac{bc \cdot K(s,t)}{(p-c)(b-q)(bp+qc)}.$$

Dabei stimmt $K(s, t)$ mit dem Term auf der linken Seite der Kurvengleichung (2) überein, falls $x = s$ und $y = t$ gesetzt wird. Dies bedeutet: Die drei Schnittpunkte sind genau dann kollinear, wenn $K(s, t) = 0$ ist, wenn also $P(s|t)$ auf dem durch Gleichung (2) beschriebenen Kegelschnitt K liegt!

Zwischenergebnis

Der eingangs vorgenommene Perspektivwechsel hat uns zu einer Forschungsfrage geführt, die nun beantwortet ist: Die gesuchten Ortskurven sind Kegelschnitte in Form von Ellipsen und Hyperbeln und entartete Kegelschnitte in Form von Parallelenpaaren. Alle Kurven verlaufen als „Umkurven“ wie im klassischen Fall durch die Eckpunkte des Ausgangsdreiecks. Sie werden „erzeugt“ von Transversalschnittpunkten H^* , die außerhalb der drei Entartungsgeraden in Abbildung 10a liegen. Alle Ergebnisse gelten auch für stumpfwinklige Dreiecke, bei denen der Höhenschnittpunkt außerhalb des Ausgangsdreiecks liegt. Die vorliegende Situation hält aber noch weitere Überraschungen bereit.

Feuerbach-Kegelschnitte

H^* sei ein Transversalschnittpunkt außerhalb der Entartungsgeraden und P ein Punkt auf dem zugehörigen Kegelschnitt K . Wir zeigen zunächst, dass der Mittelpunkt Q der Strecke H^*P , analog zur klassischen Situation, auf der verallgemeinerten Wallace-Geraden von P liegt.

Befindet sich P in einem Eckpunkt des Dreiecks ABC , so ist diese Eigenschaft trivialerweise erfüllt, denn H^*P stellt ja in diesem Fall die verallgemeinerte Wallace-Gerade von P dar.

Ist P einer der oben beschriebenen Parallelogrammeckpunkte M_1, M_2 bzw. M_3 (Abb. 6), so ist die Lagebeziehung des Mittelpunktes Q ebenfalls unmittelbar einsichtig: Gilt beispielsweise $P = M_1$, so liegt der Mittelpunkt Q der

Strecke H^*P im Mittelpunkt der Dreiecksseite BC , da sich die Diagonalen H^*P und BC des Parallelogramms CH^*BM_1 in ihren Mittelpunkten schneiden. Und die Trägergerade der Dreiecksseite BC haben wir bereits als verallgemeinerte Wallace-Gerade von P erkannt. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Eckpunkte M_2 und M_3 .

$P(s|t)$ sei nun ein beliebiger Punkt auf dem Kegelschnitt K . Der Mittelpunkt Q der Strecke H^*P ist dann gegeben durch $Q\left(\frac{1}{2}(p+s)\left|\frac{1}{2}(q+t)\right.\right)$. Die Wallace-Gerade von Punkt P geht durch die Schnittpunkte W_1, W_2 und W_3 (Abb. 9). Daher können wir den allgemeinen Nachweis dafür, dass Q auf dieser Geraden liegt, auf einen Kollinearitätsnachweis zurückführen, in dem wir beispielsweise zeigen, dass W_2, W_3 und Q kollinear sind. Diese drei Punkte sind genau dann kollinear, wenn die Determinante $D_2 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_Q \\ y_2 & y_3 & y_Q \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ gleich null ist. Hier stehen in den ersten beiden Zeilen die Koordinaten der Punkte W_2, W_3 und Q . Wir erhalten

$$D_2 = -y_2(x_3 - x_Q) + x_3y_Q = \frac{K(s,t)}{2(p-c)(b-q)}.$$

Nach Voraussetzung ist der Nenner von D_2 ungleich null. Die drei Punkte sind also genau dann kollinear, wenn $K(s, t) = 0$ ist. Dies ist aber der Fall, weil $P(s|t)$ laut Voraussetzung auf dem Kegelschnitt K liegt.

Bewegt sich nun der Punkt P auf dem Kegelschnitt K , so wandert der Mittelpunkt Q der Strecke $\overline{H^*P}$ auf einem Kegelschnitt der gleichen Art, dem *Feuerbach-Kegelschnitt*. Er stellt den *verallgemeinerten Feuerbachkreis* des Dreiecks ABC dar und entsteht aus dem ursprünglichen Kegelschnitt K durch eine zentrische Streckung mit dem Streckzentrum H^* und dem Streckfaktor $k = 0,5$. Im klassischen Fall geht auch der Feuerbachkreis aus dem Umkreis des Dreiecks durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $k = 0,5$ hervor. Hier stellt der Höhenschnittpunkt H das Streckzentrum dar und der Mittelpunkt des Feuerbachkreises liegt genau in der Mitte zwischen dem Umkreismittelpunkt und dem Höhenschnittpunkt.

Die Eckentransversalen haben mit dem Kegelschnitt K neben dem Eckpunkt noch einen zweiten gemeinsamen Punkt, der genau gegenüber dem Eckpunkt liegt und dessen verallgemeinerte Wallace-Gerade offensichtlich durch den Fußpunkt der Eckentransversale verläuft. Folglich liegt dieser

Fußpunkt genau in der Mitte von H^* und diesem zweiten Punkt. Daher verläuft der Feuerbach-Kegelschnitt durch die Mittelpunkte der Abschnitte AH^* , BH^* und CH^* und durch die drei Fußpunkte der Eckentransversalen, die im klassischen Fall den Fußpunkten der Höhen entsprechen. Zudem liegen die Seitenmitten des Dreiecks ABC auf dem Feuerbach-Kegelschnitt, wie zu Beginn dieses Abschnittes gezeigt. Ist nun der Transversalenschnittpunkt H^* der Höhenschnittpunkt H , dann ist der Feuerbach-Kegelschnitt der Feuerbachkreis mit seinen neun besonderen Punkten.

Die Abbildung 11 zeigt für die verschiedenen Lagen von H^* die Kegelschnitte K und die zugehörigen Feuerbach-Kegelschnitte K_F . Zusätzlich sind für bestimmte Kurvenpunkte P die verallgemeinerten Wallace-Geraden g und die Mittelpunkte Q eingezeichnet. In Abbildung 11c ist der Feuerbach-Kegelschnitt ebenfalls ein Parallelenpaar. Er besteht aus der Geraden BC und der dazu parallelen Geraden durch den Mittelpunkt Q .

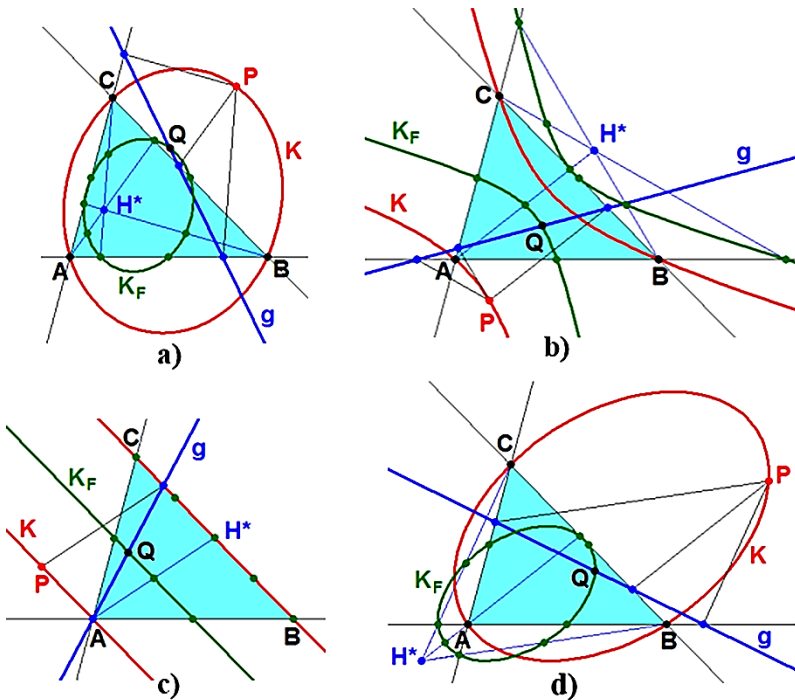


Abb. 11: Kegelschnitte K , verallgemeinerte Wallace-Geraden g , Mitten Q der Strecken $\overline{H^*P}$ und Feuerbach-Kegelschnitte K_F

Rückblick und Ausblick

Eine geringfügig veränderte Sichtweise auf die klassische geometrische Situation zur Erzeugung der Wallace-Geraden hat uns letztlich zu einem ertragreichen Erkundungsprozess geführt und so das heuristische Potenzial der Strategie „Perspektivwechsel“ für das entdeckende Lernen aufgezeigt. Mit einem weiteren Ergebnis schließen wir den Entdeckungsprozess ab.

Bekanntlich liegen der Umkreismittelpunkt, der Schwerpunkt und der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks auf einer Geraden, der sogenannten Euler-Geraden. Es gibt auch hier eine verallgemeinerte Euler-Gerade: Wir bestimmen zunächst den Mittelpunkt M des Kegelschnittes K , indem wir auf der linken Seite der Kegelschnittgleichung (2) die partiellen Ableitungen nach x und y bilden und gleich null setzen. Für die Koordinaten von M erhalten wir dann $x_M = \frac{1}{2}(c - p)$ und $y_M = \frac{1}{2}(b - q)$. Der Schwerpunkt des Ausgangsdreiecks ist durch $S\left(\frac{c}{3} \mid \frac{b}{3}\right)$ gegeben. Der Leser kann sich nun leicht von der Kollinearität der Punkte M , S und H^* überzeugen (Abb. 12a). Wie im klassischen Fall liegt der Mittelpunkt F des Feuerbach-Kegelschnittes auch auf der verallgemeinerten Euler-Geraden genau in der Mitte zwischen H^* und M .

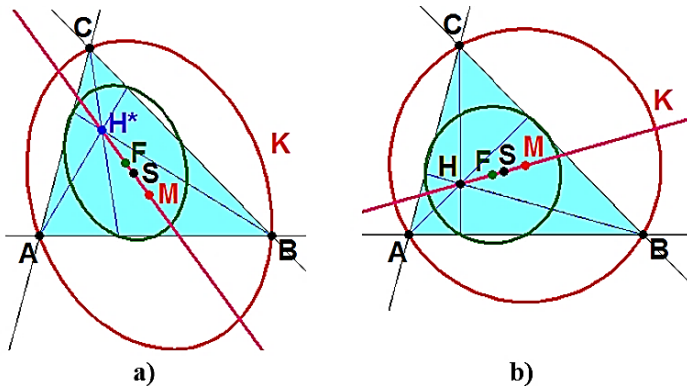


Abb. 12: a) verallgemeinerte Euler-Gerade, b) klassische Euler-Gerade

Wird der Punkt H^* aus dem Außenbereich langsam in das Innere des Dreiecks in Richtung des Höhenschnittpunktes H bewegt, so lassen sich die Veränderungen der Kegelschnitte K und der Feuerbach-Kegelschnitte K_F mit einem DGS sehr schön beobachten: Hyperbeln gehen in Parallelenpaare

und schließlich in Ellipsen über, bis letztlich für $H^* = H$ der Umkreis und der Feuerbachkreis des Dreiecks mit der klassischen Euler-Geraden erscheinen (Abb. 12b).

Literatur

Coxeter, H. S. M.; Greitzer, S. L.(1983). Zeitlose Geometrie, Klett Studienbücher.

Halbeisen, L.; Hungerbühler, N.; Läubli, J. (2016). Mit harmonischen Verhältnissen zu Kegelschnitten, Springer Spektrum.

„Regelmäßige“ räumliche Polygone

Heinz Schumann

Zusammenfassung: Die Theorie räumlicher Polygone, insbesondere die der „regelmäßigen“ räumlichen Polygone, ist als Bestandteil der räumlichen Formenkunde wenig entwickelt. In dieser Arbeit wird die Seiten- und Winkelgleichheit zur Definition der regelmäßigen ebenen Polygone auf die räumlichen Polygone übertragen. Mittels Dynamischer Raumgeometrie-Systeme ergeben sich für solche Polygone niedriger Eckenanzahl elementargeometrische Konstruktionsmöglichkeiten. Sieben Typen regelmäßiger räumlicher Sechsecke gewinnt man durch Konstruktion. Ein koordinatengeometrischer Beweis nach der Brute-Force-Methode für die vollständige Erfassung aller Typen „regelmäßiger“ räumlicher Sechsecke wird skizziert. Anschließend werden „regelmäßige“ räumliche Sieben- und Achtecke angegeben – und eine Präzisierung des verwendeten Regelmäßigkeitsbegriffs vorgenommen.

Einleitung

Über regelmäßige räumliche Polygone (3D-Polygone) ist bis heute kaum etwas bekannt. Das kann man auch beim Recherchieren darüber im Internet feststellen.

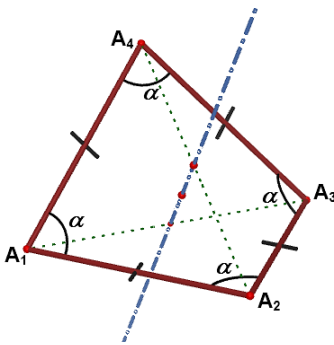


Abb. 1: Regelmäßiges räumliches Viereck

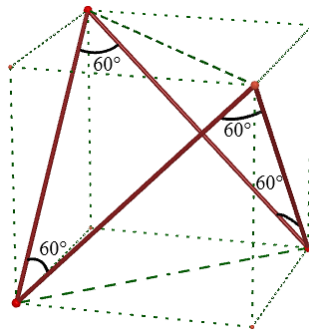


Abb. 2: Regelmäßiges räumliches Viereck als Kantenviereck des regelmäßigen Tetraeders

Es gibt nur einen Typ des regelmäßigen 3D-Vierecks (Abb. 1, $A_1A_2A_3A_4$), den man u. a. durch geeignetes Auffalten zweier kongruenter gleichschenkliger spitzwinkliger Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $A_1A_3A_4$ um ihre gemeinsame Basis (A_1A_3) erzeugen kann; der Viereckswinkel α nimmt Werte zwischen 0° und 90° an (u. a. Schumann 2015). Das regelmäßige 3D-Viereck hat acht Deckabbildungen. Deckabbildungen sind, neben der Identität und drei Geraden-

spiegelungen, zwei Ebenenspiegelungen, eine Drehspiegelung und eine Punktspiegelung; das regelmäßige Viereck ist also „vollständig symmetrisch“, da ein n -Eck nicht mehr als $2n$ Kongruenzabbildungen als Deckabbildungen haben kann. Trägerpolyeder regelmäßiger 3D-Vierecke sind Tetraeder, deren Seitenflächen einander kongruente gleichschenklige Dreiecke sind. Ein besonderes regelmäßiges räumliches Viereck mit dem 60° -Winkel als Viereckswinkel wird von Kanten des regelmäßigen Tetraeders gebildet, in der Abbildung 2 aus Kanten des dem Würfel einbeschriebenen regelmäßigen Tetraeders.

Das räumliche 3D-Fünfeck ist immer planar (u. a. van der Waerden 1970); einen eleganten Beweis geben Bol und Coxeter (1972).

„Regelmäßige“ räumliche Sechsecke sind schnell gefunden, nämlich solche aus Kanten des Würfels (Abb. 3 und 4) oder aus Kanten des regelmäßigen Oktaeders bzw. des gleichkantigen dreieckigen Antiprismas (Abb. 5). Im Falle des Antiprismas handelt es sich um sein Petrie-Polygon; man kann auch Mantelpolygon oder antiprismatisches Polygon dazu sagen.

