Neue Zugänge zum Winkelbegriff

Tagungsbeitrag zum AK Geometrie – Saarbrücken 2015

Heiko Etzold

Universität Potsdam, 31. August 2015

Dies ist zunächst nur eine Entwurfsfassung. Einige Gedankengänge sind noch nicht zu Ende gedacht, andere noch nicht sauber belegt. Ich denke aber, dass zunächst einmal klar wird, in welche Richtung mein Tagungsbeitrag gehen soll.

1 Diversität des Winkelbegriffs

Wie kaum ein anderer geometrischer Begriff zeugt der Winkelbegriff von einer enormen Vielfältigkeit hinsichtlich der mathematischen Beschreibungsmöglichkeiten und seiner Anwendungskontexte. So lässt sich der Umlauf einer Wasseruhr genauso mit einem Winkel beschreiben wie das Sichtfeld eines Lebewesen – haben doch beide Situationen scheinbar nichts miteinander zu tun. Und aus mathematischer Perspektive ist das Sichtfeld eine Punktmenge, während die Umläufe einer Wasseruhr eher einen algebraischen Charakter haben.

Dieser Aspektreichtum des Winkelbegriffs spiegelt sich auch in Schulbüchern wieder, wobei es nicht selten zu einer Vermengung von Winkelsituationen und davon abweichender mathematischer Beschreibungsmöglichkeiten kommt (Dohrmann und Kuzle 2015).

Aus der deutschsprachigen didaktischen Literatur möchte ich drei Beispiele anbringen, in denen der Aspektreichtum des Winkelbegriffs diskutiert wurde:

Freudenthal (1973) formuliert zunächst vier Winkelbegriffe, die sich ergeben, je nachdem, ob man ein geordnetes oder ungeordnetes Geraden- oder Halbgeradenpaar betrachtet. Für den Mathematikunterricht von besonderer Bedeutung setzt er neben die beiden Winkelbegriffe, die sich mit dem Halbgeradenpaar ergeben (er nennt diese den »elementargeometrischen« sowie den »goniometrischen« Winkelbegriff), noch den »analytischen«, welcher als Umlaufzähler dient. Dabei verdeutlicht er die mathematischen Unterschiede der drei Winkelbegriffe und fordert, diese gleichwertig und gleichzeitig im Unterricht einzuführen.

Strehl (1983) formuliert drei anschauliche Grundvorstellungen zu Winkeln, die er mathematisch als Strahlenpaar, als Strahlenpaar mit Winkelfeld und als geordnetes Strahlenpaar mit Winkelfeld aufeinander aufbauend beschreibt.

Krainer (1989) kritisiert Strehls Vorgehen mit den Worten, dass eine Erweiterung der mathematischen Definitionen nicht zu einem tieferen Begriffsverständnis führen würde. Dagegen spricht er von vier Winkelvorstellungen: Winkel als geknickte Gerade, als von zwei Schenkeln (mit gemeinsamen Anfangspunkt) begrenzten Ebenenteil, als Ebenenteil, dessen Entstehung durch die Drehung eines Schenkels beschrieben werden kann, sowie als Umlaufwinkel.

Gemein ist all diesen Überlegungen, dass verschiedenste Winkelsituationen bestmöglich mathematisch beschrieben werden sollen, wobei dies stets zu Schwierigkeiten führt – entweder, weil innermathematisch Komplikationen auftreten[1], oder weil eine mathematische Beschreibung eines Winkel nicht auf eine andere Winkelsituation anwendbar ist[2]. Eine mathematische Gemeinsamkeit aller Winkelsituationen scheint also zu existieren, jedoch nicht ausreichend zu sein, um damit jede Winkelsituation vollumfänglich zu beschreiben.

Demnach fordern auch die genannten Autoren, die Vielfältigkeit des Winkelbegriffs im Mathematikunterricht zu verdeutlichen. Ich schließe daraus, den Winkelbegriff aus zwei Perspektiven betrachten zu können: Einerseits ist eine *ganzheitliche Sichtweise* notwendig: Verschiedenste Winkelsituationen müssen als solche erfasst und unter dem Begriff des Winkels vereinigt werden können. Damit könnte der Winkelbegriff als *Vorstellungsbegriff* aufgefasst werden.

Andererseits benötigt es eine *übereinstimmende Sichtweise*: Die Gemeinsamkeiten all jener Situationen müssen erkannt werden, denn nur so ist auch ein Vergleich verschiedener Situationen möglich. Die Gemeinsamkeiten können dabei eine einzelne Situation nicht vollständig beschreiben, sondern stellen vielmehr die Schnittmenge aller Winkelsituationen darstellen. Hier könnte der Winkelbegriff als *Stoffelement*[3] aufgefasst werden.