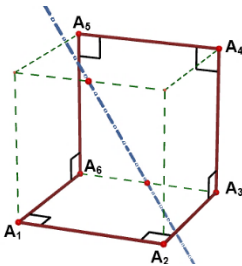


Abb. 3: „Regelmäßiges“ 3D-Sechseck als ein Kanten-Sechseck des Würfels

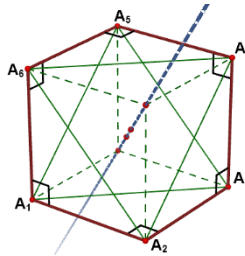


Abb. 4: „Regelmäßiges“ 3D-Sechseck aus Würfelkanten, die ein dreieckiges Antiprisma bilden

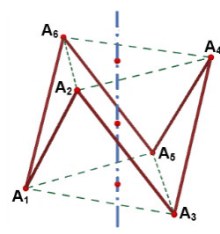


Abb. 5: Petrie-Polygon des regelmäßigen Oktaeders bzw. des gleichkantigen dreieckigen Antiprismas

Das „regelmäßige“ räumliche Sechseck als Kanten-Sechseck des Würfels in Abbildung 3 hat vier Deckabbildungen, neben der Identität sind das zwei Ebenenspiegelungen und eine Geradenspiegelung. Das „regelmäßige“ räumliche Sechseck als dreieckiges Antiprisma aus Würfelkanten (Abb. 4) hat sechs Deckabbildungen: Die Drehungen an einer dreizähligen Raumdiagonalen-Achse des Würfels und drei Drehspiegelungen, eine davon ist die Spiegelung am Mittelpunkt des Würfels. Das Mantelpolygon des gleichkantigen dreieckigen Antiprismas (Abb. 5) hat die maximale Anzahl von zwölf

Deckabbildungen: Drei dreizählige Achsen (die 0° -Drehung ist dabei zweimal zuviel gezählt), drei Ebenenspiegelungen, drei Drehspiegelungen und eine Punktspiegelung; es ist also vollständig symmetrisch.

Anmerkung: Räumliche Sachverhalte sind aber im Allgemeinen komplexer als in der Ebene. Das stellt sich schon bei der Konstruktion „regelmäßiger“, d. h. seiten- und winkelgleicher räumlicher Sechsecke (3D-Sechsecke) heraus. Dabei verwenden wir einen recht allgemeinen Polygonbegriff: Ein geschlossener Streckenzug im „Raum“ mit mehr als drei Eckpunkten, die nicht in derselben Ebene liegen, ist ein räumliches Polygon (Vieleck).

Dynamische Raumgeometrie-System, wie Cabri 3D, dienen der Exploration und Konstruktion (siehe u. a. Schumann 2007).

Konstruktion von ebensymmetrischen Typen des „regelmäßigen“ 3D-Sechsecks

Wir betrachten jetzt das Mantelpolygon dreieckiger Antiprismen kongruenter Grund- und Deckfläche. So kann man drei Formvariationen seiten- und winkelgleicher 3D-Sechsecke nach der Größe ihrer Winkel unterscheiden, je nachdem dieser gleich 60° bzw. kleiner oder größer als 60° ist (Abb. 6-8).

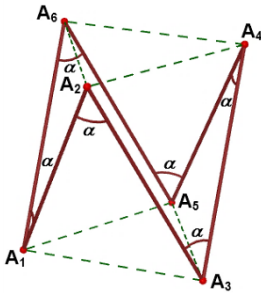


Abb. 6: „Regelmäßiges“ antiprismatische Polygon mit $\alpha < 60^\circ$

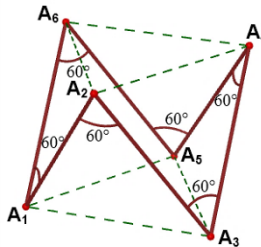


Abb. 7: „Regelmäßiges“ antiprismatische Polygon mit $\alpha = 60^\circ$

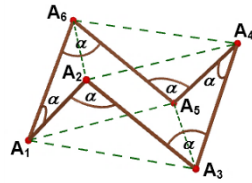


Abb. 8: „Regelmäßiges“ antiprismatische Polygon mit $\alpha > 60^\circ$

Aus diesen drei 3D-Sechsecken konstruiert man mittels Spiegelung beispielsweise an der Ebene $A_1A_2A_4A_5$ folgende „regelmäßigen“ 3D-Sechsecke (Abb. 9-11), da eine Ebenenspiegelung sowohl längen- als auch winkelmaßtreu ist.

Je nach Größe des Winkels α ergeben sich drei Typen, die zum Typ des antiprismatischen 3D-Sechsecks (Typ 1.1) hinzukommen:

Typ 1.2.1: für α mit $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ (Abb. 9)

Typ 1.2.2: für $\alpha = 60^\circ$ (Abb. 10)

Typ 1.2.3: für α mit $60^\circ < \alpha < 120^\circ$ (Abb. 11).

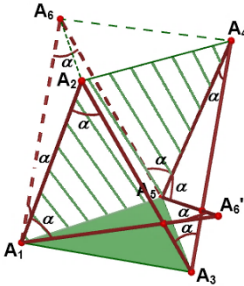


Abb. 9: Typ 1.2.1: Konstruktion für α mit $0^\circ < \alpha < 60^\circ$

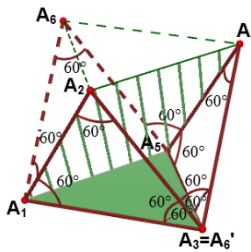


Abb. 10: Typ 1.2.2: Konstruktion für $\alpha = 60^\circ$

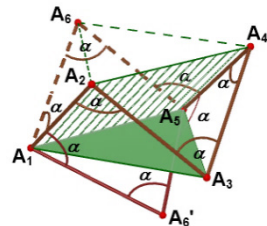


Abb. 11: Typ 1.2.3: Konstruktion für α mit $60^\circ < \alpha < 120^\circ$

Diese 3D-Sechsecke sind symmetrisch zu den mittelsenkrechten Ebenen der Seite A_1A_2 bzw. A_4A_5 und der Seite A_1A_5 bzw. A_2A_4 , die zueinander senkrecht stehen; daher sind die Sechsecke axialsymmetrisch zur Schnittgeraden dieser mittelsenkrechten Ebenen.

Typ 2.1: Die Symmetrie-Elemente dieses regelmäßigen 3D-Sechsecks sind die des zugehörigen geraden dreiseitigen Prismas (Abb. 12).

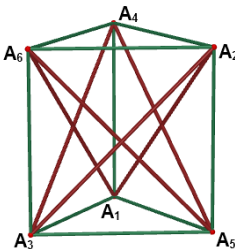


Abb. 12: Gerades dreiseitiges Prisma mit Seiten-diagonalen

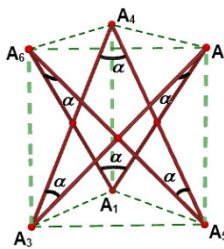


Abb. 13: Typ 2.1 „Seiten-diagonalen-Polygon“ des geraden dreiseitigen Prismas

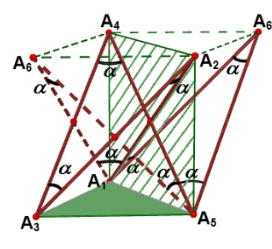


Abb. 14: Typ 2.2: Konstruktion mittels Ebenenspiegelung

Typ 2.2: Aus dem Sechseck-Typ 2.1 erhält man durch Spiegelung des Dreiecks $E_1E_5E_6$ an der Ebene $E_1E_2E_4E_5$ den Sechseck-Typ 2.2 (Abb. 13); dieser Typ ist punktsymmetrisch, er hat nur eine Symmetrie-Ebene und eine zur dieser Ebene senkrechte Symmetrie-Achse.

Konstruktion eines nicht ebenensymmetrischen Typs „regelmäßiger“ 3D-Sechsecke

Einen weiteren Typ seiten- und winkelgleicher 3D-Sechsecke, die nur ein Symmetrie-Element, nämlich eine zweizählige Symmetrie-Achse besitzen, erhält man mittels folgender Konstruktion:

Konstruktionsschritt 1: Wir konstruieren ein gleichschenkliges Trapez $A_1A_2A_3A_4^*$, dessen Deckseite gleiche Länge wie die Schenkel hat (Abb. 15). Die Deckseite bildet mit den Schenkeln jeweils den Winkel α zwischen 0° und 120° (in der Abbildung ist α stumpf). Um die Achse A_1A_2 legt man den Kreis durch A_4^* .

Konstruktionsschritt 2: Durch Bewegen von A_4^* auf diesem Kreis wird das Teildreieck $A_1A_3A_4^*$ so inkongruent verdreht, dass der Winkel α erhalten bleibt (Abb. 16). Die Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $A_1A_3A_4^*$ bilden miteinander einen entsprechenden Winkel.

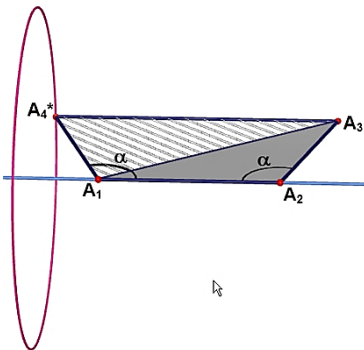


Abb. 15: Konstruktionsschritt 1

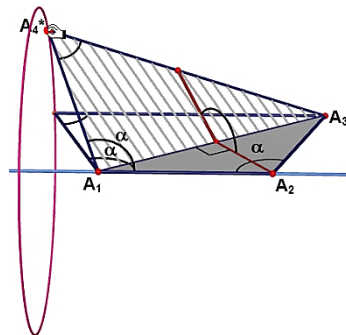


Abb. 16: Konstruktionsschritt 2

Konstruktionsschritt 3: In der mittelsenkrechten Ebene der Strecke $A_3A_4^*$ konstruiert man durch den Mittelpunkt dieser Strecke eine Gerade s , die mittels eines zweiten Geradenpunktes bewegt werden kann (Abb. 17).

Konstruktionsschritt 4: An der Geraden s werden die Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $A_1A_3A_4^*$ gespiegelt (Abb. 18). Diese Gerade s wird nun so gedreht, dass die Winkel $A_1A_4^*A_2'$ und $A_2A_3A_1'$ so groß wie α werden. Der Winkelwert α wird als Zwischenwert aus Gründen der Stetigkeit angenommen. Die Strecke $A_3A_4^*$ bildet dann eine Faltachse mit dem Faltwinkel zwischen den Dreiecken $A_1A_2A_3$ und $A_4^*A_1'A_2'$ bzw. $A_1A_2A_3$ und $A_4^*A_3A_1'$.

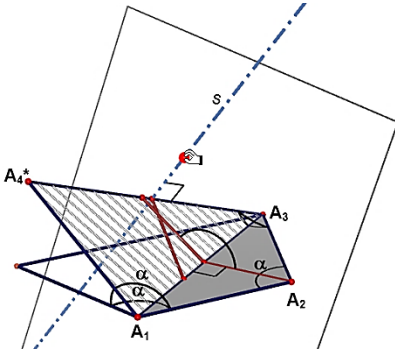


Abb. 17: Konstruktionsschritt 3

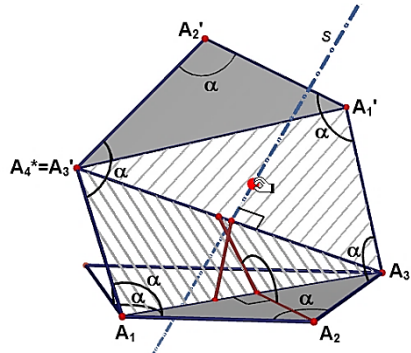


Abb. 18: Konstruktionsschritt 4

Die Abbildung 19 veranschaulicht eine Schar nur achsensymmetrischer „regelmäßiger“ 3D-Sechsecke des Winkelparameters α .

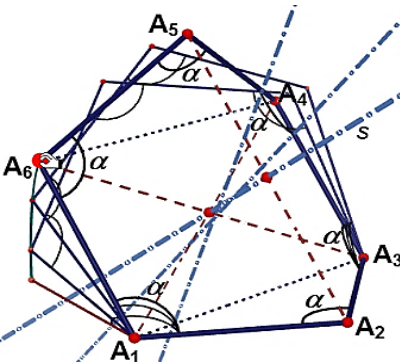


Abb. 19: Schar nur achsensymmetrischer „regelmäßiger“ 3D-Sechsecke

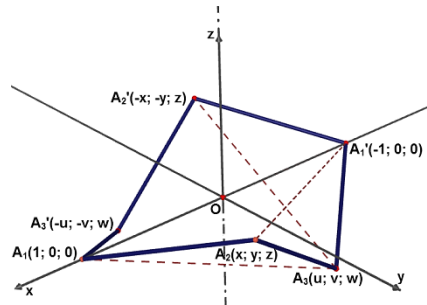


Abb. 20: Achsensymmetrisches „regelmäßiges“ 6-Eck (Ansatz-Figur)

Anmerkung: Insgesamt haben wir bisher sieben Typen regelmäßiger 3D-Sechsecke gefunden. Es stellt sich die Frage, ob das alle Typen „regelmäßiger“ 3D-Sechsecke sind.

Wir skizzieren hier einen koordinatengeometrischen Beweis für die vollständige Erfassung aller Typen „regelmäßiger“ räumlicher Sechsecke, bei dem wir voraussetzen können, dass jegliche Typen solcher Sechsecke stets symmetrisch sind (Frank & Schumann 2019).

Wir beschränken unsere Beweisskizze auf den Fall achsensymmetrischer 3D-Sechsecke. Für punktsymmetrische und ebenensymmetrische 3D-Sechsecke verläuft der Beweis ähnlich.

Ansatz: Als Symmetrie-Achse wählen wir die z -Achse des kartesischen Koordinatensystems und die an der z -Achse zu spiegelnden Punkte $A_1(1;0;0)$, $A_2(x;y;z)$, $A_3(u;v;w)$ (Abb. 20).

Wegen der Seitengleichheit folgt mit $|A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_1|$:

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = (u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2 = (u + 1)^2 + v^2 + w^2;$$

Wegen der Winkelgleichheit folgt mit $|A_1A_3| = |A_2A_1| = |A_3A_2|$:

$$(u - 1)^2 + v^2 + w^2 = (x + 1)^2 + y^2 + z^2 = (u + x)^2 + (v + y)^2 + (w - z)^2.$$

Daraus ergibt sich folgendes quadratisches Gleichungssystem für die Variablen x, y, z, u, v, w :

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = (u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2$$

$$(u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2 = (u + 1)^2 + v^2 + w^2$$

$$(u - 1)^2 + v^2 + w^2 = (x + 1)^2 + y^2 + z^2$$

$$(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = (u + x)^2 + (v + y)^2 + (w - z)^2.$$

Die computeralgebraische Auflösung dieses algebraischen Gleichungssystems nach vier der sechs Variablen in Abhängigkeit von den restlichen zwei führt auf sehr umfangreiche Terme.

Deshalb setzt man für diese zwei unabhängigen Variablen konkrete Werte ein und erhält so praktikable Lösungen. Folgende Variation der Paarung der unabhängigen Parameter ist vorzunehmen:

$(a;b)$, $(a;c)$, $(a;u)$, $(a;v)$, $(a;w)$, $(b;c)$, $(b;u)$, $(b;v)$, $(b;w)$, $(c;u)$, $(c;v)$, $(c;w)$, $(u;v)$, $(u;w)$, $(v;w)$.

Zusammen mit den jeweils zu berechnenden vier Koordinaten ergeben sich zur z -Achse symmetrische „regelmäßiges Sechsecke“. Zusätzlich zu den schon bekannten „regelmäßigen“ Sechsecktypen gewinnt man etwa mit den

Parameterwerten $(u;v) = (1;2)$ einen nur achsen- und punktsymmetrischen Typ mit $A_1(1; 0; 0)$, $A_2(1; 0; 4/3\sqrt{3})$, $A_3(1; 2; 2/3\sqrt{3})$ (Abb. 21).

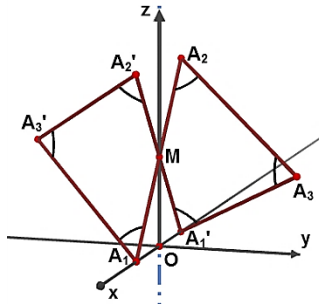


Abb. 21: Achsen- und punktsymmetrisches „regelmäßiges“ 3D-Sechseck

„Regelmäßige“ 3D-Siebenecke und 3D-Achtecke

Im Folgenden geben wir einige Typen regelmäßiger 3D-Siebenecke und 3D-Achtecke an.

Ein (rechtwinkliges) 3D-Siebeneck ist das in Abbildung 22, welches nur eine Ebenenspiegelung als Deckabbildung hat (Pech 2007). Die Abbildung 23 symbolisiert eine Schar regelmäßiger ebenensymmetrischer 3D-Siebenecke, die das vorstehende rechtwinklige Siebeneck als Sonderfall enthält. Einen weiteren Sonderfall bekommt man für $\alpha = 60^\circ$ (Abb. 24).

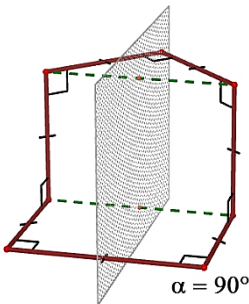


Abb. 22: „Regelmäßiges“ ebenensymmetrisches 3D-Siebeneck

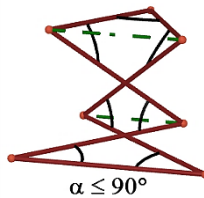


Abb. 23: „Regelmäßiges“ ebenensymmetrisches 3D-Siebeneck (Verallgemeinerung)

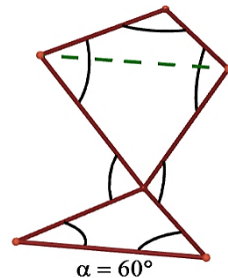


Abb. 24: „Regelmäßiges“ ebenensymmetrisches 3D-Siebeneck (Sonderfall)

Konstruktion regelmäßiger 3D-Achtecke: Das „einfachste“ Achteck dieser Art liefert der Kantenwürfel (Abb. 26). Weitere regelmäßige 3D-Achtecke

mit dem Achteckwinkel als Parameter ergeben sich in Analogie zur Konstruktion von ebenensymmetrischen Typen des „regelmäßigen“ 3D-Sechsecks (siehe weiter vorn): Wir beginnen mit einem regelmäßiges 3D-Achteck als Petrie-Polygon bzw. Mantelpolygon eines viereckigen Antiprismas (Abb. 27) und verfahren analog zur Konstruktion der 3D-Sechsecke:

Mittels entsprechender Ebenenspiegelung einer Ecke erhält man drei weitere Typen, die von der Winkelgröße abhängen (Abb. 28–30, dabei geben wir nur Ergebnisse an, in denen allein der Achteckwinkel markiert ist); die nichtquadratischen Ecken bilden 3D-Rauten, d. h. Rauten, die durch Auffalten ebener Rauten längs einer Diagonalen entstehen. Sie haben die gleiche Seitenlänge wie das Quadrat, wobei der Achteckwinkel zwischen 0° und 135° liegen kann. Aus diesen Typen gewinnt man mittels geeigneter Ebenenspiegelung jeweils einen weiteren Abkömmling (Abb. 31–33).

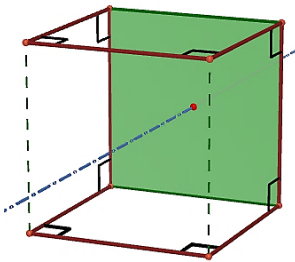


Abb. 26: „Einfachstes“ regelmäßiges 3D-Achteck (Typ 1)

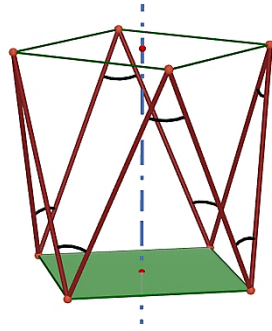


Abb. 27: Regelmäßiges 3D-Achteck als Petrie-Polygon eines viereckigen Antiprismas (Typ 2.1, antiprismatisches Achteck)

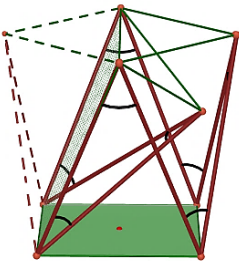


Abb. 28: 8-Ecktyp 2.2.1

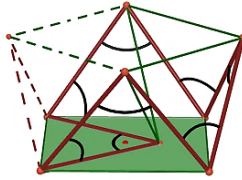


Abb. 29: 8-Ecktyp 2.2.2

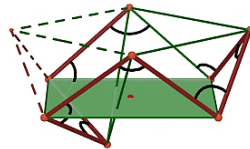


Abb. 30: 8-Ecktyp 2.2.3

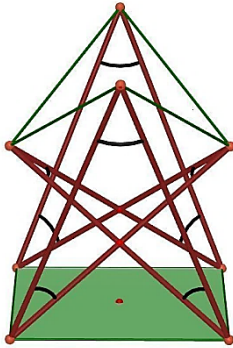


Abb. 31: 8-Ecktyp 2.3.1

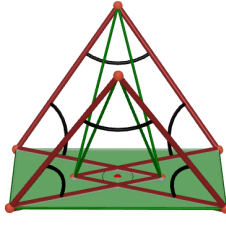


Abb. 32: 8-Ecktyp 2.3.2

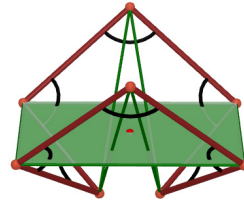


Abb. 33: 8-Ecktyp 2.3.3

Geht man von einer 3D-Raute aus, so sind die übrigen vier Ecken wieder Ecken eines Quadrats von gleicher Seitenlänge wie die 3D-Raute. Quadrat und 3D-Raute als Basisvierecke verhalten sich also quasi dual zueinander. Regelmäßige 3D-Achtecke mit einer ebenen Raute als Basisviereck kann es nicht geben, denn nur das Petrie-Polygon eines viereckigen Antiprismas mit quadratischer Grundfläche ist ein regelmäßiges 3D-Achteck. Die hier aufgeführte Sammlung von Typen regelmäßiger 3D-Achtecke ist natürlich nicht vollständig. So kann man, ähnlich wie nur axialsymmetrische 3D-Sechsecke, auch nur axialasymmetrische 3D-Achtecke konstruieren (Abb. 34); diese Konstruktion ist für regelmäßige räumliche $2n$ -Ecke, $n = 3, 4, 5, \dots$, verallgemeinerbar. Ein „regelmäßiges“ 3D-Achteck kommt auch als Kanten-Achteck des regelmäßigen Dodekaeders vor (Abb. 35, Sonderfall des Typs 2.3.3).

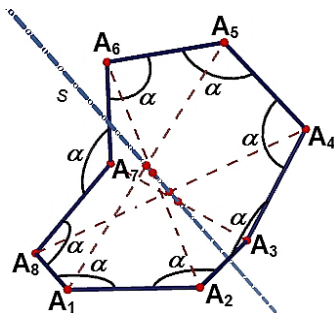


Abb. 34: Ein „regelmäßiges 3D-Achteck“ mit nur einer zweizähligen Symmetrie-Achse

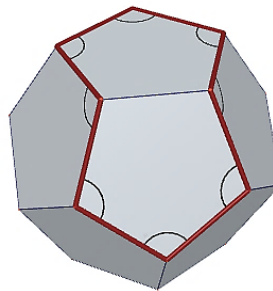


Abb. 35: Ein „regelmäßiges 3D-Achteck“ als Kanten-Achteck des regelmäßigen Dodekaeders

Anmerkung: Der Leser kann selbst weitere regelmäßige 3D-Polygone entdecken, z. B. solche als Kantenpolygone Johnsonscher Polyeder (konvexe Polyeder aus regelmäßigen Polygonen).

Präzisierung des Regelmäßigkeitsbegriffs

Es stellt sich die Frage, ob die Übernahme der Definition regelmäßiger ebener Polygone für räumliche Polygone sinnvoll ist, denn diese Definition subsummiert auch räumliche Polygone, die nicht regelmäßig „aussehen“, weil sie nicht eckenäquivalent wie die regelmäßigen ebenen Polygone sind. Es wäre deshalb zweckmäßig, für die Regelmäßigkeit räumlicher Polygone zur Seitengleichheit ihre Eckenäquivalenz zu fordern, welche ihre Winkelgleichheit einschließt. Nach dieser Definition blieben als regelmäßige räumliche Polygone, außer den seiten- und winkelgleichen Vierecken, übrig nur die $2n$ -eckigen Mantelpolygone der entsprechenden n -eckigen Antiprismen für $n = 3, 4, 5, \dots$ (Abb. 36) und die $2n$ -eckigen Polygone aus den Seitenflächendiagonalen der entsprechenden n -seitigen Prismen für $n = (2k+1)$ mit $k = 1, 2, 3, \dots$ (Abb. 37). Einen Beweis dafür haben Efremovitch und Ijjashenko schon 1962 geführt; ihr Beweis gilt sogar im n -dimensionalen (reellen) euklidischen Raum ($n \geq 3$).

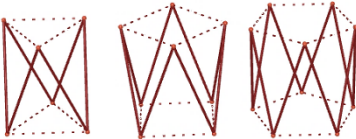


Abb. 36: Regelmäßige 3D-Polygone als Mantelpolygone von Antiprismen kongruenter regelmäßiger Grund- und Deckfläche

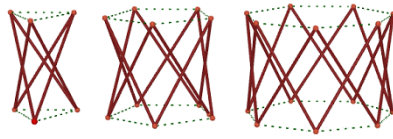


Abb. 37: Regelmäßige 3D-Polygone aus Seitenflächen-Diagonalen von geraden Prismen ungerader Eckenzahl

Literatur

- Bainville, E.; Laborde, J.-M. (2004-2015): Cabri 3D 2.1. Grenoble: Cabrilog (www.cabri.com).
- Bol, G.; Coxeter, H. S. M. (1972): Nachtrag zu „Ein Satz über räumliche Fünfecke“ (verfasst von B. L. van der Waerden nach Briefen von Bol und Coxeter). In: Elemente der Mathematik, Jg. 27, Heft 3, 63.

Efremovitch, V. A.; Iljjashenko, Ju. S. (1962): Regelmäßige Polygone im E^n (Russisch). Bulletin der Moskauer Universität, Nr. 5, S. 18 – 23.

Frank, R.; Schumann, H. (2019): Regelmäßige räumliche Sechsecke. Erscheint in: Informationsblätter der Geometrie (IBDG), Heft 1.

Pech, P. (2007): Selected Topics in Geometry with Classical Vs. Computer Proving. Singapur: World Scientific Publishing.

Schumann, H. (2007): Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Schumann, H. (2015). Zur Klassifikation räumlicher Vierecke. Informationsblätter der Geometrie (IBDG), Jg. 34, 2, 32-44.

Die Abbildungen wurden mit Cabri 3D erstellt; dafür kann man aber auch ein anderes Dynamisches Raumgeometrie-System, z. B. Geogebra, verwenden.

Wilhelm Fiedler: darstellende Geometrie und Förderung der Anschauung

Klaus Volkert¹

Zusammenfassung. Auf die Frage „Welche Geometrie braucht der Mensch?“ hatte Wilhelm Fiedler (1832 – 1912), Professor der darstellenden Geometrie und der Geometrie der Lage an der Eidgenössischen polytechnischen Schule in Zürich, der heutigen ETH, eine klare Antwort, die man in dem Slogan „Alle Geometrie muss darstellend werden“ auf den Punkt bringen kann. Was damit gemeint war und warum er damit zunehmend aus seiner Zeit fiel, das wird im folgenden Aufsatz erklärt. Man wird aber auch sehen, dass viele seiner Ideen heute noch aktuell und diskussionswürdig sind. Die Frage „Welchen Menschen braucht die Geometrie?“ hingegen hätte Fiedler wohl mit dem einfachen Hinweis abgetan: Er muss sich eben bemühen, denn – so Fiedler – jeder kann Geometrie lernen. Einer besonderen Begabung bedarf es hierfür nicht.

Angesichts des beträchtlichen Umfangs des Materials zu Fiedler, das bislang auch nur zu einem geringen Teil aufgearbeitet ist, muss ich mich hier auf einige wenige Aspekte beschränken. Vollständigkeit wird nicht behauptet.

Gliederung:

1. Biographie und Werke
2. Fiedlers Konzept und seine didaktische Begründung
3. Modelle
4. Zwei Fallbeispiele
5. Fazit

Biographie und Werk

Wilhelm Fiedler wurde 1832 in der sächsischen Stadt Chemnitz geboren. Chemnitz war ein Zentrum der Frühindustrialisierung mit einer aufstrebenden Textilindustrie („Manchester des Ostens“). Schon früh hatten sich lokale Kräfte bemüht, eine gewerblich-technische Ausbildung in Gestalt einer Schule zu etablieren; hieraus ging die Gewerbeschule hervor, die auch Fiedler besuchte. Trotz guter Leistungen war ihm ein Besuch des Gymnasiums aus finanziellen Gründen versagt. Nach Abschluss der Schule bezog Fiedler die Bergschule in Freiberg, wo er sich auch an praktischen Arbeiten, z. B. Vermessung von Stollen, beteiligte. Den größten Einfluss übte hier Julius

¹ Ich danke Herrn Robert Wengel (Wuppertal) für seine Hilfe bei der Erarbeitung dieses Artikels.

Weisbach, der Begründer der modernen Markscheidkunst, der auch Beiträge zur Axonometrie geleistet hat, auf ihn aus. Nach Abschluss der Schule wurde Fiedler 1852 Lehrer an der Werkmeisterschule in Freiberg. Diese Schule wurde kurze Zeit später nach Chemnitz verlegt und in die Gewerbeschule integriert. Somit war Fiedler mit etwas mehr als 20 Jahren wieder an seine alte Schule zurückgekehrt. Dort unterrichtete er Mathematik und Mechanik, nachdem der entsprechende Lehrer krankheitsbedingt ausfiel, auch darstellende Geometrie. Nach seinem eigenen Bekunden hatte Fiedler anfänglich wenig Interesse an diesem Fach, da ihn die mechanische Art und Weise, wie es gelehrt wurde, abstieß.² Mit der Übernahme des Unterrichts in darstellender Geometrie war eine wichtige Entscheidung gefallen, denn die darstellende Geometrie sollte ein großes Thema in Fiedlers Wirken werden.

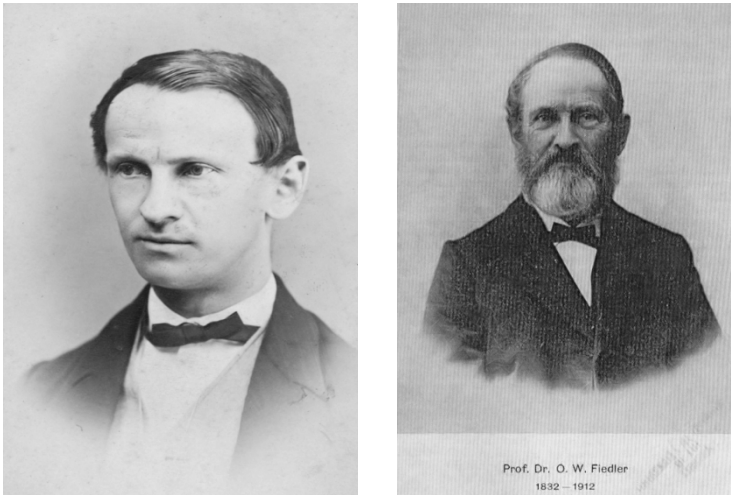


Abb. 1: Wilhelm Fiedler (links um 1870 etwa, rechts zirka 30 Jahre später)

In Chemnitz entfaltete Fiedler enorme Aktivitäten, u. a. durch viele öffentliche Vorträge zu Fragen der Wissenschaftsgeschichte und der Meteorologie, einem Gebiet, für das er sich zeitlebens begeisterte. Fiedler veröffentlichte unter dem Pseudonym Dr. H. F. Willer ein von Jacob Grimm inspiriertes Buch zur Mythologie und mehrere Aufsätze zu mathematischen

² Vgl. Fiedler 1907.