Für ein vollständiges Winkelverständnis benötigt es sowohl die ganzheitliche als auch die übereinstimmende Sichtweise; auch glaube ich, dass diese sich gegenseitig beeinflussen: Nur wenn man verschiedene Winkelsituationen miteinander vergleichen kann, ist man auch in der Lage, all diese als Winkel aufzufassen. Eine Unterstützung in diesem Weg sehe ich in dem Abstraktionsmodell von Mitchelmore und White, das die Entwicklung des Winkelverständnisses bei Kindern beschreibt.

2 Abstraktionsprozess nach Mitchelmore/White

Mitchelmore und White (1998) gehen davon aus, dass sich der Winkelbegriff in drei Stufen entwickelt.

1. situative Winkelbegriffe
2. kontextuelle Winkelbegriffe
3. abstrakte Winkelbegriffe

[1] So stellt z. B. Freudenthal (1973) dar, wie schwierig es bei einem geordneten Strahlenpaar in der orientierten Ebene ist, die Spiegelung eines Winkels mathematisch korrekt zu fassen.

[2] Wie beispielsweise eine Punktmenge des Winkelfeldes ungeeignet ist, um Umläufe zu beschreiben.

[3] Diese Bezeichnung schlug in dem Zusammenhang Axel Brückner vor.

2.1 Situative Winkelbegriffe

Situative Winkelbegriffe, die im Vorschulalter ausgeprägt werden, beschreiben mentale Modelle, die es Kindern ermöglichen, gleichartige Situationen als solche zu erfassen. So können beispielweise ein echter Kran und ein Spielzeugkran als identische Winkelsituationen aufgefasst werden (wobei es hier natürlich den Begriff des Winkels nicht benötigt). Dagegen ist ein Ventilator eine komplett andere Situation und kann nicht mit dem Kran in Verbindung gebracht werden.

2.2 Kontextuelle Winkelbegriffe

Die kontextuellen Winkelbegriffe bilden sich im Grundschulalter aus. Nun sind die Schüler in der Lage, geometrische Gemeinsamkeiten verschiedener Situationen zu erkennen und diese zu einem Kontext zusammenzufassen. So ist die Bewegung eines Kranarmes vergleichbar mit der eines Ventilators und beide Situationen könnten unter dem Kontext der Umdrehung aufgefasst werden.

Die Autoren unterscheiden hier sieben Kontexte (wobei jeder davon noch einmal zwei Abstufungen erhält):

- Biegung (Knick eines Objektes oder Pfades)
- zwei klar erkennbare lineare Stücke (gemeinsamer Beginn oder echter Schnitt)
- Steigung gegenüber der Horizontalen oder Vertikalen (linear oder flächig)
- Abweichung einer Linie zu einer (unsichtbaren) Linie (Objekt und Pfad)
- Öffnung/Feld, begrenzt von zwei Strahlen (starre und fluide Objekte)
- starre Ecke (Flächen oder Kanten)
- Umdrehungen (unbeschränkt und beschränkt)

Ebenfalls möglich sind in dieser Abstraktionsstufe theoretische Überlegungen zu Grenzfällen. So kann beispielsweise hypothetisch über eine minimale und maximale Straßenneigung gegenüber der Horizontalen nachgedacht werden, wobei diese in realen Situationen entweder nicht relevant (bei der minimalen hat man ja keine »Neigung« mehr) oder nicht realisierbar sind (bei der maximalen Straßenneigung schafft es kein handelsübliches Auto mehr, diese entlang zu fahren).

2.3 Abstrakte Winkelbegriffe

Abstrakte Winkelbegriffe sind dann ausgebildet, wenn verschiedene Kontexte miteinander verglichen und begründet voneinander abgegrenzt werden können. Die Schüler können nun die Gemeinsamkeiten und Unterschiede verschiedener Kontexte mithilfe mathematischer Objekte und Relationen beschreiben.

Auch hier wird sich nicht auf einen abstrakten Winkelbegriff festgelegt. Es ist durchaus möglich, dass nur einige wenige Kontexte miteinander verglichen werden können – dies führt dennoch zu einem abstrakten Winkelbegriff. Dabei betonen die Autoren, dass ein Vergleich verschiedener Kontexte Schülern insbesondere dann schwer fällt, wenn die Anzahl der sichtbaren Schenkel nicht übereinstimmt.