Fragen. Anfang 1859 promovierte er *in absentia* in Leipzig mit einer Arbeit zum System der darstellenden Geometrie (vgl. Abb. 2), womit ein Leitmotiv seiner weiteren Arbeiten benannt war.

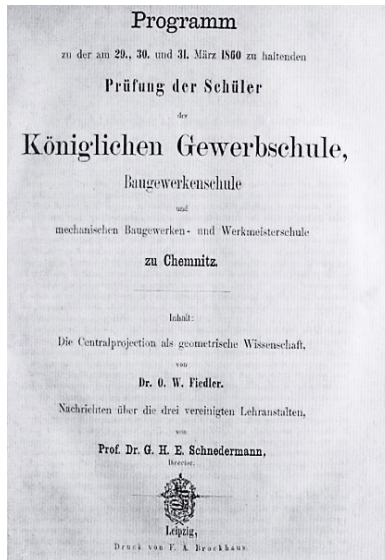


Abb. 2: Titelblatt der Druckfassung von Fiedlers Dissertation
(erschieden als wissenschaftliche Beilage zum Programm seiner Schule 1860)

August Ferdinand Möbius war Gutachter dieser Arbeit; er fand sie gut gemacht mit interessanten Ideen, merkte aber an, dass man den Inhalt wohl auch ohne Verluste auf halb so vielen Seiten hätte darstellen können. Das System war ein wichtiges Anliegen Fiedlers. Allerdings verstand er darunter keinen axiomatisch-deduktiven Aufbau, wie er gegen Ende des 19. Jhs. für die Geometrie wichtig werden sollte, sondern eher ein organisch gewachsenes Ganzes im Geiste von Jakob Steiners Werk „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ (1832). So schreibt Fiedler 1877 in seinem einzigen rein didaktischen Aufsatz:

Und so regt sich heute so lebhaft, nein lebhafter als jemals früher, das Bedürfnis nach einem organischen Aufbau des Systems unserer Kenntnisse vom Raum und seinen Gestalten.³

³ Fiedler 1877, 84.

In Chemnitz kam Fiedler die wohl erfolgreichste Idee seiner Laufbahn – nämlich, die Werke von George Salmon ins Deutsche zu übersetzen. In einem 1859 geschriebenen Brief schlug er diesem seine Idee vor, von der sich Salmon angetan zeigte.⁴ Schon wenig später erschien die deutsche Bearbeitung von Salmons Buch über Kegelschnitte, die ein Bestseller wurde. Allein zu Fiedlers Lebzeiten wurden sieben Auflagen dieses Buches publiziert; nach seinem Tod wurde das Werk von Friedrich Dingeldey nochmals herausgegeben. Drei weitere Werke (zur Raumgeometrie, zur Theorie höherer Kurven und zur Algebra) von Salmon erschienen in deutscher Bearbeitung von Fiedler; das Kürzel Salmon-Fiedler wurde gewissermaßen zu einem Markenzeichen; Generationen von Mathematikern haben aus diesen Büchern die damals moderne Algebra und Geometrie inklusive Invariantentheorie gelernt. Charakteristisch ist der selbstverständliche Gebrauch von analytischen und algebraischen Hilfsmitteln zu geometrischen Zwecken, auch dies ganz im Sinne des Fiedlerschen Systems. Es muss betont werden, dass Fiedler wirklich deutschsprachige Bearbeitungen vorlegte, keineswegs nur eine Übersetzung. Salmon gab ihm freie Hand hierzu.

1864 wurde Fiedler an das Polytechnikum in Prag berufen als Professor der darstellenden Geometrie, 1867 dann nach Zürich. Hier hielt er 40 Jahre lang Vorlesungen über viele geometrische Themen; darunter routinemäßig die darstellende Geometrie für angehende Ingenieure und Architekten. Wichtig hierbei war, dass das Polytechnikum in Zürich – im Unterschied zu fast allen anderen deutschsprachigen Polytechnika – auch Lehrer ausbildete. Hier konnte Fiedler über viele aktuelle geometrische Themen lesen, z. B. auch über nichteuklidische Geometrie, projektive Koordinaten oder Kurven- und Flächentheorie. Um den Umfang der Geometrieausbildung zukünftiger Lehrer am Züricher Polytechnikum etwas deutlicher zu machen, seien hier die Vorlesungen zitiert, die der Normallehrplan von 1873 im Bereich Geometrie für diese Studierenden vorsah⁵:

Analytische Geometrie der Ebene (4+1), Analytische Geometrie des Raumes (2+1), Synthetische Geometrie (3+1), Darstellende Geometrie mit

⁴ Die sehr umfangreiche Korrespondenz Fiedlers (ca. 1750 Briefe) wird im ETH-Archiv aufbewahrt (Hs 87). Leider ist bislang nur ein winziger Bruchteil davon inhaltlich erschlossen.

⁵ Insgesamt dauerte das Studium vier Jahre. Die Zahlen in Klammern geben die vorlesungs- und Übungsstunden an.

Übungen (4+3), Einleitung in die synthetische Geometrie (3+1), Geometrie der Lage (3+1), Technisches Zeichnen (2), Determinanten in geometrischer Anwendung (2), Flächen 2. und 3. Grades (2), Algebraische Kurven (4).

Fiedlers Konzept und seine didaktische Begründung

1872 erschien erstmals Fiedlers Lehrbuch zur darstellenden Geometrie⁶, das noch zwei weitere Auflagen erlebte⁷. In ihm versuchte er, seine Ideen vom Aufbau der Geometrie umzusetzen.

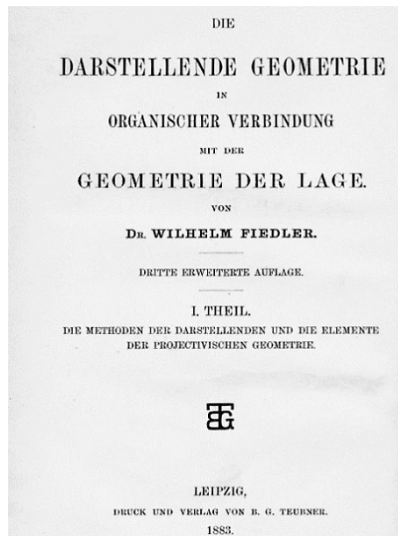


Abb. 3: Titelblatt des ersten Bandes von Fiedlers darstellender Geometrie (dritte Auflage in drei Bänden 1883 – 1885)

Um Fiedlers Ansatz verstehen zu können, muss man sehen, dass für ihn die darstellende Geometrie eine Grundlagenwissenschaft war, die das Fundament legte, für die vielfältigen zeichnerischen Verfahren, die die Technik verwendet. Vereinfacht ausgedrückt: Es geht nicht darum, zu lernen, wie man ein Werkstück zeichnet, sondern darum, welche Idee dieser Zeichnung

⁶ Vgl. Abb. 3. Die Einleitung dieses Buches, insbesondere die ergänzte Version von 1875 enthält zahlreiche didaktische und hochschulpolitische Hinweise.

⁷ Die dritte Auflage (1883ff) umfasste drei Bände, der erste Band dieser Auflage wurde sogar noch einmal aufgelegt (1904).

zu Grunde liegt. Das kann man allerdings nur, indem man viel zeichnet. Die Eigenaktivität der Schüler war in Fiedlers Augen absolute Notwendigkeit. Darstellende Geometrie war keine Katheterwissenschaft für ihn, sondern eine Wissenschaft, die sich am Reißbrett entfaltet. Zu beachten ist, dass es neben der darstellenden Geometrie in allen Ingenieurstudiengängen spezifische Lehrveranstaltungen zum Zeichnen gab, etwa Konstruktionszeichnen für Maschinenbauer oder Perspektive für Bauingenieure und Architekten.⁸

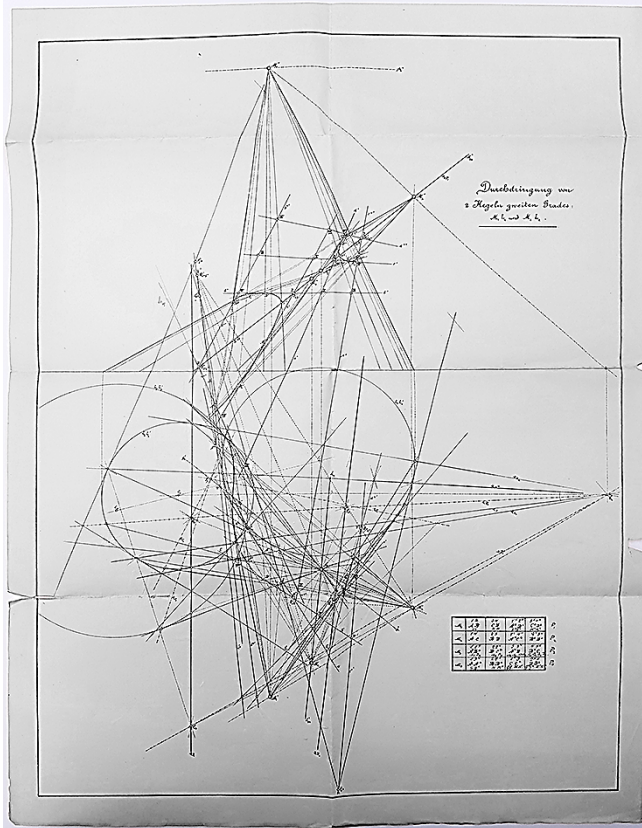


Abb. 3: Zeichnung in Fiedlers Nachlass: Durchdringung zweier Kegel in Grund- und Aufriss⁹

⁸ Die Lehre und Rolle der darstellenden Geometrie an den Polytechnika in den deutschen Ländern bis etwa 1900 behandelt die Dissertation von Nadine Benstein (Wuppertal 2019).

⁹ ETH-Bibliothek, Hochschularchiv Hs 87a : 29.

Dabei legte Fiedler, als erfahrener Hochschullehrer, Wert auf den Zeichensaal (in Zürich: Zeichnungssaal), dem häuslichen Zeichnen misstraute er, zum einen, weil er meinte, dies sei ein Weg, die Wichtigkeit der darstellenden Geometrie herabzustufen, zum anderen, weil sich so Möglichkeiten des Betrügens eröffneten. Neben seinen Assistenten war er im Zeichensaal oft präsent, um die Schüler anzuleiten – und wohl auch ein bisschen zu überwachen.¹⁰

Fiedler hat sich nicht als Didaktiker, eher als erfahrener Praktiker verstanden. Dennoch gibt es eine Publikation, in der er seine Ansichten zur Lehre sowohl an Schule, insbesondere an der Mittelschule¹¹, als auch an der Hochschule darlegte. Im Übrigen war er durchaus der Meinung, dass auch der Universität die darstellende Geometrie gut täte.¹² Es handelt sich um den Aufsatz „Zur Reform des geometrischen Unterrichts“, der 1877 in der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich erschien und kurze Zeit später eine italienische Übersetzung erlebte. Daneben ist die Vorrede zu seinem Werk „Die darstellende Geometrie“ von Interesse, der Inhalt des Buches ist gewissermaßen die Umsetzung von Fiedlers Ideen.

Das vornehmste Ziel des Unterrichts in darstellender Geometrie war für Fiedler die Entwicklung und Förderung der Raumschauung – Grundlage aller Geometrie. Dabei ließ er sich natürlich nicht den Hinweis auf Pestalozzi entgehen und dessen Forderung „der Unterricht solle mit der Anschauung beginnen und stetsfort mit der Anschauung in Wechselwirkung erhalten werden“.¹³ Es geht darum, von der sinnlichen Anschauung überzuleiten zur geistigen Anschauung; während erstere noch z. B. das Stabmodell einer Fläche als Zeichenvorlage benötigt, ist dieses für letztere nicht mehr notwendig. Die darstellende Geometrie macht sich gewissermaßen selbst entbehrlich.¹⁴ Übergeordnetes Ziel ist die Errichtung eines organisch gewachsenen Systems; in dessen Fehlen sah Fiedler die Hauptschwäche des

¹⁰ Ein großer Streit mit Studierenden – Fiedler hatte deren mehrere – ergab sich, als Fiedler herausfand, dass manche Studenten ihre Zeichnungen von anderen gegen Bezahlung anfertigen ließen.

¹¹ Das Schweizer Pendant zum Gymnasium.

¹² Sein langjähriger Briefpartner Felix Klein unternahm denn auch entsprechende Versuche in Leipzig und Göttingen, über die er sich mit Fiedler brieflich austauschte.

¹³ Fiedler 1877, 94.

¹⁴ Vgl. Fiedler 1875, XXVI.

herkömmlichen Geometrieunterrichts.¹⁵ Die Stärke seines Ansatzes sah Fiedler darin, dass „sich Alles aus meiner Grundidee naturgemäss ergibt.“¹⁶ Das große Vorbild hierbei ist – wie bereits bemerkt - J. Steiner mit seinem Buch „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ (1832). Ausgangspunkt ist der Sehprozess und seine mathematische Idealisierung in der Zentralperspektive aufgefasst als Abbildung des Raumes auf eine Ebene. Von hier aus ergibt sich ein direkter Zugang zur projektiven Geometrie, insbesondere zu deren Elementarformen im Sinne von Jakob Steiner. Die projizierenden Strahlen bilden ein Strahlenbündel, das Bild ist ein Schnitt desselben und die Ebene erscheint als Punktfeld. Fiedler führt schon früh in seinem Buch das Doppelverhältnis ein und betrachtet dieses als Invariante. Die in der Technik wichtige Parallelprojektion ergibt sich, wenn man das Projektionszentrum ins Unendliche rückt. Die Dreitafelprojektion wird bei Fiedler erst sehr spät erwähnt in seinem Buch¹⁷; sie ist gewissermaßen eine Technik, deren Grundlagen man allererst verstehen muss. Mechanische Ausführung nach auswendig gelernten Regeln lehnte Fiedler strikt ab.

*[...] und andererseits nur durch solche vielseitige geistige und graphische Arbeit kann jenes eigentliche zugleich im höchsten Sinne praktische Ziel der Wissenschaft, die Durchbildung der Raumanschauung erreicht werden; es ist eine Durchbildung an der Hand der zeichnenden Darstellung, aber mit dem Endziele, die ideelle Anschauung so lebendig und so sicher zu machen, dass jene die Zeichnung, ganz oder doch auf weite Strecken erspart werden kann.*¹⁸

Dem Zeichnen kommt also bei der Schulung der Raumanschauung eine wichtige Rolle zu:

*Es giebt kaum eine für den Studirenden nützlichere Übung als das Zeichnen von Kurven, ...*¹⁹

Das Üben und damit die Eigenaktivität sind von zentraler Wichtigkeit:

¹⁵ Vgl. Fiedler 1877, 84. Fiedler spricht auch gerne vom „Gebäude“.

¹⁶ Fiedler 1875, XVIII.

¹⁷ In Fiedler 1875 wird sie ab S. 154 entwickelt. Im Anhang finden sich einige genauere Informationen zum Aufbau von Fiedlers Buch.

¹⁸ Fiedler 1875, V.

¹⁹ Fiedler 1873, 55.

[...]; es bildet vielmehr die Unterlassung solcher Uebungen [wie das Zeichnen nach Stabmodell; K. V.] heutzutage eines der wesentlichsten Hindernisse des Verständnisses dieser Elemente.²⁰

Um einen Eindruck von Fiedlers Ideen und dem Anspruchsniveau, das er in der darstellenden Geometrie an den Tag legte, zu geben, seien seine Vorschläge zitiert „zum bessern Verständniss und der Verwerthung der Definitionen“²¹ – also von eher einführendem Charakter:

Eine drei- oder mehrseitige Ecke, ein Tetraeder, Parallelepipet, etc. ist gegeben – respective liegt etwa nach Stabmodell gezeichnet vor; man kennt von einer geraden Linie die beiden Punkte, in welchen sie zwei der zugehörigen Flächen durchstösst, und verlangt zu zeigen, wie die Schnittpunkte derselben mit den übrigen Flächen und die Querschnitte der Gesamtoberfläche der Ecke und des Körpers mit einer durch die Gerade nach einem gegebenen Punkte einer Fläche oder mit den durch sie nach den Eckpunkten des Körpers gehenden Ebenen zu bestimmen respective zu verzeichnen sind. Oder es ist der Querschnitt der Körperoberfläche mit einer Ebene zu construiren, die durch drei auf solchen Geraden gegebenen Punkte bestimmt ist; oder es sind die durch einen so gegebenen Punkt gehenden Transversalen zu den Paaren der nicht in einer Ebene liegenden Kanten des Körpers respective ihre Querschnitte mit diesen Kanten anzugeben; etc.²²

Fiedlers projektive Geometrie ist stets eine, die von der Euklidischen ausgeht und diese erweitert; eine autonome projektive Geometrie interessierte ihn nicht. Deshalb ist es für ihn unbedenklich, metrische und Anordnungseigenschaften auch in der projektiven Geometrie zu verwenden.

Übrigens ergibt sich in Fiedlers System eine Einteilung gewisser geometrischer Abbildungen geradezu von selbst. Beschränkt man sich auf die Projektion einer Objekt- auf eine Bildebene, so erhält man je nach Projektionsart (zentral oder parallel) und relativer Lage der Ebenen (parallel oder schneidend) vier verschiedene Abbildungstypen (Translation, zentrische Streckung, Affinität und Projektivität).

Fiedlers didaktische Ansätze lassen sich in fünf Punkten zusammenfassen:

²⁰ Fiedler 1877, 89.

²¹ Fiedler 1877, 88.

²² Fiedler 1877, 89.

- Fusion von ebener und Raumgeometrie: Ausgangspunkt ist die räumliche Situation der Zentralprojektion als idealisiertes Sehen.
- Beweglichkeit: Figuren sind Teile eines Systems (z. B. bei der Zentralprojektion) und können variieren; sie sind nicht isoliert sondern als Teil eines Ganzen zu sehen.
- Synthese von darstellender und projektiver Geometrie, von analytischer und synthetischer Geometrie.
- Problemlösen und Eigenaktivität als methodische Prinzipien.
- Konstruieren und Eigenaktivität sind für das Erlernen von Geometrie von zentraler Wichtigkeit.

Fiedlers etwas kryptische Kurzfassung lautete:

*[...] die ganze Geometrie muss darstellend werden, muss projicirend verfahren, um projectivisch zu sein [...].*²³

Zwei Beispiele hierfür werden wir im vierten Abschnitt kennenlernen.

Modelle

Modelle spielten bei Fiedler eine wichtige Rolle – einerseits als Vorlagen für seine Schüler, die diese abzeichnen oder zeichnerisch darstellen sollten, aber auch als Objekte für das forschende Lernen, mit denen man sich aktiv eventuell unterstützt durch eine geeignete Beschreibung auseinandersetzen konnte. Er selbst konstruierte Modelle, z. B. eines (wohl das erste) einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden, das er als Stabmodell²⁴ ausführte. Er regte seine Schüler und Assistenten an, Modelle zu bauen. Beispielsweise war August Weiler, der in Göttingen das bekannte Modell der Clebschen Diagonalfäche vorlegte, ein Schüler von Fiedler; Weiler berichtete seinem Lehrer in einem intensiven Briefwechsel von seinen Bemühungen und Erfolgen. Als Frucht dieser Aktivitäten entstand in Zürich eine Modellsammlung für den Unterricht in darstellender Geometrie, die allgemein bekannt war und großes Ansehen genoss. Während in den ersten Jahren von Fiedlers Züricher Tätigkeit die Modelle, die in Eigenbau entstanden

²³ Fiedler 1877, 92.

²⁴ Ein Stabmodell besteht aus verlöteten Stäben, später wurden auch Gipsmodelle derartiger Flächen hergestellt. Fiedlers Modell ist nicht erhalten.

waren, dominierten, nahm im Laufe der Jahre der Zukauf von kommerziell vertriebenen Modellen zu. Bezeichnend ist das Fehlen von konkreten Modellen wie Maschinenteilen oder dgl. Solche schaffte erst Fiedlers Nachfolger Marcel Grossmann an.²⁵



Abb. 4: Zwei Modelle zum Unterricht in darstellender Geometrie der Firma J. Schröder: Ein Torus (links) und eine Durchdringung von Zylinder und Kegel (rechts). (ETH-Bibliothek Zürich, Mathematische Modelle / Fotograf: André Rodoni / CC BY-SA 4.0)

Eine klassische Aufgabe der darstellenden Geometrie ist die Konstruktion von Schnittkurven, etwa eines Kegels mit einem Zylinder (vgl. Abb. 4 rechts). Diese Aufgabe kann mit einem Modell erläutert werden, und man kann anschauungsgestützt Ideen entwickeln, etwa dass die Schnittkurve nicht eben sein kann. Die Lösung findet man so natürlich nicht; in einem schwierigeren Fall (zwei Kegel, die sich schneiden) zeigt Abb. 3 aus Fiedlers Nachlass eine Lösung mit den Mitteln der darstellenden Geometrie. Eine didaktische Diskussion, die sich in der zweiten Hälfte des 19. Jhs. abspielte, drehte sich übrigens um die Frage, ob Modelle als Vorlagen verwendet werden sollten (im Sinne von Abzeichnen) oder als Kontrollmöglichkeiten (zuerst wird die Zeichnung entworfen, dann wird sie im Objekt kontrolliert). Im technisch-gewerblichen Bildungswesen war der Einsatz von Modellen weit verbreitet. Es erstaunt nicht, dass Fiedler, der von diesem geprägt war, Modelle als Selbstverständlichkeit hinstellt. Er nutzte sie auch bei seinen Vorträgen in der naturforschenden Gesellschaft. Allerdings strebte er anscheinend keine Breitenwirkung an, denn mehrfachen Bitten,

²⁵ Vgl. hierzu Volkert 2019 sowie die Verzeichnisse ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 1196 : 30 und Hs 1196 : 50. 1922 kaufte Grossmann einen Spiralbohrer. Natürlich gab es solche Modelle zuhauf an der Züricher polytechnischen Schule in anderen Sammlungen, etwa der Maschinensammlung. Sammlungen und Modelle bildeten einen zentralen Bestandteil der Lehrtradition an Polytechnika.

sich an größeren Ausstellungen zu beteiligen (wie derjenigen von W. Dyck, sich an der Münchner Ausstellung 1893 zu beteiligen), folgte er nicht.

Fiedler berichtet auch in seinen Schriften gelegentlich davon, dass er seine Modelle im Unterricht einsetzte, um an ihnen Sachverhalte zu erläutern. Wir können davon ausgehen, dass sie für ihn eine wichtige didaktische Funktion übernahmen. Er benutzte in diesem Zusammenhang auch die damals moderne Stereofotografie. Ein anderes didaktisches Hilfsmittel, das er einsetzte, waren Wandtafeln. Diese erläuterten bestimmte Themen (wie Winkel zwischen Geraden, Winkel zwischen Ebenen, windschiefe Geraden, aber auch Schnitt zweier Kegel etc.) und konnten käuflich erworben werden.²⁶

Zwei Fallbeispiele

Wie bereits erwähnt, sah sich W. Fiedler nicht als Didaktiker, dieser Beruf war ja noch gar nicht erfunden. Dennoch spielte die Lehre eine wichtige Rolle auch in seinen Schriften. Nicht selten findet man dort Argumente, die sich auf diese beziehen. Mit seinem Motto „Alle Geometrie muss darstellend werden“ meinte Fiedler, eine Art Königsweg in die Geometrie gefunden zu haben. An dieser Stelle möchte ich anhand zweier Beispiele von vielen erläutern, wie Fiedler diese Idee konkret umsetzte.

Das erste Beispiel ist die Dualität in der projektiven Ebene: Dabei geht es ja darum, jedem Punkt eine Gerade (Polare genannt) und jeder Geraden einen Punkt (Pol genannt) so zuzuordnen, dass der zweimalige Übergang zum dualen Objekt zum Ausgangsobjekt zurückführt: die Zuordnung ist involutorisch. Klassisch macht man dies im Anschluss an J. V. Poncelet mit Kegelschnitten. Fiedler hingegen beschreitet einen anderen Weg, den er „Orthogonal-System“ (im Strahlenbündel)²⁷ nennt. Wir nehmen einen Punkt außerhalb der fraglichen Ebene, das Zentrum Z . Ist P ein Punkt der Ebene, so ziehe man ZP . In Z errichtet man die auf ZP senkrechte Ebene; diese schneidet die Ausgangsebene in einer Geraden p , der Polaren. Die Polare ist also die Spur der Orthogonalebene in der Ausgangsebene. Dieses Verfahren

²⁶ Das Verzeichnis Hs 1196: 30 enthält eine eigene Rubrik Wandtafeln, in der rund 30 solcher Tafeln aufgeführt werden.

²⁷ Fiedler 1883, 114; vgl. Abb. 6.

lässt sich auch umgekehrt durchlaufen und liefert dann den Pol P zu einer Geraden p . Für Fiedler war es ganz natürlich, Fernpunkte und Ferngeraden zuzulassen. Die Ferngerade ist als Polare dem Lotfußpunkt H des Lotes von Z auf die Ausgangsebene zugeordnet und umgekehrt.²⁸ Die Pole aller Geraden der Bildebenen, die durch den Lotfußpunkt H verlaufen, liegen im Unendlichen. Ferner gilt (Hauptsatz der Polarentheorie): Liegt der Pol P auf der Gerade q , so geht dessen Polare p durch den Pol Q von q .

Eine bemerkenswerte Rolle spielen die Punkte auf dem Distanzkreis. Dieser ist ebenfalls ein Klassiker der traditionellen Perspektive, wo er dazu verwendet wird, den Bereich anzugeben, indem die Verzerrungen gering sind. Der Distanzkreis ist der Kreis um den Punkt H mit dem Radius $|ZH|$. Jedem Punkt auf dem Distanzkreis wird durch Fiedlers Konstruktion die Tangente an den Distanzkreis im Gegenpunkt zugeordnet. Das liegt daran, dass in diesem Fall der Winkel PZH gerade 45° beträgt.

Man sieht hier deutlich, wie Fiedler es schafft, bekannte Konzepte der projektiven Geometrie in die darstellende Geometrie, so wie er sie sah, zu integrieren.

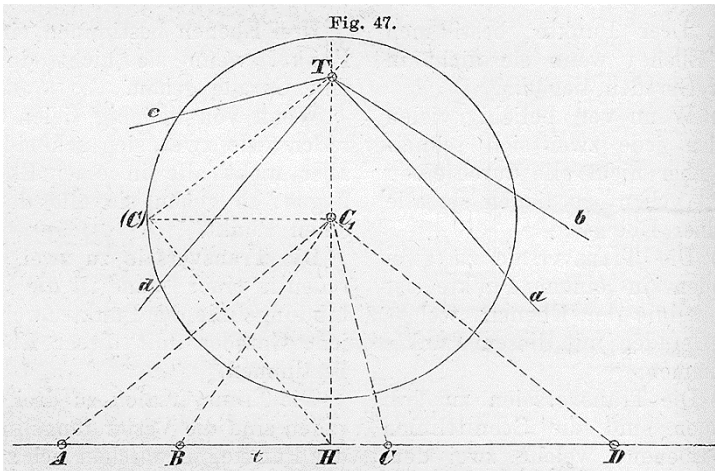


Abb. 6: Orthogonalsystem im projizierenden Bündel (Fiedler 1883, 114)

²⁸ In der klassischen Perspektive ist H der Hauptpunkt und Z der Augpunkt. Die Strahlen, welche die Punkte der Ebenen mit dem Zentrum verbinden, bilden ein projizierendes Bündel.

Das zweite Beispiel ist Fiedlers „Zyklographie“²⁹. So lautete der Titel eines Buches, das Fiedler nach langem Zögern 1882 der Öffentlichkeit übergab. Gezögert hatte er, weil er vermutete, dass Jakob Steiner ähnliche Ideen gehabt hätte und dass sich diese in einem unbekanntem Manuskript Steiners finden könnten. Er befragte Weierstraß (als Herausgeber der Steiner-Werke und Mathematiker, der Steiner noch persönlich gekannt hatte) und Ludwig Schläfli (Korrespondenzpartner von Steiner und von diesem gefördert), auch seinen Kollegen Geiser (Neffe von Steiner und Herausgeber eines Bandes von Vorlesungen Steiners). Erst als man ihm versicherte, dass Steiner keine Zyklographie gehabt habe, wagte sich der sehr korrekte Fiedler an die Veröffentlichung.

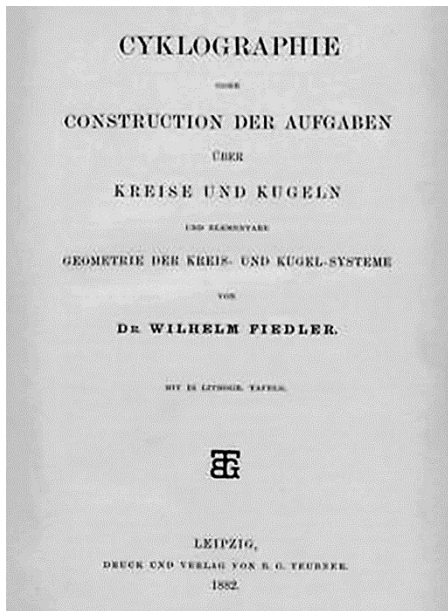


Abb. 7: Titelblatt von Fiedlers Zyklographie

Die Grundidee der Zyklographie ist es, Punkte im Raum durch Kreise in einer Ebene – im Folgenden Bildebene genannt – darzustellen. Vorbild ist der Distanzkreis von oben: Dieser repräsentiert das Zentrum in der Ebene. Ist das Zentrum gegeben, so ist der zugehörige Kreis eindeutig bestimmt.

²⁹ Fiedler 1882; vgl. Abb. 7.

Umgekehrt gibt es allerdings ein Problem, denn ein Hauptkreis kann zwei Zentren repräsentieren, die spiegelsymmetrisch zur Bildebene liegen. Dieses Problem lässt sich lösen, indem man den Kreis orientiert.³⁰ Die beiden möglichen Orientierungen unterscheiden dann die beiden möglichen Zentren. Eine andere Möglichkeit wäre, sich auf einen Halbraum bzgl. der Bildebene zu beschränken. Im Folgenden lassen wir dieses Problem, das mehr technischer Natur ist, weitgehend außer Betracht.

Einem Punkt des Raumes wird derjenige Kreis zugeordnet, dessen Mittelpunkt der Lotfußpunkt des Lotes vom fraglichen Punkt auf die Bildebene ist, und dessen Radius gleich dem Abstand des Punktes von der Bildebene ist. Verbindet man die Punkte dieses Kreises mit dem Ausgangspunkt, entsteht ein zyklographischer Kegel. Charakteristisch für diese Kegel – die immer gerade sind – ist, dass ihr Öffnungswinkel 90° beträgt.