Mitchelmore und White (1998, S. 5) formulieren jedoch einen wünschenswerten *üblichen allgemeinen Winkelbegriff*[4]: »two lines meeting at a point with an angular relation between them«.

In allen drei Stufen sprechen die Autoren auch noch von situativen/kontextuellen/abstrakten Winkelmodellen sowie situativem/kontextuellem/abstraktem Winkelwissen, was ich hier aber nicht weiter ausführen möchte. Das Abstraktionsmodell ist letztlich eine Schlussfolgerung aus theoretischen Überlegungen sowie mehreren empirischen Studien.

2.4 Schlussfolgerungen

Aus den Untersuchungen ziehen die Autoren Schlussfolgerungen für die Behandlung von Winkeln im Unterricht:

- Unterschied zwischen kontextuellen und abstrakten Winkelmodellen verdeutlichen
- Erkennen von Gemeinsamkeiten unterschiedlicher Kontexte unterstützen
  - Schwierigkeiten v.a. dann, wenn Anzahl der sichtbaren Schenkel variiert.
    (auch beim Messen relevant)
  - Gemeinsamkeiten müssen mittels mathematischer Objekte/Relationen/Operationen beschrieben werden
  - Ziel: Entwicklung eines Beziehungsgefüges zwischen den Kontexten
  - ausformulierte Winkel-Definition ist erst hilfreich, wenn Gemeinsamkeiten erkannt werden können

Hier sehe ich einen Bezug zu den oben erläuterten Überlegungen der ganzheitlichen und übereinstimmenden Sichtweise der Winkelbehandlung. So stellt sich einerseits die Frage, wie der Aufbau eines Beziehungsgefüges zwischen den Kontexten unterstützt werden kann um damit die ganzheitliche Sichtweise zu ermöglichen.[5] Andererseits frage ich mich aber insbesondere

[4]Im Originaltext wird er als »standard general angle concept« bezeichnet.

[5]Dies werde ich hier nicht weiter erörtern.

auch, wie ein abstrakter Winkelbegriff aussehen kann, der die übereinstimmende Sichtweise und damit das Erkennen der Gemeinsamkeiten ermöglicht.

3 Winkel aus der Sicht von Informationen – ein Gedankenansatz

Die von den Autoren vorgeschlagene Formulierung »two lines meeting at a point with an angular relation between them« halte ich dann für ausreichend, wenn vollständig verstanden wurde, was ein Winkel ist (also im Abstraktionsmodell die dritte Stufe erreicht wurde). Sind die Abstraktionsstufen zuvor durchschritten, so ist klar, wie mit den in der Formulierung enthaltenen Begriffen umzugehen ist.

Allerdings sehe ich dennoch das Problem, dass es sich nicht um eine abstrakte mathematische Definition handelt. Diese sollte doch möglich sein, wenn man von der Schnittmenge der verschiedenen Winkelkontexte und damit vom Winkel als Stoffelement spricht.

Eine Forderung an die Definition wäre, dass sie einen Vergleich verschiedener Winkelkontexte ermöglicht und damit die mathematische Schnittmenge all dieser Situationen beschreibt. Was haben nun alle Situationen gemeinsam? Von einem gewissen Scheitelpunkt ausgehend gibt es eine Vorzugsrichtung sowie davon eine Abweichung, wodurch eine zweite Richtung bestimmt wird. Könnte man die Abweichung mathematisch beschreiben, so würde sich die zweite Richtung ergeben, also muss letztere nicht Bestandteil der Definition sein. Die Abweichung selbst ist aber nichts anderes als ein Winkelmaß – ob in Grad, Bogenmaß oder als Anteil voller Winkel (bzw. voller Umdrehungen) gemessen.

Angeregt durch Ulrich Kortenkamp ist hier vielleicht auch folgende Frage hilfreich: »Welche Informationen bräuchte ein Computer, um mit Winkeln operieren zu können?«

Ich möchte dazu folgenden Vorschlag liefern:

> *Ein Winkel lässt sich beschreiben anhand eines Strahls und eines Größenmaßes.*

Der Strahl beschreibt den Scheitelpunkt mit der Vorzugsrichtung (also den ersten Schenkel) und das Größenmaß die Abweichung davon. Damit ist zwar eine konkrete Winkelsituation noch nicht vollständig beschrieben – je nach Anwendungskontext benötigt es hier weitere Details – allerdings ist damit der mathematische Kern gefunden. Diesen aus Informationen bestehenden Winkelbegriff möchte ich zur sprachlichen Vereinfachung nun *informatorischen Winkelbegriff* nennen.