Die Zyklographie bietet viele Möglichkeiten, die Raumanschauung zu schulen. Das wird schon deutlich, wenn man einmal versucht, sich zu überlegen, wie Geraden im Raum zyklographisch abgebildet werden. Steht die Gerade senkrecht auf der Bildebene, ergibt sich als Bild ihrer Punkte eine konzentrische Schar von Kreisen, wobei der Mittelpunkt gerade der Durchstoßungspunkt der Geraden mit der Bildebene ist. Verläuft die Gerade parallel zur Bildebene, so wird sie auf eine Schar von gleichgroßen Kreisen abgebildet, deren Mittelpunkte alle auf der orthogonalen Projektion der Ausgangsgeraden auf die Bildebene liegen. In den anderen Fällen erhält man Kreisbüschel, deren Mittelpunkte wieder auf der senkrechten Projektion der Geraden in die Bildebene liegen. Der Durchstoßungspunkt ist natürlich sein eigenes Bild, also ein zyklographischer Kreis vom Radius Null. Er ist aber auch Ähnlichkeitszentrum für alle Kreise in den beiden Kreisbüscheln, die er voneinander trennt. Im Falle der zur Bildebenen parallelen Geraden liegt der Schnittpunkt, folglich auch das Ähnlichkeitszentrum, im Unendlichen.

Die Aufzählung interessanter Themen aus Fiedlers Zyklographie ließe sich noch lange fortsetzen, muss aber hier unterbleiben.³¹ Gemäß seiner kon-

³⁰ Manche Autoren – z. B. E. Müller – sprechen dann von Zykeln.

³¹ Herr Robert Wengel arbeitet derzeit an der Universität Wuppertal an einer Dissertation über Fiedlers Zyklographie. Ich danke Herrn Wengel für zahlreiche Hinweise und Informationen zum Thema „Zyklographie“.

struktiven Grundhaltung behandelt Fiedler viele bekannte Probleme der ebenen Geometrie mit seinen neuen Hilfsmitteln, etwa Fragestellungen rund um Feuerbach und seinen Kreis und zum Apollinischen Berührproblem³². Nimmt man einen zyklographischen Kegel nebst einem Punkt auf dessen Mantel, so berührt der zu diesem Punkt gehörige Kreis den Kreis, der zum Ausgangskegel gehört. Liegen Spitze des Kegels und ausgewählter Punkt auf einer Seite bezüglich der Bildebene, so erfolgt die Berührung von innen, andernfalls von außen. Folglich läuft das Apollonische Problem darauf hinaus, den Schnittpunkt dreier zyklographischer Kegel zu bestimmen. Da sich zwei zyklographische Kegel immer in einer Hyperbel schneiden, geht es anders gesagt darum, den Schnittpunkt zweier Hyperbeln zu ermitteln. Diese Hyperbeln liegen in Ebenen, die die Bildebene in den Potenzgeraden der beiden zu den Kegeln gehörigen Kreise schneiden. Der gesuchte Punkt ist folglich Schnittpunkt zweier Potenzgeraden, also der Potenzpunkt dreier Kreise.³³ Bekanntlich hat das apollinische Problem i. A. acht Lösungen; diese liefert auch Fiedlers Zyklographie, wenn man mit Zykeln arbeitet, also Orientierungen und damit die möglichen Lagen der Kegelspitzen beachtet.

Fazit

Wie hoffentlich deutlich geworden ist, gibt es in Fiedlers Arbeiten Schätze zu heben, von denen manche sicher auch für den Geometrieunterricht zu verwenden sind. Seine Forderung nach Förderung der Raumanschauung ist heute immer noch aktuell; die modernen Hilfsmittel, die nun zur Verfügung stehen, haben daran nichts geändert. Historisch gesehen ist Fiedler gescheitert, seine Ideen und Ansätze gerieten in Vergessenheit. Dafür gab es wohl mehrere Gründe, von denen hier zwei erwähnt seien: Zum einen die Entwicklung, die der Mainstream der Mathematik im letzten Drittel des 19. Jhs. nahm mit der zunehmenden Dominanz analytischer und algebraischer Verfahren und der modernen Axiomatik, welche die Geometrie fein säuberlich Schicht für Schicht aufbaute. Dieses Anliegen ist geradezu diametral zu Fiedlers organisch gewachsenem System und seiner großen Synthese verschiedener Methoden. Fiedler war übrigens, wie seine Korrespondenz zeigt,

³² Vgl. Fiedler 1882, 161 – 167. Im Anschluss behandelt Fiedler das analoge Problem für den Raum (Kugelberührung).

³³ Eine lehrbuchhafte Darstellung findet sich bei Adler 1906.

in einem – modern gesprochen – Netzwerk aktiv, das dafür kämpfte, der Geometrie an den Universitäten und Hochschulen einen wichtigen Rang zu erhalten – nicht zuletzt ging es dabei natürlich um den Erhalt von Stellen für Geometrie.³⁴ Zum anderen ist auch der enorme Zuwachs in den Ingenieurwissenschaften zu nennen, welcher in Folge des Aufkommens neuer Fächer die darstellende Geometrie zurückdrängte. In Zürich blieben aber Fiedler die zukünftigen Lehrer, in deren Ausbildung er sein Programm verwirklichen konnte. Hier entwickelte er einen nicht zu unterschätzenden, wenn auch schwer greifbaren Einfluss auf den Mittelschulunterricht in seiner Wahlheimat.

Literatur

- Adler, August (1906). *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. Leipzig: G. J. Göschensche Verlagshandlung.
- Fiedler, Wilhelm (1875). *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*. Für Vorlesungen an technischen Hochschulen und zum Selbststudium (Leipzig: Teubner, 1871; zweite Auflage Leipzig: Teubner, 1875; dritte Auflage in drei Bänden: Band I Leipzig, 1883, Band II Leipzig, 1885, Bd. III Leipzig, 1888; vierte Auflage des ersten Bandes Leipzig, 1904). – Übersetzung ins Italienische: *Trattato di geometria descrittiva*, tradotto da Antonio Sayno e Ernesto Padova. – *Versione migliorata coi consigli e le osservazioni dell'Autore e liberamente eseguita per meglio adattarla all'insegnamento negli istituti tecnici del Regno d'Italia* (Firenze: Successori Le Monnier, 1874).
- Fiedler, Wilhelm (1877). Zur Reform des geometrischen Unterrichts. In: *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 22, 82–97.
- Fiedler Wilhelm (1882). *Cyclographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme*. Leipzig: Teubner.
- Fiedler, Wilhelm (1905). Meine Mitarbeit an der Reform der darstellenden Geometrie in neuerer Zeit. Schreiben gerichtet an den Herausgeber dieser Zeitschrift. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 14, 493–503.
- Salmon, George; Fiedler, Wilhelm (1873). *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven*. Leipzig: Teubner.
- Volkert, Klaus (2019). *Mathematische Modelle und die polytechnische Tradition* (erscheint 2019 in den *Siegener Beiträgen zur Geschichte und Philosophie der Mathematik*).

³⁴ Ein wichtiger Partner hierbei war Rudolf Sturm, auch F. Klein spielte eine Rolle. Dem hat Fiedler allerdings nie so ganz den Geometer abgekauft.

Anhang

Um den Aufbau des Fiedlerschen Lehrbuches etwas plastischer zu machen, seien hier einige ausgewählte Teile seines Inhaltsverzeichnisses wiedergegeben.³⁵

Erster Theil. Die Methodenlehre, entwickelt an der Untersuchung der geometrischen Elementarformen und ihrer einfachen Verbindungen

- A. Die Centralprojection als Darstellungsmethode und nach ihrem allgemeinen Gesetzen
- B. Die constructive Theorie der Kegelschnitte als Kreisprojectionen
- C. Die centriscche Collineation räumlicher Systeme als Theorie der Modellierungs-Methoden³⁶
- D. Die Grundgesetze der orthogonalen Parallelprojection, ihre Transformation und die Axonometrie.

Zweiter Theil: Die constructive Theorie der krummen Linien und Flächen

- A. Von den Curven und den developpablen Flächen
- B. Von den krummen Flächen im Allgemeinen und den Flächen zweiten Grades insbesondere
- C. Von den windschiefen Regelflächen
- D. Von den Rotationsflächen

Dritter Theil. Die Geometrie der Lage und die projectivischen Coordinaten

- A. Grundlagen und Coordinaten
- B. Die Parameter der Gebilde und die Projectivität; Erzeugnisse der projectivischen Gebilde erster Stufe
- C. Die projectivischen Gebilde zweiter und dritter Stufe und die Erzeugnisse ihrer Verbindung

³⁵ Grundlage ist Fiedler 1875. Das Inhaltsverzeichnis ist bei Fiedler sehr umfangreich, im Übrigen hat sein Buch auch ein Sachregister, zu jener Zeit eine Seltenheit. Fiedler war offensichtlich bemüht, die Brauchbarkeit seines Buches zu erhöhen.

³⁶ In der darstellenden Geometrie wurde das Bild eines Objectes (etwa eines Polyeders) unter einer räumlichen Zentralkollineation – im Anschluss an Poncelet auch Reliefperspektive genannt – als Modell bezeichnet. Modelle waren also keineswegs immer materielle Gegenstände.

Wie möglich ist in der Geometrie ein Beweisen durch Messen?

Edmond Jurczek

Zusammenfassung. Wo gemessen wird, gibt es Messfehler; so gesehen scheint ein strenges Beweisen durch Messen in der Geometrie schlicht unmöglich zu sein. Dennoch wird gezeigt, dass der Schein trügt! Das historische Schlüsselbeispiel stammt aus dem Gebiet der Differentialgeometrie und zieht sich hin zur Messung der Raumkrümmung im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Behandelt werden im Referat konkret auch Messungen zur Überprüfung der Theorie der Gravitationswellen, namentlich die aktuellen Messungen aus dem Jahr 2016 mit ihren extrem hohen Anforderungen an die geometrische Messgenauigkeit. Zudem enthält dieser Beitrag auch einige wissenschaftsgeschichtliche Leckerbissen.

Ein etwas unkonventioneller Einstieg: drei pikante Fragen

Beim Lesen dieses Artikels wird man ‚en passant‘ parallel zum zentralen Thema einige pikante wissenschafts-geschichtliche Dinge erfahren, die dem geneigten Zuhörer bzw. Leser vielleicht noch nicht bekannt sind: Wussten Sie ob – und wenn ja wozu – Carl Friedrich Gauß im Alter noch begann Russisch zu lernen? Oder wussten Sie ob – und wenn ja wozu – Gauß sich durchsetzte, dass Bernhard Riemann anlässlich seines Habilitationsvortrages im Jahre 1854 statt wie üblich über das erste der von ihm eingereichten Themen just genau über das dritte sprechen musste? Oder wussten Sie, dass David Hilbert am 20.11.1915, und damit 5 Tage vor Albert Einstein, an der Königlichen Akademie zu Göttingen die Gravitationsgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) im mathematischen Kleide eines Tensor-kalküls vortrug?

Warum wir a priori nicht an die Möglichkeit des Beweizens durch Messen denken

Wo gemessen wird, gibt es Messfehler, und wo aus Messgrößen heraus andere Größen berechnet werden, pflanzen sich Fehler fort. Dazu gibt es die Theorie der Fehlerfortpflanzungsrechnung. So gesehen scheint ein strenges Beweisen durch Messen in der Geometrie schlicht unmöglich zu sein. Doch der Schein trügt: Betrachten wir dazu den Inkreis-Mittelpunkt und den Umkreis-Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks. Wir wissen, dass die beiden Punkte zusammenfallen, und können das z. B. mit Methoden der Vektor-

geometrie beweisen. Mit Messungen ist einem Beweis hingegen nicht beizukommen, zumal jede geometrische Konstruktion Zeichnungs- Ungenauigkeiten und damit Messfehler mit sich bringt. Da gibt es nichts zu rütteln.

Betrachten wir nun ein allgemeines Dreieck und seinen Inkreis- und Umkreismittelpunkt. Bei allgemeiner Lage der Eckpunkte fallen die Inkreis- und Umkreismittelpunkte nun nicht mehr zusammen. Wenn in einem konkreten Beispiel nun die beiden Mittelpunkte so weit auseinander zu liegen kommen, dass die Distanz der beiden weit über dem Zeichnungs- bzw. Messfehler liegt, dann können wir damit sehr wohl etwas beweisen, dass die Punkte nämlich nicht zusammenfallen.

Ganz offenbar gibt es bei *Negativaussagen* bzw. über die *Aussagen einer Ungültigkeit* in der Geometrie die Beweis-Möglichkeit durch Messung! Im Buch ‚Euclidean and Non-Euclidean Geometries‘ schreibt der Autor Marvin. J. Greenberg von der University of California, Santa Cruz, im Kapitel über philosophische Implikationen dazu, Zitat:

„To repeat the point: because of experimental error, a physical experiment can never prove conclusively that space is Euclidean – it can prove only that space is non-Euclidean“ [1]

Und er war damit beileibe nicht der Erste der diese Meinung vertrat; blättern wir dazu gut 10 Menschen-Generationen zurück.

Über die Entwicklung der Differentialgeometrie, im Besonderen die der inneren Differentialgeometrie

Wir befinden uns am Anfang des 19. Jahrhunderts als von Mathematikern wie Gauß und Johann v. Bolyai (Ungarischer Originalname János Bolyai) – dem Sohn von Gauß’ Jugendfreund Wolfgang Bolyai – im Rahmen von Arbeiten in der geographischen Flächenvermessung am Fundament der Euklidischen Geometrie gerüttelt wurde. Bolyai betonte mehrfach, Zitat:

„Dass der Fall der Euklidizität prinzipiell nicht verifizierbar ist, weil ja die Abweichung so gering sein kann, dass sie sich im Rahmen der möglichen Messgenauigkeit nicht feststellen lässt.“ [2], [3]

Bereits Euler und Johann Bernoulli hatten Untersuchungen an krummen geometrischen Objekten mittels infinitesimaler Methoden durchgeführt. Gauß zeigte 1827 in seiner Veröffentlichung ‚Allgemeine Untersuchungen über

gekrümmte Flächen' zum Beispiel auf, dass seine *lokale Flächenkrümmung* identisch ist mit dem seit Euler betrachteten Produkt von beiden Hauptkrümmungen [4].

Was aus heutiger Sicht nun aber das besondere Verdienst von Gauß ausmacht, war seine Entwicklung der *inneren Differentialgeometrie*: Denn bis dahin wurden krumme Flächen stets als Objekte im dreidimensionalen Raum betrachtet. Gauß gelang es, Messung und Experiment innerhalb der Fläche zu tätigen, ohne Bezug auf die Einbettung in den Raum zu nehmen. Für die Physik des dreidimensionalen Raumes erwies sich das als maßgebend, zumal uns der umgebende 4-dimensionale Raum nicht direkt zugänglich ist.

Vom Übergang zur n -dimensionalen Differentialgeometrie

Es wird Gauß bewusst gewesen sein, dass seine *innere Differentialgeometrie* einzig einer geeigneten Verallgemeinerung zu höherer Dimension bedurfte, um zu einer völlig neuen Raumauffassung zu führen. Daher wohl setzte er durch, dass Riemann anlässlich seiner Habilitation in Göttingen im Jahre 1854 statt wie üblich über das erste der von ihm eingereichten Themen über das dritte sprechen musste: ‚Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen‘. Von geradezu prophetischem Scharfblick zeugt sein letzter Abschnitt daraus, Zitat:

Nun scheinen aber die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Maßbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren; es ist also sehr wohl denkbar, dass die Maßverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäß sind, und dies würde man in der That annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfache Weise erklären ließen. Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem inneren Grund der Maßverhältnisse des Raumes.