Das informatorische Vorgehen ist vergleichbar mit dem algebraischen Vektorbegriff nach Malle (2008). Dabei wird ein Vektor beschrieben durch ein Zahlentupel. Anschließend folgt daraus eine geometrische Deutung als Punkt oder Pfeil, was auch zu unterschiedlichen geometrischen Deutungen von Rechenoperationen mit algebraischen Vektoren führt.

Genauso kann anhand eines Strahls und eines Größenmaßes nun – je nach gewünschter Winkelsituation – ein Winkel geometrisch interpretiert bzw. eine »Zeichenvorschrift« aufgestellt werden.

Kritisch sehe ich hierbei noch die Frage, ob man von Drehungen sprechen kann, wenn der Winkelbegriff noch nicht formal formuliert ist. Andererseits verwendet aber eine genetische Winkeldefinition auch die Drehung eines Schenkels und definiert damit den Winkel.

Weiterhin ist es sinnvoll, sich auf die Konvention festzulegen, dass ein positives Größenmaß eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn bewirkt (so wie beim algebraischen Vektorbegriff eine positive x-Koordinate eine Bewegung nach rechts beschreibt, wenn ein Koordinatensystem in »üblicher« Lage vorliegt).

3.1 Operationen mit Winkeln

Die Operationen, die mit Winkeln üblicherweise durchgeführt werden sollen, können ebenfalls über den informatorischen Winkelbegriff beschrieben werden.

Operation	**Strahl-Manipulation**	**Größenmaß-Manipulation**
verschieben	verschieben	beibehalten
drehen	drehen	beibehalten
spiegeln	spiegeln	negative Zahl
messen	egal	Zahl angeben
abtragen	neuen Strahl nehmen	beibehalten
vergleichen	egal	Zahlen vergleichen
addieren	1. Strahl beibehalten	Zahlen addieren

Sicherlich gibt es dabei noch einige Detail zu beachten, insbesondere beim Addieren von Winkeln oder der Frage, in welchen Situationen nur der Betrag des Größenmaßes interessant ist und wann das Vorzeichen eine entscheidende Rolle spielt. Dennoch denke ich, hier eine Variante gefunden zu haben, die formal gesehen durchführbar und damit auch digital, beispielsweise in dynamische Geometriesoftware, implementierbar wäre.

Fasst man beispielsweise alle Operationen zusammen, bei der das Größenmaß (zumindest vom Betrag) beibehalten wird, so sind die gerade die Kongruenzabbildungen. Operationen, bei denen die konkrete Lage des Strahls keine Rolle spielt, sind dann eher die an der Maßzahl orientierten.

4 Zusammenfassung

Zusammenfassend halte ich den Abstraktionsweg von Mitchelmore und White (1998) als einen geeigneten Weg, Winkel im Mathematikunterricht betrachten. So dienen Winkel-Phänomene als Grundlage, um sie mit mathematischen Objekten und Relationen zu beschreiben und daraus Unterschiede und Gemeinsamkeiten verschiedener Situationen (und Kontexte) herauszuarbeiten. So kann ein ein übergreifendes Winkelverständnis schrittweise entwickelt werden.

Der Vergleich verschiedener Kontexte, der sinnvollerweise aus mathematischer Sicht geschehen muss, sollte durch eine geeignete Lernumgebung unterstützt werden.[6] Dabei kann mehr und mehr der mathematische Kern *mehrerer* oder dann auch *aller* Kontexte herausgearbeitet werden (was zum informatorischen Winkelbegriff führen kann), so dass zu dem übergreifenden auch ein übereinstimmendes Winkelverständnis entwickelt wird.

Literatur

Dohrmann, C. und A. Kuzle (2015): *Winkel in der Sekundarstufe I – Schülervorstellungen erforschen.* In: Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen, S. 29–42.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* 2. Hans Freudenthal.

Krainer, K. (1989): *Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs.* Diss. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.

Malle, G. (2008): *Ein didaktisch orientiertes Vektorkonzept.* In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 40, S. 80–90.

Mitchelmore, M. und P. White (1998): *Development of Angle Concepts: A Framework for Research.* In: Mathematics Education Research Journal 10.3, S. 4–27.

Strehl, R. (1983): *Anschauliche Vorstellung und mathematische Theorie beim Winkelbegriff.* In: mathematica didactica 6.

[6] Dies soll Bestandteil meiner Dissertation sein, nicht jedoch dieses Artikels.