... Es muss also das dem Raume zugrundeliegende Wirkliche entweder eine discrete Mannigfaltigkeit bilden oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb gesucht werden: in darauf wirkenden bindenden Kräften. [5]

Heute wissen wir, dass dies die Gravitationskraft ist!

Aus wissenschaftshistorischer Sicht halten wir noch fest, dass dieser Habilitationsvortrag von Riemann erst 1868, also nach seinem Tode, durch P. Dirichlet veröffentlicht wurde. Und es war Christoffel der kurz vor 1870 die Elemente des *Tensorkalküls* der inneren Differentialgeometrie schuf.

Über die Zurückhaltung von Gauß mangels eines räumlichen Analogons zu gekrümmten Flächen

Aufgrund von Briefwechseln wissen wir, dass sich Gauß bereits im Jahre 1792 mit dem so genannten Parallelenproblem befasst hatte [6]. Dasselbete Vater und Sohn Bolyai, und Johann Bolyai veröffentlichte in seinen ‚Tentamen‘ eine Alternative zur Euklidischen Geometrie. Dies tat er derart, dass die alternative Geometrie von einer Konstanten abhing, sodass die geometrischen Verhältnisse bei hinreichender Kleinheit der Konstanten den euklidischen Verhältnissen beliebig nahe kommen. Wie interessant, dass er dabei mehrfach betonte, dass

von der Seite der Mathematik nicht mehr erwartet werden könne, und die Feststellung der Konstanten physikalischen Messungen überlassen werden müsse.

[6]

Wir wissen, wie sehr Gauß diese Entwicklungen aufmerksam verfolgte, und dass er praktisch lebenslang eine vorsichtige Zurückhaltung an den Tag legte. Vor allem fehlte ihm das räumliche Analogon zu den gekrümmten Flächen. So verfolgte er auch die Arbeiten von Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski aus Kasan, der 1826 einen ersten öffentlichen Vortrag zur nichteuklidischen Geometrie hielt. Zwischen 1829-1840 folgten Veröffentlichungen in Russisch und 1840 sogar eine in Deutsch.

Es war dann Gauß der bewirkte, dass Lobatschewski zum Korrespondierenden Mitglied der Göttinger Gelehrten Gesellschaft ernannt wurde. Es trifft auch zu, dass Gauß im Alter noch begann, Russisch zu lernen. Es sei dahingestellt ob er das ausschließlich tat, um die russisch geschriebenen Arbeiten Lobatschewskis studieren zu können.

Bolyais Konstante war bei Lobatschewskis Arbeiten die (modern gesprochen) Krümmungskonstante.

Das Fehlen eines räumlichen Analogons erklärt auch die ungewöhnliche Erregung, mit der Gauß 1854 nach dem Bericht von Zeugen auf den Habili-

tationsvortrag von Riemann reagierte. Riemann hatte ja mit einem Schlag zwei offene Fragen beantwortet, mit denen Gauß vermutlich lange selbst gerungen hatte:

Erstens, wie könnte ein Raum von höherer Dimension als drei beschaffen sein, in dem man sich einen negativ gekrümmten dreidimensionalen Raum eingebettet vorstellen könnte? Und zweitens, wie kann man die innere Geometrie der Flächen zu einer inneren Geometrie von Räumen höherer Dimension verallgemeinern?

Sich einen gekrümmten Raum ohne einen höherdimensionalen Raum vorzustellen, in dem er sich krümmen kann, lag wohl damals jenseits aller *psychologischen* Möglichkeiten! Aus heutiger Sicht scheint mir besonders maßgebend, wie der Mathematik nichts anderes übrig blieb, als *die Erfahrung zu befragen*. Also zeigt sich die Geometrie doch mindestens in einem Punkte als Erfahrungswissenschaft! Und Mathematik wurde zur Naturwissenschaft, die *Geometrie zumal zur Protophysik*. Und der weitsichtige Schweikart zum Beispiel nannte seine Geometrie Astralgeometrie, weil er der Meinung war, dass ihre eventuelle Gültigkeit sich erst in kosmischen Maßstäben herausstellen würde [7].

Zum Schluss dieses Abschnittes soll angemerkt sein, dass es mit A. Grunert notabene ein Gymnasialprofessor aus Brandenburg war, der bereits 1834 öffentlich auf das Thema der ‚Theorie der Parallelen‘ hinwies. Später war er Mathematikprofessor an der Universität Greifswald.

Über Messungen der Raumkrümmung 1919, 1973, 1991, 1997 und von Linsen von Raum und Zeit (Gravitationslinsen) 1997, 2013

Bereits 1911 hatte Albert Einstein berechnet, dass Lichtstrahlen ferner Sterne, die am Sonnenrand vorbeiziehen, durch die Gravitation der Sonne verbogen werden. Er sagte einen Ablenkwinkel von 0.875 Bogensekunden voraus. Der Berliner Astronom Erwin Freundlich beschloss zu versuchen, die Lichtablenkung während der totalen Sonnenfinsternis vom 21. August 1914 zu messen, und reiste mit einer Expedition auf die Krim. Im gerade erst ausgebrochenen ersten Weltkrieg wurde das Team gefangen genommen und die Ausrüstung konfisziert. Und eine amerikanische Gruppe unter Leitung von William Wallace Campbell kam zwar ungeschoren davon, konnte aber

wegen einer dichten Wolkendecke südlich von Kiew keine Aufnahmen machen.

Am 29. Mai 1919 gelangen Eddington einige wenige brauchbare Fotos, die die Theorie bestätigten. Es ist erstaunlich, dass weitere Sonnenfinsternis-Fotos bis 1973 die Messgenauigkeit kaum steigerten! Erst 1991 wurde mittels *Radioastronomie* durch exakte Fixierung ferner Radiogalaxien die Lichtablenkung mit einer Genauigkeit von 0.02 Prozent gemessen.

2004 wurde die Allgemeine Relativitätstheorie anhand von mehr als 500 Radioquellen auf 0.02 Prozent genau verifiziert. Und der 2013 gestartete Astrometrie-Satellit Gaia verbesserte das Resultat noch einmal um das Hundertfache, weil er ungefähr eine Milliarde Sternpositionen auf teils nur fünf Milli-Bogensekunden genau lokalisieren konnte. Abbildung 1 illustriert die Ergebnisse über die Zeitspanne eines Jahrhunderts [8].

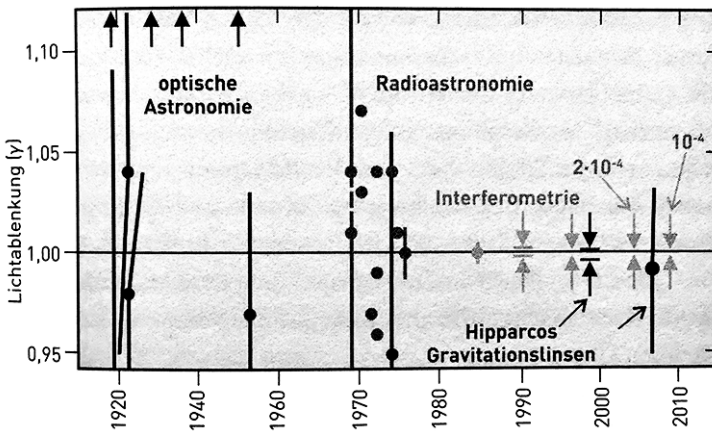


Abb. 1: die gemessene gravitative Lichtablenkung

Über die erforderliche Messgenauigkeit bei der Detektion von Gravitationswellen

Als Erstes ist zu sagen, dass Einstein in der Zeitschrift *Science* Ende 1936 eine Arbeit veröffentlichte unter dem Titel *Linsenähnliche Wirkung eines Sterns durch die Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld*. Es ist bekannt, dass er den Effekt aber für praktisch nicht beobachtbar hielt. Er veröffentlichte seine Berechnungen deshalb nicht. Diese Tatsache, dass er nicht ver-

öffentliche Berechnungen ausführte, entdeckten die Historiker Jürgen Renn, Tilmann Sauer und John Stachel erstmals im Rahmen einer Durchforschung seiner persönlichen Notizen [9].

Abgesehen von wenigen solchen theoretischen Arbeiten betrachteten die meisten Astronomen das Thema *Gravitationslinseneffekt* als weitgehend esoterisch. Dann aber wurde 1979 von britischen und amerikanischen Forschern das erste Doppelbild eines *Quasars* entdeckt. Es handelte sich um zwei nur sechs Bogensekunden voneinander entfernt stehende Quasare. Das entspricht einem Winkel wie er entsteht wenn wir von der Erde aus die Randbereiche eines 11 km großen Kraters auf dem Mond beobachten würden. Ein *Quasar* ist der aktive Kern einer Galaxie, der im sichtbaren Bereich des Lichtes wie ein Stern nahezu punktförmig erscheint und sehr große Energiemengen in anderen Wellenlängenbereichen ausstrahlt. Der Name Quasar wurde vom englischen ‚quasi-stellar radio source‘ abgeleitet, was mit „stern(en)artige ...“ oder auch „stern(en)ähnliche Radioquelle“ übersetzt werden kann. 1987 folgte die Entdeckung leuchtender Bögen in einem Galaxienhaufen. In beiden Fällen handelt es sich um Gravitationslinsen.

Und im Jahre 2004 wurde dank dem Gravitationslinsen-Effekt ein so genannter *Exoplanet* entdeckt! Ein Exoplanet, auch extrasolarer Planet, ist ein planetarer Himmelskörper außerhalb des vorherrschenden gravitativen Einflusses unserer Sonne, aber innerhalb des gravitativen Einflusses eines anderen Sterns.

Konkret gesagt: liegen zwei Sterne und die Erde genau auf einer Achse, so wird der hintere Stern als leuchtender Ring erscheinen, in dessen Zentrum der vordere Stern steht. Der Durchmesser des Rings beziehungsweise der Abstand der Bilder hängt ab von der Masse des Vordergrundsterns, von der *Gravitationslinse* eben. Man nennt solche Ringe *Einsteinringe*. Abbildung 2 illustriert dieses Phänomen [10]. In der Tat ist der Effekt bei einem Doppeltstern sehr klein: Der Durchmesser des Rings hängt von der Masse des Vordergrundsterns ab sowie von den relativen Abständen der Sterne voneinander und von der Erde. In der Praxis liegt der Winkelabstand im Bereich von Millionstel Bogensekunden, weshalb Astronomen hier vom Mikro-Gravitationslinseneffekt sprechen. Dieser Effekt ist mit optischen Teleskopen nicht mehr erkennbar! Zur Veranschaulichung: Dies meint einen Winkel zwischen zwei Lichtstrahlen die von der gleichen Stelle unserer Sonne

ausgehen und auf der Erde in einem Abstand von knapp einem Meter auf-treffen.

Einzig wenn es sich beim Phänomen Einsteinring nicht um zwei Sterne handelt sondern um Ringe, die ganze Galaxienhaufen umspannen, beträgt die Größe des Rings ein bis zwei Bogensekunden und ist daher mit optischen Teleskopen noch sichtbar.

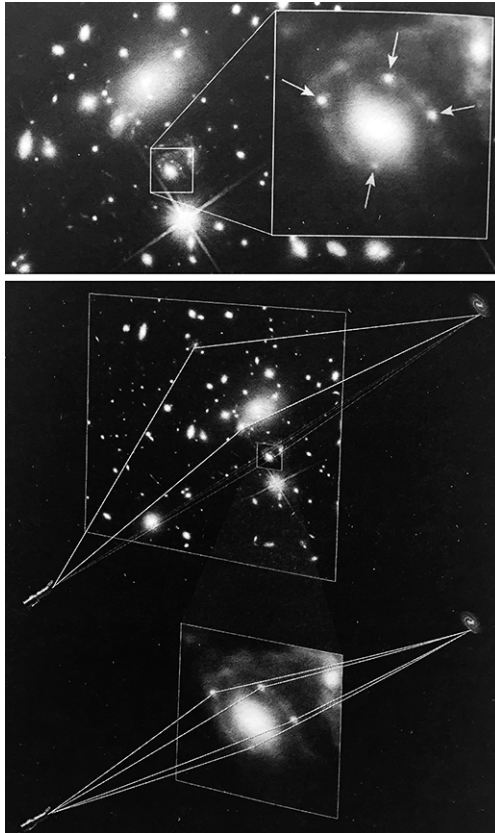


Abb. 2: Phänomen des Einsteinrings

Bis Ende 2014 wurden damit rund dreißig Exoplaneten mit Hilfe des Mikro-Gravitationslinseneffekts entdeckt, der so zu einem modernen Werkzeug der Astrophysik wurde. Es lassen sich hiermit so kleine Planeten wie vergleichsweise der Mars entdecken.

Was genau sind nun Gravitationswellen, und wie detektiert man sie?

Eine Welle hat Eigenschaften wie Ausbreitungsgeschwindigkeit, Amplitude bzw. Ausschlag und Frequenz. Bei einer Wasserwelle haben wir typische Ausbreitungsgeschwindigkeiten von 1 m/s, bei einer Schallwelle etwa 330 m/s für Schall in Luft, bei einer Lichtwelle die Lichtgeschwindigkeit von etwa 300 Millionen m/s. Die Amplitude bei einer Wasserwelle meint die Hälfte des Höhenunterschiedes zwischen Kamm und Tal; beim Schall ist sie die Lautstärke, beim Licht die Helligkeit. Die Frequenz schließlich (von lat. *frequentia*, Häufigkeit) ist in Physik und Technik ein Maß dafür, wie schnell bei einem periodischen Vorgang die Wiederholungen aufeinander pro Zeiteinheit folgen.

Eine Gravitationswelle breitet sich sowohl longitudinal als auch transversal aus; ihre Geschwindigkeit ist die Lichtgeschwindigkeit. Man kann sie sich wie Dichtewellen vorstellen, die sich durch eine Schüssel mit Wackelpudding ausbreiten, wenn Sie dagegenklopfen, wobei der Pudding den leeren Raum darstellt! Es gibt also nichts, das wellt oder kräuselt, es geht um die Raumzeit selbst. Eine Gravitationswelle wird sozusagen alles sanft durchkneten was auf ihrem Wege liegt. Ihre Frequenz beträgt typischerweise etwa 200 Schwingungen pro Sekunde. So wie bewegte Ladung ein elektromagnetisches Feld erzeugt, so erzeugt bewegte Masse eine Gravitationswelle. Die typische Frequenz von 200 Hertz rührt von zwei – kurz vor einer Kollision und Verschmelzung – um sich herum drehenden so genannten Schwarzen Löchern her, die je etwa 30 Sonnenmassen ausmachen. Abbildung 3 veranschaulicht das Phänomen auf Basis einer Supercomputersimulation [11].

Gemessen werden soll eine durch eine Gravitationswelle verursachte Raumzeit-Veränderung mittels eines Laserinterferometers (LIGO = Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). Es wurden an zwei rund 3000 km voneinander liegenden Standorten in den USA je eines gebaut: in Hanford und in Livingston. Zwei senkrecht zueinander stehende etwa 4 km langen Arme eines Laserinterferometers sind seit wenigen Jahren erst in Betrieb. Abbildung 4 zeigt eine Photographie der Anlage [12], und Abbildung 5 das Wirkungsprinzip [13]. Durch die senkrecht stehenden Arme erzwingt man beim Eintreffen einer Gravitationswelle eine nicht mehr 100.00% perfekte konstruktive Interferenz eines mit einem Strahlteiler versehenen Laserstrahls. Man erwartet relative Abweichungen einer Raumlänge in er Grö-

ßenordnung von einem Trillionstel Prozent, was einem Teil in 10^{20} bedeutet! Bei einem kurzen Weg bzw. einer kurzen Armlänge läuft das messtechnisch auf ein Nichts hinaus, weil die Differenz unter der Wellenlänge des Lasers liegt. Mittels 300-fachem Hin- und Herschicken des Laserstrahls hat man die Armlängen künstlich auf je 1200 km vergrößern können.

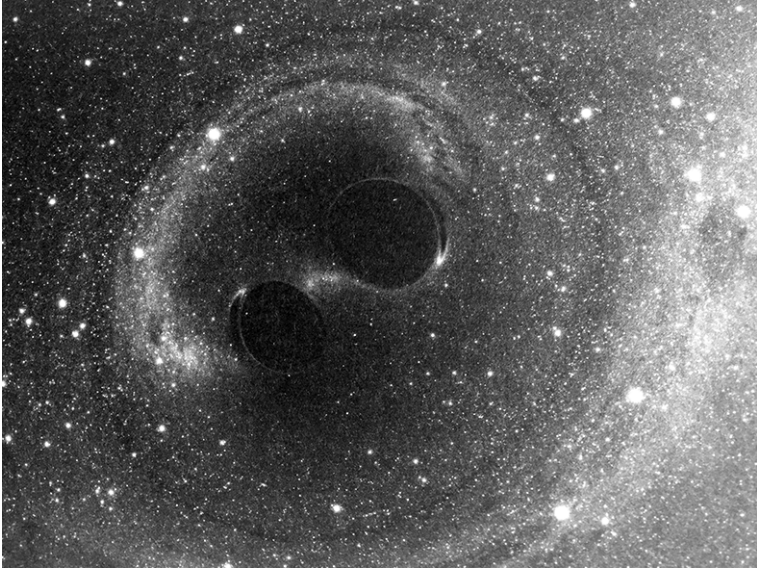


Abb. 3: Erzeugung einer Gravitationswelle

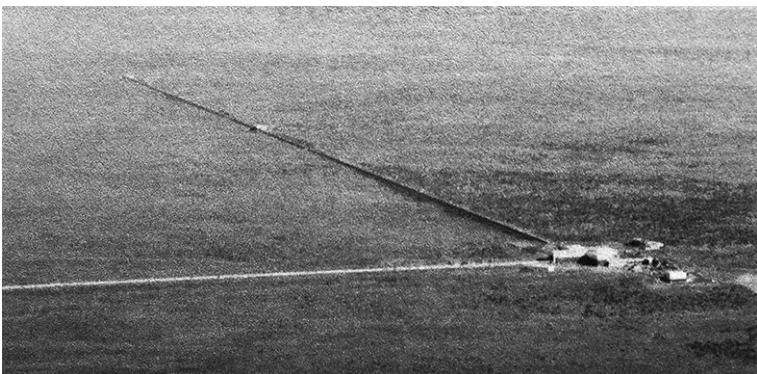


Abb. 4: LIGO = Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, Hanford, USA

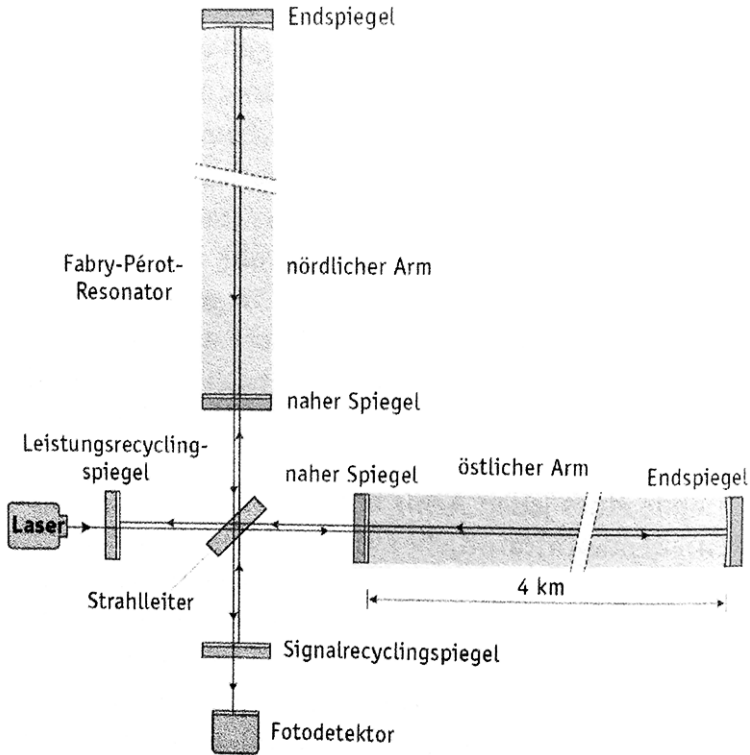


Abb. 5: Schematisierte Funktionsweise des LIGO mit $300 \times 4 \text{ km} = 1200 \text{ km}$

Zur möglichen Überprüfung und Festigung von allfälligen Resultaten hat man in den USA tatsächlich zwei LIGOs gebaut, eines in Hanford und eines in Livingston, 3000 km weit voneinander entfernt.

Am 14. September 2015 war es dann soweit: Abbildung 6 zeigt eine zweifach verblüffende Übereinstimmung; denn zum einen waren die registrierten Daten in Hanford und Livingston übereinstimmend, und zweitens entsprach das geometrische Messergebnis sehr gut dem einer Rechnung, die von zwei Schwarzen Löchern mit 36 bzw. 29 Sonnenmassen ausgeht [14]!

Zum Schluss ein wenig Poesie & Prosa in der Sprache der Geometrie

Manch einem Mathematiker, Physiker oder Geometer kommen die Einstein'schen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie vor wie

ein Gedicht. Einstein hat sie in der Sprache der Mathematik geschrieben. Aber die beste Übersetzung ins Englische stammt vom brillanten amerikanischen Physiker John Archibald Wheeler, Zitat:

„Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve“ [15]

Und dabei wissen wir gar nicht absolut, welche der Geometrien des Raumes nun diejenige ist, die das von uns durchmessene Geschehen maßgerecht beschreibt. Ist es die Euklidische Geometrie oder die sogenannte hyperbolische Geometrie mit der in der Allgemeinen Relativitätstheorie gearbeitet wird, oder gar eine andere? Wir stehen damit mitten in der Frage nach den Fundamenten der Geometrie, der Frage nach den Axiomen. Hermann Weyl bemerkte dazu, Zitat:

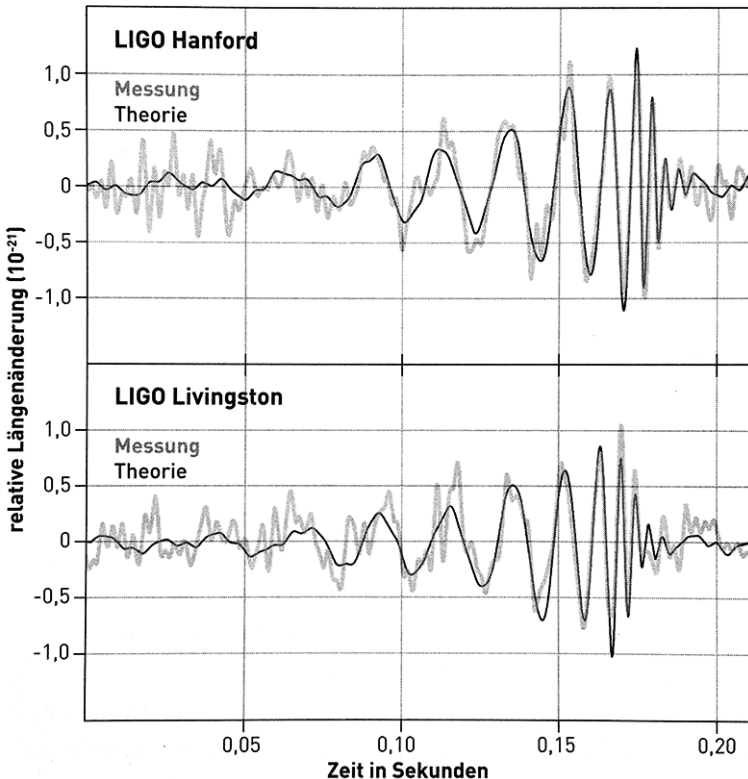


Abb. 6: Ergebnisse des LIGO in Hanford & Livingston am 14. September 2015

„The constructions of the mathematical mind are at the same time free and necessary. The individual mathematician feels free to define his notions and to set up his axioms as he pleases. But the question is, will he get his fellow mathematicians interested in the constructs of his imagination? We can not help feeling that certain mathematical structures which have evolved through combined efforts of the mathematical community bear the stamp of a necessity not affected by the accidents of their historical birth.“ [16, S. 253]

Hermann Weyl hebt damit die Frage nach der (Aus-)Wahl von Axiomen auf die Ebene (mathematischer) Intuition.

Und was die Messungen beziehungsweise die Experimente betrifft, kann man das Diskussions-Niveau noch erheblich anheben wenn man die Frage nach der (geometrischen) Natur der Messapparate selbst aufwirft. So stellt sich beispielsweise die Frage, wie wir im Apparat Linien auffassen: geradlinig oder gekrümmt? Oder als zweites Beispiel die Frage, ob und allenfalls wie *Raum* in kosmischen Dimensionen mit unserem vergleichbar ist? Zu diesem umfassend angesprochenen Diskurs meinte Poincaré, Zitat:

*„If geometry were an experimental science, it would not be an exact science. It would be subjected to continual revision... **The geometrical axioms are therefore neither synthetic a priori intuitions nor experimental facts. They are conventions.** Our choice among all possible conventions is guided by experimental facts; but it remains free, and is only limited by the necessity of avoiding every contradiction, and thus it is that postulates may remain rigorously true even the experimental laws which have determined their adoption are only approximate. In other words, **the axioms of geometry** (I do not speak of those of arithmetics) **are only definitions in disguise.** What then are we to think of the question: *Is Euclidean Geometry true?* It has no meaning. We might as well ask if the metric system is true and if the old weights and measures are false; if Cartesian coordinates are true and polar coordinates false. **One geometry cannot be more true than another; it can only be more convenient.**“* [16, S. 250]

Ich schließe mit der Bemerkung, dass es dazu die zwei Meinungs-Lager gibt: zur Haltung Poincarés stehen Kapazitäten wie Riemann, Clifford und Einstein, und dagegen stehen zum Beispiel Autoritäten wie Whitehead, Russell, Newton oder Helmholtz.

Literatur

- [1] Marvon, J.G. (1974). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries – Development and History*, W.H. Freeman and Company Publishing House, San Francisco, S. 249.

- [2] Scriba, C.J. et al. (2001). 5000 Jahre Geometrie – Geschichte, Kulturen, Menschen, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, S. 396.
- [3] Reichhardt, H. (1985). Gauß und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie, Teubner-Archiv zur Mathematik, Band 4, Leipzig.
- [4] Scriba, C.J. et al. (2001). 5000 Jahre Geometrie – Geschichte, Kulturen, Menschen, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, S. 387.
- [5] Scriba, C.J. et al. (2001). 5000 Jahre Geometrie – Geschichte, Kulturen, Menschen, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, S. 390.
- [6] Scriba, C.J. et al. (2001). 5000 Jahre Geometrie – Geschichte, Kulturen, Menschen, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, S. 395.
- [7] Scriba, C.J. et al. (2001). 5000 Jahre Geometrie – Geschichte, Kulturen, Menschen, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, S. 399.
- [8] Vaas R. (2016). Jenseits von Einsteins Universum – Von der Relativitätstheorie zur Quantengravitation, Kosmos Verlag, Stuttgart, S. 285, Kosmos-Verlag, Abdruck mit ausdrücklicher Genehmigung durch den Kosmos-Verlag.
- [9] Vaas R. (2016). Jenseits von Einsteins Universum – Von der Relativitätstheorie zur Quantengravitation, Kosmos Verlag, Stuttgart, S. 286.
- [10] Vaas R. (2016). Jenseits von Einsteins Universum – Von der Relativitätstheorie zur Quantengravitation, Kosmos Verlag, Stuttgart, S. 292, Abdruck mit ausdrücklicher Genehmigung durch den Kosmos-Verlag.
- [11] Vaas R. (2016). Jenseits von Einsteins Universum – Von der Relativitätstheorie zur Quantengravitation, Kosmos Verlag, Stuttgart, S. 278, Abdruck mit ausdrücklicher Genehmigung durch den Kosmos-Verlag.
- [12] Schilling G. (2017). Einsteins Ahnung – Das Rennen um den Nachweis der Gravitationswellen, Piper, München, S. 156, Abdruck als (Belegs-)Bildzitat, mit ausdrücklicher Genehmigung durch den Piper-Verlag.
- [13] Schilling G. (2017). Einsteins Ahnung – Das Rennen um den Nachweis der Gravitationswellen, Piper, München, S. 164, Abdruck als (Belegs-)Bildzitat, mit ausdrücklicher Genehmigung durch den Piper-Verlag.
- [14] Schilling G. (2017). Einsteins Ahnung – Das Rennen um den Nachweis der Gravitationswellen, Piper, München, S. 253, Abdruck als (Belegs-)Bildzitat, mit ausdrücklicher Genehmigung durch den Piper-Verlag.
- [15] Schilling G. (2017). Einsteins Ahnung – Das Rennen um den Nachweis der Gravitationswellen, Piper, München, S. 40.
- [16] Marvon, J.G. (1974). Euclidean and Non-Euclidean Geometries – Development and History, W.H. Freeman and Company Publishing House, San Francisco.

Autorenverzeichnis

Stephanie Gleich
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg
Regensburger Str. 160
90475 Nürnberg
stephanie.gleich@fau.de

Dr. Edmond Jurczek
Kantonsschule Zug
Lüssiweg 24
Postfach 7363
CH-6302 Zug
Schweiz
edmond.jurczek@art-tech.ch

Stefan-Harald Kaufmann
Qualitäts- und Unterstützungsagentur –
Landesinstitut für Schule NRW,
Arbeitsbereich 5: Unterrichts-
entwicklung der allgemeinbildenden
Schulen – Standardüberprüfung
(Zentrale Prüfungen)
Paradieser Weg 64
59494 Soest
stefan.kaufmann@qua-lis.nrw.de

Dr. Andreas Kirsche
Universität Erfurt
Erziehungswissenschaftliche Fakultät
Mathematikdidaktik
Nordhäuser Straße 63
99089 Erfurt
andreas.kirsche@uni-erfurt.de

Herausgeber

Prof. Dr. Andreas Filler
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
D-10099 Berlin
filler@math.hu-berlin.de

Hartmut Müller-Sommer
Kringelkamp 28
49377 Vechta
mueller-sommer@t-online.de

Prof. Dr. Heinz Schumann
Pädagogische Hochschule Weingarten
Fak. II, Mathematik
Kirchplatz 2
88520 Weingarten
eMail: schumann@ph-weingarten.de

Prof. Dr. K. Volkert
Didaktik und Geschichte der
Mathematik
Universität Wuppertal
Gaußstr. 20, Raum F 12.06
D-42119 Wuppertal
klaus.volkert@math.uni-wuppertal.de

Dr. Hans Walser
Gerlikonerstr. 29
8500 Frauenfeld
Schweiz
hwalsen@bluewin.ch
www.walser-h-m.ch/hans/

Prof. Dr. Anselm Lambert
Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Lehrstuhl für Mathematik und ihre
Didaktik
Postfach 151150
66041 Saarbrücken
lambert@math.uni-sb.de

Vorträge

auf der 35. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2018 in Saarbrücken

Der vorliegende Tagungsband enthält Beiträge der Herbsttagung 2018 des Arbeitskreises Geometrie in der GDM, die unter dem übergeordneten Thema Geometriedidaktik zwischen Geometrie und Didaktik stand. Dementsprechend umfassen die Beiträge ein breites Themenspektrum von im engeren Sinne didaktischen Themen über für den Geometrieunterricht oder die Begabtenförderung interessante fachlich orientierte Abhandlungen bis hin zu physikalischen Bezügen sowie die Lehre von Geometrie betreffenden historischen Betrachtungen.



ISBN 978-3-88120-614-3